52
I-11812

19

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul IV (VIII)

FASC. 1 – 2

1958

F
1812

897/19
6dr

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1948 ADOMÁNY

Tomul IV (VIII)

FASC. 1 – 2

1958

1833

4186

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. ATANASIU D., conf. GOLGOȚIU TIBERIU, prof. MANGERON D., prof. MATEI ILIE, membru corespondent al Academiei R. P. R.

Redactor responsabil: prof. SIMIONESCU CRISTOFOR, membru corespondent al Academiei R. P. R.

Secretar: lector ROSMAN HUGO

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
TOMUL IV (VIII), fasc. 1—2 1958

SUMAR

	Pag.
EDITORIALE	XV
AL. CLIMESCU, Asupra unei teoreme din teoria structurilor . .	1
K. V. ZADIRAKA, Construirea marginilor superioare şi inferioare ale soluţiilor unor probleme pe contur	3
AL. CLIMESCU, Criterii de existenţă pentru limita unui şir cu termeni reali	17
I. D. CERKASOV, Metoda diviziunii în teoria proceselor lui Markov .	23
V. BOLTIANSKI, Echicomponenţa poligoanelor plane . . .	33
FROIM MARCUS, Asupra suprafeţelor avînd liniile asimptotice ale unui sistem, centro-afin echivalente	39
ŞTEFANIA RUSCIOR, Asupra unei corespondenţe prin incidenţă a două varietăţi riglate din S_4	45
VIOREL MURGESCU, Observaţii asupra spaţiilor cu torsiune, care admit o metrică	49
D. MANGERON, Asupra interdependenţei între soluţiile unor probleme pe contur polidimensionale	61
D. MANGERON, Asupra rezolvării unor clase de probleme pe contur traduse în ecuaţii integrale	65
V. I. ZUBOV, Asupra condiţiilor de stabilitate într-un interval de timp finit şi asupra determinării lungimii intervalului . .	69
J. RAMAKANTH, Torsiunea finită a cilindrilor alotropici şi compuşi (II)	75
M. Z. LITVIN-SEDOI, Unele relaţii geometrice relative la sisteme mecanice cu mai multe grade de libertate	85
N. IRIMICIUC, Asupra formei ecuaţiilor lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme de puncte cu mase variabile . . .	99
ALFRED BRAIER, Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor unei particule materiale într-un cîmp de forţe	103
N. IRIMICIUC, Asupra mişcării relative a solidului cu masă variabilă .	113
I. M. LOMSADZE şi B. I. MAXIMOV, Ecuaţiile greenianilor şi a funcţionalelor de vid în teoria interacţiunii între un cîmp de spinori şi un cîmp pseudoscalar real	121
F. G. BASS şi S. I. BRAUDE, Asupra reflexiei semnalelor radar de către soare	127

Pag.

MIHAI ȘCHIOPU, VIORICA ONU și MARIA PĂSTRĂVANU, O metodă de calibrare a termometrelor cu mercur . . . 135

A. D. MANASEVICI, Metode de determinare a calităților fizico-mecanice a rocilor. 139

ADOLF HAIMOVICI și ION CURIEVICI, Contribuții la calculul reactorilor chimici 145

Z. L. HISAMOVA și GHILM KAMAI, Asupra preparării și proprietăților esterului glicolic al acidului arsenios 153

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU și MARIA GRIGORAȘ, Polimeri analogi. I. Uretani polivinilici. 159

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU și MARIA GRIGORAȘ, Polimeri analogi. II. Derivați ureici polivinilici . . . 167

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU și MARIA GRIGORAȘ, Polimeri analogi. III. Polimeri vinilici colorați . . . 171

C. BRANIȘTE, OREST NICHITA și SILVIA ȘERBAN, Îmbogățirea baritinei indigene prin flotație 179

C. CALISTRU, RADU VASILIU și CORNELIA LEONTE, Cinetica descompunerii chimice a amalgamului de sodiu . . . 187

GERMANO CENTOLA, Interacțiunea dintre coloranți și macromolecule. Influența coloranților asupra vitezei de rafinare a pastelor . 195

V. DIACONESCU, EMANUEL POPPEL, GH. NICHITUȘ, ERNA WEISS, ELENA CALISTRU, DOREL FELDMAN, C. MATASE, N. ASANDEI, GH. ROSMARIN și CRISTOFOR SIMIONESCU, Cercetări în domeniul celulozelor de mare randament . . 212

CRISTOFOR SIMIONESCU și EMANUEL POPPEL, Asupra unor metode de determinare a gradului de încleiere a hîrtiei . . 227

DOREL FELDMAN, Cercetări asupra prehidrolizei stufului (II) . . 237

MIȘILIM GRINDEA, LEONIA STOICESCU - CRIVETZ și SAVEL IFRIM, Contribuții la studiul cromării lînii . . . 247

EMIL LUCA, V. PETRESCU și GH. ILIESCU, Considerații asupra eficacității ansamblului filtru-ecran fluorescent, utilizat în tehnica razelor X 253

I. BEJAN, L. SEBASTIAN și N. V. BOȚAN, Considerațiuni teoretice asupra funcționării la putere constantă a unui motor asincron cuplat în cascadă cu o comutatrice 261

GH ȘERBAN, I. FILIPIUC și V. CORLĂȚEANU, Stabilirea unui parametru de referință la mașina cu dublă alimentare și metoda de măsurare a acestuia 271

HUGO ROSMAN și ALFRED BRAIER, Randamentul transmisiei energiei electrice prin cuadripoli (VII) 283

EMIL LUCA, V. PETRESCU și N. REUS, Capacimetru de sensibilitate ridicată, utilizînd în măsurare cic'ul de relaxare . . 289

GÉRARD D'ALBON, DAN URSESCU și MARCEL GUTMAN, Un fenomen nou observat la contactul electric mercur-crom (în pătură subțire) 297

Pag.

GH. CIOBANU, Cinematica mişcărilor de rostogolire cu alunecare a sistemelor materiale 303

D. S. TAVHELIDZE, Determinarea poziţiilor organelor unui mecanism pentalater cu glisor 305

R. BOGDAN, CR. PELECUDI şi L. CALMACIUC, Studiul traductorilor mecanici de determinare a traiectoriilor mecanismelor plane în sisteme de coordonate carteziene sau polare . . . 315

D. MANGERON şi CORNELIU DRĂGAN, Aplicarea unei metode tensoriale la studiul cinematic al mecanismului bielă-manivelă spaţială 327

B. I. TURBIN, Noi metode de determinare experimentală a momentelor de inerţie ale organelor de maşini 339

OCTAVIAN MUNTEANU şi GH. TUDOR, Asupra mecanismelor fără legături pasive, în sensul lui Reşetov 349

TEODOR CÎMPAN, AURELIAN SIMIONESCU şi D. ANGHELACHE, Conductivitatea termică a nisipului, mortarelor şi cărămizilor în funcţie de umiditatea materialului 353

I. G. BERG şi M. S. IAGFAROV, O nouă metodă de determinare prin termografie a caracteristicelor termice şi a efectelor calorice 361

TEODOR CÎMPAN şi D. ANGHELACHE, O sondă termoelectrică pentru măsurarea temperaturilor de suprafaţă la pereţi şi alte corpuri 365

DAVID PERETZ, Parametrii termici ai uleiurilor de transformator . 371

GH. CAŞLER, CESAR BUDA, VICTOR BAUŞIC, AUREL RĂILEANU, GAVRIL BORZAŞ, AL. RENER şi DAN NICOLESCU, Determinarea parametrilor forţelor de aşchiere în procesul de strunjire longitudinală la oţelurile romîneşti, grupa OL STAS 500-49 377

VICTOR BAUŞIC, GH. CAŞLER, CESAR BUDA, AUREL RĂILEANU, GAVRIL BORZAŞ, AL. RENER şi DAN NICOLESCU, Determinarea parametrilor forţelor de aşchiere în procesul de strunjire longitudinală la oţelurile romîneşti standardizate OLC STAS 880-49 379

B. B. LAMPSI, Asupra capacităţii portante a grinzilor de oţel . . 381

N. PREDA, VICTOR BAUŞIC, D. HORBANIUC şi M. MARINESCU, Studiul fotoelasticimetric al stării de tensiuni la grinzi simplu rezemate cu înălţimi liniar variabile (cu două pante) . . 395

ANTON ŞESAN, Generalizarea metodei distribuirii momentelor, în calculul plastic, la cadre oarecare 401

ANTON ŞESAN, Relaţii statice generale pentru studiul încovoierii . 407

ANATOLIE MIHUL şi CHIMON CAPATU, Contribuţiuni la alcătuirea elementelor precomprimate din beton armat prin folosirea pretensionării de montaj 415

EMANOIL MUNTEANU-ADĂSCĂLIŢEI, Consideraţiuni asupra eficienţei grinzilor de oţel cu inimă plină 427

GH. URSESCU şi FLORIN CONSTANTINESCU, Despre costul infrastructurii la podurile metalice cu deschideri economice . . 441

Pag.

BENIAMIN WEINŞTEIN, O metodă nouă de proiectare a serpentinelor 445

IOSIF IONESCU-MUSCEL, V. HANGANU, I. VLAD, EMILIA VLAD şi SEMERAD RĂDULESCU, Fibrograful tip „L" . . 453

NOTE

A. N. GLIVICI, Din istoria societăţii romîne de matematici. Legăturile dintre matematicienii romîni, ruşi şi sovietici . . . 460

VIAŢA ŞTIINŢIFICĂ INTERNAŢIONALĂ

D. MANGERON şi RADU BOGDAN, A doua conferinţă unională consacrată problemelor fundamentale de teoria mecanismelor şi a maşinilor (Moscova, 24—28 martie 1958). . . . 473

LISTA DIZERTAŢIILOR DE CANDIDAT ÎN ŞTIINŢE TEHNICE SUSŢINUTE LA INSTITUTUL POLITEHNIC DIN IAŞI 479

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том IV (VIII), выпуск 1—2 1958 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ОТ РЕДАКЦИИ.	XV
А. КЛИМЕСКУ, Об одной теореме теории структур . . .	1
К. В. ЗАДИРАКА, Построение верхних и нижних оценок для собственных значений краевых задач	3
А. КЛИМЕСКУ, Критерии существования для предела последовательности с действительными членами	17
И. Д. ЧЕРКАСОВ, Метод разделения в теории многомерных марковских процессов	23
В. БОЛТЯНСКИЙ, Равносоставленность плоских многоугольников .	33
Ф. МАРКУС, О поверхностях с асимптотическими кривыми системы центро-аффинно эквивалентными	39
ШТЕФАНИЯ РУСЧОР, О соответствии по инцидентности двух линейчатых многообразий в пространствах S_4. . . .	45
В. МУРДЖЕСКУ, Замечания о пространствах с кручением, допускающих метрику	49
Д. МАНЖЕРОН, О соотношениях между решениями некоторых многомерных граничных задач	61
Д. МАНЖЕРОН, О решении некоторого класса граничных задач приводимых к интегральным уравнениям	65
В. И. ЗУБОВ, Условие устойчивости на конечном интервале времени. Определение длины интервала	69
ДЖ. РАМАКАНТ, Конечное кручение аллотропных и анизотропных цилиндров (II)	75
М. З. ЛИТВИН-СЕДОЙ, Некоторые геометрические соотношения в механических системах со многими степенями свободы . .	85
Н. ИРИМИЧУК, О форме уравнений Лагранжа второго рода для систем точек переменной массы	99
А. БРАЙЕР, Дифференциальные уравнения траекторий материальной частицы в поле сил	103
Н. ИРИМИЧУК, Об относительном движении твердого тела переменной массы	113
Ю. М. ЛОМСАДЗЕ и Б. И. МАКСИМОВ, Уравнения для гриниановв и вакуумного функционала в парной теории . . .	121

Стр.

Ф. Г. БАСС и С. Я. БРАУДЕ, К вопросу об отражении радиосигналов от солнца 127

М. ШКИОПУ, ВИОРИКА ОНУ и МАРИАНА ПЭСТРЭВАНУ, Метод калибрирования ртутных термометров 135

А. Д. МАНАСЕВИЧ, Методика определения физико-механических свойств горных пород 139

А. ХАЙМОВИЧ и И. КУРИЕВИЧ, К расчёту химических реакторов . 145

З. Л. ХИСАМОВА и Г. КАМАЙ, О получении и свойствах этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты. 153

ЕЛЕНА КОЧА, КРИСТИНЕТА МЭРКУЛЕСКУ и МАРИЯ ГРИГОРАШ, Аналогичные полимеры. I. Поливинильные уретаны . . 159

ЕЛЕНА КОЧА, КРИСТИНЕТА МЭРКУЛЕСКУ и МАРИЯ ГРИГОРАШ, Аналогичные полимеры. II. Производные поливинильные уреиды 167

ЕЛЕНА КОЧА, КРИСТИНЕТА МЭРКУЛЕСКУ и МАРИЯ ГРИГОРАШ, Аналогичные полимеры. III. Цветные винильные полимеры. 171

К. БРАНИШТЕ, О. НИКИТА и СИЛЬВИЯ ШЕРБАН, Флотационное обогащение местного барита 179

К. КАЛИСТРУ, РАДУ ВАСИЛИУ и КОРНЕЛИЯ ЛЕОНТЕ, Кинетика химического разложения натриевой амальгамы . . . 187

ДЖ. ЧЕНТОЛА, Взаимодействие между красителями и макромолекулами. Влияние красителей на скорость рафинирования паст . . 195

В. ДИАКОНЕСКУ, ЭМАНУЕЛ ПОППЕЛЬ, Г. НИКИТУШ, ЕРНА ВАЙС, ЕЛЕНА КАЛИСТРУ, Д. ФЕЛЬДМАН, К. МАТАСЕ, Г. РОЗМАРИН и КРИСТОФОР СИМИОНЕСКУ, Исследования в области получения целлюлозы высокого выхода . . 212

КРИСТОФОР СИМИОНЕСКУ, ЭМАНУЕЛ ПОППЕЛЬ, К вопросу о некоторых методах определения степени проклейки бумаги . 227

ДОРЕЛ ФЕЛЬДМАН, Изучение предварительного гидролиза тростника (II) 237

МИШИЛИМ ГРИНДЯ, ЛЕОНИЯ СТОЙЧЕСКУ-КРИВЕЦ и САВЕЛ ИФРИМ, Изучение хромирования шерсти . . . 247

ЭМИЛЬ ЛУКА, В. РЕТРЕСКУ и Г. ИЛИЕСКУ, Об эффективности группы фильтр-флуоресцирующий экран в технике Х-лучей . . 253

И. БЕЖАН, ЛЕОПОЛД СЕБАСТИАН и Н. В. БОЦАН, Теоретические соображения в связи с работой каскадного соединения асинхронного двигателя с одноякорным преобразователем при постоянной мощности 261

Г. ШЕРБАН, И. ФИЛИПЮК и В. КОРЛЭЦЯНУ, Определение параметра сравнения машины двойного питания и метод измерения этого параметра 271

ГУГО РОСМАН и АЛЬФРЕД БРАЙЕР, Кпд передачи электроэнергии четырехполюсниками (VII). 283

ЭМИЛЬ ЛУКА, В. ПЕТРЕСКУ и Н. РЕУС, Капациметр высокой чувствительности требующий в измерении релаксационный цикл . 289

ЖЕРАР Д'АЛЬБОН, ДАН УРСЕСКУ, МАРЧЕЛ ГУТМАН, Новое явление наблюдаемое при электрическом контакте ртуть-хром (в тонком слое). 297

Стр.

Г. ЧОБАНУ, Кинематика качения со скольжением матерьяльных систем 303

Д. С. ТАВХЕЛИДЗЕ, Нахождение положений звеньев пятизвенника с ползуном 305

Р. БОГДАН, КР. ПЕЛЕКУДИ и Л. КАЛМАЧУК, Исследование механических датчиков определяющих траектории плоских механизмов в декартовых или полярных координатных системах . 315

Д. МАНЖЕРОН и КОРНЕЛИУ ДРЭГАН, Применение нового тензорного метода к кинематическому исследованию кривошипно-шатунного пространственного механизма. 327

Б. И. ТУРБИН, Некоторые вопросы экспериментального определения моментов инерции деталей и узлов рабочих машин . . 339

ОКТАВЯН МУНТЯНУ и Г. ТУДОР, О конструировании механизмов без пассивных связей, в смысле Решетова 349

ТЕОДОР КЫМПАН, АУРЕЛЯН СИМИОНЕСКУ и Д. АНГЕЛАКИ, Теплопроводность песка, строительных растворов и кирпича в зависимости от их влажности 353

Л. Г. БЕРГ и М. Ш. ЯГФАРОВ, Новый метод определения термических характеристик и тепловых эффектов на основе термографии 361

ТЕОДОР КЫМПАН и Д. АНГЕЛАКИ, Термоэлектрический зонд для измерения поверхностных температур стен и других тел . 365

ДАВИД ПЕРЕЦ, Термические параметры трансформаторного масла . 371

Г. КАШЛЕР, ЦЕЗАРЬ БУДА, ВИКТОР БАУШИК, АУРЕЛ РЭИЛЯНУ, ГАВРИЛ БОРЗАШ, АЛ. РЕНЕР и ДАН НИКОЛЕСКУ, Определение технических характеристик сил резания в процессе токарной продольной обработки румынских сталей группы OL STAS 500—49 377

ВИКТОР БАУШИК, Г. КАШЛЕР, ЦЕЗАРЬ БУДА, АУРЕЛ РЭИЛЯНУ, ГАВРИЛ БОРЗАШ, АЛ. РЕНЕР и ДАН НИКОЛЕСКУ, Определение технических характеристик сил резания в процессе токарной продольной обработки румынских сталей группы OLC STAS 880—49 379

Б. Б. ЛАМПСИ, Несущая способность стальных балок . . . 381

Н. ПРЕДА, ВИКТОР БАУШИК, Д. ХОРБАНЮК и М. МАРИНЕСКУ, Исследование методом фотоупругости свободно опорной балки с переменной линейной высотой (с двумя уклонами) . . 395

АНТОН ШЕСАН, Обобщение метода расспределения пластических моментов для любых рам 401

АНТОН ШЕСАН, Общие статические соотношения в изучении изгиба . 407

АНАТОЛИЙ МИХУЛ и КИМОН КАПАТУ, Изготовление предварительно напряженных элементов из железобетона при использовании предварительно напряженной монтажной арматуры . . 415

ЭМАНОИЛ МУНТЯНУ-АДЭСКЭЛИЦЕЙ, Эффективность стальных балок со сплошной стенкой 427

Стр.

Г. УРСЕСКУ и ФЛОРИН КОНСТАНТИНЕСКУ, О стоимости инфраструктуры металлических мостов с экономными пролетами . 441

БЕНЬЯМИН ВАЙНШТЕЙН, Нозый метод проэктирования серпентин . 445

ИОСИФ ИОНЕСКУ-МУСЧЕЛ, В. ХАНГАНУ, И. ВЛАД, ЭМИЛИЯ ВЛАД и СЕМЕРАД РЭДУЛЕСКУ, Фиброграф типа „L“ . . 453

ЗАМЕТКИ

А. Н. ГЛИВИЧ, Из истории румынского математического общества. Связи между румынскими, русскими и советскими математиками 459

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Д. МАНЖЕРОН и РАДУ БОГДАН, II всесоюзное совещание по основным проблемами теории механизмов и машин (Москва, 24–28 марта 1958) г. 471

ПЕРЕЧЕНЬ КАНДИДАТСКИХ ДИССЕРТАЦИЙ ЗАЩИЩЕННЫХ В ЯССКОМ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ . . 479

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES

VOL. IV (VIII), fasc. 1—2 1958

CONTENTS

	Pag.
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENT	XV
AL. CLIMESCU, Sur un théorème de la théorie des treillis	1
K. V. ZADIRAKA, The constructions of upper and lower estimates for eigenvalues boundary problems	3
AL. CLIMESCU, Critères d'existence pour la limite d'une suite à termes réels	17
I. D. TCHERKASSOW, Division's method in the theory of Markov processes	23
W. BOLTJANSKI, Zerlegungsgleichheit ebener Polygone	33
FROIM MARCUS, Sur les surfaces dont les courbes asymptotiques d'un système sont centro-affine équivalentes	39
ŞTEFANIA RUSCIOR, Sur une correspondence par incidence entre deux variétés réglées, dans S_4	45
VIOREL MURGESCU, Observations sur les espaces à torsion qui admettent une métrique	49
D. MANGERON, Connections between solutions of some polydimensional boundary value problems	61
D. MANGERON, The solution of some eigenvalue problems transformed in a class of integral equations	65
W. I. ZUBOW, Über die Stabilitätsbedingungen in einer Endlichen Zeitstrecke und über die Bestimmung der Länge des Intervalls	69
J. RAMAKANTH, Finite torsion of aelotropic and composite cylinders (II)	75
M. Z. LITVINE-SEDOÏ, Quelques relations géométriques concernant les systèmes mécaniques à plusieurs degrés de liberté	85
N. IRIMICIUC, Sur la forme des équations de Lagrange pour des systèmes mécaniques de points, dont les masses sont variables	99
ALFRED BRAIER, L'équation différentielle des trajectoires décrites par un point matériel dans un champ de forces	103
N. IRIMICIUC, Sur le mouvement relatif du solide dont la masse est variable	113
I. M. LOMSADZE and B. I. MAXIMOW, Equations for the greenians and the vacuum functionals in the pair theory	121

Pag.

F. G. BASS and S. I. BRAUDE, On the reflection of radar signals from the sun 127

MIHAI ŞCHIOPU, VIORICA ONU und MARIANA PĂSTRĂVANU, Eine Kalibrierungsmethode der Quecksilberthermometer . 135

A.D. MANASSIÉVITCH, Méthodes de la détermination des qualités physico-mécaniques des minéraux 139

ADOLF HAIMOVICI et ION CURIEVICI, Contributions au calcul des réacteurs chimiques 145

Z. L. HISAMOWA und GILM KAMAI, Über die Darstellung und Eigenschaften von Glykolarsenigsäureester 153

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU et MARIA GRIGORAŞ, Polymères analogues. I. Uréthans polyvinyliques . . 159

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU et MARIA GRIGORAŞ, Polimères analogues. II. Dérivés uréiques polyvinyliques . 167

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU et MARIA GRIGORAŞ, Polymères analogues. III. Polymères vinyliques colorés . 171

C. BRANIŞTE, OREST NICHITA et SILVIA ŞERBAN, Enrichissement de la baritine indigène par flotation 179

C. CALISTRU, RADU VASILIU et CORNELIA LEONTE, La cinétique de la décomposition chimique de l'amalgame de natrium 187

GERMANO CENTOLA, Interactions colorants-macromolécules. Influence des colorants sur la vitesse du raffinages des pâtes . . 195

V. DIACONESCU, EMANUEL POPPEL, GH. NICHITUŞ, ERNA WEISS, ELENA CALISTRU, DOREL FELDMAN, C. MATASE, N. ASANDEI, GH. ROSMARIN und CRISTOFOR SIMIONESCU, Forschungen auf dem Gebiete der Erhaltung von Zellstoffen hoher Ausbeute 213

CRISTOFOR SIMIONESCU und EMANUEL POPPEL, Über einige Papierleimungsgradprüfmethoden 227

DOREL FELDMAN, Recherches sur la préhydrolyse du roseau (II) . 237

MIŞILIM GRINDEA, LEONIA STOICESCU-CRIVETZ et SAVEL IFRIM, Contributions à l'étude du chromage de la laine . 247

EMIL LUCA, V. PETRESCU et GH. ILIESCU, Considérations sur l'efficacité de l'ensamble filtre-écran fluorescent, utilisé dans la technique des rayons X 253

I. BEJAN, L. SEBASTIAN et N. V. BOŢAN, Considérations théoriques concernant le fonctionnement à puissance constante d'un moteur asynchrone couplé en cascade avec une commutatrice . 261

GH. ŞERBAN, I. FILIPIUC et V. CORLĂŢEANU, Établissement d'un paramètre de référence pour la machine à double alimentation et la méthode de mesure de ce paramètre . . . 271

HUGO ROSMAN et ALFRED BRAIER, Le rendement de la transmission de l'énergie électrique par les quadripôles (VII) . . 283

Pag.

EMIL LUCA, V. PETRESCU et N. REUS, Sur la réalisation d'un capacimètre de grande sensibilité, en utilisant dans la mesure le cycle de ré'axation 289

GÉRARD D'ALBON, DAN URSESCU et MARCEL GUTMAN, Un phénomène nouveau observé au contact électrique mercure-chrome (en couche mince) 297

GH. CIOBANU, Cinématique des mouvements de roulement avec glissement des systèmes matériels 303

D. S. TAVHÉLIDZÉ, Étude positionnelle des organes d'un mécanisme pentalatère à glisseur 305

R. BOGDAN, CR. PELECUDI and I. CALMACIUC, Study on the mechanical transducers for the determination of paths in plane mechanisms, in cartesian or polar coordinate systems . . 315

D. MANGERON and CORNELIU DRĂGAN, The study by a new tensor method of the cinematic behaviour of special slider-crank linkages 327

B. I. TURBIN, New methods for determining the moments of inertia of machine elements or units by experiment . . . 339

OCTAVIAN MUNTEANU e GH. TUDOR, Sulla costruzione dei meccanismi privi di legami passivi, nel senso di Resetov . . 349

TEODOR CÎMPAN, AUREL IAN SIMIONESCU und D. ANGHELACHE, Die Wärmeleitfähigkeit von Sand, Mörteln und Ziegeln in Abhängigkeit von der Materialfeuchtigkeit 353

L. G. BERG et M. S. IAGFAROFF, Une nouvelle méthode de détermination à l'aide de la thermographie, des caractéristiques thermiques et des effects caloriques 361

TEODOR CÎMPAN und D. ANGHELACHE, Eine thermoelektrische Sonde für die Bestimmung der Oberflächentemperatur von Wänden und anderer Körpern 365

DAVID PERETZ, Die thermischen Parameter der Transformatorenöle . 371

GH. CAŞLER, CESAR BUDA, VICTOR BAUŞIC, AUREL RĂILEANU, GAVRIL BORZAŞ, AL. RENER et DAN NICOLESCU, Détermination des paramètres des forces de coupe concernant les aciers roumains standardisés OL, soumis au tournage longitudinal (I) 377

VICTOR BAUŞIC, GH. CAŞLER, CESAR BUDA, AUREL RĂILEANU GAVRIL BORZAŞ, AL. RENER et DAN NICOLESCU, Détermination des paramètres des forces de coupe concernant les aciers roumains standardisés OLC, soumis au tournage longitudinal (II) 379

B. B. LAMPSI, On the limit of equilibrium of the steel beams . . 381

N. PREDA, VICTOR BAUŞIC, D. HORBANIUC et M. MARINESCU, Éthude photoélasticimétrique de l'état de tensions aux poutres simplement appuyées et à hauteur linéaire variable (à deux pantes) 395

Pag.

ANTON ŞEŞAN, La généralisation de la méthode de distribution des moments, dans le calcul plastique, aux portiques quelconques 401

ANTON ŞESAN, Relations statiques générales pour l'étude de la flexion 407

ANATOLIE MIHUL et CHIMON CAPATU, Contribution à l'exécution des éléments en béton précontraint par l'emploi de la précontrainte de montage 415

EMANOIL MUNTEANU-ADĂSCĂLIŢEI, Studium der Wirksamkeit vollwandiger Stahlbalken 427

GH. URSESCU et FLORIN CONSTANTINESCU, Sur le prix de l'infrastructure des ponts métalliques à travées économiques . . 441

BENIAMIN WEINŞTEIN, Une nouvelle méthode de calcul des serpentines 445

IOSIF IONESCU-MUSCEL, V. HANGANU, I. VLAD, EMILIA VLAD and SEMERAD RĂDULESCU, The fibrograph type „L" 453

NOTES

A. N. GLIVICI, Sulla storia della società romena di matematiche. I legami tra i matematici romeni, russi e sovietici . . . 459

SCIENTIFIC INTERNATIONAL LIFE

D. MANGERON and RADU BOGDAN, The second USSR conference on the theory of machines and mechanisms (Moscow, March 24—28, 1958) 471

LIST OF THESES ACCEPTED FOR HIGHER DEGREES IN THE LAST TIME IN THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY 479

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

REDACŢIONALE[1]) ОТ РЕДАКЦИИ[2]) EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENT[3])

Articole ale colaboratorilor străini primite la redacţia „Buletinului Institutului Politehnic Iaşi"

Статьи иностранных сотрудников полученные редакцией „Известий Ясского Политехнического Института"

Papers received from abroad by the Editorial Staff of the „Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy"

БОРОДАЧЕВ Н. М., О построении общего решения динамической задачи теории упругости для полупространства в случае осевой симметрии.

ЯСЮЛЁНИС А. И., Применение геометрических мест к ускорениям высшего порядка.

БЕЛЕЦКИЙ В. Я., К расчету наименьших размеров кулачковых механизмов с поступательно движущимся ведомым звеном.

КАШИРСКИЙ В. Г., Пиролиз пылевидного румынского лигнита в потоке водяного пара.

РЫЖАНОВ С. Г., Асимметричное деление тяжелых атомных ядер.

СЛУГИН С. Н., Методы последовательных приближений в почти упорядоченном пространстве.

СТАРЖИНСКИЙ В. М., Об устойчивости периодических движений, I.

RAMAKANTH J., Finite deformation of aelotropic and composite bodies, I.

BOURION G., Sur une présentation de la théorie des surfaces minima.

JANET MAURICE, Sur les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté.

LOWAN ARNOLD N., On the stability of the two-dimensional alternating direction implicit scheme.

LEKH VIR SUD a. GILL P. S., Measurement of artificial radioactivity in rainwater at Gulmarg.

WHEELER T. S., The Lotoflavin Problem.

---

1) Listele în continuare a cărţilor şi noilor articole originale primite la redacţia *Buletinului Institutului Politehnic din Iaşi*, precum şi noile serii de recenzii vor fi publicate în fasciculele imediat următoare ale revistei.

2) Продолжение списков книг и новых оригинальных статей поступивших в редакцию Известий Ясского Политехнического Института, а так же и ряда рецензий на полученные книги будет помещено в следующих выпусках нашего журнала.

3) A new list of books and original articles just received by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy* as well as a new series of book reviews will be published in the next issues of our periodical.

BROWN ARLEN, On the absolute equivalence of projections.
SEARS D. B., Integrable square solutions of a partial differential equation.
РЫЖАНОВ С. Г., Об экситонном механизме поглощения света бромистым серебром.
МИХАЙЛОВ Г. К., К классификации задач теории установившегося движения грунтовых вод в вертикальной плоскости.
НИКОЛАЕВ Н. С., ОПАЛОВСКИЙ А. А. и МАЛЫГИНА Н. Д., Исследование системы $KF—MoO_3—H_2O$ (изотерма 25° С).
БЕЛЕЦКИЙ В. Я., К определению размеров коромысловых кулачковых механизмов.
ЯСЮЛЁНИС А. И., Исследование движения машин и расчет маховых масс без помощи вспомогательных графиков.
ГРОМОВ М. Я., К геометрии односторонних развертывающихся поверхностей.
ЗМОРОВИЧ В. А., О признаке В. П. Ермакова сходимости знакоположительных числовых рядов.
ДУНДУЧЕНКО Л. Е. и КАСЬЯНЮК С. А., О С — функциях в круговом кольце.
ГУСЕВ В. А., К вопросу о применении способа проекций с числовыми отметками при построении инженерных номограмм.
RONCHI VASCO, Does the telescope enlarge or approach?
LOWAN ARNOLD N., On the operator approach to the problem of stability of difference schemes and the convergence of certain iteration procedures.
RAMAKANTH J., Finite deformation of aelotropic and composite bodies, IV.
LATIMER CLAIBORNE, Indefinite Ternary Forms.
БЕЛЕЦКИЙ В. Я., Вычисление восьми параметров передаточных пространственных кривошипно-коромысловых механизмов.
ЯСЮЛЁНИС А. И., Об одном свойстве плоско-параллельного движения.
СТАРЖИНСКИЙ В. М., Об устойчивости периодических движений, II.
ГАЗАРОВ А. Т., О синтезе механизмов с наивыгоднейшими углами передачи.
СИМОНОВ Р. А., Первые публикации А. Ю. Давидова по механике в зарубежной печати.
ГАНЬШИН В. Н., Общее решение главных геодезических задач.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

519.4

ASUPRA UNEI TEOREME DIN TEORIA STRUCTURILOR

DE

AL. CLIMESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26-29 iunie 1958

1. Să presupunem că între elementele unei mulţimi nevide M este definită o relaţie binară tranzitivă, notată $\leqslant$. M se zice filtrantă superior dacă două elemente oarecare sînt majorate (adică $x \in M$, $y \in M$, antrenează existenţa cel puţin a unui element z cu $x \leqslant z$, $y \leqslant z$). Relaţia este frecvent aceea de parţială ordonare şi în particular de incluziune pentru o familie de mulţimi (cf. [1, p. 17]).

Un element a al unei structuri S se zice accesibil inferior dacă se poate scrie ca uniune de elemente care-l preced în mod strict. Se obţine definiţia inaccesibilităţii prin negarea propoziţiei precedente (cf. [2, p. 371]).

2. Structura subalgebrelor unei algebre (în sens general) definită pe o mulţime M se poate caracteriza prin condiţiile indicate în următoarele două teoreme [2, pp. 35...40].

I. *Fie $P(M)$ mulţimea părţilor mulţimei M, A o submulţime a lui $P(M)$ închisă în raport cu intersecţia* (chiar a unei infinităţi de mulţimi). *Atunci $P(M)$ este mulţimea subalgebrelor unei anumite algebre dacă şi numai dacă oricare ar fi submulţimea B din A filtrantă superior, reuniunea mulţimilor din B* (notată $\cup B$) *aparţine de asemenea lui A.*

II. *Condiţiile* 1)...3) *de mai jos sînt necesare şi suficiente pentru ca o structură S să fie izomorfă structurii subalgebrelor unei algebre :*

1) *S este o structură completă.*

2) $x \wedge \cup y_\rho = \cup (x \wedge y_\rho)$ *pentru orice* $x \in S$ *şi orice mulţime* $\{y_\rho\}$ *filtrantă superior* (orice $y \in S$).

3) *Orice element din S este uniune de elemente inaccesibile inferior.*

Hermes demonstrează cele două teoreme în mod independent. Ne propunem să simplificăm demonstraţia suficienţii condiţiilor 1)...3) arătînd că sînt verificate condiţiile din teorema I.

Fie M mulţimea elementelor inaccesibile din S (nevidă prin ipoteză), $a \in S$ şi $\varphi(a)$ mulţimea elementelor din M care preced pe a. Se arată simplu următoarele [2, p. 39] :

(1) $\varphi(a) = \varphi(b) \rightarrow a = b$, (biunivocitatea),
(2) $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$.

Fie Φ mulțimea mulțimilor $\varphi(a)$. Echivalențele următoare: $x \in \varphi(\bigcap a_i) \longleftrightarrow x \in M$ și $x \leqslant \bigcap a_i \longleftrightarrow x \in M$ și $x \leqslant a_i$ pentru orice $i \longleftrightarrow x \in M$ și $x \in \varphi(a)$ pentru orice $i \longleftrightarrow x \in \bigcap \varphi(a_i)$ demonstrează că mulțimea mulțimilor $\varphi(a)$ este completă în raport cu intersecția. Cum $a \leqslant b \longleftrightarrow \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, mulțimile filtrante din S corespund biunivoc mulțimilor filtrante din Φ.

Fie a_i o mulțime filtrantă în S și $b = \bigcup a_i$ și fie x un element inaccesibil care precede pe b. Condiția 2) se scrie

$$x \wedge \bigcup a_i = \bigcup (x \wedge a_i) ,$$

deci (x fiind inaccesibil) există un indice i pentru care $x = x \wedge a_i$ adică $x \leqslant a_i$. Orice element inaccesibil care precede pe b precede deci pe un a_i adică $\varphi(b) = \bigcup \varphi(a_i)$. Dar $\varphi(a_i)$ este filtrantă superior, deci condiția 2) din teorema I este verificată, adică M este mulțimea subalgebrelor unei algebre, iar S este izomorfă cu M și suficiența este demonstrată.

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Dubreil-Jacotin M.-L., Lesieur L., Croisot R., *Leçons sur la théorie des treillis*, Paris, 1953.
2. Hermes Hans, *Einführung in die Verbandstheorie*, Berlin, 1955.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ СТРУКТУР

(Резюме)

Структура подалгебр какой-нибудь алгебры характеризуется либо условиями теоремы I ([2, стр. 35], теорема 7.2), либо условиями теоремы II ([2, стр. 37...38], теорема 7.4).

Гермес доказывает теорему II прямым путём; мы упрощаем доказательство достаточности условий 1) ... 3), чказывая, что совокупность образов $\varphi(a)$ удовлетворяет условиям теоремы I.

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES TREILLIS

(Résumé)

Le treillis des sous algèbres d'une algèbre est caractérisé soit à l'aide des conditions du th. I ([2, p. 35], Satz 7.2) soit à l'aide des conditions du th. II ([2, pp. 37...38], Satz 7.4).

Hermes démontre le th. II directement; nous simplifions la démonstration de la suffisance des conditions 1)...3) en montrant que l'ensemble des images $\varphi(a)$ satisfait aux conditions du théorème I.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

517.942

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ОЦЕНОК ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

К. В. ЗАДИРАКА

В этой работе излагается метод двустороннего приближения к собственным значениям самосопряженной краевой задачи четного порядка

$$(-1)^k \frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} + q(x)\,y = \lambda p(x)\,y\,,\ (0 \leqslant x \leqslant l)\,,$$

$$\sin \alpha_s\, y^{(s)}(0) + \cos \alpha_s\, y^{(2k-1-s)}\ (0) = 0\,,\ \sin\ \beta_s\, y^{(s)}(l) + \cos \beta_s\, y^{(2k-1-s)}(l) = 0\,,$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots, k-1)\,,$$

позволяющий строить нижние и верхние оценки к собственным значениям и не требующий, следовательно, вывода формул для оценки погрешностей, в чем состоит его преимущество перед другими приближенными методами решения этой задачи.

В **§ 1** излагается метод построения верхних и нижних приближений к решению уравнения $\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} + Q(x)\,y = 0$ с начальными условиями. В **§ 2** дается метод построения верхних и нижних оценок для собственных значений сформулированной задачи. В **§ 3** этот метод применен для краевой задачи Штурма-Лиувилля, а в **§ 4** — для краевой задачи 4-го порядка.

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} + Q(x)\,y = 0 \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0\,,\ y'(0) = y_0^1, \ldots, y^{(2k-1)}(0) = y_0^{2k-1}\ . \tag{1.2}$$

Положив $M^{2k} = |\max_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x)|$, $m^{2k} = |\min_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x)|$, представим дифференциальное уравнение (1.1) в форме

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} - M^{2k}y = -[M^{2k} + Q(x)]\,y\,. \tag{1.3}$$

Тогда интегрирование уравнения (1.3) при начальных условиях (1.2) эквивалентно решению интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x) = \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y(\xi)\,d\xi\,, \tag{1.4}$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2k}\left[\frac{e^{r_1 x}}{r_1^{2k-1}} + \frac{e^{r_2 x}}{r_2^{2k-1}} + \ldots + \frac{e^{r_{2k} x}}{r_{2k}^{2k-1}}\right] = \tag{1.5}$$

$$= \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{M^{2k} x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \frac{M^{4k} x^{6k-1}}{(6k-1)!} + \ldots$$

есть частное решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.3) при начальных условиях

$$K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(2k-2)}(0) = 0\,, \quad K^{(2k-1)}(0) = 1\,, \tag{1.6}$$

$r_j = Me^{\frac{j\pi i}{k}}$ — корни двучленного уравнения $r^{2k} - M^{2k} = 0$, $(j = 1,2,\ldots,2k)$, а $\underline{y}_0(x)$ — частное решение уравнения $y^{(2k)} - M^{2k} = 0$ при начальных условиях (1.2).

Из (1.5) заключаем, что $K(x)$ есть вещественная неотрицательная функция в любом конечном промежутке изменения x.

В случае $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x) \leqslant 0$ имеем $M^{2k} + Q(x) \leqslant 0$ и, следовательно, ядро интегрального уравнения (1.4) неположительно.

Пользуясь для решения интегрального уравнения (1.4) обычным итерационным процессом, получим для вычисления $n+1$-го приближения по n-му соотношение

$$y_{n+1}(x) = \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_n(\xi)\,d\xi\,. \tag{1.7}$$

Отметим следующие свойства приближений, получаемых по рекуррентной формуле (1.7):

1. Пусть непрерывная функция $y_1(x)$ такова что подстановка ее вместо $y(x)$ в интегральное уравнение (1.4) дает на сегменте $[0, l]$ неравенство

$$y_1(x) \leqslant \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_1(\xi)\,d\xi\,. \tag{A}$$

Вычитая почленно из этого неравенства уравнение (1.4) имеем

$$y_1(x) - y(x) = \eta(x) \leqslant -\int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,\eta(\xi)\,d\xi$$

и т. к. ядро интегрального уравнения (1.4) неположительно, то получаем [1]

(B) $$\eta(x) = y_1(x) - y(x) \leqslant 0$$

на сегменте $[0, l]$.

Таким образом, если на сегменте $[0, l]$ выполняется неравенство (A), то на том же сегменте имеет место неравенство (B). Аналогично, если неравенство (A) имеет противоположный сенс, то неравенство (B) также будет противоположного сенса.

Установленное свойство, по аналогии с теоремой о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина [2], будем называть теоремой об интегральных неравенствах, а функцию $y_1(x)$ соответственно нижней или верхней функцией Чаплыгина.

2. Если $y_n(x)$ есть нижнее приближение к искомому решению $y(x)$, то $y_{n+1}(x)$, вычисленное по рекуррентной формуле (1.7), является также нижним приближением по отношению к $y(x)$. Действительно, пусть $y_n(x) \leqslant y(x)$. Тогда, согласно (1.7)

$$y_{n+1}^{(x)} \leqslant \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)[M^{2k} + Q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi = y(x).$$

Аналогичное рассуждение показывает, что если $y_n(x) \geqslant y(x)$, то $y_{n+1}(x) \geqslant y(x)$.

3. Производные любого нижнего приближения до порядка $2k-1$ включительно являются нижними приближениями к соответствующим производным решения $y(x)$. В самом деле, дифференцируя последовательно рекуррентное соотношение (1.7) и принимая во внимание начальные условия (1.6) функции $K(x)$ и ее производных, получим

$$y_{n+1}^{(p)}(x) = \underline{y}_0^{(p)}(x) - \int_0^x K^{(p)}(x-\xi)[M^{2k} + Q(\xi)]\, y_n(\xi)\, d\xi, \quad (p = 1, 2, \ldots, 2k-1),$$

где $K^{(p)}(x)$ — вещественная неотрицательная функция. Допустим теперь, что $y_n(x) \leqslant y(x)$. В силу последнего равенства имеем

$$y_{n+1}^{(p)}(x) \leqslant \underline{y}_0^{(p)}(x) - \int_0^x K^{(p)}(x-\xi)[M^{2k} + Q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi = y^{(p)}(x).$$

Аналогичное заключение имеет место, если $y_n(x) \geqslant y(x)$.

Как известно, используемый нами метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения Вольтерра (1.4) является равномерно сходящимся при любом конечном значении переменной x.

4. Построенные в соответствии с рекуррентной формулой (1.7) последовательности верхних и нижних приближений монотонно стремятся к искомому решению, если исходные приближения являются функциями Чаплыгина.

Пусть $y_1(x)$ — верхняя функция Чаплыгина, т. е.

$$y_1(x) \geqslant \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_1(\xi)\,d\xi.$$

Подставляя $y_1(x)$ в рекуррентную формулу (1.7), получаем

$$y_2(x) = \underline{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_1(\xi)\,d\xi \leqslant y_1(x).$$

Покажем, что приближение $y_2(x)$, построенное по рекуррентной формуле (1.7), является также верхней функцией Чаплыгина. Действительно, обозначая через $\Psi_2(x)$ результат подстановки $y_2(x)$ в интегральное уравнение (1.4) вместо $y(x)$, получим

$$\Psi_2(x) = y_2(x) - \underline{y}_0(x) + \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_2(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^x K(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,[y_2(\xi) - y_1(\xi)]\,d\xi \geqslant 0.$$

Беря теперь в качестве исходной функцию Чаплыгина $y_2(x)$, аналогичным способом докажем, что $y_3(x) \leqslant y_2(x)$ и т. д. Точно так же доказывается монотонная сходимость нижних приближений.

5. Последовательности производных верхних и нижних приближений до порядка $2k-1$ включительно монотонно сходятся к соответствующим производным искомого решения.

Имеем, например, в случае верхних приближений

$$y'_{n+1}(x) = \underline{y}'_0(x) - \int_0^x K'(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_n(\xi)\,d\xi,$$

$$y'_n(x) = \underline{y}'_0(x) - \int_0^x K'(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,y_{n-1}(\xi)\,d\xi.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$y'_{n+1}(x) - y'_n(x) = -\int_0^x K'(x-\xi)\,[M^{2k} + Q(\xi)]\,[y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)]\,d\xi.$$

Так как ядро интегрального уравнения $K'(x)\,[M^{2k} + Q(x)] \leqslant 0$ и $y_n(x) - y_{n-1}(x) \leqslant 0$, то $y'_{n+1}(x) - y'_n(x) \leqslant 0$. Аналогично доказывается

монотонная сходимость $y_n^{(p)}(x)$ к $y^{(p)}(x)$, $(p = 2, 3, \ldots, 2k-1)$ при возрастании номера приближения n.

Примечание 1. Если $\max\limits_{0 \leq x \leq l} Q(x) = 0$, то $K(x) = \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$, а рекуррентная формула (1.7) принимает вид

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) - \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{2k-1} Q(\xi) y_n(\xi)\, d\xi.$$

Примечание 2. Если $\max Q(x) > 0$, рекуррентное соотношение (1.7) вообще непригодно для построения верхних и нижних приближений т. к. ядро интегрального уравнения (1.4) в этом случае знакопеременно в силу непостоянства знака выражения $M^{2k} + Q(x)$. Это построение осуществимо во всяком интервале изменения x, где $M^{2k} + Q(x)$ сохраняет знак.

Примечание 3. Если $\min Q(x) < 0$, $\min Q(x) > 0$ или $\min Q(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, то представив дифференциальное уравнение (1.1) в форме $\dfrac{d^{2k}y}{dx^{2k}} - m^{2k} y = -[m^{2k} + Q(x)]\, y$ сведем интегрирование этого уравнения при начальных условиях (1.2) к решению интегрального уравнения

$$y(x) = \bar{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[m^{2k} + Q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi,$$

где $\bar{y}_0(x)$ — частное решение уравнения $y^{(2k)} - m^{2k} y = 0$, при начальных условиях (1.2)

$$K(x) = \frac{1}{2k}\left[\frac{e^{r_1 x}}{r_1^{2k-1}} + \frac{e^{r_2 x}}{r_2^{2k-1}} + \ldots + \frac{e^{r_{2k} x}}{r_{2k}^{2k-1}}\right] =$$

$$= \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{m^{2k} x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \frac{m^{4k} x^{6k-1}}{(6k-1)!} + \ldots, \quad \left(r_j = m\, e^{\frac{j\pi i}{k}}\right).$$

Так как $K(x) \geqslant 0$, $m^{2k} + Q(x) \geqslant 0$, то ядро интегрального уравнения в этом случае неотрицательно и, пользуясь рекуррентной формулой

$$y_{n+1}(x) = \bar{y}_0(x) - \int_0^x K(x-\xi)\,[m^{2k} + Q(\xi)]\, y_n(\xi)\, d\xi, \tag{1.8}$$

мы по заданному нижнему приближению получим верхнее, и наоборот. С этим изменением свойства 1 ... 5 остаются в силе.

В качестве исходных приближений, как будет показано ниже, удобно брать решения однородных уравнений $y^{(2k)} \pm M^{2k} y = 0$, $y^{(2k)} \pm m^{2k} y = 0$ при начальных условиях (1.2).

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ОЦЕНОК ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерную самосопряженную краевую задачу вида

$$(-1)^k \frac{d^{2k} y}{dx^{2k}} + q(x)\, y = \lambda\, p(x)\, y\,, \quad (0 \leqslant x \leqslant l)\,, \tag{2.1}$$

$$\sin \alpha_s\, y^{(s)}(0) + \cos \alpha_s\, y^{(2k-1-s)}(0) = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\sin \beta_s\, y^{(s)}(l) + \cos \beta_s\, y^{(2k-1-s)}(l) = 0\,, \quad (s = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{2.3}$$

Будем искать собственную функцию этой краевой задачи в виде

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda) + \cdots + C_k y_k(x, \lambda)\,, \tag{2.4}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_k$—линейно независимые решения уравнения (2.1), удовлетворяющие следующим начальным условиям в точке $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l}
y_1 = 0,\ y_1' = 0, \cdots, y_1^{(k-2)} = 0,\ y_1^{(k-1)} = -\cos \alpha_{k-1},\ y_1^{(k)} = \sin \alpha_{k-1}, \\
y_1^{(k+1)} = \cdots = y_1^{(2k-1)} = 0\,, \\
y_2 = 0,\ y_2' = 0, \ldots, y_2^{(k-3)} = 0,\ y_2^{(k-2)} = -\cos \alpha_{k-2},\ y_2^{(k-1)} = 0, \\
y_2^{(k)} = 0,\ y_2^{(k+1)} = \sin \alpha_{k-2},\ y_2^{(k+2)} = \cdots = y_2^{(2k-1)} = 0\,, \\
\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_k = -\cos \alpha_0\,,\ y_k' = \cdots = y_k^{(2k-2)} = 0,\ y_k^{(2k-1)} = \sin \alpha_0\,.
\end{array}\right. \tag{2.5}$$

Все эти k решений удовлетворяют граничным условиям (2.2).

Удовлетворяя (2.4) краевым условиям (2.3), получим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}
[\sin \beta_0 y_1(l, \lambda) + \cos \beta_0\, y_1^{(2k-1)}(l, \lambda)]\, C_1 + \cdots + [\sin \beta_0\, y_k(l, \lambda) + \\
+ \cos \beta_0\, y_k^{(2k-1)}(l, \lambda)]\, C_k = 0\,, \\
[\sin \beta_1 y_1'(l, \lambda) + \cos \beta_1\, y_1^{(2k-2)}(l, \lambda)]\, C_1 + \cdots + [\sin \beta_1 y_k'(l, \lambda) + \\
+ \cos \beta_1\, y_k^{(2k-2)}(l, \lambda)]\, C_k = 0\,, \\
\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
[\sin \beta_{k-1}\, y_1^{(k-1)}(l, \lambda) + \cos \beta_{k-1}\, y_1^{(k)}(l, \lambda)]\, C_1 + [\sin \beta_{k-1}\, y_k^{(k-1)}(l, \lambda) + \\
+ \cos \beta_{k-1}\, y_k^{(k)}(l, \lambda)]\, C_k = 0\,.
\end{array}\right. \tag{2.6}$$

Так как для ненулевого решения $C_1, C_2, \ldots, C_k$ не могут одновременно обращаться в нуль, то собственные значения краевой задачи (2.1), (2.2), (2.3) определяются из уравнения

(2.7) $$D(\lambda) = 0$$

где $D(\lambda)$— определитель систем (2.6).

Полагая $q(x) - \lambda p(x) = Q(x, \lambda)$, построим в соответствии с рекуррентным соотношением (1.7) при $\max\limits_{0 \leqq x \leqq l} Q(x,\lambda) \leqslant 0$ и рекуррентным соотношением (1.8) при $\min\limits_{0 \leqq x \leqq l} Q(x, \lambda) \leqslant 0$, $\min\limits_{0 \leqq x \leqq l} Q(x, \lambda) > 0$, $(0 \leqslant x \leqslant l)$ последовательности верхних $\bar{y}_{ni}(x,\lambda)$ и нижних $\underline{y}_{ni}(x,\lambda)$ приближений, удовлетворяющие начальным условиям (2.5) (n—номер приближения, $i = 1,2,\ldots, k$). Развернув определитель $D(\lambda)$, построим определитель $\bar{D}_n(\lambda)$, получающийся из $D(\lambda)$ заменой функций $y_i(l, \lambda)$ функциями $\bar{y}_{ni}(l, \lambda)$ при положительных коэффициентах и функциями $\underline{y}_{ni}(l, \lambda)$ при отрицательных коэффициентах и определитель $\underline{D}_n(\lambda)$, получающийся из $D(\lambda)$ заменой функций $y_i(l, \lambda)$ функциями $\underline{y}_{ni}(l, \lambda)$ при положительных коэффициентах и функциями $\bar{y}_{ni}(l, \lambda)$ при отрицательных коэффициентах.

Сопоставим теперь уравнению $D(\lambda) = 0$ следующие два уравнения:

(2.8) $$\bar{D}_n(\lambda) = 0, \quad \underline{D}_n(\lambda) = 0.$$

Очевидно имеют место неравенства $\underline{D}_n(\lambda) \leqslant D(\lambda) \leqslant \bar{D}_n(\lambda)$.

Как отмечено в § **1**, при возрастании номера приближения n $\bar{y}_{ni}(x, \lambda)$, $\underline{y}_{ni}(x, \lambda)$ в промежутке $[0, l]$ монотонно стремятся к искомому решению $y(x, \lambda)$, а их производные по x до порядка $2k - 1$ включительно монотонно стремятся к соответствующим производным по x от этого решения. Поэтому функции $\bar{D}_n(\lambda)$ и $\underline{D}_n(\lambda)$ монотонно стремятся (первая сверху, а вторая снизу) к функции $D(\lambda)$.

Тогда при любом j простому нулю $\lambda^{(j)}$ функции $D(\lambda)$ (т. е. простому j-му собственному значению) при достаточно большом n будут соответствовать нули $\underline{\lambda}_n^{(j)}$, $\bar{\lambda}_n^{(j)}$ функций $\underline{D}_n(\lambda)$ и $\bar{D}_n(\lambda)$, сколь угодно близкие к $\lambda^{(j)}$, причем будут иметь место неравенства

$$\underline{\lambda}_n^{(j)} \leqslant \underline{\lambda}_{n+1}^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \bar{\lambda}_{n+1}^{(j)} \leqslant \bar{\lambda}_n^{(j)}.$$

§ 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

При $k = 1$, $s = 0$ получаем следующую самосопряженную краевую задачу:

(3.1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda p(x) - q(x)]\, y = 0, \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

(3.2) $$\sin \alpha_0\, y(0) + \cos \alpha_0\, y'(0) = 0, \quad \sin \beta_0\, y(l) + \cos \beta_0\, y'(l) = 0.$$

Мы будем предполагать, что $\operatorname{ctg} \alpha_0 < 0$, $\operatorname{ctg} \beta_0 > 0$. В этом случае, как известно, существует бесконечное множество собственных значений параметра λ (и все они положительны) при которых существуют нетривиальные решения уравнения (3.1) удовлетвотряющие краевым условиям (3.2) и имеющие в открытом интервале $(0, l)$ соответственно 0, 1, 2, ... нулей.

Для данной задачи $m^2(\lambda) = |\min_{0 \leqq x \leqq l}(\lambda p - q)|$, $M^2(\lambda) = |\max_{0 \leqq x \leqq l}(\lambda p - q)|$, уравнение $r^2 - M^2 = 0$ имеет корни $r_1 = M(\lambda)$, $r_2 = -M(\lambda)$. Построенная в § 1 функция $K(x, \lambda)$ запишется

$$K(x, \lambda) = \frac{1}{2M}(e^{Mx} - e^{-Mx}) = \frac{1}{M}\operatorname{sh} Mx. \tag{3.3}$$

Начальные условия в форме (2.5) в данном случае имеют вид

$$y(0) = -\cos\alpha_0,\ y'(0) = \sin\alpha_0. \tag{3.4}$$

Частным решением уравнения $y'' - M^2 y = 0$ при этих условиях будет функция

$$\underline{y}_0(x, \lambda) = -\cos\alpha_0 \operatorname{ch} Mx + \frac{\sin\alpha_0}{M}\operatorname{sh} Mx.$$

Интегральное уравнение (1.4) и рекуррентная формула (1.7) в этом случае принимают соответственно вид

$$y(x, \lambda) = -\cos\alpha_0 \operatorname{ch} Mx + \frac{\sin\alpha_0}{M}\operatorname{sh} Mx - \tag{3.5}$$
$$-\frac{1}{M}\int_0^x \operatorname{sh} M(x-\xi)[M^2 + Q(\xi, \lambda)]\, y(\xi, \lambda)\, d\xi,$$

$$y_{n+1}(x, \lambda) = -\cos\alpha_0 \operatorname{ch} Mx + \frac{\sin\alpha_0}{M}\operatorname{sh} Mx - \tag{3.6}$$
$$-\frac{1}{M}\int_0^x \operatorname{sh} M(x-\xi)[M^2 + Q(\xi, \lambda)]\, y_n(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

Заменяя M на m, получим, в соответствии с (1.8), рекуррентное соотношение

$$y_{n+1}(x, \lambda) = -\cos\alpha_0 \operatorname{ch} mx + \frac{\sin\alpha_0}{m}\operatorname{sh} mx - \tag{3.7}$$
$$-\frac{1}{m}\int_0^x \operatorname{sh} m(x-\xi)[m^2 + Q(\xi, \lambda)]\, y_n(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

При $\max_{0 \leqq x \leqq l}(\lambda p - q) < 0$ формула (3.6) позволяет по исходной верхней функции построить последовательность верхних функций.

При $\min_{0 \leqq x \leqq l}(\lambda p - q) \geqslant 0$, $\min_{0 \leqq x \leqq l}(\lambda p - q) < 0$ формула (3.7) позволяет по нижней функции построить верхнюю и наоборот. Построенные последовательности верхних и нижних функций обладают свойствами 1...5, установленными в §1.

Уравнения (2.8), определяющие верхние и нижние приближения к собственным значениям краевой задачи (3.1), (3.2), принимают вид

$$\begin{cases} \overline{D}_n(\lambda) = \sin\beta_0 \overline{y}_n(l, \lambda) + \cos\beta_0 \overline{y}'_n(l, \lambda) = 0, \\ \underline{D}_n(\lambda) = \sin\beta_0 \underline{y}_n(l, \lambda) + \cos\beta_0 \underline{y}'_n(l, \lambda) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

В случае нулевых граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ вместо уравнений (3.8), получаем следующие два уравнения для определения верхних и нижних оценок для собственных значений

$$\bar{y}_n(l, \lambda) = 0, \quad \underline{y}_n(l, \lambda) = 0.$$

Разумеется, что все рассуждения этого параграфа применимы к краевой задаче для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[\lambda p(x) - q(x) \right] y = 0.$$

Пример 1

$$y'' + \lambda (1 + x) y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Ищем решение этого уравнения при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Здесь $m^2(\lambda) = \min \lambda (1 + x) = \lambda$. При указанных начальных условиях решением уравнения $y'' + \lambda y = 0$ является функция $y_0(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x$.

Обозначая через $\Psi_0(x, \lambda)$ результат подстановки ее в данное уравнение, получаем

$$\Psi_0(x, \lambda) = y_0'' + \lambda (1 + x) y_0 = -\lambda y_0 + \lambda (1 + x) y_0 = \lambda x y_0 \geqslant 0 \text{ при } \lambda \leqslant \lambda_1.$$

Следовательно $y_0(x, \lambda) \geqslant y(x, \lambda)$ на сегменте $[0,1]$. Так как в данном случае $\cos \alpha_0 = 0$, $m = \sqrt{\lambda}$, $m^2 + Q(x, \lambda) = \lambda (2 + x)$, то рекуррентная формула (3.7) запишется

$$y_{n+1}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, x - \sqrt{\lambda} \int_0^x (2 + \xi) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, (x - \xi)\, y_n(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

Пользуясь этой формулой и беря в качестве исходного приближения функцию $y_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x$, получаем последовательно

$$\underline{y}_1(x, \lambda) = \frac{2 + x}{2\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x - \frac{1}{2\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}\, x + \frac{1}{2\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$\bar{y}_2(x, \lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} + \frac{x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{x^2}{4\sqrt{\lambda}} \right) \sin \sqrt{\lambda}\, x + \left(\frac{3}{2\lambda} + \frac{3x}{4\lambda} \right) \cos \sqrt{\lambda}\, x +$$

$$+ \left(\frac{x^2}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{3}{8\lambda\sqrt{\lambda}} \right) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, x - \left(\frac{3}{2\lambda} + \frac{x}{8\lambda} \right) \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}\, x,$$

$$\underline{y}_3(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{11}{4\lambda} + \frac{3x}{2} - \frac{11x}{8\lambda} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) \sin \sqrt{\lambda}\, x +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \left(3 - \frac{5}{8\lambda} + 3x + \frac{3x^2}{4} \right) \cos \sqrt{\lambda}\, x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{7}{8\lambda} + \frac{7x}{4} - \frac{x}{64\lambda} + \frac{5x^2}{8} + \frac{5x^3}{96} \right) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, x +$$

$$+ \left(-\frac{3}{\lambda} + \frac{5}{8\lambda^2} - \frac{x}{4\lambda} - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^2}{64\lambda} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} \right) \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}\, x.$$

Удовлетворяя второму граничному условию $y(1) = 0$ и решая полученные уравнения, получаем

$$\overline{\lambda}_0^{(1)} = \pi^2, \quad \underline{\lambda}_1^{(1)} = 4{,}76, \quad \overline{\lambda}_2^{(1)} = 7{,}34, \quad \underline{\lambda}_3^{(1)} = 6{,}52 .$$

§ 4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

При $k=2$, $s=0;1$ получаем следующую самосопряженную краевую задачу 4-го порядка:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \left[q(x) - \lambda p(x) \right] y = 0, \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha_0 y(0) + \cos\alpha_0 y'''(0) = 0, \quad \sin\alpha_1 y'(0) + \cos\alpha_1 y''(0) = 0; \\ \sin\beta_0 y(l) + \cos\beta_0 y'''(l) = 0, \quad \sin\beta_1 y'(l) + \cos\beta_1 y''(l) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

к которой приводит ряд проблем математической физики.

Рассмотрим сперва случай, когда $\max(q - \lambda p) \leqslant 0$. Корни двучленного уравнения $r^4 - M^4 = 0$ имеют вид $r_1 = M(\lambda)$, $r_2 = -M(\lambda)$, $r_3 = iM(\lambda)$, $r_4 = -iM(\lambda)$; функция $K(x,\lambda)$ запишется

$$K(x,\lambda) = \frac{1}{2M^3}(\operatorname{sh} Mx - \sin Mx),$$

а рекуррентная формула (1.7) принимает вид

$$y_{n+1}(x,\lambda) = \underline{y}_0(x,\lambda) -$$

$$- \frac{1}{2M^3}\int_0^x [\operatorname{sh} M(x-\xi) - \sin M(x-\xi)]\,[M^4 + Q(\xi,\lambda)]\,y_n\,d\xi, \tag{4.3}$$

причем функция $\underline{y}_0(x,\lambda)$ представляет собой частное решение уравнения

$$y^{IV} - M^4 y = 0 \tag{4.4}$$

при одном из начальных условий в форме (2.5)

$$\begin{cases} y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -\cos\alpha_1, \quad y_1''(0) = \sin\alpha_1, \quad y_1'''(0) = 0; \\ y_2(0) = -\cos\alpha_0, \quad y_2'(0) = 0, \quad y_2''(0) = 0, \quad y_2'''(0) = \sin\alpha_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

и запишется соответственно

$$\underline{y}_{01}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left[-\cos\alpha_1(\operatorname{sh} Mx + \sin Mx) + \frac{\sin\alpha_1}{M^2}(\operatorname{ch} Mx - \cos Mx) \right],$$

$$\underline{y}_{02}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left[-\cos\alpha_0(\operatorname{ch} Mx + \cos Mx) + \frac{\sin\alpha_0}{M^2}(\operatorname{sh} Mx - \sin Mx) \right]. \tag{4.6}$$

Уравнения (2.8), определяющие верхние и нижние оценки для собственных значений, в рассматриваемом случае принимают вид

$$
(4.7)\quad \begin{cases} \overline{D}_n(\lambda) = [\sin\beta_0 \overline{y}_{n1}(l,\lambda) + \cos\beta_0 \overline{y}'''_{n1}(l,\lambda)][\sin\beta_1 \overline{y}'_{n2}(l,\lambda) + \\ + \cos\beta_1 \overline{y}''_{n2}(l,\lambda)] - [\sin\beta_0 \underline{y}_{n2}(l,\lambda) + \cos\beta_0 \underline{y}'''_{n2}(l,\lambda)][\sin\beta_1 \underline{y}'_{n1}(l,\lambda) + \\ + \cos\beta_1 \underline{y}''_{n1}(l,\lambda)] = 0, \\ \underline{D}_n(\lambda) = [\sin\beta_0 \underline{y}_{n1}(l,\lambda) + \cos\beta_0 \underline{y}'''_{n1}(l,\lambda)][\sin\beta_1 \underline{y}'_{n2}(l,\lambda) + \\ + \cos\beta_1 \underline{y}''_{n2}(l,\lambda)] - [\sin\beta_0 \overline{y}_{n2}(l,\lambda) + \cos\beta_0 \overline{y}'''_{n2}(l,\lambda)][\sin\beta_1 \overline{y}'_{n1}(l,\lambda) + \\ + \cos\beta_1 \overline{y}''_{n1}(l,\lambda)] = 0, \end{cases}
$$

если $\sin\beta_0$, $\cos\beta_0$, $\sin\beta_1$, $\cos\beta_1$ — положительны. Если какое-либо из этих чисел отрицательно, то верхнее приближение при нем следует заменить нижним и наоборот.

При $\max(q-\lambda p)=0$ имеем $M^4(\lambda)=0$, $K(x)=x^3/3!$ и рекуррентная формула (4.3) принимает простой вид

$$
(4.8)\qquad y_{n+1}(x,\lambda) = y_0(x,\lambda) - \frac{1}{3!}\int_0^x (x-\xi)^3 Q(\xi,\lambda)\, y_n(\xi,\lambda)\, d\xi,
$$

где $y_0(x,\lambda)$ — частное решение уравнения $y^{IV}=0$ при одном из начальных условий (4.5).

Пусть теперь $\min(q-\lambda p)>0$ или $\min(q-\lambda p)<0$. Корни уравнения $r^4-m^4=0$ запишутся $r_1=m(\lambda)$, $r_2=-m(\lambda)$, $r_3=im(\lambda)$, $r_4=-im(\lambda)$; функция $K(x,\lambda)$ принимает вид $K(x,\lambda)=\frac{1}{2m^3}(\operatorname{sh} mx-\sin mx)$, а рекуррентная формула запишется

$$
(4.9)\qquad \begin{aligned} y_{n+1}(x,\lambda) &= \overline{y}_0(x,\lambda) - \\ &- \frac{1}{2m^3}\int_0^x [\operatorname{sh} m(x-\xi) - \sin m(x-\xi)][m^4 + Q(\xi,\lambda)]\, y_n(\xi,\lambda)\, d\xi, \end{aligned}
$$

где $\overline{y}_0(x,\lambda)$ есть частное решение уравнения $y^{IV}-m^4 y=0$ при одном из начальных условий (4.5) и запишется соответственно

$$
(4.10)\qquad \begin{aligned} \overline{y}_{01}(x,\lambda) &= \frac{1}{2}\left[-\cos\alpha_1(\operatorname{sh} mx + \sin mx) + \frac{\sin\alpha_1}{m^2}(\operatorname{ch} mx - \cos mx)\right], \\ \overline{y}_{02}(x,\lambda) &= \frac{1}{2}\left[-\cos\alpha_0(\operatorname{ch} mx + \cos mx) + \frac{\sin\alpha_0}{m^3}(\operatorname{sh} mx - \sin mx)\right]. \end{aligned}
$$

Уравнения (4.7) запишутся без изменений.

Пример 2

$$y^{IV} - \lambda(1+x)y = 0, \quad y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Здесь $M^4 = \left|\max_{0\leqslant x\leqslant 1} \lambda(1+x)\right| = \lambda$, $m^4 = \left|\min_{0\leqslant x\leqslant 1} \lambda(1+x)\right| = 2\lambda$, а начальные условия в точке $x=0$ запишутся

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_1''(0) = 0, \quad y_1'''(0) = 0;$$
$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0, \quad y_2''(0) = 0, \quad y_2'''(0) = 1.$$

При этих начальных условиях решения уравнений $y^{IV} - M^4 y = 0$, $y^{IV} - m^4 y = 0$ имеют соответственно вид

$$\underline{y}_{01}(x,\lambda) = \frac{1}{2M}(\operatorname{sh} Mx + \sin Mx) \geqslant 0, \quad \underline{y}_{02}(x,\lambda) = \frac{1}{2M^3}(\operatorname{sh} Mx - \sin Mx) \geqslant 0,$$

$$\overline{y}_{01}(x,\lambda) = \frac{1}{2m}(\operatorname{sh} mx + \sin mx) \geqslant 0, \quad \overline{y}_{02}(x,\lambda) = \frac{1}{2m^3}(\operatorname{sh} mx - \sin mx) \geqslant 0.$$

Интегральное уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению, представится в форме

$$y(x,\lambda) = \underline{y}_0(x,\lambda) + \frac{\lambda}{2M^3}\int_0^x [\operatorname{sh} M(x-\xi) - \sin M(x-\xi)]\,\xi\, y(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Обозначая через $\varphi_{01}(x,\lambda)$ и $\varphi_{02}(x,\lambda)$ результат подстановки в это уравнение функций $\underline{y}_1(x,\lambda)$ и $\underline{y}_{02}(x,\lambda)$ вместо искомой функции $y(x,\lambda)$, получаем соответственно

$$\varphi_{01}(x,\lambda) = -\frac{\lambda}{2M^3}\int_0^x [\operatorname{sh} M(x-\xi) - \sin M(x-\xi)]\,\xi\,\underline{y}_{01}(\xi,\lambda)\,d\xi \leqslant 0,$$

$$\varphi_{02}(x,\lambda) = -\frac{\lambda}{2M^3}\int_0^x [\operatorname{sh} M(x-\xi) - \sin M(x-\xi)]\,\xi\,\underline{y}_{02}(\xi,\lambda)\,d\xi \leqslant 0$$

для всех $\lambda > 0$ и $x > 0$.

Отсюда, на основании свойства 1 (§ 1), имеем

$$\underline{y}_{01}(x,\lambda) \leqslant y(x,\lambda), \quad \underline{y}_{02}(x,\lambda) \leqslant y(x,\lambda) \text{ для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \geqslant 0.$$

Аналогично устанавливаются неравенства $\overline{y}_{01}(x,\lambda) \geqslant y(x,\lambda)$, $\overline{y}_{02}(x,\lambda) \geqslant y(x,\lambda)$ для всех $\lambda > 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Таким образом, при любом $\lambda > 0$ функции $\underline{y}_{01}$, $\underline{y}_{02}$ могут быть взяты в качестве исходных нижних функций Чаплыгина, а $\overline{y}_{01}$, $\overline{y}_{02}$ — в качестве верхних в заданном промежутке [0,1].

Пользуясь рекуррентными соотношениями (4.3) ($\max Q = -\lambda$) и (4.9) ($\min Q = -2\lambda < 0$), строим вторые приближения

$$\underline{y}_{11}(x,\lambda) = \frac{1}{2M}(\operatorname{sh} Mx + \sin Mx) + \frac{1}{4}\int_0^x \xi[\operatorname{sh} M(x-\xi) - \sin M(x-\xi)](\operatorname{sh} M\xi + \sin M\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{8-3x}{16M}(\operatorname{sh} Mx + \sin Mx) + \frac{x^2}{16}(\operatorname{ch} Mx + \cos Mx) + \frac{1}{4M^2}(\operatorname{ch} Mx + \cos Mx),$$

$$\underline{y}_{12}(x,\lambda)=\frac{1}{2M^3}(\operatorname{sh}Mx-\sin Mx)+\frac{1}{4M^2}\int_0^x\xi[\operatorname{sh}M(x-\xi)-\sin M(x-\xi)](\operatorname{sh}M\xi-\sin M\xi)d\xi=$$

$$=\frac{8-3x}{16M^3}(\operatorname{sh}Mx-\sin Mx)+\frac{x^2}{16M^2}(\operatorname{ch}Mx-\cos Mx),$$

$$\overline{y}_{11}(x,\lambda)=\frac{1}{2m}(\operatorname{sh}mx+\sin mx)-\frac{m}{8M}\int_0^x(1-\xi)[\operatorname{sh}m(x-\xi)-\sin m(x-\xi)](\operatorname{sh}M\xi+\sin M\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{3m^2}{2\lambda}(\operatorname{ch}mx-\cos mx)-\frac{x-1}{2M}(\operatorname{sh}Mx+\sin Mx)-\frac{2M^2}{\lambda}(\operatorname{ch}Mx-\cos Mx),$$

$$\overline{y}_{12}(x,\lambda)=\frac{1}{2m^3}(\operatorname{sh}mx-\sin mx)-\frac{m}{8M^3}\int_0^x(1-\xi)[\operatorname{sh}m(x-\xi)-\sin m(x-\xi)](\operatorname{sh}M\xi-\sin M\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{\lambda}(\operatorname{ch}mx+\cos mx)-\frac{x-1}{2M^3}(\operatorname{sh}Mx-\sin Mx)-\frac{2}{\lambda}(\operatorname{ch}Mx+\cos Mx).$$

Вторые производные по x запишутся

$$\underline{y}''_{11}(x,\lambda)=\frac{M(x+8)}{16}(\operatorname{sh}Mx-\sin Mx)+\frac{Mx^2}{16}(\operatorname{ch}Mx-\cos Mx),$$

$$\underline{y}''_{12}(x,\lambda)=\frac{x+8}{16M}(\operatorname{sh}Mx+\sin Mx)+\frac{x^2}{16}(\operatorname{ch}Mx+\cos Mx)-\frac{1}{4M^2}(\operatorname{ch}Mx-\cos mx),$$

$$\overline{y}''_{11}(x,\lambda)=3(\operatorname{ch}mx+\cos mx)-\frac{M(x-1)}{2}(\operatorname{sh}Mx-\sin Mx)-3(\operatorname{ch}Mx+\cos Mx),$$

$$\overline{y}''_{12}(x,\lambda)=\frac{2m^2}{\lambda}(\operatorname{ch}mx-\cos mx)-\frac{x-1}{2M}(\operatorname{sh}Mx+\sin Mx)-\frac{3}{M^2}(\operatorname{ch}Mx-\cos Mx).$$

В точке $x=1$ вторые приближения и их производные имеют вид

$$\underline{y}_{11}(1,\lambda)=\frac{5}{16M}(\operatorname{sh}M+\sin M)+\frac{1}{16}(\operatorname{ch}M+\cos M)+\frac{1}{4M^2}(\operatorname{ch}M-\cos M),$$

$$\underline{y}_{12}(1,\lambda)=\frac{5}{16M^3}(\operatorname{sh}M-\sin M)+\frac{1}{16M^2}(\operatorname{ch}M-\cos M),$$

$$\overline{y}_{11}(1,\lambda)=\frac{3m^2}{2\lambda}(\operatorname{ch}m-\cos m)-\frac{2M^2}{\lambda}(\operatorname{ch}M-\cos M),$$

$$\overline{y}_{12}(1,\lambda)=\frac{2}{\lambda}(\operatorname{ch}m+\cos m)-\frac{2}{\lambda}(\operatorname{ch}M+\cos M),$$

$$\underline{y}''_{11}(1,\lambda)=\frac{9M}{16}(\operatorname{sh}M-\sin M)+\frac{M^2}{16}(\operatorname{ch}M-\cos M),$$

$$\underline{y}''_{12}(1,\lambda)=\frac{9}{16M}(\operatorname{sh}M+\sin M)+\frac{1}{16}(\operatorname{ch}M+\cos M)-\frac{1}{4M^2}(\operatorname{ch}M-\cos M),$$

$$\overline{y}''_{11}(1,\lambda) = 3(\operatorname{ch} m + \cos m) - 3(\operatorname{ch} M + \cos M)^2,$$

$$\overline{y}''_{12}(1,\lambda) = \frac{2m^2}{\lambda}(\operatorname{ch} m - \cos m) - \frac{3}{M^2}(\operatorname{ch} M - \cos M).$$

Уравнения (4.7) для данного примера при $n=1$ перепишутся в виде

$$\overline{D}_1(\lambda) = \overline{y}_{11}(1,\lambda)\overline{y}''_{12}(1,\lambda) - \underline{y}_{12}(1,\lambda)\underline{y}''_{11}(1,\lambda) = 0,$$

$$\underline{D}_1(\lambda) = \underline{y}_{11}(1,\lambda)\underline{y}''_{12}(1,\lambda) - \overline{y}_{12}(1,\lambda)\overline{y}''_{11}(1,\lambda) = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем оценки для первого собственно значения

$$\overline{\lambda}_1^{(1)} = 67{,}58 \quad , \quad \underline{\lambda}_1^{(1)} = 63{,}58.$$

Производя построение третьих приближений по указанным рекуррентным формулам получим улучшенные для первого собственного значения

$$\overline{\lambda}_2^{(1)} = 64{,}87, \qquad \underline{\lambda}_2^{(1)} = 64{,}78$$

(погрешность не превышает 0,13%)[1].

Поступило 18 VII 1957

АН УССР, Киев, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1 Беллман Р., **Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений**, ИЛ,. М., 1954.
2 Чаплыгин С. А., **Собрание сочинений**, т. 1, ИАН, М., 1948.
3 Collatz Th., *Eigenwertaufgaben*, Akad. Verlagsges., Leipzig, 1949.

THE CONSTRUCTIONS OF UPPER AND LOWER ESTIMATES FOR EIGENVALUES BOUNDARY PROBLEMS

(Summary)

The author considers the eigenvalue boundary problem (2.1), (2.2), (2.3) and obtains a sequence of upper and lower functions for the solutions of the equation (1.1) with given initial conditions.

CONSTRUIREA MARGINILOR SUPERIOARE ŞI INFERIOARE ALE SOLUŢIILOR UNOR PROBLEME PE CONTUR

(Rezumat)

Autorul, în cadrul studiului problemei pe contur dată prin (2.1), (2.2), (2.3), obţine un şir de margini superioare şi inferioare pentru soluţia problemei dată prin ecuaţia (1.2), cu un număr de condiţii pe contur.

---

1) Другим приближенным методом получены для первого собственного значения следующие оценки $\lambda^{(1)} = \frac{1}{2}\pi^4$, $\overline{\lambda}^{(1)} = \pi^4$ [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

517.521

CRITERII DE EXISTENŢĂ PENTRU LIMITA UNUI ŞIR CU TERMENI REALI

DE

AL. CLIMESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26—29 iunie 1958

1. Este un fapt bine cunoscut că singurul criteriu suficient pentru existenţa limitei unui şir, comun întrebuinţat, este acela al monotoniei. F. Leja [1] a demonstrat criterii de existenţă a limitei bazate pe monotonia în medie, interesante deoarece se postulează relaţii ternare între termenii şirului. Criteriile de convergenţă pentru seriile cu termeni de semne oarecare oferă alte exemple, dar sub o formă sau alta monotonia este esenţial întrebuinţată (criteriile lui Abel, Dirichlet, Leibniz).

Faţă de această situaţie, apare firească întrebarea daca predominanţa monotoniei este o urmare a comodităţii de aplicare a acestui criteriu, sau dacă există raţiuni mai profunde. Teorema I de mai jos răspunde, cel puţin parţial, la această întrebare.

2. Pentru uşurinţa exprimării, vom indica aici notaţia întrebuinţată şi noţiunile noi de care vom avea nevoie.

O relaţie n-ară se va simboliza prin $\varrho(x_1, x_2, \ldots x_n)$; în cazul binar vom scrie mai simplu $a \varrho b$. O relaţie binară se va numi totală dacă este reflexivă şi dacă $(a \varrho b) \vee (b \varrho a)$ pentru orice pereche de numere a, b.

Se zice că şirul $a_1, a_2, \ldots$ satisface la relaţia n-ară ϱ dacă $\varrho(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1})$, $(k = 1, 2, \ldots)$; o relaţie ϱ fiind dată, ansamblul şirurilor care satisfac la ϱ se va numi cîmp al relaţiei (cîmpul poate fi vid).

Se zice că o relaţie ϱ implică o relaţie σ, simbolic $\varrho \leqslant \sigma$, dacă cîmpul relaţiei ϱ este inclus în cîmpul relaţiei σ. Această noţiune pare a fi utilă în special în cazul relaţiilor binare.

Fie A şirul a_n, B şirul b_n, ϱ o relaţie totală. Vom numi clasă dreaptă a elementului b_n în raport cu A ansamblul termenilor a_k din A pentru care $b_n \varrho a_k$. Clasa dreaptă se va nota $D(b_n)$. Similar se defineşte clasa stîngă $S(b_n)$; definiţie similară pentru cazul cînd B ar fi un şir multiplu. În particular B poate coincide cu A şi atunci (prin reflexivitate)

BUDAPESTI MOZAIK KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$D(a_n)$, $S(a_n)$ nu sînt vide. În D, respectiv S, termenii egali de indici distincți sînt considerați ca elemente distincte.

3. Teorema I. *Fie ϱ o relație binară cu următoarele două proprietăți:*

I) $a \varrho b \to (a+h) \varrho (b+h)$ *pentru orice număr* h (invarianța la translație).

II) $a_n \varrho a_{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ *implică existența limitei șirului* A, *oricare ar fi* A.

Atunci ϱ implică monotonia.

Să observăm în primul rînd că din $a \varrho b$ rezultă $x \varrho (x+b-a)$ (se ia în I) $h = x - a$). Vom arăta că ipoteza existenței perechilor $a \varrho b$, $c \varrho d$, cu $b - a > 0$, $c - d < 0$ contrazice condiția II), de unde va rezulta evident că toate șirurile care satisfac la relația ϱ sînt monotone (fie crescătoare, fie descrescătoare). Notăm $b - a = \alpha$, $d - c = \beta$; se pot prezenta două cazuri:

(i) α/β este un număr rațional $= -(m/n)$, $(m, n > 0)$, adică $n\alpha + m\beta = 0$.

Construim șirul:

$$a, a+\alpha, a+2\alpha, \ldots, a+n\alpha, a+n\alpha+\beta, a+n\alpha+2\beta, \ldots, a+n\alpha+m\beta = a, a+\alpha, \ldots$$

În virtutea observației făcute mai sus șirul satisface la ϱ și conține subșirurile $a, a, a, \ldots, a+\alpha, a+\alpha, \ldots$ cu limite distincte, deci II) este contrazis.

(ii) α/β este un număr irațional (negativ). Fie m_1/n_1, $m_2/n_2, \ldots$, $m_k/n_k, \ldots$ redusele consecutive ale dezvoltării în fracție continuă a numărului $-(\alpha/\beta)$. se știe că $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots, n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$, iar din proprietăți cunoscute (cf. de ex. [2, p. 305]) rezultă că șirul $h_k\alpha + m_k\beta$ are ca limită zero.

Construim șirul:

$$a, a+\alpha, \ldots, a+n_1\alpha, a+n_1\alpha+\beta, \ldots, a+n_1\alpha+m_1\beta, a+(n_1+1)\alpha+m_1\beta, \ldots,$$
$$a+n_k\alpha+m_k\beta, a+(n_k+1)\alpha+m_k\beta, \ldots$$

Acest șir satisface la ϱ și conține subșirurile:

$$a, a+n_1\alpha+m_1\beta, \ldots a+n_k\alpha+m_k\beta, \ldots,$$

$$a+\alpha, a+(n_1+1)\alpha+m_1\beta, \ldots, a+(n_k+1)\alpha+m_k\beta, \ldots$$

care tind respectiv la $a, a+\alpha$, deci condiția II) este contrazisă. Ipoteza de la care am plecat este deci absurdă și avem fie $x \varrho y$ cu $y - x \geqslant 0$, fie $x \varrho y$ cu $y - x \leqslant 0$, adică ϱ implică monotonia.

Observație. Relația ϱ se poate interpreta geometric în modul următor: fie M o mulțime de puncte din planul coordinatizat. Evident apartenența la M poate fi interpretată ca o relație binară și reciproc, adică $a \varrho b \longleftrightarrow (a, b) \in M$. Geometric condiția I) se exprimă atunci prin cerința ca odată cu (a, b) aparțin lui M toate punctele de pe paralela la prima bisectoare ce trece prin (a, b).

4. Teorema II. *Fie $A(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,)$ un șir simplu și T șirul dublu al mediilor aritmetice* (adică $b_{ij} = (a_i + a_j)/2$). *Condiția necesară și*

suficientă pentru existența limitei şirului A constă în verificarea simultană a următoarelor două condiții:

(iii) *Dacă* $D(a_k), S(a_k), D(a_l), S(a_l)$ *sînt toate infinite, atunci* $a_k = a_l$;

(iiii) *Dacă* $D(b_{kl}), S(b_{kl}), D(b_{mn}), S(b_{mn})$ *sînt toate infinite, atunci* $b_{kl} = b_{mn}$.

Observație. Clasele ambelor şiruri se iau în raport cu A, iar ϱ este obişnuita ordonare numerică.

Vom expune demonstrația în mai multe etape.

Etapa 1. Dacă $\lim a_n = \infty, D(a_n)$ este infinită şi $S(a_n)$ este finită pentru orice indice n; mulțimea termenilor care satisfac la (iiii) este vidă, deci condiția este automat satisfăcută şi evident acelaşi rezultat este valabil pentru clasele elementelor din T. Necesitatea condiției este demonstrată în acest caz şi similar pentru cazul $\lim a_n = -\infty$.

Dacă $\lim a_n = a$ se pot distinge două cazuri: există termeni ai şirului egali cu a şi ambele clase ale unui astfel de termen sînt infinite. Dacă $a_k < a, S(a_k)$ este finită, iar dacă $a_k > a, D(a_k)$ este finită, deci (iii) este verificată; dacă ansamblul termenilor egali cu a este finit sau vid, aceştia sînt singurii care ar putea da loc la clase D şi S simultan infinite. În toate cazurile (iii) este verificată. Rezultatul se extinde la (iiii) deoarece singurii termeni din T care ar putea s-o verifice sînt necesar egali cu a. Necesitatea celor două condiții este astfel demonstrată în toate cazurile.

Etapa 2. Să presupunem A nemărginit şi verificînd (iii). Şirul nu poate fi nemărginit în ambele sensuri, deoarece ar exista termeni distincți ca valoare cu ambele clase infinite. Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că A este nemărginit la dreapta, deci toate clasele D sînt infinite. Dacă ar exista elemente cu ambele clase infinite, fie a valoarea lor comună — a cărei existență este asigurată de (iii) —, orice termen $> a$ ar trebui să aibă de asemenea ambele clase infinite (prin tranzitivitatea monotoniei), ceea ce contrazice (iii). Prin urmare nu pot exista termeni cu clasa stîngă infinită şi, prin definiție, şirul are limita ∞, iar condiția (iiii) este automat satisfăcută.

Similar pentru cazul şirurilor nemărginite inferior şi prin urmare suficiența este demonstrată pentru cazul şirurilor nemărginite.

Etapa 3. Fie A mărginit în ambele sensuri. Termenii şirului se împart în trei categorii complimentare:

(u) Termeni cu D infinită şi S finită;

(v) Termeni cu D finită şi S infinită;

(w) Termeni cu D şi S infinite.

Dacă în A există numai termeni (w), după (iii) toți termenii şirului sînt egali, limita este valoarea lor comună şi (iiii) este automat satisfăcută.

Dacă în A există numai termeni (u) alegem un a_n oarecare şi din $S(a_n)$ alegem termenul (sau termenii) de valoare minimă a. Orice $a_m \geqslant a$, altfel $a_m < a$ ar implica $a_m < a_n$ deci $a_m \in S(a_n)$ ceea ce contrazice alegerea lui a. A are deci unul sau mai mulți termeni de valoare minimă a. Alegem $a_k > a$ şi considerăm $S(a_k)$. Dacă în $S(a_k)$ figurează numai termeni egali cu a_k şi termeni egali cu a, oricare alt element este $> a_k$.

Dacă în $S(a_k)$ există şi alţi termeni decît aceia mai sus indicaţi, alegem cea mai mică valoare dintre termenii $> a$ şi apoi continuăm procedeul. Se vede că şirul se poate aranja ca un şir monoton crescător, deci şirul iniţial are de asemenea limită, fie ea L, iar $a_n < L$ (dacă ar exista un $a_n = L$, $S(a_n)$ ar fi infinită). Cum $b_{kl} < L$, condiţia (iiii) este automat satisfăcută, deoarece $S(b_{kl})$ este finită. Suficienţa este demonstrată şi în acest caz şi la fel dacă şirul ar fi compus numai din termeni (v).

Etapa 4. Să presupunem că în A ar fi numai termeni (u) şi termeni (w). Fie a valoarea comună a termenilor (w); orice alt a_n este $< a$, altfel $S(a_n)$ ar fi infinită. Termenii diferiţi de a se aranjează într-un şir monoton crescător (ca în etapa 3) de limită $L \leqslant a$. Numărul termenilor egali cu a nu poate fi finit (altfel clasa dreaptă a unui astfel de termen ar fi finită). Şirul ar putea avea două puncte limită, L şi a. Există termeni $a_k \neq a$ pentru care $a_k > L - \varepsilon$ deci $(a_k + a)/2 > (a + L - \varepsilon)/2 > L$ dacă $\varepsilon < a - L$; cum $(a_k + a)/2 < (L + a)/2 < a$ am avea $S(a_k)$ şi $D(a_k)$ ambele infinite şi (iiii) ar fi contrazisă deoarece există în T o infinitate de termeni egali cu a. Prin urmare $L = a$ şi şirul are limită.

Similar dacă în A sînt numai termeni (v) şi (w).

Etapa 5. Să presupunem că în A există numai termeni (u) şi termeni (v). Dacă de exemplu numărul termenilor (v) ar fi finit, termenii (u) se aranjează într-un şir monoton crescător de limită L şi termenii $\geqslant L$ sînt în număr finit, deci limita există în virtutea condiţiei (iii), iar condiţia (iiii) este automat satisfăcută. Dacă atît termenii (u) cît şi termenii (v) sînt în număr infinit, termenii (u) se pot aranja într-un şir monoton crescător şi termenii (v) într-un şir monoton descrescător, fie l şi L limitele lor ($l \leqslant L$). Nu există în şir termeni egali cu l sau L (un astfel de termen ar avea ambele clase infinite); există deci $l - \varepsilon < a_k < a_l < l$, $L < a_m < L + \varepsilon$; $(a_k + a_m)/2 \neq (a_l + a_m)/2$. Dacă $l < L$ şi $\varepsilon < L - l$, $l < (a_k + a_m)/2 < L$, $l < (a_l + a_m)/2 < L$, deci ar exista în T termeni de valoare distinctă cu ambele clase infinite, ceea ce contrazice (iiii). Prin urmare $l = L$ şi şirul are limită.

Etapa 6. Ca mai sus fie l limita termenilor (u), L limita termenilor (v), a valoarea comună a termenilor (w). Evident $l \leqslant a \leqslant L$ şi se conchide ca în etapa 5 că $l = L$, deci $l = L = a$ este limita şirului.

Suficienţa condiţiilor (iii) şi (iiii) este acum demonstrată în toate cazurile.

Din demonstraţie mai rezultă şi următoarea teoremă:

Dacă este satisfăcută numai condiţia (iii) *şirul are cel mult trei puncte limită.*

5. Iată cîteva exemple interesante.

a) Relaţia ϱ definită prin $x \varrho y \longleftrightarrow x \leqslant 0$ şi $y = l$, are cîmpul vid.

b) Teorema şirurilor monotone se poate demonstra foarte simplu în modul următor:

Fie $a_1 \leqslant a_2 \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$; extragem un subşir b_n tinzînd către $l = \lim a_n$ şi un altul c_n cu limita $L = \overline{\lim} a_n$. $c_l \leqslant b_n$ cu excepţia cel mult a unui număr finit de indici, deci $c_l \leqslant l$ şi similar $c_n \leqslant l$, adică $L \leqslant l$, de unde $l = L = \lim a_n$.

Demonstraţia se extinde aproape cuvînt cu cuvînt la următorul caz mai general:

Fie $f(x,y)$ definită şi continuă în tot planul, $f(x,x)=0$, $f(x,y)\neq 0$ dacă $x\neq y$ şi $f(x,y)\leqslant 0 \rightarrow f(y,x)\geqslant 0$ şi reciproc. Definim $x\,\varrho\,y \longleftrightarrow f(x,y)\leqslant 0$. Dacă a_n este un şir mărginit şi $a_i\,\varrho\,a_j$ pentru toţi indicii i,j cu $i\leqslant j$, şirul are limită ($f(b_l,c_n)\leqslant 0$ dă la limită $f(b_l,L)\leqslant 0$ şi similar $f(b_n,L)\leqslant 0$ dă la limită $f(l,L)\leqslant 0$ şi la fel $f(L,l)\leqslant 0$, adică $f(l,L)=f(L,l)=0$, adică $l=L$).

c) Să definim relaţia ternară ϱ prin $\varrho(x,y,z) \longleftrightarrow z \quad x+(x-y)(y-z)\leqslant 0$. Fie a_n un şir mărginit şi $\varrho(a_i,a_j,a_k)$ pentru toţi i,j,k, cu $i\leqslant j\leqslant k$. Atunci şirul are limită. Ca mai sus $\varrho(b_l,c_n,c_{n+1})$ deci la limită $L-b_l+(b_l-L)(L-L)\leqslant 0$ sau $L\leqslant b_l$, apoi $L\leqslant b_n$, deci $L\leqslant l$, deci $L=l$ şi similar dacă şirul nu ar fi bornat.

d) Fie $x\,\varrho\,y \longleftrightarrow y=(-1)^n x/k^n$, unde k este un număr oarecare $\geqslant a>1$ (eventual variabil de la caz la caz). Atunci $a_n\,\varrho\,a_{n+1}$ asigură convergenţa la zero a şirului a_n.

e) $x\,\varrho\,y \longleftrightarrow e^y-e^x-1\geqslant 0$ şi $a_n\,\varrho\,a_{n+1}$, $(n=1,2,\ldots)$. Atunci şirul a_n are limită egală cu ∞ (este de altfel monoton crescător).

f) Echivalenţele nu sînt utile în această problemă, deoarece singura echivalenţă care asigură existenţa limitei este cea mai fină echivalenţă, al cărui cîmp este ansamblul şirurilor cu toţi termenii egali.

g) Uneori se pot trage concluzii utile din verificarea unei relaţii care nu asigură limita. De exemplu: fie $x\,\varrho\,y \longleftrightarrow xy\leqslant 1$ şi $a_i\,\varrho\,a_j$ pentru toţi i,j, cu $i\leqslant j$. Şirul este mărginit şi $l^2\leqslant 1$, $L^2\leqslant 1$, $lL\leqslant 1$.

h) Este de la sine înţeles că rezultatele rămîn valabile dacă şirul satisface la ϱ după eliminarea unui număr finit de termeni.

Institutul Politehnic, Iaşi
Catedra de Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Leja F., Ann. Soc. Pol. de Math., 1946, **19**, pp. 133—139.
2. Nicolescu Miron, *Analiză Matematică*, t. I, Buc., Ed. tehn., 1957.

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

(Резюме)

Пусть A будет последовательностью a_n с действительными членами, B — другая последовательность с действительными членами b (простая или кратная, которая может совпадать с A). Называем правым классом члена b по отношению к A множество $D(b)$, состоящее из членов $a_n\geqslant b$; аналогично определяем левый класс $S(b)$ (если существуют равные члены, но с различными индексами, они будут рассматриваться как различные).

Доказываются следующие две теоремы:

Пусть ϱ будет бинарное соотношение (между действительными числами), обладающее следующими свойствами:

I) $a\,\varrho\,b \rightarrow (a+h)\,\varrho\,(b+h)$ **для всякого числа** h;

II) $a_n \varrho a_{n+1} (n=1,2...)$ влечёт за собой существование предела последовательности A
Тогда ϱ влечёт за собой монотонность (имеет $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$). или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ...$).

Эта теорема объясняет, как нам кажется, привиледированное положение критери монотонности.

II. Пусть A $(a_1, a_2, ...)$ будет простой последовательностью, а T (b_{ij}) двойной последовательностью средних арифметических $(b_{ij} = (a_i + a_j)/2)$. Необходимое и достаточное условие для существования предела последовательности A выражается совокупностью следующих двух условий.

(iii) Если $D(a_k)$, $S(a_k)$, $D(a_l)$, $S(a_l)$ являются бесконечными множествами, тогда $a_k = a_l$

(iii) Если $D(a_{kl})$, $S(a_{kl})$, $D(a_{mn})$, $S(a_{mn})$ являются бесконечными множествами, тогда $a_{kl} = a_{mn}$.

Классы взяты по отношению к последовательности A.

Работа заканчивается несколькими примерами, между которыми находится краткое доказательство теоремы монотонных последовательностей (пример b), распространяющееся само собой на тройное соотношение примера c.

CRITÈRES D'EXISTENCE POUR LA LIMITE D'UNE SUITE À TERMES RÉELS

(Résumé)

Soit A une suite a_n à termes réels, B une autre suite à termes réels b (simple ou multiple, pouvant coïncider éventuellement avec A). On appelle classe droite du terme b par raport à A l'ensemble $D(b)$ composé des termes $a_n \geqslant b$; on définit d'une manière analogue la clase gauche $S(b)$ (s'il y a des termes égaux, ils seront considérés comme distincts).

On demontre les deux théorèmes suivants :

I. *Soit ϱ une relation binaire (entre nombres réels) jouissant des propriétés suivantes :*
I) $a \varrho b \rightarrow (a + h) \varrho (b + h)$ *pour tout nombre* h ;
II) $a_n \varrho a_{n+1}$, $(n=1, 2, \ldots)$ *impliquent l'existence de la limite de* A.
Alors ϱ implique la monotonie (on a $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ *ou bien* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$).

Ce théorème explique, croyons-nous, la position privilégiée du critère de la monotonie.

II. *Soit $A(a_1, a_2, \ldots)$ une suite simple et T (b_{ij}) la suite double des moyennes arithmétiques $(b_{ij} = (a_i + a_j)/2)$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la limite de la suite A s'exprime par l'ensemble des deux conditions suivantes :*
(iii) *Si $D(a_k)$, $S(a_k)$, $D(a_l)$, $S(a_l)$ sont des ensembles infinis, alors $a_k = a_l$.*
(iiii) *Si $D(a_{kl})$, $S(a_{kl})$, $D(a_{mn})$, $S(a_{mn})$ sont des ensembles infinis, alors $a_{kl} = a_{mn}$.*
Les clases sont prises par rapport à la suite A.

Le travail se termine par quelques exemples, dont une démonstration en quelques lignes du th. des suites monotones (ex. b) qui s'étend d'elle-même à la relation ternaire de l'exemple c.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

519.217

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ В ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

И. Д. ЧЕРКАСОВ

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В n-мерном евклидовом пространстве R_n $\left(\text{с метрикой } ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx^{i2}\right)$ рассмотрим случайную векторную функцию

$$X(t) = (X^1(t), \ldots, X^n(t)). \tag{1}$$

Пусть $P(t, x; \tau, G)$ обозначает условное распределение вероятностей перехода, т. е.

$$P(t, x; \tau, G) = \text{Вер.}\{X(\tau) \in G / X(t) = x\}, \tag{2}$$

где $t < \tau$, а G — некоторая область R_n.

Определение. Будем говорить, что нам задан марковский процесс с плотностью вероятностей перехода $f(t, x; \tau, \xi)$ (t — временная координата, причем $t \in [t_1, t_2]$), если

$$P(t, x; \tau, G) = \int_G f(t, x; \tau, \xi)\, d\xi \tag{3}$$

и для функции $f(t, x; \tau, \xi)$ выполнены следующие условия (см., например, [1]):

$$f(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\int_{R_n} f(t, x; \tau, y)\, dy = 1, \tag{5}$$

$$f(t, x; \tau, \xi) = \int_{R_n} f(t, x; s, y)\, f(s, y; \tau, \xi)\, dy. \tag{6}$$

В данной работе предполагается (см. [2]), что рассматриваемый процесс имеет непрерывные траектории, т. е.

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s - t} \int_{\bar{G}} f(t, x; s, y)\, dy = 0, \quad x \bar{\in} G. \tag{7}$$

Предположим, что существуют пределы:

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \int_G (y^i - x^i) f(t, x; s, y)\, dy = A^i(t, x), \tag{8}$$

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \int_G (y^i - x^i)(y^j - x^j) f(t, x; s, y)\, dy = 2B^{ij}(t, x), \tag{9}$$

где точка x содержится внутри некоторой открытой области G, а сходимость интегралов равномерная относительно точки x.

При некоторых дополнительных предположениях А. Н. Колмогоров доказал (см. [1]), что f удовлетворяет двум уравнениям параболического типа, первое из которых имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^i(t, x) \nabla_i f + B^{ij}(t, x) \nabla_i \nabla_j f = 0. \tag{10}$$

Оказывается, что в большинстве практически важных случаев марковский процесс с непрерывными траекториями (см. [2]) однозначно определяется своими инфинитезимальными характеристиками A^i и B^j. В дальнейшем обозначаем через $R_{(r)}$ подпространство пространства R_n с числом измерений $n_r = x_r - k_{r-1}$ и системой координат $(x^{k_{r-1}+1}, x^{k_{r-1}+2}, \ldots, x_{k_r})$, причем $k_r (r = 1, \ldots, s)$ связаны соотношением:

$$0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_r < k_{r+1} < \cdots < k_s = n. \tag{11}$$

Отметим очевидные равенства:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n, \quad R_{(1)} R_{(2)} \cdots R_{(s)} = R_n. \tag{12}$$

$dx^{(r)}$ обозначаем элемент объема пространства $R^{(r)}$, а точку $(x^{k_{r-1}+1}, \ldots, x^{k_r})$ этого пространства для краткости будем обозначать $x^{(r)}$. Предположим, что $B^{ij}\eta_i \eta_j > 0$, если $\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 > 0$.

Теорема. Пусть матрицы коэффициентов уравнения (10) имеют такое строение $(r = 1, \ldots, s)$:

$$B^{ij} = B^{ij}(t, x^{(r)}), \quad A^i = A^i(t, x^{(r)}) \tag{13}$$

при $k_{r-1} + 1 \leqslant i, j \leqslant k_r$; в остальных случаях предполагаем, что $B^{ij} = 0$.

Тогда необходимым и достаточным условием существования и единственности решения f уравнения (10) с непрерывными производными, входящими в это уравнение, определяющего марковский процесс в пространстве R_n, является существование единственного вектора $f = (f^1, \ldots, f^r, \ldots, f^s)$, каждая компонента которого f^r удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f^r}{\partial t} + A^\alpha \nabla_\alpha f^r + B^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f^r = 0 \tag{14}$$

с непрерывными $\nabla_\alpha f^r, \nabla_\alpha \nabla_\beta f^r, \dfrac{\partial f^r}{\partial t}$ и является плотностью распределения вероятностей марковского процесса в пространстве $R_{(r)}$. В (14) суммирование по α, β производится в пределах от $k_{r-1}+1$ до k_r. При этом из выполнимости равенств (7)...(9) для функции f вытекает выполнимость их для каждой f^r в соответствующем пространстве $R_{(r)}$ и наоборот.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О РАЗДЕЛЕНИИ

1°. Достаточность. Пусть существует единственный вектор f такой, что каждая его компонента f^r удовлетворяет соответствующему уравнению (14) и определяет непрерывный марковский процесс в пространстве $R_{(r)}$, т. е. выполняются соотношения:

$$f^r(t, x^{(r)};\ \tau, \xi^{(r)}) \geqslant 0, \tag{15}$$

$$\int_{R_{(r)}} f^r(t, x^{(r)};\ \tau, y^{(r)})\, dy^{(r)} = 1, \tag{16}$$

$$f^r(t, x^{(r)}; \tau, \xi^{(r)}) = \int_{R_{(r)}} f^r(t, x^{(r)}; s, y^{(r)})\, f^r(s, y^{(r)};\ \tau, \xi^{(r)})\, dy^{(r)}, \tag{17}$$

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \int_{G_{(r)}} f^r(t, x^{(r)};\ s, y^{(r)})\, dy^{(r)} = 0,\ x^{(r)} \overline{\in} G_{(r)}, \tag{18}$$

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \int_{G_{(r)}} (y^\alpha - x^\alpha)\, f^r(t, x^{(r)};\ s, y^{(r)})\, dy^{(r)} = A^\alpha(t, x^{(r)}), \tag{19}$$

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \int_{G_{(r)}} (y^\alpha - x^\alpha)(y^\beta - x^\beta)\, f^r(t, x^{(r)};\ s, y^{(r)})\, dy^{(r)} = 2B^{\alpha\beta}(t, x^{(r)}). \tag{20}$$

В (19) и (20) считаем, что $k_{r-1}+1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k_r$ и точка $x^{(r)}$ содержится внутри некоторой области $G_{(r)}$ пространства $R_{(r)}$, по которой производится интегрирование.

Рассмотрим функцию

$$U(t, x^1, \ldots, x^n;\ \tau, \xi^1, \ldots, \xi^n) = \prod_{r=1}^{s} f^r(t, x^{(r)};\ \tau, \xi^{(r)}). \tag{21}$$

Дифференцированием получаем:

$$\nabla_i U = \left(\prod_{r \neq l} f^r \right) \nabla_i f^l,\ k_{l-1}+1 \leqslant i \leqslant k_l; \tag{22}$$

$$\nabla_i \nabla_j U = (\nabla_i \nabla_j f^l) \prod_{r \neq l} f^r,\ k_{l-1}+1 \leqslant i, j \leqslant k_l, \tag{23}$$

(24) $$\frac{\partial}{\partial t} U = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} \prod_{r \neq k} f^r \right).$$

Обозначая оператор, стоящий в левой части равенства (10), через $\mathfrak{L}$, получим на основании (22)...(24) и условий теоремы:

$$\mathfrak{L}U = \sum_{r=1}^{s} \left\{ \sum_{\alpha, \beta = k_{r-1}+1}^{k_r} (B^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f^r) \prod_{l \neq r} f^l + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha = k_{r-1}+1}^{k_r} \left(\prod_{l \neq r} f^l \right) A^\alpha \nabla_\alpha f^r + \frac{\partial f^r}{\partial t} \prod_{l \neq r} f^l \right\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{s} \left\{ \prod_{l \neq r} f^l \left[\sum_{\alpha, \beta = k_{r-1}+1}^{k_r} B^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f^r + \sum_{\alpha = k_{r-1}+1}^{k_r} A^\alpha \nabla_\alpha f^r + \frac{\partial f^r}{\partial t} \right] \right\}.$$

Отсюда согласно (14) имеем

(25) $$\mathfrak{L}\, U = 0,$$

т. е. функция (21) есть решение уравнения (10).

Теперь покажем, что U удовлетворяет соотношениям (4)...(9). Условия (4), (5) очевидны. Далее

$$\int_{R_n} U(t, x; s, y)\, U(s, y; \tau, \xi)\, dy = \prod_{r=1}^{s} \left[\int_{R_s} f^r(t, x^{(r)}; s, y^{(r)})\, f(s, y^{(r)}; \tau, \xi^{(r)})\, dy^{(r)} \right] =$$

$$= \prod_{r=1}^{s} f^r(t, x^{(r)}; \tau, \xi^{(r)}) = U(t, x; \tau, \xi),$$

т. е. уравнение Колмогорова-Чепмена для функции U выполняется.

Не останавливаясь на доказательстве равенств (7) и (8), рассмотрим (9). Пусть $k_{r-1}+1 \leqslant i, j \leqslant k_r$, $(r=1,...,s)$. Имеем:

$$I = \frac{1}{s-t} \int_G (y^i - x^i)(y^j - x^j)\, U(t, x; s, y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{s-t} \prod_{r \neq l} \left[\int_{G_{(l)}} f^l(t, x^{(l)}; s, y^{(l)})\, dy^{(l)} \right] \int_{G_{(r)}} (y^i - x^i)(y^j - x^j) f^r(t, x^{(r)}; s, y^{(r)})\, dy^{(r)}.$$

Из (16) и (18) при $x^l \in G_{(l)}$ вытекает:

(26) $$\lim_{s \to t} \int_{G_{(l)}} f^l(t, x^{(l)}; s, y^{(l)})\, dy^{(l)} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{s \to t} I = \lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \int_{G_{(r)}} (y^i - x^i)(y^j - x^j) f^r(t, x^{(r)}; s, y^{(r)})\, dy^{(r)},$$

что, согласно равенства (20), равносильно

$$\lim_{s \to t} I = 2 B^{ij}(t, x^{(r)}). \tag{27}$$

Пусть теперь

$$k_{r-1} + 1 \leqslant i \leqslant k_r \;;\; k_{u-1} + 1 \leqslant j \leqslant k_u \;,\; u \neq r \;,\; x \in G.$$

В этом случае имеем

$$\mathcal{J} = \frac{1}{s-t} \int_G (y^i - x^i)(y^j - x^j)\, U(t, x; s, y)\, dy = I_1 I_2 I_3,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{s-t} \int_{G_{(r)}} (y^i - x^i) f^r(t, x^{(r)}; s, y^{(r)})\, dy^{(r)},$$

$$I_2 = \int_{G_{(u)}} (y^j - x^j) f^u(t, x^{(u)}; s, y^{(u)})\, dy^{(u)},$$

$$I_3 = \prod_{l \neq u,\, l \neq r} \int_{G_{(l)}} f^l(t, x^{(l)}; s, y^{(l)})\, dy^{(l)}.$$

Равенства (19) и (26) показывают, что

$$\lim_{s \to t} I_1 = A^i(t, x^{(r)}), \quad \lim_{s \to t} I_2 = 0, \quad \lim_{s \to t} I_3 = 1,$$

откуда находим

$$\lim_{s \to t} \mathcal{J} = 0. \tag{28}$$

Из (27) и (28) вытекает, что соотношение (9) для функции U, определенной равенством (21), выполняется, на чем заканчивается доказательство достаточности (единственность $f = U$ следует из единственности вектора $(f^1, \ldots, f^s)$).

2°. Необходимость. В условиях теоремы допустим, что существует единственная функция $f(t, x; \tau, y)$, удовлетворяющая уравнению (10) и условиям (4)...(9). При доказательстве необходимости дополнительно предположим, что A^i и B^{ij} бесконечно дифференцируемые функции, а R_n—ограниченная область евклидова пространства.

При таких предположениях (см., например, [4]) существуют функции $f^1, \ldots, f^s$, каждая из которых удовлетворяет соответствующему уравнению (14), а также соотношениям (15), (16), (17) и

$$\lim_{s \to t} \int_{T_{(r)}} \varphi(y^{(r)})\, f^r(t, x^{(r)}; s, y^{(r)})\, dy^{(r)} = \begin{cases} 0, & x^{(r)} \overline{\in} T_{(r)}, \\ \varphi(x^{(r)}), & x^{(r)} \in T_{(r)}. \end{cases} \tag{29}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(t, x; \tau, y) = \prod_{r=1}^{s} f^r(t, x^{(r)}; \tau, y^{(r)}). \tag{30}$$

Видно, что f_1 удовлетворяет уравнению (10) и соотношениям (4)...(6).

Обозначим через $\varrho_x(y)$ функцию от y, показывающую расстояние от точки y до некоторой фиксированной точки $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}, \ldots, x^{(s)})$. Ясно, что

$$\varrho_x^2(y) = \varrho_{x^{(1)}}^2(y^{(1)}) + \ldots + \varrho_{x^{(r)}}^2(y^{(r)}) + \ldots + \varrho_{x^{(s)}}^2(y^{(s)}),$$

где $\varrho_{x^{(r)}}(y^{(r)})$ обозначает расстояние от точки $y^{(r)}$ до фиксированной точки $x^{(r)}$ в пространстве $R^{(r)}$.

На основании (16) получим:

$$\lim_{\tau \to t} \int_{R_n} \varrho_x^2(y)\, f_1(t, x; \tau, y)\, dy = \sum_{r=1}^{s} \lim_{\tau \to t} \int_{R_{(r)}} \varrho_{x^{(r)}}^2(y^{(r)})\, f^r(t, x^{(r)}; \tau, y^{(r)})\, dy^{(r)}.$$

С применением (29) это нам дает

$$\lim_{\tau \to t} \int_{R_n} \varrho_x^2(y)\, f_1(t, x; \tau, y)\, dy = 0. \tag{31}$$

Из (9) вытекает, что функция $f(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет равенству (31). Следовательно, две функции (f, f^1) являются решением уравнения (10) и удовлетворяют соотношениям (4)...(6) и (31). Согласно теоремы единственности 2 (см. [1], § 3)

$$f(t, x; \tau, y) = \prod_{r=1}^{s} f^r(t, x^{(r)}; \tau, y^{(r)}). \tag{A}$$

Так как f удовлетворяет равенствам (7)...(9), то из последнего равенства легко получить соответствующие равенства (18)...(20) для каждой функции $f^r(t, x^{(r)}; \tau, y^{(r)})$. На этом доказательство теоремы заканчивается.

§ 3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

На практике, зачастую, метод разделения применяется в сочетании с методом преобразования аргументов. Поэтому встает вопрос об инвариантности соотношений (4)...(9) при замене x^i координатами $x^{i'}$.

Преобразуем уравнение (10) с помощью формул вида:

$$t' = \varphi(t),\ \tau' = \varphi(\tau);$$

$$x^{i'} = \psi^{i'}(t, x^1, \ldots, x^n),\ \xi^{i'} = \psi^{i'}(\tau, \xi^1, \ldots, \xi^n); \tag{32}$$

$$f(t, x; \tau, \xi) = |I(\tau, \xi)|\, f'(t', x'; \tau', \xi'),$$

где I — якобиан преобразования:

$$I = \left| \frac{\partial \psi^{i'}(\tau, \xi^1, \ldots, \xi^n)}{\partial \xi^i} \right|. \tag{33}$$

Предполагаем, что преобразование (32) взаимно - однозначное и непрерывно дифференцируемое достаточное число раз. Очевидно, соотношения (4)...(7) инвариантны, т.е они будут выполнены и для функции f'.

Коэффициенты A^i и B^{ij} преобразуются при замене системы координат по формулам:

$$A^{i'} = \frac{1}{\varphi'}\left\{B^{ik}\nabla_i\nabla_k\psi^{i'} + A^j\nabla_j\psi^{i'} + \frac{\partial\psi^{i'}}{\partial t}\right\}, \tag{34}$$

$$B^{i'j'} = \frac{1}{\varphi'}[B^{ij}\nabla_i\psi^{i'}\nabla_j\psi^{j'}]. \tag{35}$$

Вычислим теперь интеграл

$$R = \lim_{\tau'\to t'}\frac{1}{\tau' - t'}\int_G (y^{i'} - x^{i'}) f'(t', x'; \tau', y')\, dy'. \tag{36}$$

Согласно (32) получаем:

$$f'(t', x'; \tau', y')\, dy' = f(t, x; \tau, y)\, dy;$$
$$\tau' - t' = \varphi(\tau) - \varphi(t) = \varphi'(t^*)(\tau - t),\ \text{где}\ t^* \in [t, \tau].$$

По формуле Тейлора имеем:

$$y^{i'} - x^{i'} = (y^i - x^i)\nabla_i\psi^{i'}(t, x) + \frac{\partial\psi^{i'}(t, x)}{\partial t}(\tau - t) +$$
$$+ \frac{1}{2}[\nabla_m\nabla_k\psi^{i'}(t, x)]^*(y^m - x^m)(y^k - x^k) + \left[\frac{\partial^2\psi^{i'}(t, x)}{\partial t^2}\right]^*(\tau - t)^2 + \varepsilon,$$

причем символ $[\ldots]^*$ означает, что аргументы выражения, стоящего внутри квадратных скобок, находятся внутри сегментов

$$[\min(x^i, y^i),\ \max(x^i, y^i)],\ [t, \tau],\ [i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому равенство (36) нам дает:

$$R = R^1 + R^2 + R^3 + R^4, \tag{37}$$

где введены обозначения :

$$R^1 = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\varphi'(t^*)(\tau - t)} \int_G (y^i - x^i) \nabla_i \psi^{i'}(t, x) f(t, x; \tau, y)\, dy,$$

$$R^2 = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\varphi'(t^*)(\tau - t)} \int_G \frac{1}{2} [\nabla_m \nabla_k \psi^{i'}(t, x)]^* (y^m - x^m)\, y^k - x^k) f(t, x; \tau, y)\, dy,$$

$$R^3 = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\varphi'(t^*)} \int_G f(t, x; \tau, y) \frac{\partial}{\partial t} \psi^{i'}(t, x)\, dy,$$

$$R^4 = \lim_{\tau \to t} \frac{\tau - t}{\varphi'(t^*)} \int_G \left[\frac{\partial^2 \psi^{i'}(t, x)}{\partial t^2} \right]^* f(t, x; \tau, y)\, dy.$$

На основании (8) находим :

$$R^1 = \frac{1}{\varphi'(t)} A^i(t, x) \nabla_i \psi^{i'}(t, x). \tag{38}$$

Из (5) и (7) вытекает формула аналогичная (26) :

$$\lim_{s \to t} \int_G f(t, x; s, y)\, dy = 1, \quad x \in G, \tag{39}$$

где G—любая область R_n, содержащая точку x.

Так как функция $\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^{i'}(t, x) \right]^*$ ограничена в области G, то согласно (39)

$$R^3 = \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{\partial \psi^{i'}(t, x)}{\partial t}, \qquad R^4 = 0. \tag{40}$$

Теперь имеем :

$$[\nabla_m \nabla_k \psi^{i'}(t, x)] = \nabla_m \nabla_k \psi^{i'}(t, x) + \varepsilon^{i'}_{mk}(t, x; \tau, y), \tag{41}$$

где $\varepsilon^{i'}_{mk} \to 0$ при $\sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)^2 + (\tau - t)^2 \to 0$.

Поэтому теперь легко получаем :

$$R^2 = \frac{1}{\varphi'(t)} B^{km}(t, x) \nabla_m \nabla_k \psi^{i'}(t, x). \tag{42}$$

В результате этого равенства (37), (38), (40), (42) и (34) показывают, что

$$R = A^{i'}, \tag{43}$$

что в соединении с равенством (36) доказывает инвариантность соотношения (8). Аналогично доказывается, что равенство (9) есть также инвариант преобразования системы координат по формулам (32).

§ 4. ПРИМЕР

Покажем на примере, как можно находить плотность распределения вероятностей марковского процесса, применяя одновременно методы разделения и преобразования. Рассмотрим процесс в трехмерном пространстве (x^1, x^2, x^3) с такими матрицами коэффициентов уравнения (10) :

$$\|B^{ij}\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{x^{1^4}+2}{2x^{1^4}+1}\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -8 \\ 0 & -8 & 5 \end{Vmatrix}, \quad \|A^i\| = \begin{Vmatrix} \sin^2 x^1 \\ t^2+1 \\ \dfrac{1}{t} \end{Vmatrix}. \tag{44}$$

Методом Феллера (см. [3]) построим функцию $U^1(t, x^1; \tau, \xi^1)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{x^{1^4}+2}{2x^{1^4}+1}\sin t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^{1^2}} + \sin^2 x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} = 0 \tag{45}$$

и определяющую марковский процесс на прямой (x^1).

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 13\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2^2}} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial x^{3^2}} - 16\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^3} + (t^2+1)\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial x^3} = 0. \tag{46}$$

Введем новые аргументы и функцию :

$$\begin{cases} x^{2'} = \psi^{2'}(t, x^2, x^3) = x^2 + 2x^3 - \dfrac{1}{3}t^3 - t - 2\ln t; \\ x^{3'} = \psi^{3'}(t, x^2, x^3) = 2x^2 + 3x^3 - \dfrac{2}{3}t^3 - 2t - 3\ln t; \\ \xi^{2'} = \psi^{2'}(\tau, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^{3'} = \psi^{3'}(\tau, \xi^2, \xi^3); \\ f(t, x^2, x^3; \tau, \xi^2, \xi^3) = f'(t, x^{2'}, x^{3'}; \tau, \xi^{2'}, \xi^{3'}). \end{cases} \tag{47}$$

Очевидно, это преобразование взаимно-однозначное. По формулам (34) и (35) получим :

$$A^{i'} = 0, \quad B^{i'j'} = \begin{cases} 1, i' = i, \\ 0, i' \neq i, \end{cases} \qquad (i', j' = 2, 3). \tag{48}$$

Теперь находим плотность вероятностей, соответствующую коэффициентам (48) :

$$U^{2'} = \frac{1}{4\pi(\tau - t)}\exp\left[-\frac{(\xi^{2'} - x^{2'})^2 + (\xi^{3'} - x^{3'})^2}{4(\tau - t)}\right]. \tag{49}$$

Поэтому функция

$$U^2(t, x^2, x^3; \tau, \xi^2, \xi^3) = U^{2'}(t, \psi^2(t, x^2, x^3), \psi^3(t, x^2, x^3); \tau, \psi^2(\tau, \xi^2, \xi^3), \psi^3(\tau, \xi^2, \xi^3))$$

является решением уравнения (46) и определяет марковский процесс в пространстве (x^2, x^3) (здесь использованы результаты § **3** об инвариантности соотношений (4)...(9)).

Коэффициенты (44) удовлетворяют условиям теоремы § **2**. А поэтому функция

$$U(t, x^1, x^2, x^3; \tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = U^1(t, x^1; \tau, \xi^1)\, U^2(t, x^2, x^3; \tau, \xi^2, \xi^3)$$

является плотностью распределения вероятностей марковского процесса, соответствующего коэффициентам (44).

В заключение выражаю благодарность профессору Б. М. Гагаеву за помощь автору при написании данной работы.

Поступило 24 II 1958

Казанский Педагогический Институт,
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A., Math. Ann., 1933, **103**, S. 149—160.
2. Дынкин Е. Б., ИАН СССР (серия математическая), 1952, **16**, *6*.
3. Феллер В., УМН, 1938, *5*, стр. 57—96.
4. Yosida K., Osaka Mathem. J., 1953, **5**, *1*, pp. 65—74.

DIVISION'S METHOD IN THE THEORY OF MARKOV PROCESSES

(Summary)

It is known that the continuous Markov processes may be described by (10), where $f(t, x; \tau, \xi)$ is the density of probabilities'distribution and A^i, B^{ij} are defined in one n-dimensional space R_n (with the metric $ds^2 = ds^{12} + \cdots + dx^{n2}$).

The author investigates the problem concerning the necessary and sufficient conditions to be

$$f(t, x; \tau, \xi) = \prod_{r=1}^{s} f^r(t, x^{(r)}; \tau, \xi^{(r)}),$$

where $(x^{(r)}) = (x_{k_{r-1}+1}, \ldots, x_{k_r})$, $(r = 1, \cdots, s)$ and f^r is the density of the probabilities' distribution of certains processes in $R_{(r)} = (x^{(r)})$.

We shall mention, for exemple, the conditions (13).

Necessity was proved in the following hypothesis: R_n is one limited domain of an euclidian space and A^i, B^{ij} are infinite diferentiable functions.

In the § **3** is proved the invariability of the fundamental relations of the Markov processes applied in a solved problem.

METODA DIVIZIUNII ÎN TEORIA PROCESELOR LUI MARKOV

(Rezumat)

Autorul studiază problema de stabilire a condiţiilor necesare şi suficiente astfel ca densitatea distribuţiei de probabilitate să fie de forma (A).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

513.19

ZERLEGUNGSGLEICHHEIT EBENER POLYGONE

VON

W. BOLTJANSKI

Der klassische Satz von W. Bolyai und P. Gerwien sagt aus, dass je zwei flächengleiche Polygone zerlegungsgleich sind. Das vor kurzem von H. Hadwiger und P. Glur bewiesene Theorem [1] bildet eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Um dieses Theorem zu formulieren, müssen wir an den Begriff der $\mathfrak{G}$-Zerlegungsgleichheit erinnern. Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Bewegungsgruppe der Ebene und M und M' zwei Polygone. Diese Polygone heisen *$\mathfrak{G}$-zerlegungsgleich*, wenn es Polygone $N_1, N_2, \ldots, N_k$ und Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathfrak{G}$ geben, die folgenden Bedingungen befriedigen:

1) Die Polygone $N_1, N_2, \ldots, N_k$ besitzen keine gemeinsame innere Punkte;

2) Die Polygone $g_1(N_1), g_2(N_2), \ldots, g_k(N_k)$ besitzen auch keine gemeinsame innere Punkte;

3) Das Polygon M ist die Vereinigung der Polygone $N_1, N_2, \ldots, N_k$;

4) Das Polygon M' ist die Vereinigung der Polygone $g_1(N_1), g_2(N_2), \ldots, g_k(N_k)$.

Es sei jetzt $\mathfrak{D}$ die Gesamtheit aller Bewegungen der Ebene und $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit aller Zentralen Symetrien und aller Translationen der Ebene ($\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ sind Gruppen). Dann gelten folgender Sätze:

Satz I. (Bolyai und Gerwien): *Je zwei flächengleiche Polygone sind $\mathfrak{D}$-zerlegungsgleich.*

Satz II. (Hadwiger und Glur): *Je zwei flächengleiche Polygone sind $\mathfrak{S}$-zerlegungsgleich.*

Wir lösen die folgende Aufgabe, *alle solchen Bewegungsgruppen $\mathfrak{G}$ zu finden, für welche je zwei flächengleiche Polygone $\mathfrak{G}$-zerlegungsgleich sind.* Im folgenden werden wir alle diese Bewegungsgruppen als $\mathfrak{Z}$-*Gruppen* bezeichnen. Wir beweisen:

Satz III. *Die Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe, wenn $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{S}$.*

Die Bedingung $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{S}$ ist offenbar ausreichend (siehe Satz II). Wir werden ihre Notwendigkeit Beweisen (d. h. wir werden beweisen dass von allen $\mathfrak{Z}$-Gruppen, die Gruppe $\mathfrak{S}$ *minimal* ist).

Beweis. Man sagt, das eine Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ *transitiv* ist, wenn es zu je zwei Punkten A, B der Ebene ein Element $g \in \mathfrak{G}$ gibt derart, dass $g(A)=B$ ausfällt.

Hilfssatz A. *Jede* $\mathfrak{Z}$*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist transitiv.*

Nehmen wir das Gegenteil an; und seien A und B zwei solche Punkte, dass kein Element $g \in \mathfrak{G}$ der Bedingung $g(A)=B$ entspricht. Wir sagen, dass ein Punkt C *angemerkt* ist, wenn es ein solches Element $g \in \mathfrak{G}$ gibt, dass $g(A)=C$ ist. Setzen wir:

$$\varkappa(C) = \begin{cases} 0, & \text{wenn der Punkt } C \text{ nicht angemerkt ist,} \\ 1, & \text{wenn der Punkt } C \text{ angemerkt ist.} \end{cases}$$

Es sei M ein Polygon, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seine inneren Winkel und $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die Scheitelpunkte dieser Winkel. Setzen wir

$$I(M)=\varkappa(C_1)\cdot\alpha_1+\varkappa(C_2)\cdot\alpha_2+\cdots+\varkappa(C_n)\cdot\alpha_n$$

so ist

$$I(gM))=I(M) \quad , \quad (g \in \mathfrak{G}),$$

und weiter

$$I(M=I(N_1)+I(N_2)+\cdots+I(N_k)+m\pi$$

(m ist eine ganze Zahl) ist, wenn die Polygone M, N_1, $N_2, \ldots, N_k$ den obigen Bedingungen 1) und 3) entsprechen. Daraus folgt, dass wenn die Polygone M und M' flächengleich sind,

$$I(M)=I(M')+m\pi$$

(m ist eine ganze Zahl) ist, da je zwei flächengleiche Polygone $\mathfrak{G}$-zerlegungsgleich sind.

Es seien jetzt $M=ABC$ und $M'=ABD$ zwei gleiche gleichschenkelige stumpfwinkelige Dreiecke (Abb. 1). Wir haben:

$$I(M) = \begin{cases} \pi-\alpha, & \text{wenn der Punkt } C \text{ angemerkt ist,} \\ \pi-2\alpha, & \text{wenn der Punkt } C \text{ nicht angemerkt ist;} \end{cases}$$

$$I(M') = \begin{cases} 2\alpha, & \text{wenn der Punkt } D \text{ angemerkt ist,} \\ \alpha, & \text{wenn der Punkt } D \text{ nicht angemerkt ist} \end{cases}$$

(denn der Punkt A ist angemerkt und der Punkt B nicht). Daraus folgt dass $I(M) \neq I(M')+m\pi$ $\left(\text{da } \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ d. h. dass die flächengleichen Polygone M und M' nicht $\mathfrak{G}$-zerlegungsgleich sind. Das steht aber im Widerspruch damit, dass $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist.

Hilfssatz B. *Jede* 3*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *enthält mindestens eine zentrale Symmetrie.*

Nehmen wir das Gegenteil an. Wählen wir eine Gerade aus, die die Achse einer Gleitspiegelung [1]) ist, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ mindestens eine solche enthält. (Wenn $\mathfrak{G}$ keine Gleitspiegelung enthält, so ist die erwähnte Gerade beliebig). Auf dieser Geraden wählen wir eine beliebige Richtung l^*.

Es sei l eine Richtung, die mit der Richtung l^* den Winkel α bildet. Wir sagen, dass die Richtung l *angemerkt* ist, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Drehung um den Winkel α enthält. Insbesondere ist die Richtung l^* selbst angemerkt. Durch $\bar{l}$ bezeichnen wir die Richtung, die zur Richtung l entgegengesetzt ist. Da die Gruppe $\mathfrak{G}$ keine Drehung um den Winkel π enthält, so ist von zwei Richtungen l, $\bar{l}$ höchstens eine angemerkt.

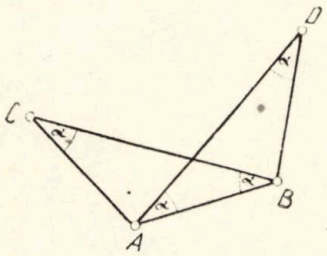


Abb. 1.

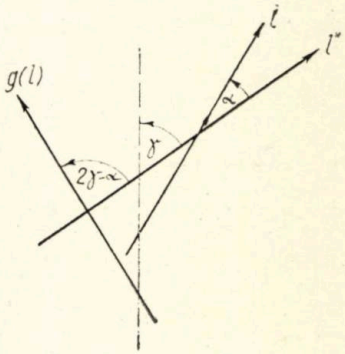


Abb. 2

Zeigen wir jetzt, dass *wenn die Richtung* l *angemerkt ist und* $g \in \mathfrak{G}$, *so ist die Richtung* $g(l)$ *auch angemerkt.* Das ist offenbar, wenn g eine Translation oder eine Drehung ist. Nehmen wir an, dass g eine Gleitspiegelung ist, deren Achse mit der Richtung l^* den Winkel γ bildet. Dann enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Drehung um den Winkel 2γ. Bezeichnen wir durch α den Winkel, der die Richtung l mit der Richtung l^* bildet. Dann enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ die Drehung um den Winkel α. Die Richtung $g(l)$ bildet mit der Richtung l^* den Winkel $2\gamma-\alpha$ (Abb. 2). Also ist die Richtung $g(l)$ angemerkt.

Es sei M ein Polygon, AB eine Seite und l die Richtung der äusseren Normalen zur Seite AB. Setzen wir

1) Eine Gleitspiegelung ist das Produkt einer Spiegelung und einer Translation, dabei ist die Richtung der Translation zur Achse der Spiegelung parallel. Die Achse der Spiegelung heisst auch Achse der Gleitspiegelung.

$$\lambda_M(AB) = \begin{cases} +1, \text{ wenn die Richtung } l \text{ angemerkt ist,} \\ -1, \text{ wenn die Richtung } \bar{l} \text{ angemerkt ist,} \\ 0, \text{ wenn die beiden Richtungen } l, \bar{l} \text{ nicht angemerkt sind.} \end{cases}$$

Es seien jetzt $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ die Seiten des Polygones M. Setzen wir

$$\mathfrak{J}(M) = |A_1A_2| \cdot \lambda_M(A_1A_2) + \cdots + |A_{n-1}A_n| \cdot \lambda_M(A_{n-1}A_n) + |A_nA_1| \cdot \lambda_M(A_nA_1).$$

Dann ist

$$\mathfrak{J}(M) = \mathfrak{J}(N_1) + \mathfrak{J}(N_2) + \cdots + \mathfrak{J}(N_k), \tag{1}$$

wenn die Polygone $M, N_1, N_2, \ldots, N_k$ den obigen Bedingungen 1) und 3) entsprechen. Wir wollen zeigen, dass

$$\mathfrak{J}(g(M)) = \mathfrak{J}(M), \quad (g \in \mathfrak{G}) \tag{2}$$

gilt.

Es sei AB eine Seite des Polygones M und l die Richtung der äusseren Normalen zur Seite AB. Es sei weiter $M' = g(M)$, $A'B' = g(AB)$,

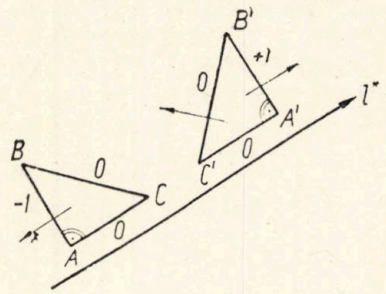


Abb. 3.

$l' = g(l)$. Dann ist l' die Richtung der äusseren Normalen zur Seite $A'B'$. Da $|AB| = |A'B'|$, so bleibt uns nur zu zeigen, dass

$$\lambda_M(AB) = \lambda_{M'}(A'B') \tag{3}$$

ausfällt.

Betrachten wir drei Fälle.

1) $\lambda_M(AB) = +1$, d. h. die Richtung l ist angemerkt. Dann ist die Richtung $l' = g(l)$ auch angemerkt und $\lambda_{M'}(A'B') = +1$.

2) $\lambda_M(AB) = -1$, d. h. die Richtung $\bar{l}$ ist angemerkt. Dann ist die Richtung $\bar{l}' = g\bar{l})$ auch angemerkt und $\lambda_{M'}(A'B') = -1$.

3) $\lambda_M(AB) = 0$, d. h. die Richtungen $l, \bar{l}$ sind nicht angemerkt. Da $l = g^{-1}(l')$, $\bar{l} = g^{-1}(\bar{l}')$, so sind die Richtungen $l', \bar{l}'$ auch nicht angemerkt und $\lambda_{M'}(A'B') = 0$.

Die Gleichheit (3) ist damit bewiesen.

Aus (1) und (2) folgt, dass wenn die Polygone M und M' flächengleich sind,

$$\mathcal{J}(M)=\mathcal{J}(M'),$$

gilt, da je zwei flächengleiche Polygone $\mathfrak{G}$-zerlegungsgleich sind.

Es seien jetzt $M=ABC$ und $M'=A'B'C'$ zwei gleiche gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, welche so liegen wie es in Abb. 3 gezeigt ist. Dann gilt

$$\lambda_M(AB)=-1, \quad \lambda_{M'}(A'B')=+1,$$

$$\lambda_M(AC)=\lambda_M(BC)=\lambda_{M'}(A'C')=\lambda_{M'}(B'C')=0,$$

d. h. $\mathcal{J}(M)\neq\mathcal{J}(M')$. Also sind die flächengleichen Polygone M und M' nicht $\mathfrak{G}$-zerlegungsgleich. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist.

Gehen wir jetzt zum Beweis des Satzes III über. Esei s eine zentrale Symmetrie, die der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehört (Hilfssatz B), und B der Zentrum dieser Symetrie. Es sei weiter A ein beliebiger Punkt der Ebene und g ein solches Element der $\mathfrak{Z}$-Gruppe $\mathfrak{G}$, dass $g(A)=B$ (Hilfssatz A) ist. Dann ist $g^{-1}.s.g$ die Symmetrie mit dem Zentrum A. Also enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ jede Zentrale Symmetrie, so dass $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{S}$ gilt. Der Satz III ist damit bewiesen.

Eingegangen am 10 VII 1957

Akademie der Wissenschaften,
Moskau, UdSSR

LITERATUR

1. Hadwiger H. u. Glur P., Elemente der Mathematik, 1951, **6**, S. 97—106.

РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ ПЛОСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

(Резюме)

Классическая теорема Бояй и Гервина утверждает, что каждые два равновеликих многоугольника равносоставлены. Обобщением этой теоремы является теорема, недавно доказанная Хадвигером и Глюром. Для того чтобы сформулировать эту теорему, мы должны напомнить понятие $\mathfrak{G}$ - равносоставленности. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная группа движений плоскости, а M и M'— два многоугольника. Эти многоугольники называются **$\mathfrak{G}$ - равносоставленными**, если существуют многоугольники N_1: N_2,..., N_k и элементы g_1, g_2 ..., $g_k\in\mathfrak{G}$, которые удовлетворяют следующим условиям,

а) многоугольники $N_1, N_2, \ldots, N_k$ не имеют общих внутренних точек и $M=N_1\cup N_2\cup\ldots\cup N_k$;

б) многоугольники $g_1(N_1)$, $g_2(N_2)$,..., $g_k(N_k)$ не имеют общих внутренних точек и $M'=g_1(N_1)\cup g_2(N_2)\cup\ldots\cup g_k(N_k)$.

Пусть теперь $\mathfrak{D}$ — группа всех движений плоскости, а $\mathfrak{S}$ — группа, состоящая из всех центральных симметрий и всех параллельных переносов плоскости. Тогда справедливы следующие теоремы:

Каждые два равновеликих многоугольника $\mathfrak{D}$ - равносоставлены (теорема Бояй — Гервина).

Каждые два равновеликих многоугольника $\mathfrak{S}$ – равносоставлены (теорема Хадвигера — Глюра).

В настоящей работе решается следующая задача: найти все такие группы движений $\mathfrak{G}$, для которых любые два равновеликих многоугольника $\mathfrak{G}$ – равносоставлены. Такие группы движений называются $\mathfrak{Z}$ - группами.

Основная теорема. **Группа движений $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда является $\mathfrak{Z}$ - группой, когда $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{S}$.**

ECHICOMPONENŢA POLIGOANELOR PLANE

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei a clasicei teoreme relativă la echicomponenţa poligoanelor echivalente, extinsă recent de Hadwiger şi Glur, rezolvă problema de determinare a grupelor de deplasare $\mathfrak{G}$, pentru care două poligoane echivalente oarecare sînt $\mathfrak{G}$-echicomponente.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

513.814

ASUPRA SUPRAFEŢELOR AVÎND LINIILE ASIMPTOTICE ALE UNUI SISTEM, CENTRO-AFIN ECHIVALENTE

DE

FROIM MARCUS

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26—29 iunie 1958

Geometria diferenţială centro-afină a suprafeţelor a fost edificată de O. Mayer [1]. În această geometrie, o suprafaţă raportată la parametrii asimptotici, este determinată pînă la o transformare centro-afină, de un sistem complet integrabil de forma

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v\,, \quad x_{uv} = \omega_v x_u + \omega_u x_v + a x\,, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v\,, \quad \theta_u = a_u + \omega_u\,;\ \theta_v = a_v + \omega_v\,;\ \ a = \log a\,, \end{cases}$$

coordonatele punctuale şi tangenţiale, respectiv, x_r şi ξ_r $(r = 1, 2, 3)$ fiind normate astfel încît $S\, x\, \xi = 1$.

Condiţiile de integrabilitate ale acestui sistem sînt [1]

$$(1')\qquad \beta\gamma - \omega_u\omega_v = a - a_{uv}\,,\quad \beta_v - \beta\, a_v = \omega_{uu} - \omega_u a_u\,,\quad \gamma_u + \gamma\, a_u = \omega_{vv} - \omega_v a_v\,.$$

În geometria centro-afină a curbelor, geometrie studiată de I. Popa [2], o curbă este determinată de o ecuaţie diferenţială de ordinul trei

$$(2)\qquad x_{ttt} = p_3 x_{tt} + p_2 x_t + p_1 x$$

t fiind parametrul ce determină un punct pe curbă. Arcul centro-afin al unei curbe este $ds^3 = p_1\, du^3$, p_1 fiind egal cu $\dfrac{(x_t\, x_{tt}\, x_{ttt})}{(x\, x_t\, x_{tt})}$, unde s-a notat cu $(\ldots)$ un determinant în care s-au scris elementele primei linii. Dacă curba este raportată la arcul centro-afin, atunci (2) devine [2]:

$$x_{sss} = \tau_2 x_{ss} + p_2 x_s + x\,,$$

$\tau_2 = \tau_2(s)$, $p_2 = p_2(s)$, fiind invarianţii care determină curba pînă la o transformare centro-afină.

Următoarea proprietate proiectiv diferenţială a suprafeţelor riglate este cunoscută [3]: *dacă curbele asimptotice nerectilinii ale unei suprafeţe riglate aparţin unui complex liniar, atunci ele sînt proiectiv echivalente.* Pentru suprafeţele neriglate, avem rezultatul lui A. Terracini [4]. Dacă curbele asimptotice al unui sistem aparţin unui complex liniar, atunci curbele asimptotice ale aceleaşi familii, sînt proiectiv echivalente. Demonstrarea de către Fubini [5] a reciprocei proprietăţii de mai sus pentru suprafeţele riglate, i-a sugerat în 1942 lui Chen Kuo-Pa [6] ideia de a se ocupa cu reciproca teoremei lui A. Terracini, obţinînd următorul rezultat:

În afara suprafeţelor ale căror curbe asimptotice dintr-un sistem sau din ambele sisteme aparţin la complexe liniare, există ∞^2 suprafeţe ale căror asimptote dintr-un sistem sînt proiectiv echivalente. Aceste suprafeţe sînt suprafeţele de coincidenţă minime proiective, iar curbele asimptotice ale celui de al doilea sistem sînt şi ele proiectiv echivalente.

La acelaşi rezultat şi în mod independent ajunge ceva mai tîrziu şi I. Popa în [7]. În adevăr, plecînd de la un rezultat al lui Wilczynski [8] şi anume, că pe o anumită clasă de suprafeţe de coincidenţă, liniile asimptotice din fiecare familie sînt proiectiv echivalente, I. Popa demonstrează că în afară de suprafeţele de coincidenţă semnalate de Wilczynski şi anume acelea pentru care

$$p_{11} = h\,,\ p_{22} = k\,,\quad h\,,\ k = \text{const.}, \tag{3}$$

(p_{ii} - coeficienţii bine cunoscuţi din teoria suprafeţelor [3]) nu există altele care să se bucure de aceeaşi proprietate. Însă aşa cum rezultă din [9] suprafeţele de coincidenţă cu p_{ii} ce satisfac (3) sînt singurele suprafeţe de coicidenţă care sînt în acelaşi timp minime proiective.

În această Notă ne ocupăm de aceeaşi problemă din punct de vedere centro-afin. Rezultatele obţinute arată că *în cazul geometriei diferenţiale centro-afine curbele asimptote dintr-o familie, sînt echivalente numai pe suprafeţe centro-afin minime şi anume:*

1) *Suprafeţele centro-afin minime cu* $\Delta_2\omega = 0, a = \text{const.}$ *şi care nu sînt în acelaşi timp suprafeţe T sau suprafeţe cu* $\Delta_1\omega = 0$.

2) *Suprafeţele minime cu* $\Delta_1\omega = 0$, *adică suprafeţele pe care liniile principale formează o familie de asimptote* (v. [1]) *şi cu* $a = \text{const.}$

3) *În fine, dintre suprafeţele T (Ţiteica) numai suprafaţa* $xyz = 1$ *se bucură de aceeaşi proprietate.*

1. Fie S o suprafaţă raportată la liniile asimptotice. Dacă ţinem seamă de (1), rezultă că ecuaţiile asimptotelor $v = \text{const.}$ şi $u = \text{const.}$ sînt date respectiv de

$$x_{uuu} = A_1 x_{uu} + B_1 x_u + C_1 x\,,\quad x_{vvv} = A_2 x_{vv} + B_2 x_v + C_2 x \tag{1.1}$$

cu

$$\begin{cases} A_1 = 2\omega_u + (\log a\beta)_u\,, \\ B_1 = (\log a)_{uu} + \omega_{uu} + \beta\omega_v - [(\log a)_u + \omega_u]\,[(\log \beta)_u + \omega_u]\,, \\ C_1 = a\beta\,, \\ A_2 = 2\omega_v + (\log a\gamma)_v\,, \\ B_2 = (\log a)_{vv} + \omega_{vv} + \gamma\omega_u - [(\log a)_v + \omega_v]\,[(\log \gamma)_v + \omega_v]\,, \\ C_2 = a\gamma\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Să presupunem că o centro-afinitate duce punctul x şi curba asimptotă $v = \text{const.}$ ce trece prin acest punct, într-un punct situat pe aceeaşi curbă $u = \text{const.}$ şi într-o asimptotă din aceeaşi familie $v = \text{const.}$ Pentru aceasta este necesar ca

$$A_{1v} = B_{1v} = C_{1v} = 0 \tag{1.3}$$

şi din primele trei condiţii (1.2) rezultă

$$\begin{cases} 2\omega_{uv} + (\log a\beta)_{uv} = 0\,, \\ (\log a)_{uuv} + \omega_{uuv} + (\beta\omega_v)_v - \{[(\log a)_u + \omega_u]\,[(\log \beta)_u + \omega_u]\}_v = 0\,, \\ (a\beta)_v = 0\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Din (1.4_1) ţinînd seamă de (1.4_3) deducem

$$\omega_{uv} = 0 \qquad \text{sau} \qquad \Delta_2\omega = 0\,. \tag{1.5}$$

După O. Mayer [1] rezultă că S este o suprafață minimă centro-afin. Avem deci următorul rezultat:

Numai pe suprafețe minime centro-afin, poate exista o familie de asimptote, centro-afin echivalente între ele.

Excluzînd pentru moment suprafețele T și acele indicate de O. Mayer în [1] cu $\Delta_1\omega = 0$ putem alege parametrii asimptotici astfel încît [1]

$$\omega = u + v \,. \tag{1.6}$$

Condițiile de integrabilitate (1') devin [1, p. 43]:

$$\beta\gamma = 1 + a - (\log a)_{uv} \,, \quad (a\beta)_v + a_u = 0 \,, \quad (a\gamma)_u + a_v = 0 \,. \tag{1.1''}$$

Determinarea suprafețelor căutate se va face ținînd seamă de (1.6), (1.1'') și (1.4). Din (1.4_3), (1.6) și (1.1'') rezultă

$$a\beta = F(u) \;;\; a_u = 0 \,, \; (F \text{ funcție arbitrară de } u) \,. \tag{1.7}$$

Deci

$$a = f(v) \,; \; \beta = F(u)/f(v) \,. \tag{1.8}$$

Tot din (1.1'') și din (1.8)

$$\gamma_u = -\,[\log f(v)]'_v \,. \tag{1.9}$$

Integrînd avem

$$\gamma = -\,f'(v)u/f(v) + \psi(v) \,, \; (\psi \text{ funcție arbitrară de } v). \tag{1.10}$$

Introducînd valorile lui a și β din (1.8) în (1.4_2) ținînd seamă și de (1.6) rezultă

$$F(u)f'(v) = 0 \,. \tag{1.11}$$

Excluzînd suprafețele riglate urmează

$$f'(v) = 0 \,. \tag{1.12}$$

Deci

$$a = a_0 = \text{const.} \tag{1.13}$$

Din (1.8) și (1.10)

$$\beta = F(u)/a_0 \,; \; \gamma = \psi(v) \,, \tag{1.14}$$

iar din ($1.1''_1$) ținînd seamă de (1.14)

$$F(u)\,\psi(v) = a_0(1 + a_0) \,. \tag{1.14'}$$

În consecință

$$\beta = \beta_0 \,; \gamma = (1 + a_0)/\beta_0 \,; \; a = a_0 \,, \; (\beta_0 = \text{const.}) \tag{1.15}$$

și sistemul (1) devine

$$x_{uu} = x_u + \beta_0 x_v \,, \; x_{uv} = x_u + x_v + a_0 x \,, \; x_{vv} = \gamma_0 x_u + x_v \,, \tag{1.16}$$

sistem complet integrat în [1, pp. 45...46] în care se consideră valoarea $h = 1$. Suprafețe căutate sînt date de soluțiile liniar independente ([1, p. 45...46]):

$$x_r = \exp(s_r u + t_r v);\ t_r = (s_r^2 - s_r)/\beta_0,\ (r = 1, 2, 3),$$

s_r fiind rădăcinile ecuației

$$s^3 - 2s^2 + (1 - \beta_0)s - a_0\beta_0 = 0. \tag{1.17}$$

În cazul cînd cele trei rădăcini ale acestei ecuații sint egale, adică [1] $s_1 = s_2 = s_3 = 2/3$ cu $\beta_0 = -1/3$; $a_0 = -8/9$ se obțin suprafețele determinate în [1, p. 46]

$$x_1 x_3 - x_2^2 + x_1^2 \log x_1 = 0. \tag{1.18}$$

Trebuie menționat aici că numai aceste suprafețe se bucură de proprietatea că curbele celor două familii de asimptote sînt între ele centro-afin echivalente. În adevăr, din (1.2) și (1.15)

$$A_{2u} = B_{2u} = C_{2u} = 0. \tag{1.3'}$$

Deci și asimptotele $u = \text{const.}$ sînt între ele centro-afin echivalente și din (1.1) și (1.2)

$$\begin{cases} x_{uuu} = 2x_{uu} + x_u(\beta_0 - 1) + a_0\beta_0 x, \\ x_{vvv} = 2x_{vv} + x_v(1 + a_0 - \beta_0)/\beta_0 + x\,a_0(1 + a_0)/\beta_0. \end{cases} \tag{1.1'}$$

Dacă

$$a_0 = \beta_0^2 - 1 \tag{1.19}$$

cele două ecuații au aceeași coeficienți. Introducînd această valoare în (1.17) și căutînd condiția ca cele trei rădăcini să fie egale, se găsește că aceasta are loc numai pentru $\beta_0 = -1/3$. Deci $a_0 = -8/9$.

2. Să determinăm suprafețele centro-afin minime cu $\Delta_1\omega = 0$ și care satisfac problemei de care ne ocupăm. Presupunînd că $v = \text{const.}$ sînt liniile principale ale suprafețelor căutate, rezultă din [1] $\omega_u = 0$. Excluzînd și în acest caz suprafețele T, se poate lua

$$\omega_v = 1. \tag{2.1}$$

Condițiile de integrabilitate (1') devin

$$\beta\gamma = a - (\log a)_{uv},\ (a\beta)_v = 0,\ (a\gamma)_u + a_v = 0. \tag{2.1'}$$

Din (2.1) și (2.1') rezultă că (1.4_1) și (1.4_3) sînt satisfăcute. Cum $\omega_u = 0$ avem din (1.4_2)

$$(\log a)_{uuv} + \beta_v - [(\log a)_u(\log\beta)_u]_v = 0. \tag{2.2}$$

Se poate dispune de parametrul u astfel ca

$$\beta = 1/a \tag{2.3}$$

și din (2.1'),

$$\gamma = a^2 - a(\log a)_{uv}, \tag{2.4}$$

a fiind o soluție a ecuației

[1] În [1] trebuie corectată valoarea respectivă.

$$[a^2 (\log a)_{uv} - a^3]_u - a_v = 0. \tag{2.5}$$

Comparînd (2.2) și (2.5) ținînd seama de (2.1) și (2.3)

$$a_u = 0 \tag{2.6}$$

și din (2.5), (2.6)

$$a_v = 0. \tag{2.7}$$

În consecință

$$a = a_0 = \text{const.} \tag{2.8}$$

și din (2.3), (2.4)

$$\beta = \beta_0 = 1/a_0; \quad \gamma = \gamma_0 = 1/a_0. \tag{2.8'}$$

Sistemul (1) devine în acest caz

$$x_{uu} = \beta_0 x_v, \quad x_{uv} = x_u + x/\beta_0, \quad x_{vv} = x_u/\beta_0^2 + x_v. \tag{2.9}$$

Suprafețele se determină sub formă finită ca la pct. **1** punînd $h = 0$ în sistemul din [1, p. 45]. Ecuația (1.17) devine

$$s^3 - \beta_0 s_0 - 1 = 0. \tag{2.9'}$$

3. *Cazul suprafețelor T.* Aceste suprafețe sînt caracterizate analitic de ecuația $\omega = \text{const}$. Condițiile de integrabilitate (1') devin

$$\beta\gamma = a - (\log a)_{uv}, \quad (\beta a)_v = 0; \quad (\gamma a)_u = 0. \tag{3.1}$$

Se pot schimba parametrii u și v astfel încît

$$\beta = \gamma = 1/a \quad \text{cu} \quad (\log a)_{uv} = a - 1/a^2, \tag{3.2}\ (3.3)$$

ecuație bine cunoscută. Prima și cea de-a treia condiție din (1.4) sînt verificate de (3.1). Din (1.4_2) deducem

$$(\log a)_{uuv} + 2(\log a)_u (\log a)_{uv} = 0. \tag{3.4}$$

Din (3.4) ținînd seamă de (3.3) avem

$$a_u = 0. \tag{3.5}$$

Deci $a_{uv} = 0$. În consecință din (3.3)

$$a^3 = 1. \tag{3.6}$$

Considerînd numai valoarea $a = 1$ se obține suprafața bine cunoscută $xyz = 1$. Deci numai suprafața cubică $xyz = 1$ este singura suprafață T care satisface problema noastră. În acest caz și curbele celei de-a doua familii de asimptote se bucură de aceeași proprietate și din (1.1) și (1.2) rezultă

$$x_{uuu} = x, \quad x_{vvv} = x. \tag{3.7}$$

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Mayer O., Ann. Sc. Univ. Jassy, 1934, **21**, *1—4*, pp. 1—77.
2. Popa I., *Contributions à la géometrie centro-affine différentielle,* Thèse. Université de Jassy, 1934.
3. Fubini G., Čech E., *Geometria proiettiva differenziale,* Tomo I, N. Zanichelli, Bologna, 1926.
4. Terracini A., Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1924, **59**, pp. 235-255.
5. Fubini G., Bull. of the American Math. Soc., 1941, **47**, pp. 418 - 451.
6. Chen Kuo-Pa, Revista de Matematicas y fisica teorica, Tukuman, 1942, **3**, pp. 341—349.
7. Popa I., Bull de la Section sc. de l'Acad. Roum., 1944, **27**, *5*.
8. Wilczynski E. J., Trans. of. the American Math. Soc., 1913, **14**, pp. 421—443.
9. Marcus F., Comunicările Acad. R. P. R, 1955, **4**, *2*, pp. 307—310.

О ПОВЕРХНОСТЯХ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ СИСТЕМЫ ЦЕНТРО-АФФИННО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ

(Резюме)

Автор определяет поверхности с семейством асимптотических кривых состоящего из центро-аффинно эквивалентных кривых в смысле геометрии разработанной О. Майером [1].

Чен Куо — Па работает над той же задачей с точки зрения дифференциальной проективной геометрии [6].

В этом случае только проективные минимальные поверхности обладают подобными свойствами.

В данной работе указывается, что только некоторые центро-аффинные минимальные поверхности могут иметь семейство асимптотических центро-аффинно эквивалентных кривых.

Поверхности эти следующие (см. [1]):

1. Минимальные центро-аффинные поверхности, имеющие $\Delta_2 \omega = 0$, $a = \text{const.}$ и не будучи в то же время поверхностями T или с $\Delta_1 \omega = 0$.
2. Минимальные центро-аффинные поверхности, имеющие $\Delta_1 \omega = 0$, $a = \text{const}$;
3. Поверхности $xyz = 1$.

Во всех этих случаях асимптотические кривые другого семейства также эквивалентны.

SUR LES SURFACES DONT LES COURBES ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTÈME SONT CENTRO-AFFINE ÉQUIVALENTES

(Résumé)

L'Auteur détermine les surfaces dont une famille de courbes asymptotiques est constituée des courbes centro-affine équivalentes au sens de la géométrie édifiée par O. Mayer [1].

Chen Kuo-Pa s'est occupé du même problème au point de vue de la géométrie projective différentielle [6]. Dans ce cas ce ne sont que les surfaces minima projectives qui possèdent une telle propriété.

On montre dans cette Note que seulement certaines surfaces minima centro-affines peuvent posséder une famille de courbes asymptotiques centro-affine équivalentes. Ces surfaces sont (v. [1]):

1. Les surfaces minima centro-affines ayant $\Delta_2 \omega = 0$, $a = \text{const.}$ et qui ne sont pas en même temps des surfaces T où $\Delta_1 \omega = 0$;
2. Les surfaces minima centro-affines $\Delta_1 \omega = 0$, $a = \text{const.}$;
3. La surfaces $xyz = 1$.

Dans tout ces cas les asymptotiques de l'autre famille sont aussi équivalentes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

513.77

ASUPRA UNEI CORESPONDENŢE PRIN INCIDENŢA A DOUĂ VARIETĂŢI RIGLATE DIN S_4

DE

ŞTEFANIA RUSCIOR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26—29 iunie 1958

În această Notă se studiază o anumită corespondenţă între două varietăţi riglate dintr-un S_4 afin. Această corespondenţă este o extindere a unei corespondenţe între congruenţe de drepte studiată în S_3 de I. Creangă [1].

Fie V şi V^* două varietăţi riglate din S_4 şi S o suprafaţă dată în acelaşi spaţiu. Vom numi generatoarele g ale lui V şi g^* ale lui V^* corespunzatoare, dacă se întîlnesc în acelaşi punct M_0 al suprafeţei S. Se determină o corespondenţă între punctele generatoarelor g şi g^* astfel încît hiperplanele tangente duse în punctele corespunzătoare ale celor două generatoare la cele două varietăţi, să taie planul tangent dus în M_0 la suprafaţa S, după aceeaşi dreaptă d. Această corespondenţă o vom numi prin incidenţă. Ea este o corespondenţă ce păstrează generatoarele celor două varietăţi. Ecuaţia corespondenţei astfel definită, se obţine în felul următor:

Fie S suprafaţa considerată dată de ecuaţia vectorială $\bar{r}_0=\bar{r}_0(u, v)$. Ecuaţia celor două varietăţi riglate este determinată de suprafaţa S ca suprafaţă directoare a lor şi de direcţiile generatoarelor date, respectiv de versorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$; ele se scriu sub forma:

$$(1) \qquad \bar{r}=\bar{r}_0(u, v)+w\bar{a}(u, v)\ ;\ \bar{r}^*=\bar{r}_0(u, v)+w^*\bar{b}(u, v).$$

În adevăr, am ales parametrii astfel, încît pentru $u=\text{const.}$ şi $v=\text{const.}$ corespunde pe varietatea V o generatoare g şi pe varietatea V^* o generatoare g^*. Ele formează o pereche de generatoare corespunzătoare şi se întîlnesc în punctul M_0 de pe S.

Pentru tratarea analitică a problemei se consideră un sistem de referinţă local şi anume: originea este chiar punctul M_0 iar versorii fundamentali sînt:

$$\bar{a}(1, 0, 0, 0),\ \bar{b}(0, 1, 0, 0),\ \frac{\partial\bar{r}_0}{\partial u}(0, 0, 1, 0),\ \frac{\partial\bar{r}_0}{\partial v}(0, 0, 0, 1).$$

În acest sistem hiperplanul tangent H dus la varietatea V într-un punct M al generatoarei g are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & T-t \\ a_{1u}w & a_{2u}w & a_{3u}w+1 & a_{4u}w \\ a_{1v}w & a_{2v}w & a_{3v}w & a_{4v}w+1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

unde am notat prin:

$$a_{iu} = \frac{\partial a_i}{\partial u}, \quad a_{iv} = \frac{\partial a_i}{\partial v}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Planul tangent T dus la suprafaţa S în punctul M_0 are ecuaţia $X=0, Y=0$. Dreapta de intersecţie a hiperplanului tangent H cu planul tangent T este dată de sistemul:

$$AX+BY+CZ+DT+E=0, \quad X=Y=0,$$

în care am notat prin A, B, C şi D determinanţii de ordinul al treilea formaţii din matricea:

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{1u} & a_{2u} & a_{3u}+1/w & a_{4u} \\ a_{1v} & a_{2v} & a_{3v} & a_{4v}+1/w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Hiperplanul H^* dus la varietatea V^* în punctul M^* de pe g^* intersectează planul tangent T după dreapta d^* dată de ecuaţiile:

$$A^*X+B^*Y+C^*Z+D^*T+E^*=0, \quad X=Y=0,$$

în care am notat prin A^*, B^*, C^* şi D^* determinanţii de ordinul al treilea ai matricei:

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} b_{1u} & b_{2u} & b_{3u}+1/w^* & b_{4u} \\ b_{1v} & b_{2v} & b_{3v} & b_{4v}+1/w^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Aceste două drepte au ca punct comun punctul M_0; pentru ca ele să se confunde este suficient să aibă şi aceeaşi direcţie.

Parametrii directori ai dreptei d sînt $(0, 0, -D, C)$, iar parametrii directori ai dreptei d^* sînt $(0, 0, -D^*, C^*)$. Pentru ca aceste drepte să se confunde trebuie să avem îndeplinită relaţia $C/C^*=D/D^*$. Dacă în această relaţie ţinem seamă de valorile lui C, D şi C^*, D^* deduse din matricele (2) şi (3) obţinem:

$$(4) \quad \left\{ w w^* \left[\frac{\partial(a_2, a_3)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(b_1, b_4)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(a_2, a_4)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(b_1, b_3)}{\partial(u, v)} \right] + w \left[b_{1u} \frac{\partial(a_2, a_3)}{\partial(u, v)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + b_{1v} \frac{\partial(a_2, a_4)}{\partial(u, v)} \right] + w^* \left[a_{2u} \frac{\partial(b_3, b_1)}{\partial(u, v)} + a_{2v} \frac{\partial(b_4, b_2)}{\partial(u, v)} \right] + \frac{\partial(a_2, b_1)}{\partial(u, v)} \right\} w w^* = 0.$$

Ecuaţia (4) arată că transformarea între punctele a două generatoare corespunzătoare este o omografie. Deci se poate enunţa rezultatul:

Corespondența prin incidență între două varietăți riglate care păstrează generatoarele, determină între punctele generatoarelor corespunzătoare o omografie.

Această omografie se reduce la omologie în cazul particular cînd avem: $\bar{a} = k\bar{b} + \bar{m}$, în care $k = \text{const}$, $\bar{m} =$ vector constant și $w, w^* \neq 0$.

În acest caz ecuația omologiei este dată de relația:

$$P w w^* + Q w + R w^* = 0,$$

în care P, Q, R se deduc din coeficienții relației (4).

În interpretarea precedentă s-a exclus punctul de intersecție a generatoarelor corespunzătoare, determinat de valorile $w = w^* = 0$. Acest punct este un punct singular al corespondenței prin incidență, în sensul că aici intersecția dintre hiperplanul tangent dus la varietatea V sau V^* și planul tangent dus la suprafața S este chiar planul tangent și nu dreapta d.

Cercetînd dreptele ce unesc punctele corespunzătoare date de (4) obținem următorul rezultat: *dreptele ce unesc punctele corespunzătoare în omografia (4) înfășoară în planul determinat de generatoarele corespunzătoare o conică.*

Într-adevăr, aceste drepte sînt date de ecuația vectorială:

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda\,[w\bar{a} - (nw + q)\bar{b}/(mw + p)]$$

în care λ este un parametru arbitrar.

Proiectînd pe axe obținem:

$$X = w + \lambda w, \quad Y = -(nw + q)\lambda/(mw + p), \quad Z = 0, \quad T = 0.$$

Eliminînd parametrul λ din aceste ecuații obținem o familie de drepte cînd w variază. Făcînd apoi o schimbare de parametru $1/w = \mu$ (w fiind diferit de zero) obținem familia de drepte

$$(5) \qquad (q\mu + n)\,\mu X + (m + p\mu)\,Y - q\mu - n = 0,$$

în care am notat prin:

$$m = \frac{\partial(a_2, a_3)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(b_1, b_4)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(a_2, a_4)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(b_1, b_3)}{\partial(u, v)}, \; n = b_{1u} \frac{\partial(a_2, a_3)}{\partial(u, v)} + b_{1v} \frac{\partial(a_1, a_4)}{\partial(u, v)},$$

$$p = a_{2u} \frac{\partial(b_3, b_1)}{\partial(u, v)} + a_{2v} \frac{\partial(b_4, b_2)}{\partial(u, v)}, \quad q = \frac{\partial(a_2, b_1)}{\partial(u, v)}.$$

Înfășurătoarea familiei (5) este o conică dată de ecuația

$$(6) \qquad n^2 X^2 + p^2 Y^2 + 2(np - 2mq) X Y + 2nq X - 2pq Y + q^2 = 0.$$

Conica găsită degenerează în cazul particular $q = 0$. Acesta este cazul cînd omografia găsită se transformă în omologie.

Să considerăm această corespondență în cazul varietăților riglate care admit suprafețe focale. Pe aceste varietăți două generatoare vecine se intersectează. Condițiile ca varietățile V și V^* să admită suprafețe focale sînt date de relațiile:

$$(7) \qquad \frac{\partial(a_2, a_4)}{\partial(u, v)} a_{2v} = \frac{\partial(a_2, a_3)}{\partial(u, v)} a_{1u}, \quad \frac{\partial(b_1, b_4)}{\partial(u, v)} b_{2v} = \frac{\partial(b_1, b_3)}{\partial(u, v)} b_{1u}.$$

Pentru astfel de varietăţi coordonatele focarelor sînt date de expresii analoage celor din S_3. Calculînd cele două forme diferenţiale ale lui Kummer se obţin focarele generatoarelor corespunzătoare, date de relaţiile:

$$\begin{aligned} &\bar{a}_u^2 w^2 + (\bar{a}_u^2 a_{4v} + \bar{a}_v^2 a_{3u}) w + a_{3u} a_{4v} - a_{4u} a_{3v} = 0, \\ &\bar{b}_u^2 w^{*2} + (\bar{b}_u^2 b_{4v} + \bar{b}_v^2 b_{3u}) w^* + b_{3u} b_{4v} - b_{4u} b_{3v} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Valorile lui w şi w^* din (8) verifică ecuaţia (6) dacă se ţine seamă de condiţiile (7). În concluzie obţinem următorul rezultat: *conica, obţinută ca înfăşurătoare a dreptelor ce unesc punctele corespunzătoare în omografia (4), trece prin focarele generatoarelor corespunzătoare.*

Institutul Politehnic, Iaşi
Catedra de Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Creangă I., St. şi Cerc. Şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1955, **6**, *1—2*, pp, 135 142.
2. Peterson K. M., Ann. Toulouse, 1905, (traduit par E. Cosserat et H. Frenkel).
3. Hunsi Hamid, C. R. Ac. Sci., Paris, 1935, **200**, pp. 1911—1913.

О СООТВЕТСТВИИ ПО ИНЦИДЕНТНОСТИ ДВУХ ЛИНЕЙЧАТЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПРОСТРАНСТВА S_4

(Резюме)

В аффинном пространстве S_4 рассматриваются два линейчатых многообразия V и V^* и их поверхность пересечения S.

Две образующие g и g^* находящиеся соответственно на этих двух многообразиях будут соответствующими если встречаются в общей точке M пространства S.

Определяется соответствие между точками образующих g и g^* таким образом, что касательные гиперпланы проведенные в соответствующих точках этих двух многообразий, пересекут касательную плоскость, проведенную к S и M по той же прямой.

Устанавливается, что подобное соответствие определяет между точками соответствующих образующих гомографию данную уравнением (4). Прямые, соединяющие соответствующие точки в гомографии (4) огибают коническое сечение.

В случае линейчатых многообразий, имеющих фокальные поверхности, полученное коническое сечение проходит через фокусы соответствующих образующих.

SUR UNE CORRESPONDANCE PAR INCIDENCE ENTRE DEUX VARIÉTÉS RÉGLÉES, DANS S_4

(Résumé)

Dans un S_4 affine on considère deux variétés réglées V, V^* et leur surface d'intersection S. Deux génératrices g et g^*, situées respectivement sur les deux variétés, sont dites correspondantes lorsqu'elles rencontrent la surface S dans un même point M.

On détermine une correspondance entre les points des génératrices g et g^* telle que les hyperplans tangents menés dans les points correspondants des deux variétés, coupent le plan tangent à S dans M, suivant la même droite.

On établit que la correspondance entre deux variétés réglées qui conservent les génératrices, détermine entre les points des génératrices correspondantes une homographie, donnée par l'équation (4).

Les droites qui relient les points correspondants dans l'homographie (4) enveloppent une conique dans le plan déterminé par les génératrices correspondantes. Lorsque les variétés réglées admettent des surfaces focales, la conique obtenue passe par les foyers des génératrices correspondantes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

513.82

OBSERVAŢII ASUPRA SPAŢIILOR CU TORSIUNE, CARE ADMIT O METRICĂ

DE

VIOREL MURGESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Problema metrizării spaţiilor cu conexiune afină, cu torsiune, poate fi pusă în două moduri. Mai întîi, dată o conexiune Γ^{i}_{jk} şi un tensor g_{ij}, să se postuleze relaţii compatibile între aceste două obiecte geometrice, lucru ce n-a fost realizat, în cazul general, pentru cîmp şi tensor fundamental, nesimetrici. Dificultatea ce provine din dualitatea contractării cu g^{ij} pare de neînlăturat [2].

Al doilea mod se referă la postularea lungimii unui vector dintr-un spaţiu cu conexiune, ca invariant al sistemului diferenţial definit prin condiţiile ca invariantul să fie o funcţie omogenă de componentele vectorului şi să se conserve prin transportul paralel al vectorului de-a lungul unui arc infinitezimal [7]. În acest mod de a privi problema intervine dificultatea integrării sistemului în cauză; dar pentru anumite categorii de spaţii, definite prin condiţiile de integrabilitate ale sistemului sau prin consecinţe ale acestora, se poate determina o metrică riemanniană [8]. De remarcat că definiţia dată nu exclude o metrică finsleriană şi chiar se pot da exemple de spaţii cu conexiune afină cu torsiune, care nu admit metrică riemanniană ([8, p. 80]).

Rezultatele lui Eisenhart referitoare la spaţii Riemann generalizate [3] sînt fructuoase; conexiunile afine pe care le obţine formînd simbolii lui Christoffel de speţa a doua prin contractarea celor de speţa întîia cu tensorul contravariant g^{ij}, definit prin condiţiile $g_{ij} = g_{(ij)}$ şi $g_{ij}\, g^{ik} = \delta^{k}_{j}$ — pe care le vom numi *conexiuni afine de speţa a doua* — crează problema inversă a determinării conexiunilor afine care să fie de speţa a doua, problemă la care vom da un răspuns în această Notă.

Urmărind metoda axiomatică de studiu a invarianţilor în spaţii cu conexiune afină, expusă de A. Haimovici în 1951 ([4], [5], [6]), am observat că spaţiile care se pretează în modul cel mai simplu la a li se defini o metrică riemanniană cu tensor fundamental simetric sau asimetric, sînt spaţiile cu conexiune afină cu curbură recurentă şi cvasi-recurentă. Rolul tensorului fundamental este jucat aici de tensorul Ricci simetrizat sau nesimetrizat Dacă aceste spaţii nu admit totdeauna o metrică a lungimilor, admit cu siguranţă o metrică unghiulară de tip Laguerre-Cayley.

În cele ce urmează se stabilesc cîteva proprietăţi ale spaţiilor cu curbură cvasi-recurentă, referitoare la proprietăţile lor metrice şi apoi se arată că, condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu cu conexiune afină să fie spaţiu Einstein generalizat este ca spaţiul să fie Ricci-recurent Însfîrşit, în legătură cu spaţiile cu metrică generalizată se stabilesc condiţiile necesare şi suficiente ca o conexiune afină să fie de speţa a doua.

Problema generală a compatibilităţii unei conexiuni cu o metrică generalizată sau, determinarea acesteia în funcţie de coeficienţii conexiunii, pare momentan neabordabilă. Credem că pentru aceasta este necesară ori o algebră tensorială care să păstreze nealterat sensul obişnuit al paralelismului, ori — ceea ce pare mai complicat — una care să impună o analiză tensorială cu un sens geometric sau fizic bine precizate.

§ 1. Lungimea unui vector într'un spaţiu cu conexiune afină

Să notăm cu $\overline{V}(v^i)$ un vector oarecare dintr-un spaţiu A_n cu torsiune. Numim lungime a acestui vector o funcţie $\Lambda(x^k, v^i)$ cu proprietatea că este omogenă şi se transportă prin paralelism din punctul (x^k) în punctul $(x^k + dx^k)$. Rezultă atunci că ea trebuie să fie o soluţie a sistemului diferenţial

$$(1.1)\quad \alpha)\ v^i \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} = \Lambda\,,\quad \beta)\ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} v^j \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i} = 0\,,\quad \gamma)\ R^h_{ijk}\, v^i \frac{\partial \Lambda}{\partial v^h} = 0\,,$$

cu condiţiile de completitudine

$$(1.2)\qquad \lambda^{pq}_m R^h_{ipq} = 0\,,\qquad \left(m = 1, 2, \ldots, \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right)$$

şi

$$(1.2'')\qquad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_l R^h_{ijk} = \mu^{pq}_{jkl} R^h_{ipq}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

unde λ^{pq}_m şi μ^{pq}_{jkl} au caracter tensorial şi sînt deocamdată funcţii arbitrare de punct.

Deoarece sistemul (1.1) urmează să definească lungimea oricărui vector al spaţiului, este rezonabil ca condiţiile de completitudine ale sistemului — ce se obţin prin impunerea condiţiilor ca toate consecinţele Poisson ale ecuaţiilor (1.1) să fie liniar dependente de ecuaţiile iniţiale — să fie independente de componentele vectorului, fapt de care am ţinut seamă în (1.2') şi (1.2''). Condiţia ca indicele m din (1.2') să ia valori de la 1 pînă la $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, nu exprimă altceva decît condiţia de unicitate a soluţiei. Dacă ne dispensăm de ea, presupunînd că indicele m satisface condiţiilor

$$m = 1, 2, \ldots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \ldots \text{ şi } m < \frac{n(n-1)}{2} - 1\,,$$

sistemul (1.1) poate admite mai mulţi invarianţi fundamentali. Funcţia Λ va fi aleasă în acest caz ca o combinaţie convenabilă de aceşti invarianţi.

Este de remarcat că definiţia dată este destul de largă, astfel încît ea nu exclude posibilitatea de a avea, în anumite categorii de spaţii, lungimea unui vector de formă deosebită de cea riemanniană.

Spre exemplu, pentru spațiile bidimensionale cu torsiune, ce nu sînt echiafine ($R^a_{aij} = B_{ij} \neq 0$), lungimea vectorului $\overline{V}(v^i)$ este de forma

$$\Lambda = e^{\varphi}\left[\frac{v^2 - \eta_1 v^1}{v^2 - \eta_2 v_1}\right]^{\frac{k}{2}} \sqrt{R^1_{212}(v^2)^2 + (R^1_{112} + R^2_{212})\, v^1 v^2 - R^2_{112}(v^1)^2}\,.$$

În cazul spațiilor care admit metrică riemanniană s-a observat că pentru anumite categorii de spații sistemul (1.1) este verificat de forme patratice în care rolul tensorului fundamental îl are tensorul lui Ricci [8].

Am amintit aceste lucruri deoarece în cursul paragrafului **2** se va uza de această definiție dată lungimii unui vector pentru a verifica existența funcției Λ în anumite spații.

§ 2. Spații cu curbură cvasi-recurentă

1. Vom spune că un spațiu cu conexiune afină este cu *curbură cvasi-recurentă* dacă tensorul de curbură satisface ralațiile

$$\nabla_l R^h_{ijk} = \sigma_l R^h_{ijk} + \delta^h_i \tau_{jkl}\,, \tag{2.1}$$

unde σ_l este un vector, numit *vector de recurență*, iar τ_{jkl} un tensor triplu covariant, antisimetric în primii doi indici, care este supus la singura restricție

$$\tau_{[jkl]} + \sigma_{[j} B_{kl]} = 2 B_{m[j} T_{kl]}{}^{m}\,, \tag{2.2}$$

ce rezultă cu ușurință din identitățile lui Bianchi, ținînd seamă de (2.1).

Contractînd în (2.1) indicii h și k, obținem relațiile

$$\nabla_l R_{ij} = \sigma_l R_{ij} - \tau_{ijl}\,,$$

din care, permutînd i cu j și sumînd, obținem relațiile

$$\nabla_l E_{ij} = \sigma_l E_{ij}\,, \tag{2.3}$$

unde

$$E_{ij} = R_{(ij)}\,. \tag{2.4}$$

Atunci, din (2.3) rezultă imediat că

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]} E_{ij} = \nabla_{[l}\sigma_{k]} E_{ij}\,. \tag{2.5}$$

Folosind formulele de comutare ale unui tensor dublu covariant și ale unui vector, avem încă

$$\nabla_{[l}\nabla_{k]} E_{ij} = E_{h(i} R^h_{j)kl} - T_{kl}{}^h \nabla_h E_{ij} \tag{2.6'}$$

și

$$\nabla_{[l}\sigma_{k]} = \partial_{[l}\sigma_{k]} - T_{kl}{}^h \sigma_h\,, \tag{2.6''}$$

unde ∂_l semnifică derivata ordinară cu privire la variabilele x^i. Înlocuind expresiile din (2.6′) şi (2.6″) în (2.5) şi ţinînd seamă de (2.3) se obţin relaţiile

$$E_{h(i}R^h_{j)kl} = \partial_{[l}\sigma_{k]}E_{ij}\,, \tag{2.7}$$

care sînt independente de tensorul iniţial τ_{ijk}.

2. Să vedem acum în ce condiţii un spaţiu cu curbură cvasi-recurentă admite drept expresie a lungimii unui vector $\bar{X}(X^i)$ cu originea în punctul (x^k) generic din A_n, funcţia

$$\Lambda = e^{-\frac{\varphi}{2}}\sqrt{E_{ij}X^iX^j}\,, \tag{2.8}$$

unde φ este deocamdată o funcţie arbitrară de punct. Dacă se înlocuieşte (2.8) împreună cu derivatele ei în sistemul (1.1), evident, ecuaţia α) este satisfăcută, iar ecuaţiile β) şi γ) devin

$$\begin{cases} \beta') & (\sigma_k - \varphi_k)E_{ij}X^iX^j = 0\,, \\ \gamma') & E_{h(i}R^h_{j)kl}X^iX^j = 0\,; \end{cases} \tag{2.9}$$

deci ecuaţiile β') sînt identic satisfăcute dacă

$$\varphi_k = \sigma_k\,, \tag{2.10}$$

iar ecuaţiile γ'), în baza relaţiilor (2.7), de asemenea, dacă

$$\partial_{[l}\sigma_{k]} = 0\,. \tag{2.11}$$

De aici rezultă atunci că *orice spaţiu cu curbură cvasi-recurentă admite o metrică de forma (2.8), dacă şi numai dacă vectorul de recurenţă* σ_k *este un gradient.*

Din (2.10) rezultă atunci obligatoriu $d\varphi = \sigma_k dx^k$, adică membrul drept este o diferenţială totală exactă.

3. În ceea ce priveşte metrica unghiulară a spaţiilor considerate, din definiţia unghiului a două direcţii $\bar{X}$ (X^i) şi $\bar{Y}$ (Y^i), dată de A. Haimovici în [4], [5], rezultă că spaţiile cu curbură cvasi-recurentă admit o metrică unghiulară de forma

$$\cos\Omega = \frac{E_{ij}X^iY^j}{\sqrt{E_{ij}X^iX^j}\,\sqrt{E_{kl}Y^kY^l}}, \tag{2.12}$$

dacă ecuaţiile

$$\begin{cases} [2E_{pq}E_{rs}\nabla_k E_{ij} - E_{ij}\nabla_k(E_{pq}E_{rs})]\,X^iX^pX^qY^jY^rY^s = 0, \\ [2E_{h(p}R^h_{j)kl}E_{pq}E_{rs} - E_{h.p}R^h_{q)kl}E_{ij}E_{rs} - \\ -E_{h(r}R^h_{s)kl}E_{ij}E_{pq}]\,X^iX^pX^qY^jY^rY^s = 0\,, \end{cases} \tag{2.13}$$

sînt satisfăcute identic cu privire la componentele X^k și Y^k. Acestea au fost obținute impunînd condiția ca funcția (2.12) să satisfacă un sistem de ecuații asemănător sistemului (1.1), care definește funcția unghi într-un spațiu de conexiune afină [5].

Este evident că datorită relațiilor (2.3), primele ecuații din (2.13) sînt satisfăcute identic; de asemenea și relațiile ultime din (3.13), datorită relațiilor (2.7).

De data aceasta, existența metricii unghiulare este independentă de alegerea vectorului de recurență σ_k și a tensorului τ_{ijk} și deci, *orice spațiu cu curbură cvasi-recurentă admite totdeauna o metrică unghiulară de tipul (2.12).*

4. Să considerăm transformarea (λ) a lui Einstein [1, p. 171], relativă la două conexiuni Γ^i_{jk} și $\bar{\Gamma}^i_{jk}$. Este bine cunoscut că dacă λ_k este un gradient, transformarea

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \lambda_k , \tag{2.14}$$

care conservă paralelismul direcțiilor în spațiile A_n și $\bar{A}_n$, conduce la relațiile

$$\bar{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} .$$

Derivînd covariant cu privire la Γ^i_{jk} și ținînd seamă de relațiile [1])

$$\bar{\nabla}_m R^i_{jkl} = \nabla_m R^i_{jkl} - 2\lambda_m R^i_{jkl} ,$$

avem

$$\bar{\nabla}_m \bar{R}^i_{jkl} = \nabla_m R^i_{jkl} - 2\lambda_m R^i_{jkl} ,$$

de unde, ținînd seamă de (2.1), rezultă

$$\bar{\nabla}_m \bar{R}^i_{jkl} = \sigma_m R^i_{jkl} + \delta^i_j \tau_{klm} - 2\lambda_m R^i_{jkl} = (\sigma_m - 2\lambda_m)\bar{R}^i_{jkl} + \delta^i_j \tau_{klm} .$$

De aici avem

$$\bar{\nabla}_m \bar{R}^i_{jkl} = \bar{\sigma}_m \bar{R}^i_{jkl} + \delta^i_j \bar{\tau}_{klm} , \tag{2.15}$$

unde am notat

$$\bar{\sigma}_m = \sigma_m - 2\lambda_m \quad \text{și} \quad \bar{\tau}_{klm} = \tau_{klm} . \tag{2.16}$$

În concluzie, *la o transformare* (λ) *care conservă paralelismul direcțiilor, orice spațiu cu curbură cvasi-recurentă, cu gradient de recurență, se transformă în unul asemenea.*

Este de observat că nu este necesar ca σ_k și λ_k să fie gradienți. O remarcă asemănătoare se poate face și în cazul general. Pentru spații cu curbură cvasi-recurentă cu același transport al direcțiilor se mai pot extinde o serie de observații analoage celor din spații cu curbură recurentă, ce au fost remarcate în [8].

---

1) $\bar{\nabla}$ semnifică derivata covariantă cu privire la conexiunea $\bar{\Gamma}^i_{jk}$.

§ 3. Spaţii Einstein generalizate

În paragraful precedent am arătat cum poate fi metrizat un spaţiu cu curbură cvasi-recurentă (în particular, cu curbură recurentă) şi cu torsiune, pentru care tensorul fundamental $g_{ij} = e^{-\frac{\sigma}{2}} E_{ij}$ este simetric. Vom observa acum că într-un spaţiu Ricci-recurent cu torsiune este posibil să se introducă o metrică generalizată, cu tensorul fundamental asimetric

$$g_{ij} = \varphi R_{ij} \tag{3.1}$$

unde R_{ij} sînt componentele tensorului lui Ricci, iar φ o funcţie de punct, deocamdată arbitrară.

Înţelegem printr-un *spaţiu Einstein generalizat, un spaţiu cu conexiune afină care admite o metrică a lungimilor cu tensorul fundamental* g_{ij} *definit prin relaţiile (3.1).*

Condiţia ca tensorul g_{ij} să fie transportat prin paralelism de-a lungul unui arc infinitezimal,

$$\nabla_k g_{ij} = 0,$$

conduce, după cum rezultă din (3.1) prin derivare covariantă, la relaţiile necesare

$$\varphi \nabla_k R_{ij} + R_{ij} \nabla_k \varphi = 0,$$

care pot fi scrise sub forma

$$\nabla_k R_{ij} = \varphi_k R_{ij}, \tag{3.2}$$

unde am notat

$$\varphi_k = -\partial_k \log \varphi. \tag{3.3}$$

Din (3.2) rezultă atunci că, condiţia necesară de existenţă a unei metrici a lungimilor într-un spaţiu definit prin relaţiile (3.1) este ca spaţiul considerat să fie Ricci-recurent, cu gradient de recurenţă. Această condiţie este şi suficientă. Într-adevăr, ţinînd seamă că în orice spaţiu Ricci-recurent cu conexiune afină şi cu gradient de recurenţă au loc relaţiile

$$R_{h(i} R^{h}_{j)kl} = 0, \tag{3.4}$$

rezultă că sistemul (1.1) admite soluţia

$$\Lambda = \sqrt{\varphi R_{ij} X^i X^j} \tag{3.5}$$

şi în consecinţă, au loc relaţiile (3.1).

Deci, *o condiţie necesară şi suficientă ca un spaţiu cu conexiune afină, cu torsiune, să fie un spaţiu Einstein generalizat este ca spaţiul să fie Ricci-recurent.*

Această remarcă nu exclude însă posibilitatea ca un spațiu Ricci-recurent să admită și alte metrici decît cea dată prin formulele (3.5). Totuși, în cazul cînd sistemul (1.1) admite un singur invariant fundamental, expresia (3.5) a lungimii unui vector cu tensor fundamental asimetric este cu siguranță unică.

Să mai observăm că la o transformare de conexiuni coparalele, un spațiu Ricci-recurent este invariant dacă λ_k din transformarea (2.14) este un gradient. Contractînd în (2.14) indicii i și j, rezultă

$$\tau_{\cdot k} = 2n\lambda_k , \tag{3.6}$$

unde

$$\tau_{\cdot k} = \bar{\Gamma}^i_{ik} - \Gamma^i_{ik} \tag{3.7}$$

este vectorul de deformare al conexiunilor $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ și Γ^i_{jk}.

Deci, *toate spațiile Einstein generalizate, pentru care vectorul lor de deformare este un gradient, sînt izometrice.*

§ 4. Conexiuni afine și spații Riemann generalizate

Un spațiu de coordonate x^i, căruia i se asociază un tensor asimetric g_{ij}, se numește spațiu Riemann generalizat. Aceste spații au fost introduse de Eisenhart în 1951 [3], care a arătat că oricărui spațiu Riemann generalizat i se poate asocia o conexiune afină, de un tip special, pe care o vom numi în cele ce urmează *conexiune afină de speța a doua* sau *conexiune metrică de tip Eisenhart.*

Cu ajutorul tensorului g_{ij}, Eisenhart formează simbolii lui Christoffel de speța întîia

$$\Delta_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\right). \tag{4.1}$$

Notînd cu

$$\underset{(}{g_{ij}} = g_{(ij)} \; ; \; \underset{\vee}{g_{ij}} = g_{[ij]} , \tag{4.2}$$

respectiv, partea simetrică și strîmb simetrică a tensorului g_{ij}, în ipoteza că $|g_{ij}| \neq 0$, se definește tensorul g^{ik} dublu contravariant, prin condițiile

$$g_{ij}\, g^{ik} = \delta^k_j . \tag{4.3}$$

Formînd simbolii lui Christoffel de speța a doua

$$\Delta^h_{ij} = g^{hk}\Delta_{ijk} , \quad (\Delta_{ijk} = g_{hk}\Delta^h_{ij}) , \tag{4.4}$$

se observă că, la o transformare de coordonate, aceștia se transformă după legea

$$\partial^2_{\alpha\beta} x^h + \Delta^h_{ij}\,\partial_\alpha x^i\,\partial_\beta x^j = \Delta'^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\partial_\gamma x^h , \tag{4.5}$$

în care derivarea este făcută cu privire la variabilele x', iar $\Delta'^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sînt simbolii de speța a doua transformați.

Din (4.5) rezultă atunci că Δ^h_{ij} sînt coeficienții unei conexiuni afine. Notînd

$$\Delta^h_{\underline{ij}} = \Delta^h_{(ij)}\,;\ \underset{\vee}{\Delta^h_{ij}} = \Delta^h_{[ij]} \tag{4.6}$$

respectiv, partea simetrică și strîmb simetrică a coeficienților Δ^h_{ij}, se știe că au loc următoarele relații:

$$\partial_k g_{\underline{ij}} = g_{\underline{hj}}\Delta^h_{ik} + g_{\underline{hi}}\Delta^h_{jk} = g_{\underline{hj}}\Delta^h_{\underline{ik}} + g_{\underline{hi}}\Delta^h_{\underline{kj}}, \tag{4.7}$$

$$\Delta^h_{ij} = \left\{ {h \atop ij} \right\}, \tag{4.8}$$

$$\underset{\vee}{\Delta_{ijk}} = g_{\underline{hk}}\underset{\vee}{\Delta_{ij}{}^h} = \frac{1}{2}\left(\partial_j \underset{\vee}{g_{ik}} + \partial_i \underset{\vee}{g_{kj}} + \partial_k \underset{\vee}{g_{ji}}\right), \tag{4.9}$$

$$g_{\underline{hk}}\underset{\vee}{\Delta_{ij}{}^h} = g_{\underline{hi}}\underset{\vee}{\Delta_{jk}{}^h} = g_{\underline{hj}}\underset{\vee}{\Delta_{ki}{}^h}, \tag{4.10}$$

$$\Delta_i = \underset{\vee}{\Delta_{ij}{}^j} = g^{\underline{jk}}\underset{\vee}{\Delta_{ijk}} = g^{\underline{jk}}\underset{\vee}{\Delta_{jki}} = 0. \tag{4.11}$$

Deoarece un spațiu Riemann generalizat generează o conexiune afină specială Δ^h_{ij}, următoarea problemă este cu totul naturală:

A_n fiind un spațiu cu conexiune afină cu coeficienții Γ^i_{jk}, în care este dat un tensor g_{ij} asimetric, să se vadă care sînt condițiile necesare și suficiente pentru ca Γ^i_{jk} să fie o conexiune metrică de tip Eisenhart.

Această problemă, pentru spații cu conexiune afină cu torsiune și cu tensor simetric, este tratată de Bochner și Yano [10, pp. 97...98].

Să notăm prin

$$\Gamma^i_{\underline{jk}} = \Gamma^i_{(jk)}\,;\ \underset{\vee}{\Gamma^i_{jk}} = \Gamma^i_{[jk]}, \tag{4.12}$$

respectiv, partea simetrică și strîmb simetrică a conexiunii Γ^i_{jk}. Condiția ca Γ^i_{jk} să fie o conexiune metrică este ca derivata covariantă a tensorului g_{ij}, cu privire la conexiunea Γ^i_{jk}, să fie nulă, adică

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \tag{4.13}$$

Rezultă atunci

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_j g_{ik} = \Gamma^h_{ij} g_{hk} + \Gamma^h_{kj} g_{ih},\ \partial_i g_{kj} = \Gamma^h_{ki} g_{hj} + \Gamma^h_{ji} g_{hk}, \\ \partial_k g_{ij} = \Gamma^h_{ik} g_{hj} + \Gamma^h_{jk} g_{ih}. \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Formînd simbolii lui Christoffel generalizați, de prima speță, dați prin formulele (4.2), obținem:

$$\Delta_{ijk} = \underset{\vee}{\Gamma_{kj}^{\ h}}\, g_{ih} + \underset{\vee}{\Gamma_{ki}^{\ h}}\, g_{hj} - \underset{\vee}{\Gamma_{ij}^{\ h}}\, g_{kh} + \Gamma_{ij}^{h}\, g_{\underline{hk}}. \tag{4.15}$$

Ținînd seamă de relațiile (4.4), prin contractare cu $g^{\underline{lk}}$, din (4.15) obținem

$$\Delta_{ij}^{l} - \Gamma_{ij}^{l} = \left(\underset{\vee}{\Gamma_{kj}^{\ h}}\, g_{ih} + \underset{\vee}{\Gamma_{ki}^{\ h}}\, g_{hj} - \underset{\vee}{\Gamma_{ij}^{\ h}}\, g_{kh}\right) g^{\underline{lk}}, \tag{4.16}$$

în care Δ_{ij}^{l} este conexiunea afină de speța a doua, indusă de tensorul metric g_{ij}. Separînd în (4.16) partea simetrică, respectiv, partea antisimetrică, avem

$$\Delta_{\underline{ij}}^{l} - \Gamma_{\underline{ij}}^{l} = 2\, g^{\underline{lk}}\, \underset{\vee}{\Gamma_{k(i}^{\ h}}\, g_{\underline{j)h}} \tag{4.17}$$

și

$$\underset{\vee}{\Delta_{ij}^{\ l}} = -\, g^{\underline{lk}}\, \underset{\vee}{\Gamma_{[ij}^{\ h}}\, \underset{\vee}{g_{k]h}}, \tag{4.18}$$

în care am utilizat notațiile din relațiile (4 6).

Notînd

$$T^{i}_{\ jk} = g^{\underline{i\alpha}}\, g_{\underline{k\beta}}\, \underset{\vee}{\Gamma_{\alpha j}^{\ \beta}} \tag{4.19}$$

și cu T_{ijk}, dați prin relațiile

$$T_{ijk} = g_{\underline{i\alpha}}\, T^{\alpha}_{\ jk} = g_{\underline{k\beta}}\, \underset{\vee}{\Gamma_{ij}^{\ \beta}}, \tag{4.20}$$

componentele covariante ale tensorului de torsiune și contractînd în (4.18) cu $g_{\underline{lm}}$, relațiile (4.17) și (4.18) devin

$$\Delta_{\underline{ij}}^{l} - \Gamma_{\underline{ij}}^{l} = 2\, T^{l}_{\ (ij)} \tag{4.17'}$$

și

$$\underset{\vee}{\Delta_{ijm}} = -\, \underset{\vee}{\Gamma_{[ij}^{\ h}}\, \underset{\vee}{g_{m]h}}. \tag{4.18'}$$

Dacă, în primă instanță, presupunem $\underset{\vee}{g_{ij}} = 0$. rezultă $\underset{\vee}{\Delta_{ijm}} = 0$ și în concluzie este valabilă teorema lui Bochner și Yano: condiția necesară și suficientă ca partea simetrică a coexiunii Γ^{i}_{jk}, să coincidă cu simbolii lui Christoffel $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ (formula (4.8)), este ca componentele covariante ale tensorului de torsiune, T_{ijk}, să fie antisimetrice în toți indicii.

Într-adevăr, din (4·17') rezultă $T^{l}_{\ (ij)} = 0$, sau contractînd cu $g_{\underline{ls}}$ și ținînd seama de relațiile (4.20), avem

$$T_{k(ij)} = 0. \tag{4.19'}$$

Dar cum tensorul de torsiune e antisimetric în primii doi indici, teorema e demonstrată.

Problema de coincidență a celor două conexiuni impune încă condiția $\underset{\vee}{\Delta_{ij}}^{l} = \underset{\vee}{\Gamma_{ij}}^{l}$, sau, contractînd cu g_{kl},

$$\underset{\vee}{\Delta_{ijk}} = T_{ijk}. \tag{4.20'}$$

Dar ținînd seamă de relațiile (4.10), adică de faptul că

$$\underset{\vee}{\Delta_{ijk}} = \underset{\vee}{\Delta_{jki}} = \underset{\vee}{\Delta_{kij}},$$

relații ce sînt satisfăcute de membrii din dreapta ai formulelor (4·18'), condiția (4.19') de antisimetrie în toți indicii a tensorului T_{ijk}, impusă prin egalarea coeficienților Δ^{l}_{ij} și Γ^{l}_{ij}, este satisfăcută.

Din (4.18') și (4.20) rezultă atunci următoarea teoremă:

Condiția necesară și suficientă pentru ca o conexiune afină Γ^{i}_{jk} să fie în același timp conexiune metrică de tip Eisenhart, în ipoteza obișnuită a transportului paralel, este ca tensorul de torsiune să satisfacă relațiile

$$T_{ijk} + \underset{\vee}{\Gamma_{[ij}}^{h}\, \underset{\vee}{g_{k]h}} = 0. \tag{4.21}$$

Necesitatea a fost demonstrată. Suficiența este evidentă. Într-adevăr, din (4.21) se constată ușor că T_{ijk} este antisimetric în toți indicii. De aici rezultă că $\Gamma^{i}_{jk} = \Delta^{i}_{jk}$, conform teoremei lui Bochner și Yano. Apoi din (4.18'), ținînd seamă de formulele (4.7), rezultă $\underset{\vee}{\Delta_{ijk}} = T_{ijk}$ sau $\underset{\vee}{\Delta_{ij}}^{h} = \underset{\vee}{\Gamma_{ij}}^{h}$.

O observație ce se poate face cu ușurință este aceea că nu se poate trece de la acest caz general, la cazul particular al spațiilor cu torsiune și cu tensorul g_{ij} simetric, căci în cazul $g_{ij} = g_{ji}$, rezultă din (4.9) și (4.20) că $\Delta_{ijk} = T_{ijk} = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Acest fapt se datorește numai modului în care este construită o conexiune afină de speța a doua.

Din relațiile (4.11) mai rezultă că conexiunile ce satisfac relațiile (4.21) au vectorul de torsiune nul.

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Einstein A., *Teoria relativității* (Anexa a II-a: Teoria relativistică a cîmpului nesimetric), Ed. Tehnică, București, 1957.
2. — *Théorie de la gravitation généralisée*, Paris, Gauthier-Villars, 1951.
3. Eisenhart L. P., Proc. of the Nat. Acad. of Sci., U.S.A., 1951, **37**, p. 311.
4. Haimovici A., Com. Acad. R.P.R., 1951, **1**, 2, p 157.
5. — St. și Cerc. Șt. Acad. R.P.R., Fil. Iași, 1951, **2**, *1-2*, p. 1.
6. — Bul. Șt. Acad. R.P.R., secția Șt. Mat-Fiz., 1955, **7**, *3*, p. 595.
7. Murgescu V., St. și Cerc. Șt. Acad. R.P.R., Fil. Iași, 1956, **7**, *2*, pp. 75—98.
8. — An. Șt. Univ. Iași, 1958 s, I, **4**, *1-2*, (sub tipar).

9. S c h o u t e n J. A., *Ricci-Calculus*, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
10. Y a n o K. and B o c h n e r S. *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press, 1953.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОСТРАНСТВАХ С КРУЧЕНИЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ МЕТРИКУ

(Резюме)

В настоящей статье приводятся некоторые замечания о пространствах аффинной связности с кручением, допускающих риманову метрику с симметричным или несимметричным основным тензором.

Говорим, что пространство A_n имеет квазирекуррентную кривизну, если соотношения (2. 1) удовлетворяются тензором кривизны (σ_k является вектором рекуррентности, а τ_{ijk}— тензором, подчинённым только условиям (2.2)). Доказывается, что эти пространства допускают метрику формы (2.8) тогда и только тогда, когда вектор рекуррентности является градиентом. Обращается также внимание на то, что эти пространства допускают всегда угловую метрику формы (2.12). Наконец, мы можем видеть, что они инвариантны по отношению к преобразованиям (2.14).

Если под обобщённым эйнштейновым пространством понимать пространство аффинной связности, имеющее основной тензор, определённый соотношениями (3.1), тогда доказывается следующая теорема: Необходимое и достаточное условие для того, чтобы пространство аффинной связности с кручением было обобщенным эйнштейновым пространством, состоит в том, чтобы это пространство было рекуррентным пространством Риччи. Наконец, замечаем, что все обобщённые эйнштейновы пространства, для которых их вектор деформации является градиентом, изометричны.

Сравнивая между собой любую аффинную связность с метрической связностью типа Эйзенгарта ((4.1), (4.4)), получаем следующий результат: Необходимое и достаточное условие для того, чтобы аффинная связность Γ^i_{jk} была одновременно метрической связностью типа Эйзенгарта (4.4) — при допущении обычного параллельного переноса — состоит в том, чтобы тензор кручения удовлетворял соотношениям (4.21).

OBSERVATIONS SUR LES ESPACES À TORSION, QUI ADMETTENT UNE MÉTRIQUE

(Résumé)

Il s'agit de faire quelques remarques sur les espaces A_n à connexion affine à torsion, qui admettent une métrique riemannienne à tenseur fondamental symétrique ou assymétrique.

On appelle un A_n à courbure quasi-récurrente si les relations (2.1) sont satisfaites par le tenseur de courbure (σ_k est le vecteur de récurrence et τ_{jkl} un tenseur soumis seulement aux conditions (2.2)). On démontre que ces espaces admettent une métrique de la forme (2.8) si et seulement si le vecteur de récurrence est un gradient. On fait aussi la remarque que ces espaces admettent toujours une métrique angulaire de la forme (2.12). Enfin on peut constater qu'ils sont invariants aux transformations de connexions (2.14).

Si on entend par un espace d'Einste in généralisé, un espace à connexion affine doué avec un tenseur fondamental donné par les relations (3.1), on démontre le théorème suivant: la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace à connexion

affine à torsion, soit un espace d'Einstein généralisé est qu'il soit un espace Ricci-récurrent. Enfin, on observe que tous les espaces d'Einstein généralisés, pour lesquels leur vecteur de déformation est un gradient, sont isométriques.

En faisant une comparaison entre une connexion affine quelconque et une connexion métrique d'Eisenhart ((4.1), (4.4)) on établit le résultat suivant : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion affine Γ^i_{jk} soit en même temps une connexion métrique d'Eisenhart (4.4)-dans l'hypothèse accoutumé de transport par parallélisme-est que le tenseur de torsion satisfait les relations (4.21).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

517.944.4

О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Д. МАНЖЕРОН

В заметках [1], [2] были исследованы зависимости между решениями некоторого класса граничных задач относящихся к уравнениям в частных производных

$$(e)\qquad \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^n}+\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial y^n}=0;\quad (h)\quad \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^n}-\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial y^n}=0;$$

$$(p)\qquad \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^n}-\frac{\partial^q u(x,y)}{\partial y^q}=0;\quad (p')\quad \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^n}+\frac{\partial^q u(x,y)}{\partial y^q}=0,$$

сводящихся, соответственно, при $n=2$ и $q=1$, к уравнениям потенциала, волнового и теплопроводности, так же как и соотношения между решениями уравнений „обобщенных многомерных температур", „обобщенных многомерных потенциалов" или же некоторых „смешанных" задач [2].

Углубляя исследования в этой области, представлящей вклад в фундаментальную задачу объединения методов изучения линейных дифференциальных уравнений в частных пронзводных [4], [5] доказывается, пользуясь некоторыми интегральными преобразованиями, сходными с композициями второго рода типа В. Вольтерра, что из двух решений одного из уравнений в частных производных

$$(e^*)\quad \frac{\partial^{nq}u(x_1,x_2,\ldots,x_q;y_1,y_2,\ldots,y_q)}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_q^n}+(-1)^{nq}\frac{\partial^{nq}u(x_1,x_2,\ldots,x_q;y_1,y_2,\ldots,y_q)}{\partial y_1^n\,\partial y_2^n\ldots\partial y_q^n}=0,$$

$$(h^*)\quad \frac{\partial^{nq}u(x_1,x_2,\ldots,x_q;y_1,y_2,\ldots,y_q)}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_q^n}-(-1)^{nq}\frac{\partial^{nq}u(x_1,x_2,\ldots,x_q;y_1,y_2,\ldots,y_q)}{\partial y_1^n\,\partial y_2^n\ldots\partial y_q^n}=0,$$

$$(p^*)\quad \frac{\partial^{nq}u\,x_1,x_2,\ldots,x_q;y_1,y_2,\ldots,y_q)}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_q^n}+$$
$$+(-1)^{(n-1)q}\frac{\partial^{(n-1)q}u(x_1,x_2,\ldots,x_q;y_1,y_2,\ldots,y_q)}{\partial y_1^{n-1}\,\partial y_2^{n-1}\ldots\partial y_q^{n-1}}=0,$$

(которые превращаются так же при $n = 2$, $q = 1$ в уравнения потенциальное, волновое или же теплопроводности), илн же из решений двух вышеуказанных уравнений, получается новое решение одного из исследуемых уравнений.

Так напр., для нечетного q и четного n, из двух решений

$$u_{e^*}(x_1, x_2, ..., x_q;\ s_1, s_2, ..., s_q) \quad \text{и} \quad v_{e^*}(y_1, y_2, ..., y_q;\ s_1, s_2, ..., s_q),$$

уравнения вида (e^*), определяемых для

$$x_i' < x_i < x_i''; \ s_i' < s_i < s_i'' \quad \text{и} \quad y_i' < y_i < y_i''; \ s_i' < s_i < s_i'', \ (i = 1, 2, ..., q),$$

правая композиция

$$(C_d) \qquad u_{e^*e^*}(x_1, x_2, ..., x_q;\ y_1, y_2, ..., y_q) =$$

$$= \underbrace{\int ... \int}_{q \text{ раз}} u_{e^*}(x_1, x_2, ..., x_q;\ s_1, s_2, ..., s_q)\, v_{e^*}(y_1, y_2, ..., y_q;\ s_1, s_2, ..., s_q)\, ds_1\, ds_2 ... ds_q,$$

представляет собою решение уравнения (h^*), при условии соблюдения некоторых граничных условий.

Следует отметить интерес установления соотношений между граничными значениями исследуемых решений получаемых при помощи композиций.

Полученные результаты, обобщенные на некоторые другие задачи многих измерений, послужили сюжетом доклада прочитанного на четвертом съезде математиков Румынской Народной Республики (Бухарест, 27 мая - 4 июня 1956 г.) [3], [5].

Здесь приводятся, напр., обобщения случаев представленных следующими схемами:

(a)

	(e)	(h)	(p)
(e)	(h)	(e)	(p′)
(h)	(e)	(h)	(p)
(p)	(p′)	(p)	(h)

n четное, q четное

	(e)	(h)	(p)
(e)	(h)	(e)	(p′)
(h)	(e)	(h)	(p)
(p)	(p′)	(p)	(e)

n четное, q нечетное

(b)

	(e)	(h)	(p)
(e)	(e)	(h)	(p)
(h)	(h)	(e)	(p)
(p)	(p)	(p′)	(h)

n нечетное, q четное

	(e)	(h)	(p)
(e)	(e)	(h)	(p)
(h)	(h)	(e)	(p′)
(p)	(p)	(p′)	(e)

n нечетное, q нечетное

Поступило 24 I 1958

Ясский Политехнический Институт
Кафедра Математики

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangeron D., Bul. Inst. Polit. Iaşi, **1**, *2*, 1946, pp. 295–303.
2. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, **3** (**7**), *1–2*, 1957, pp. 39–42.
3. Векуа И. Н., Вестник АН СССР, 1956, *11*, стр. 76–77.
4. Doetsch G., Math. Z., **46**, 1940, pp. 315–328.
5. Mangeron D., *Sur les relations entre les solutions de quelques problèmes aux limites pour les équations d'ordre supérieur*. Quatrième Congrès des mathématiciens roumains. Programme des Travaux, Bucarest, 1946, p. 10.

CONNECTIONS BETWEEN SOLUTIONS OF SOME POLYDIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

(Summary)

The author considers some of the connections between solutions of some polydimensional boundary value problems governed by the differential equations (e), (h), (p) or (p′).

An example of the connections established here, if q is odd and n is even and if

$$u_{e^*}(x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_q) \text{ and } v_{e^*}(y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_q)$$

satisfy the equation (e^*) and certain conditions on the boundary

$$x_i' < x_i < x_i'', \; s_i' < s_i < s_i'' \text{ and, respectively, } y_i' < y_i < y_i'', \; s_i' < s_i < s_i'',$$

$(i = 1, 2, \ldots, q)$, then the composition (C_d) satisfies the equation (h^*).

Different other cases are exposed and tables — various extensions of (a) and (b) — are presented to show which type of differential systems is satisfied by each of various compositions that can be formed in his paper prepared to the Fourth Congress of Roumanian Mathematicians (May 27–June 4, 1956).

ASUPRA INTERDEPENDENŢEI ÎNTRE SOLUŢIILE UNOR PROBLEME PE CONTUR POLIDIMENSIONALE

(Rezumat)

Se demonstrează, prin intermediul unor reprezentări integrale similare cu compoziţiile lui Volterra de specia a doua, că din două soluţii a uneia din ecuaţiile cu derivate parţiale (e), (h), (p) sau (p′) (care se reduc pentru $q = 1$, $n = 2$ la ecuaţiile potenţialului, a undelor şi de propagare a căldurii) sau din soluţii a două ecuaţii diferite, se obţine iarăşi o soluţie a uneia din ele.

Astfel, de pildă, pentru q impar şi n par, din două soluţii

$$u_{e^*}(x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_q) \text{ şi } v_{e^*}(y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_q)$$

ale ecuaţiei de forma (e^*), definite pentru

$$x_i' < x_i < x_i'', \; s_i' < s_i < s_i'' \text{ şi, respectiv, pentru } y_i' < y_i < y_i'', \; s_i' < s_i < s_i'',$$

$(i = 1, 2, \ldots, q)$ compoziţia la dreapta (C_d) reprezintă, în ipoteza îndeplinirii unor anume relaţii pe contur, o soluţie a ecuaţiei (h^*).

Se subliniază apoi interesul problemei de a se stabili relaţiile ce interced între valorile pe contur ale soluţiilor considerate şi acelea ale soluţiilor prin compoziţie.

Un vast şir de rezultate în această ordine de idei, constituind o contribuţie la fundamentala problemă de unificare a metodelor de studiu a ecuaţiilor diferenţiale liniare cu derivate parţiale, a fost expus cu prilejul lucrărilor celui de al IV-lea Congres al matematicienilor din Republica Populară Romînă (Bucureşti, 27 mai--4 iunie 1956).

Aici sînt cuprinse, în particular, şi extinderi ale cazurilor reprezentate prin schemele de compoziţie (a) şi (b).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

517.948.32

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПРИВОДИМЫХ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Д. МАНЖЕРОН

Выдержка из доклада представленного на научной сессии Ясского Политехнического Института, 19 - 21 мая 1956 г.

В заметках [5], [8] был решен различными методами некоторый класс граничных задач, выраженный, напр., схемой

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{n} D^{(m)} [Q(X) D^{(m)} u(X)] + [\lambda A(X) + p(X)] u(X) = 0,$$

где „полная" производная D определяется—по терминологии М. Пиконе —символом

$$(2) \qquad D \equiv \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m},$$

λ — параметр, $A(X)$ и $p(X)$, $(X \equiv x_1, x_2, \dots, x_m)$ — функции, определенные в „прямоугольнике"

$$(3) \qquad R \equiv (x_i' \leqslant x_i \leqslant x_i''), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

на границе FR которого искомая функция $u(X)$ удовлетворяет некоторым необходимым и достаточным условиям ее полного определения вида

$$(4) \qquad u|_{FR} = 0, \ (Du)_{FR} = 0, \dots$$

или же различным комбинациям $u, Du, \dots$, как напр., $(BDu + Cu)_{FR} = 0$.

В заметках же [6], [9] некоторые из этих классов задач были представлены интегральными уравнениями.

Ниже исследуется задача об определении спектра $\{\lambda_i\}$ для класса интегральных уравнений вида

$$(5) \qquad \varphi(x_1 x_2 \dots x_m) = \lambda \int_R K(x_1 x_2 \dots x_m; \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m) \varphi(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m) d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_m,$$

представляющих собою математическую схему граничных задач для дифференциальных систем, состоящих из уравнений в „полных“ производных вида (1) и некоторых граничных условий на границе FR^* ,прямоугольных“ областей

$$R^* = (0 \leqslant \xi_i \leqslant 1), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{6}$$

причем ядро

$$K(x_1 x_2 \ldots x_m ; \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m) = A_{2n,0}\,[(x_1 x_2 \ldots x_m)^{2n} + (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m)^{2n}] + \\ + A_{2n-1,1}\,[(x_1 x_2 \ldots x_m)^{2n-1}(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m) + (x_1 x_2 \ldots x_m)(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m)^{2n-1}] + \ldots \tag{7}$$

— симметричный однородный многочлен, расположенный по степеням переменных группирующихся лишь по произведениям $x_1 x_2 \ldots x_m$ и $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m$.

Метод определения характеристических чисел λ_i и соответсвующих решений основывается на записи уравнения (5), если остановиться, для простоты, на случае $m = 2$, в виде

$$\varphi(x_1 x_2) = \lambda \Bigg[\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} K(x_1 x_2 ; \xi_1 \xi_2)\, \varphi(\xi_1 \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \int_{x_1}^{1} \int_0^{x_2} K(\xi_1 x_2 ; x_1 \xi_2)\, \varphi(\xi_1 \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^{x_1} \int_{x_2}^{1} K(x_1 \xi_2 ; \xi_1 x_2)\, \varphi(\xi_1 \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \int_{x_1}^{1} \int_{x_2}^{1} K(\xi_1 \xi_2 ; x_1 x_2)\, \varphi(\xi_1 \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 \Bigg] \tag{8}$$

и на изыскании решений в виде степенного ряда вида

$$\varphi(x_1 x_2) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (x_1 x_2)^p \,. \tag{9}$$

Заменение (9) и соответствующе видоизмененного (7) в (8), приводит к системе линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_0 = \lambda A_{2n,0}\,[a_0/(2n+1)^2 + a_1/(2n+2)^2 + \cdots + a_{2n}/(2n+2n+1)^2], \\ a_1 = \lambda A_{2n-1,1}\,[a_0/(2n)^2 + a_1/(2n+1)^2 + \cdots + a_{2n}/(2\cdot 2n)^2], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n} = \lambda A_{2n,0}[a_0/1^2 + a_1/2^2 + \cdots + a_{2n}/(2n+1)^2], \end{cases} \tag{10}$$

и

$$a_{2n+1} = a_{2n+2} = \ldots = 0 \tag{10'}$$

с определителем — при любом m — вида

$$(11)\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{2n,0}/(2n+1)^m & -\lambda A_{2n,0}/(2n+2)^m & \dots -\lambda A_{2n,0}(2.2n+1)^m \\ -\lambda A_{2n-1,1}/(2n)^m & 1-\lambda A_{2n-1,1}/(2n+1)^m & \dots -\lambda A_{2n-1,1}/(2.2n)^m \\ \dots & \dots & \dots \\ -\lambda A_{2n,0}/1^m & -\lambda A_{2n,0}/2^m & \dots 1-\lambda A_{2n,0}/(2n-1)^m \end{vmatrix}.$$

Не останавливаясь здесь на более подробном рассмотрении задачи, отметим, что (11), равно как и уравнение полученное приравниванием (11) нулю — частный случай определителя и уравнений соответствующих группировкам $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_m^{n_m}$; $\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\dots\xi_m^{n_m}$ уже встречавшихся в наших исследованиях, продолжаемых другими авторами (см., напр., [3]), касающихся одного нового класса многочленов обобщающих многочлены Лежандра [7] и могущим быть выведенными, лишь в частном случае $m=1$, следуя [4].

Ясский Политехнический Институт
Кафедра Механики,

ЛИТЕРАТУРА

1. Picone M., Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital., 1942, pp. 230 и послед.
2. Манжерон Д., Bul. Inst. Polit. Iaşi, **3** (7), *3—4*, 1957, стр. 49—52.
3. Stancu D., Bul. Inst. Polit. Iaşi, **3** (7), *1—2*, 1957, pp. 31—38.
4. Radok J. R. M., Quart. Appl. Math., **12**, *4*, 1955, pp. 413—417.
5. Mangeron D., Rend. Accad. Sci. Napoli, (4), **2**, 1932, pp. 1—11.
6. — C. R. Acad. Sci. Paris, **204**, 1937, pp. 1022—1024.
7. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, **2** (6), *1—2* 1956, pp. 21—27.
8. — Mathematica, Cluj, **14**, 1938, pp. 31—35.
9. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, **3** (7), 1957, *3—4*, pp. 49—52.

THE SOLUTION OF SOME EIGENVALUE PROBLEMS TRANSFORMED IN A CLASS OF INTEGRAL EQUATIONS

(Summary)

In some previous papers [6],]9] the Author has obtained the Fredholm integral equations of the second kind with symmetrical kernels of the homogeneous polynomial type as a equivalent for different sorts of eigenvalue problems defined by (1), (3), (4).

The characteristic numbers and eigensolutions of (5) are obtained here by use of power series.

ASUPRA REZOLVĂRII UNOR CLASE DE PROBLEME PE CONTUR TRADUSE ÎN ECUAŢII INTEGRALE

(Rezumat)

În [5], [8] s-a rezolvat prin diferite metode o clasă de probleme pe contur, exprimate, de pildă, prin schema (1), (3), (4), iar în [6], [9] unele probleme de acest fel au fost traduse în ecuaţii integrale echivalente,

Autorul studiază aici problema determinării spectrului $\{\lambda_i\}$ pentru clasa de ecuaţii integrale de forma (5), care constituie schema matematică a unei clase de probleme pe contur relative la ecuaţii cu derivate „totale" în sensul lui M. P i c o n e, de forma (1), cu soluţii determinabile prin diverse condiţii de forma (4) pe conturul FR^* al domeniului dreptunghiular R^* (6) şi în care nucleul $K(x_1 x_2 \dots x_m ; \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m)$ este o funcţie polinomială simetrică şi omogenă în grupurile de produse variabile $x_1 x_2 \dots x_m$ şi $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_m$.

Metoda de determinare a valorilor caracteristice λ_i se bazează pe transcrierea ecuaţiei (5) sub forma (8) şi pe căutarea soluţiilor caracteristice sub forma de serii de puteri de forma (9), procedînd după produsele $x_1 x_2 \dots x_m$, ţinîndu-se seama de forma (7) a nucleului K.

Sistemul de ecuaţii algebrice liniare în a_i, la care se reduce problema, conduce la studiul ecuaţiilor de forma (9), întîlnite deja şi sub o formă mai generală cu ocazia găsirii unei noi clase de polinoame care generalizează polinoamele lui Legendre [7], [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

531 391.5

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ИНТЕРВАЛА

В. И. ЗУБОВ

В работах Каменкова [1] и Лебедева ([2], [3] и [4]) выведены условия устойчивости нулевого решения $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ на конечном интервале времени для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i + X_s(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $p_{si}(t)$ — вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t, $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ — вещественные функции, разлагающиеся в области, содержащей начало координат, в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, начинающихся членами не ниже второго порядка, с вещественными, ограниченными непрерывными по отношению к t коэффициентами

$$X_s = \sum_{m_1 + \cdots + m_n = 2}^{\infty} a_s^{(m_1, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

и дан неточный метод нахождения длины интервала, на котором нулевое решение устойчиво.

В настоящей заметке дается необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого решения системы (1) на конечном интервале времени и способ вычисления длины интервала устойчивости.

Рассмотрим определенно-положительную форму

$$V = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k, \quad a_{ik} = \text{const.},$$

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{2}$$

Определение. Нулевое решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ системы (1) называется устойчивым на интервале времени τ по отношению к функции $V(x_1, \ldots, x_n)$, если

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i(t, x_0, t_0)\, x_k(t, x_0, t_0) < A \tag{3}$$

для $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ если только начальные значения x_i^0 функций $x_i(t, x_0, t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, $x_i^0 = x_i(t_0, x_0, t_0)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i^0 x_k^0 \leqslant A\,, \tag{4}$$

где A — достаточно малое положительное число.

Следуя А. М. Ляпунову [5], сформулируем

Теорема 1. Для того, чтобы нулевое решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ системы (1) было устойчивым на конечном интервале времени

$$\tau = \tau\left(a_1^{(m_1, \ldots, m_n)}, a_2^{(m_1, \ldots, m_n)}, \ldots a_n^{(m_1, \ldots, m_n)}\right)$$

по отношению к некоторой форме $V(x_1, \ldots, x_n)$ при любых функциях $X_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $X_n(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно, чтобы все корни $\lambda_1(t_0), \ldots, \lambda_n(t_0)$ уравнения

$$|P(t_0) - \lambda E| = 0 \tag{5}$$

где $\{P(t_0)\}_{ik} = p_{ik}(t_0)$, имели отрицательные действительные части.

Доказательство. Пусть $\lambda_i(t_0) = \alpha_i + i\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\alpha_i < 0$. Тогда, по теореме А. М. Ляпунова [5], уравнение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t_0)\, x_i\right] = W(x_1, \ldots, x_n) \tag{6}$$

где $W(x_1, \ldots, x_n)$ определенно-отрицательная квадратичная форма, допускает в качестве решения определенно-положительную квадратичную форму

$$V = \sum_{s,k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_s x_k\,, \quad a_{sk}(t_0) = \text{const}. \tag{7}$$

Покажем, что по отношению к форме (7) имеет место устойчивость на конечном интервале времени нулевого решения системы (1).

Вычислим, полную производную по t от функции (7) в силу системы (1)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i + X_s\right].$$

Полагая $p_{si}(t) = p_{si}(t_0) + \Delta p_{si}(t, t_0)$, $\Delta p_{si}(t_0, t_0) = 0$, получим

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t_0)\, x_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta p_{si}\, x_i + X_s\right]$$

или

$$\frac{dV}{dt} = W + \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{si}\, y_i + X_s\right]\frac{\partial V}{\partial x_s}\,.$$

Положим теперь, например, $W(x_1,\ldots,x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Т. к.

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_k,$$

то

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{si} x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_k\right] + \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_k\right] X_s.$$

Ясно, что можно найти такое значение времени $\tau > 0$ и достаточно малое положительное число $\alpha > 0$, что при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant a^2, \quad t \in [t_0, t_0+\tau], \tag{9}$$

функция $\frac{dV}{dt}$ из (8) будет отрицательна $\left(\frac{dV}{dt} < 0\right)$ в области (9). Следовательно

$$V = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t_0)\, x_i(t, x_0, t_0)\; x_k(t, x_0, t_0) \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t_0)\, x_i^0\, x_k^0 \leqslant A$$

при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant a^2, t \in [t_0, t_0+\tau]$, где $A = \min \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,(t_0)\; x_i\; x_k$ на сфере $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a^2$.

Теорема этим доказана.

Замечание 1. 1. Теорема показывает, что класс форм $V(x)$ по отношению к которым нулевое решение устойчиво на конечном интервале времени, довольно обширен, а именно, определяется выбором формы W.

Замечание 1. 2. Нулевое решение системы (1) будет устойчивым на конечном интервале времени не только по отношению к квадратичной форме, но и к любой положительно-определенной функции $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=m}^{\infty} v_i$, где v_i форма i-ой степени относительно $x_1, \ldots, x_n$, а ряд $\sum_{i=m}^{\infty} v_i$ сходится при достаточно малых величинах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t_0)\, x_i\right] = W(x_1, \ldots, x_n),$$

где $W(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=m}^{\infty} w_i$, определенно-отрицательная функция, w_i — форма i-ой степени относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Замечание 1. 3. При доказательстве теоремы опущено вычисление величин a, A, τ. Приведем вычисление этих величин.

Обозначим через $t_1 = \sup\{t\}$, при которых форма

$$H = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{si}\, x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_k\right]$$

остается определенно-отрицательной.

Ясно, что t_1 является наименьшим из значений t при которых нарушатся одно из неравенств $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где Δ_i есть последовательные главные миноры матрицы квадратичной формы H.

Обозначим $\tau < t_1 - t_0$. Тогда $H \leqslant -\mu(t)\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\mu(t) = \min\{|\mu_1(t)|, \ldots, |\mu_n(t)|\}$, где $\mu_i(t)$ — собственные числа матрицы квадратичной формы H. Следовательно, из условия

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\mu(t)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_k X_s \leqslant 0$$

получим, что

$$\sum_{s,k=1}^{n} a_{sk}(t_0)\, x_k X_s \leqslant \mu(t)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \tag{10}$$

В силу того, что коэффициенты $a_1^{(m_1, \ldots, m_n)}, \ldots, a_n^{(m_1, \ldots, m_n)}$ функций X_s являются ограниченными и непрерывными по отношению к времени t, найдется такая достаточно малая, положительная величина $a = a(\tau) > 0$, что в сфере $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant a^2$ неравенство (10) будет выполнено, причем, вообще говоря $a(\tau) \to 0$ при $\tau \to t_1 - t_0$.

Найдем теперь

$$A \quad \min \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t_0)\, x_i x_k \text{ при условии } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a^2 .$$

Исследуя на минимум форму

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t_0)\, x_i x_k - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ,$$

найдем, что $A = a^2(\tau)\lambda_1(t_0)$, где $\lambda_1(t_0)$ есть наименьшее собственное число матрицы $A(t_0)$

$$\{A(t_0)\}_{ik} = a_{ik}(t_0) .$$

Таким образом, вообще говоря, $A(\tau, t_0) \to 0$ при $\tau \to t_1 - t_0$.

Замечание 1. 4. Аналогичная теорема может быть доказана для случая, когда функции X_s лишь непрерывны по t и по $x_1, \ldots, x_n$ и

$$|X_s| < C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\alpha}, \alpha > \frac{1}{2}, \alpha = \text{const}.$$

Теорема 2. Если среди корней уравнения (5) есть корни с положительной или нулевой действительной частью, то не существует положительно-определенной формы $V(x_1, \ldots, x_n)$, по отношению к которой нулевое решение системы (1) устойчиво на конечном интервале времени, при любых функциях $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. имеется положительно-определенная форма V, по отношению к которой имеется устойчивость на конечном интервале времени нулевого решения системы (1). Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i + X_s\right].$$

Положив $X_s = 0$, $t = t_0$ получим в силу определения

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t_0)\, x_i\right] \leqslant 0.$$

Тогда линейная система

$$\frac{d x_s}{d \vartheta} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t_0)\, x_i, \quad s = 1, \ldots, n,$$

устойчива, что невозможно в случае корней с положительными вещественными частями. В случае корней с нулевой вещественной частью, теорему можно доказать специальным подбором функций X_s.

Замечание 2. 1. Если среди корней уравнения (5) имеется один нулевой, то можно установить, следуя А. М. Ляпунову [5], тот вид функций $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$, при котором будет иметь место устойчивость на конечном интервале по отношению к некоторой положительно-определенной функции $V(x_1, \ldots, x_n)$.

Аналогично обстоит дело в случае нескольких нулевых корней и корней с нулевой вещественной частью.

Приведем пример вычисления интервала, на котором имеет место устойчивость в смысле приведенного определения:

(11) $$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+1} + bx^2, \; b > 0, \; b = \text{const}.$$

Положим $v = \frac{x^2}{2}$. Тогда $\frac{dv}{dt} = -\frac{x^2}{t+1} + bx^3$,

Здесь $H = -\frac{x^2}{t+1}$ является определенно-отрицательной формой при всех $t > 0$. По Каменкову [1] в этом случае устойчивость нулевого решения $x = 0$ уравнения (1) имеет место на полубесконечном интервале $(0, +\infty)$, считая $t_0 = 0$.

Однако это не так. Зададим произвольное число $\tau > 0$.

$$\frac{dV}{dt} < -\frac{x^2}{1+\tau} + b\,|x|^3 \quad \text{при} \quad t \in (0, \tau).$$

Положим $x^2 \leqslant a^2(\tau)$, где величина a такова, что

$$-\frac{x^2}{1+\tau} + b\,|x|^3 < 0 \quad \text{при} \quad x^2 \leqslant a^2(\tau).$$

Ясно, что $a(\tau) < \frac{1}{b(1+\tau)}$. Величина $A(\tau) = \frac{1}{2} a^2(\tau)$,

Итак, для уравнения (11) нулевое решение $x=0$ будет устойчивым на конечном интервале τ, если только $v(x_0) < A(\tau)$, где $x_0 = x(0)$. Ясно, что при $\tau \to +\infty$, $A(\tau) \to 0$.

Уравнение (11) можно проинтегрировать. Его решение, обращающееся в x_0 при $t = 0$ будет иметь вид

$$x = \frac{x_0}{(t+1)[1 - bx_0 \ln(t+1)]}.$$

При $t_* = e^{\frac{1}{bx_0}} - 1$, при любом положительном значении x_0 как угодно малом, решение $x(t, x_0)$ уходит на бесконечность, что подтверждает количественный анализ, проделанный на основе развитой выше теории.

Поступило 28 V 1957

Ленинградский Университет им. „А. А. Жданова"
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В., ПММ, 1953, **17**, *5*, стр. 529—540.
2. Лебедев А. А., ПММ, 1954, **18**, *1*, стр. 75—94.
3. — ПММ, 1954, **18**, *2*, стр. 139—148.
4. Каменков Г. В., Лебедев А. А., ПММ, 1954, **18**, *4*, стр. 512.
5. Ляпунов А. М., **Общая задача об устойчивости движения**, ГИТТЛ, М., 1950.

ÜBER DIE STABILITÄTSBEDINGUNGEN IN EINER ENDLICHEN ZEITSTRECKE UND ÜBER DIE BESTIMMUNG DER LÄNGE DES INTERVALLS

(Zusammenfassung)

Der Verfasser stellt sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Stabilität für die triviale Lösung des Systems (1) in einer endlichen Zeitstrecke fest. Man gibt ebenfalls eine Rechnungsart der Zeitstrecke der Stabilität.

ASUPRA CONDIŢIILOR DE STABILITATE ÎNTR-UN INTERVAL DE TIMP FINIT ŞI ASUPRA DETERMINĂRII LUNGIMII INTERVALULUI

(Rezumat)

Autorul stabileşte condiţii necesare şi suficiente de stabilitate pentru soluţia banală a sistemului (1) într-un interval de timp finit şi indică o metodă de calcul a intervalului de timp de stabilitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

539. 37

FINITE TORSION OF AELOTROPIC AND COMPOSITE CYLINDERS (II)

BY

J. RAMAKANTH

1. Introduction

The problem of torsion of a composite cylinder consisting of different isotropic materials had been solved by Muskhelishvili N. I. (1932) [1] when the twist was small. Payne L. E. (1946) [2] extended the theory to the case when the interior one of the two materials composing the beam was orthotropic.

So far no attempt has been made to solve the problems of finite deformation of composite materials. In part I of this series [4] the problem of finite torsion of a hollow cylinder consisting of rhombohedral material was solved. In this paper the problem of finite torsion of a right circular composite cylinder consisting of two different rhombohedral material is solved. As a particular case, solution is derived for isotropic materials.

2. Components of displacement

Let the boundaries of the material form concentric circles in the cross-section. Let a and b be the radii of the internal and external circles. Let c_{rs} and d_{rs} define the elastic constants of the materials in $r \leqslant a$ and $a \leqslant r \leqslant b$ respectively, where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Let the cylinder be subjected to a finite twist τ.

From consideration of symmetry we know that during torsion, cross-sections remain plane and the straight radii, straight. If the conditions are uniform, w must be of the form αz. The components of finite displacement are given by [5]

$$u_i = x(1 - \beta_i \cos \tau z) - y \beta_i \sin \tau z, \tag{1.1}$$

$$v_i = y(1 - \beta_i \cos \tau z) + x \beta_i \sin \tau z, \tag{1.2}$$

$$w_i = \alpha z. \tag{1.3}$$

Where $i = 1$ corresponds to the region $r \leqslant a$ and $i = 2$ to the annulus $a \leqslant r \leqslant b$, α is a constant to be determined and β_i are functions of r.

3. Components of strains and stresses

It had been emphasised by Prof. B. R. Seth, in a number of papers that the strain components should be referred to the deformed state. They are given by such expressions as [5]

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \tag{2.1}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{2.2}$$

Substituting the values of u_i, v_i, and w_i from (1) and transforming into cylindrical coordinates sistem we have,

$$e_{rr_i} = \frac{1}{2}(1-\beta_i^2) - \frac{1}{2}r^2\left(\beta_i'^2 + \frac{2}{r}\beta_i\beta_i'\right), \tag{3.1}$$

$$e_{\theta\theta_i} = \frac{1}{2}(1-\beta_i^2), \tag{3.2}$$

$$e_{zz_i} = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta_i^2\tau^2 r^2, \tag{3.3}$$

$$e_{r\theta_i} = 0\ ,\ e_{rz_i} = 0, \tag{3.4}$$

$$e_{\theta z_i} = \tau r \beta_i^2\ . \tag{3.5}$$

For all practical applications although the displacements and rotations are large, the strain is such that we can take the stress strain relation to be linear. The components of stress are given by [3]

$$\begin{aligned}\widehat{rr}_1 = {} & c_{11}\left[1-\beta_1^2 - \frac{1}{2}(r^2\beta_1'^2 + 2r\beta_1\beta_1')\right] + \\ & + c_{13}\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2 r^2\right) + c_{66}(1-\beta_1^2),\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\vartheta\vartheta}_1 = {} & (c_{11}-2c_{66})\left[1-\beta_1^2 - \frac{1}{2}(r^2\beta_1'^2 + 2r\beta_1\beta_1')\right] + \\ & + c_{13}\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2 r^2\right) + c_{66}(1-\beta_1^2),\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\widehat{zz}_1 = {} & c_{13}\left[1-\beta_1^2 - \frac{1}{2}(r^2\beta_1'^2 + 2r\beta_1\beta_1')\right] + \\ & + c_{33}\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2 r^2\right),\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\widehat{r\vartheta}_1 = 0\ ,\ \widehat{rz}_1 = 0, \tag{4.4}$$

$$\widehat{\vartheta z}_1 = c_{44}\tau r\beta_1^2\ . \tag{4.5}$$

The stress components for the region $i = 2$ are given by the same expressions if c_{rs} is replaced by d_{rs} and β_1 by β_2.

It is required to determine α, β_1 and β_2 satisfying the equations of equilibrium and the boundary conditions.

4. Satisfaction of the equations of equilibrium

The stresses have to satisfy the equations of equilibrium

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{rz} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\widehat{\vartheta z} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{zz} + \frac{1}{r}\widehat{rz} = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{r\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\widehat{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{\vartheta z} + \frac{2}{r}\widehat{r\vartheta} = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\widehat{r\vartheta} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\widehat{rz} + \frac{\widehat{rr} - \widehat{\vartheta\vartheta}}{r} = 0. \tag{5.3}$$

(5.1) and (5.2) are identically satisfied. (5.3) gives

$$(2c_{11} + c_{13}\tau^2 r^2)\beta_1^2 + c_{11}(r^2\beta_1'^2 + 2r\beta_1\beta_1') + 2c_{66}\int r\beta_1'^2\,dr = \text{const.}, \tag{6.1}$$

$$(2d_{11} + d_{13}\tau^2 r^2)\beta_2^2 + d_{11}(r^2\beta_2'^2 + 2r\beta_2\beta_2') + 2d_{66}\int r\beta_2'^2\,dr = \text{const.} \tag{6.2}$$

Putting [3]

$$2c_{66}/c_{11} = p_1\ ,\ c_{13}/c_{11} = q_1\ ,\ q_i\tau^2 r^2 = t_i \tag{7.1}$$

and

$$2d_{66}/d_{11} = p_2\ ,\ d_{13}/d_{11} = q_2\ ,\ q_2\tau^2 r^2 = e^T, \tag{7.2}$$

we get

$$(1 + t_1)\beta_1^2 + \left(2t_1\frac{d\beta_1}{dt_1} + \beta_1\right)^2 + 2p_1\int t_1\left(\frac{d\beta_1}{dt_1}\right)^2 dt_1 = \text{const.},$$

$$(1 + t_2)\beta_2^2 + \left(2t_2\frac{d\beta_2}{dt_2} + \beta_2\right)^2 + 2p_2\int t_2\left(\frac{d\beta_2}{dt_2}\right)^2 dt_2 = \text{const.}, \tag{8.1}$$

$$(1 + e^T)\beta_2^2 + \left(2\frac{d\beta_2}{dT} + \beta_2\right)^2 + 2p_2\int\left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2 dT = \text{const.} \tag{8.2}$$

Their solutions are given by [3], [4]

$$\beta_1 = B_0\left(1 - \frac{1}{8}t_1 + \frac{6 - p_1}{12\cdot 8^2}t_1^2 + \ldots\right), \tag{9.1}$$

$$\beta_2 = A_0 + A_1 T + A_2 T^2 + \ldots \tag{9.2}$$

where

(10.1) $A_1 = \dfrac{A - A_0}{2}$, (10.2) $A_2 = \dfrac{1}{16}\left[(2 - p_2)\dfrac{A_0^2}{A} - (1 - p_2)A_0 - (2 + p_2)A\right]$, etc.

A_0, A and B_0 are independent constants and A_p is a function of A_0 and A for $p \geqslant 1$. β_1 has been proved to converge uniformly and absolutely in the interval $t_1 \leqslant 1$ and β_2 in $1 \leqslant t_2 < \dfrac{4}{3}$.

5. Satisfaction of the boundary conditions

The boundary conditions require that:

I) The displacements should be continuous across the common boundary. This gives

(11) $$\beta_1 = \beta_2 \text{ at } r = a.$$

II) The stresses should be continuous across the common boundary. This will be the case if $\widehat{rr}_1 = \widehat{rr}_2$ there. This gives

(12) $2 + h - g - h(1 - \alpha)^2 = (a\beta_1' + \beta_1)^2 + \beta_1^2(1 - g + h\tau^2 a^2)$, on $r = a$

where

(13) $$g = 2(c_{66} - d_{66})/(c_{11} - d_{11}), \quad h = (c_{13} - d_{13})/(c_{11} - d_{11}).$$

III) The outer boundary should be free from tractions. It will be the case if $\widehat{rr}_2 = 0$ there. This gives

(14) $2 + q_2 - p_2 - q_2(1 - \alpha)^2 = (b\beta_2' + \beta_2)^2 + \beta_2^2(1 - p_2 + q_2\tau^2 b^2)$, on $r = b$.

IV) The tractions on any cross section should be statically equivalent to a couple whose axis is the z axis. It will be the case if [3]

(15.1) $$\int_0^a r\,\widehat{zz}_1\,dr + \int_0^b r\,\widehat{zz}_2\,dr = 0, \text{ i. e.}$$

$$a^2\delta[2c + 1 - (1 - \alpha)] + (b^2 - a^2)[2d + 1 - (1 - \alpha)^2] =$$

(15.2) $$= 2\delta\int_0^a [c(r\beta_1' + \beta_1)^2 + \beta_1^2 c + \tau^2 r^2]\,r\,dr +$$

$$+ 2\int_a^b \left[d(r\beta_2' + \beta_2)^2 + \beta_2^2(d + \tau^2 r^2)\right] r\,dr$$

where

(16) $$\delta = c_{33}/d_{33}, \quad c = c_{13}/c_{33}, \quad d = d_{13}/d_{33}.$$

The four equations (11), (12), (14) and (15.2) are necessary and sufficient to determine α, A_0, A and B_0.

6. Evaluation of the constants

From the complicated nature in which the constants occur in (9) it is obvious that we shall have to take a finite number of terms of β_l for the evaluation of the constants.

Considering only the first two terms of β_1 and β_2 we obtain from (11), (12), (14) and (15.2):

$$
\begin{aligned}
&a_1[a^2\delta(2-g-2ch)+(b^2-a^2)(2-g-2dh)]+\\
&+\left\{k+a_1\left[2hd(b^2-a^2)+\frac{\tau^2 h}{2}(b^4-a^4)-k_2k_3\right]\right\}A_0^2+\\
&+[2kT_a-2k_3(2+T_ak_2)+a_1(T_{11}+\tau^2hT_1')]A_0A_1+\\
&+\left\{kT_a^2-a_1k_3[4(1+T_a)+k_2T_a^2]+a_1\left(T_{11}+2hdT_2+\frac{\tau^2hT_2'}{2}\right)\right\}A_1^2=0,
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&q_2(2-g)-h(2-p_2)+(hk_1-q_2k_2)A_0^2+\\
&+2[h(2+k_1T_b)-q_2(2+k_2T_a)]A_0A_1+\\
&+\{h[4(1+T_b)+k_1T_b^2]-q_2[4(1+T_a)+k_2T_a^2]\}A_1^2=0.
\end{aligned}
\tag{17.2}
$$

Where T_a and T_b are the values of T for $r=a$ and $r=b$, an t_a the value of t for $r=a$,

$$b_1=-\frac{1}{8},\qquad a_1=(1+b_1t_a)^2, \tag{18.1}$$

$$k=h\delta\left[2c(a^2+2b_1a^2t_a+\frac{5}{3}b_1^2a^2t_a^2)+\tau^2\left(\frac{a^4}{2}+\frac{2}{3}a^4b_1t_a+\frac{b_1^2a^4t_a^2}{4}\right)\right], \tag{18.2}$$

$$T_{11}=4hd(b^2T_b-a^2T_a), \tag{18.3}$$

$$T_1'=b^4\left(T_b-\frac{1}{2}\right)-a^4\left(T_a-\frac{1}{2}\right), \tag{18.4}$$

$$T_2'=b^4\left(T_b^2-T_b+\frac{1}{2}\right)-a^4\left(T_a^2-T_a+\frac{1}{2}\right), \tag{18.5}$$

$$T_2=b^2(T_b^2-2T_b+2)-a^2(T_a-2T_a+2), \tag{18.6}$$

$$k_1=2-p_2+q_2\tau^2b^2, \tag{18.7}$$

$$k_2=2-g+h\tau^2a^2, \tag{18.8}$$

$$k_3=a^2\delta+b^2-a^2. \tag{18.9}$$

Eliminating the constant term from (17.1) and (17.2) we obtain a quadratic form in A_1/A_0. Its value which is less than 1, should be taken. A_0, $(1-a)$ and B_0 are to be taken with the positive sign.

Some values of A_0, A and B_0 for the cylinder containing Beryl ($i = 1$) and Apatite ($i = 2$) are given in table 1.

Considering the first two terms of β_1 and three of β_2 we obtain from (11), (12), (14) and (15.2)

$$
\begin{aligned}
&16^2\,[h(2-p_2)-q_2(2-g)]\,A^2+k_4(2-p_2)^2\,A_0^4-\\
&-4\,[k_4(2-p_2)(1-p_2)+4\,k_5(2-p_2)]\,A_0^3A+\\
&+[32\,(2-p_2)\,(4k_6+k_7)-2k_4(2+4p_2-3p_2^2)+\\
&\qquad+16\,k_5(4-3p_2)+64\,k_7]\,A_0^2A^2-\\
&-\{64\,[4\,(2-p_2)\,k_6+(1-p_2)\,k_7]-4\,k_4(1-k_2)(2+p_2)-\\
&-48\,p_2k_5+128\,k_7\}\,A_0A^3-\\
&-\{32\,[4p_2k_6+(2+p_2)\,k_7-8\,(q_2-h)]-k_4(2+p_2)^2+\\
&\qquad+16\,(2+p_2)\,k_5-64\,k_7\}\,A^4=0\,,
\end{aligned}
\tag{19.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&16^2\{(2+h-g)\,k_3-a_1q_2\,[a^2\delta\,(1+2c)+(b^2-a^2)\,(1+2d_1)]\}\,A^2+\\
&+(2-p_2)^2\,Q_1A_0^4-[4\,(2-p_2)\,(1-p_2)\,Q_1-16\,(2-p_2)\,Q_2]\,A_0^3A-\\
&-\{2\,(2+4p_2-3p_2^2)\,Q_1+16\,[2\,(1-p_2)\,Q_2-(2-p_2)\,Q_3-4\,Q_4]\}A_0^2A^2+\\
&+\{4\,(1-p_2)\,(2+p_2)\,Q_1-16\,[(2+p_2)\,Q_2+2\,(1-p_2)\,Q_3+8Q_5]\}\,A_0A^3+\\
&\qquad+\{(2+p_2)^2\,Q_1-16\,[(2+p_2)\,Q_3-4\,Q_6]\}\,A^4=0\,,
\end{aligned}
\tag{19.2}
$$

where

$$k_4=16\,(q_2\,T_a^2-h\,T_b^2)+8(q_2\,T_a^3-h\,T_b^3)+q_2\,T_a^4-h\,T_a^4\,,\tag{20.1}$$

$$k_5=q_2\,T_a^3-h\,T_b^3+4(q_2\,T_a^2-h\,T_b^2)\,,\tag{20.2}$$

$$k_6=q_2\,T_a-h\,T_b\,;\quad k_7=q_2\,T_a^2-h\,T_b^2\,,\tag{20.3}$$

$$Q_1=k\,T_a^4+k_3\,T_a^2(4+T_a)^2+a_1q_2\left[d(16\,T_2+8T_3+2T_4)+\frac{\tau^2\,T_4'}{2}\right],\tag{20.4}$$

$$Q_2=k\,T_a^2(2-T_a)-k_3\,T_a^2(4+T_a)-2\,a_1q_2\left[d\,(T_2+T_3)+\frac{\tau^2}{2}(T_2'-T_3')\right],\tag{20.5}$$

$$Q_3=k\,T_a^3+k_3\,T_a(4+T_a)(2+T_a)+2\,a_1q_2\left[d\,(4\,T_1+3\,T_2+T_3)+\frac{\tau^2\,T_3'}{2}\right],\tag{20.6}$$

$$
\begin{aligned}
Q_4=&\,k\,(4-T_a^2-4\,T_a)+k_3\,T_a^2+a_1q_2\{2\,(b^2-a^2)\,[d+\tau^2\,(a^2+b^2)]+\\
&+2\,d\,(T_2-2\,T_1)-\frac{\tau^2}{2}\,(T_2'-4\,T_1')]\,,
\end{aligned}
\tag{20.7}
$$

$$Q_5=k\,T_a(T_a-2)+k_3\,T_a(T_a+2)+a_1\,q_2\left[2\,T_2d+\frac{\tau^2}{2}(T_2'-2\,T_1')\right],\tag{20.8}$$

$$Q_6 = k\,T_a^2 + k_3(4 + T_a^2 + 2\,T_a) +$$

(20.9)

$$+ a_1 q_2 \left\{ 4d\,(b^2 - a^2) + 2\,d\,(T_2 + 2\,T_1) + \frac{\tau^2\,T_2'}{2} \right\},$$

$$k = \left[2c\,(a^2 + 2b_1 a^2 t_a + \frac{5}{3} b_1^2 a^2 t_a^2) + \tau^2 \left(\frac{a^4}{2} + \frac{2}{3} b_1 a^4 t_a + \frac{b_1^2}{4} a^4 t_a^2 \right) \right] q_2 \delta -$$

(20.10)

$$- a_1 (a^2 \delta + b^2 - a^2)(1 - p_2 + q_2 \tau^2 b^2),$$

(20.11) $$T_1 = b^2 (T_b - 1) - a^2 (T_a - 1),$$

(20.12) $$T_2 = b^2 T_b^2 - a^2 T_a^2 - 2T_1,$$

(20.13) $$T_3 = b^2 T_b^3 - a^2 T_a^3 - 3T_2,$$

(20.14) $$T_4 = b^2 T_b^4 - a^2 T_a^4 - 4T_3,$$

(20.15) $$T_3' = b^4 T_b^3 - a^4 T_a^3 - \frac{3}{2} T_2',$$

(20.16) $$T_4' = b^4 T_b^4 - a^4 T_a^4 - 2T_3'.$$

7. The torsional couple

The torsional couple N is given by [3]

(21.1) $$N = 2\pi c_{44} \tau \int_0^a \beta_1^2 r^3\,dr + 2\pi d_{44} \tau \int_a^b \beta_2^2 r^3\,dr.$$

Substituting for β_i,

$$N = \frac{\pi\tau}{2} \left\{ 2 c_{44} a^4 \left[\frac{B_0^2}{2} + \frac{2 B_0 B_1}{3} t_a + \frac{B_2^2 + 2 B_0 B_2}{4} t_a^2 + \right. \right.$$

$$+ \frac{2(B_1 B_2 + B_0 B_3)}{5} t_a^3 + \frac{B_2^2 + 2(B_1 B_3 + B_0 B_4)}{4} t_a^4 + \cdots \Big] +$$

(21.2)

$$+ d_{44} [A_0^2 (b^4 - a^4) + 2 A_0 A_1 T_1' + (A_1^2 + 2 A_0 A_2) T_2' +$$

$$\left. + 2(A_1 A_2 + A_0 A_3) T_3' + \cdots \right\} = \frac{\pi \tau a^4}{2} (c_{44} k_1 + d_{44} k_2).$$

The values of k_1 and k_2, given by the classical theory, say, k_2', k_2' are constants when the dimensions of the cylinder are specified.

8. Comparision table

The elastic constants of Beryl — a hexagonal — crystal are:

$$c_{11} = 2781,\ c_{33} = 2480,\ c_{44} = 661,\ c_{12} = 1001,\ c_{13} = 677$$

and those of Apatite are

$$d_{11} = 1667,\ d_{33} = 1396,\ d_{44} = 653,\ d_{12} = 131,\ d_{13} = 655.$$

Taking $t_2 = 1$ at $r = a$, we have

$$T_a = 0,\quad t_a = .6195,\quad \tau^2 a^2 = 2.545.$$

In the following table the values of k_1 and k_2 are compared with those given by the classical theory.

Table 1

$\tau^2 b^2$	A_0	A	B_0	k_1	k_2	k_1'	k_2'
2.89	1.4525	.3035	1.5744	2.223	.5809	1	.2905
3.14	1.4333	.3729	1.5535	2.1642	1.0848	1	.5228
3.39	1.4315	.3787	1.5516	2.159	1.4032	1	.7742

9. Neutral surface

The neutral surface is given by the value of r for which $\widehat{zz}$ vanishes:

$$\widehat{zz}_1 = c_{13}\left[1 - \beta_1^2 - \frac{1}{2}(r^2\beta_1'^2 + 2r\beta_1\beta_1')\right] + c_{33}\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\tau^2 r^2\right),$$

$$\widehat{zz}_2 = d_{13}\left[1 - \beta_2^2 - \frac{1}{2}(r^2\beta_2'^2 + 2r\beta_2\beta_2')\right] + d_{33}\left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta_2^2\tau^2 r^2\right),$$

r is determined by the equations $\widehat{zz}_1 = 0$ or $\widehat{zz}_2 = 0$

$$\begin{aligned} &h[2c - \beta_1^2(c - \tau^2 r^2) - c(r\beta_1' + \beta_1)^2] + \\ &\quad + (a\beta_{1a}' + \beta_{1a})^2 + \beta_{1a}^2(1 - g + h\tau^2 a^2) - 2 + g = 0, \\ &h[2d - \beta_2^2(d - \tau^2 r^2) - d(r\beta_2' + \beta_2)^2] + \\ &\quad + (a\beta_{2a}' + \beta_{2a})^2 + \beta_{2a}^2(1 - g + h\tau^2 a^2) - 2 + g = 0, \end{aligned} \tag{22.1}$$

where β_{ia} is the value of β_i for $r = a$.

The admissible value of r is that satisfying (22.2) and lying in (a, b) or satisfying (22.1) and lying in $(0, a)$.

10. The isotropic cylinder

With the same dimensions for the cylinder let the elastic constants of the two materials be λ_i and μ_i. The displacements are given by (1) and the strains by (3) using the stress-strain relations of the type [5]

$$\widehat{xx}_i = \lambda_i(e_{xx_i} + e_{yy_i} + e_{zz_i}) + 2\mu_i e_{xx_i}, \tag{23.1}$$

$$\widehat{xy}_i = 2\mu_i e_{xy_i}. \tag{23.2}$$

The components of stress are given by [5]

$$\widehat{rr}_i = \lambda_i\left[1-\beta_i^2-\frac{1}{2}(r^2\beta_i'^2+2r\beta_i\beta_i')+\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta_i^2\tau^2r^2\right]+ \tag{24.1}$$
$$+\mu_i[(1-\beta_i^2)-(r^2\beta_i'^2+2r\beta\beta')],$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_i = \lambda_i\left[1-\beta_i^2-\frac{1}{2}(r^2\beta_i'^2+2r\beta_i\beta_i')+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{1}{2}\beta_i^2\tau^2r^2\right]+ \tag{24.2}$$
$$+\mu_i(1-\beta_i^2),$$

$$\widehat{zz}_i = \lambda_i\left[1-\beta_i^2-\frac{1}{2}(r^2\beta_i'^2+2r\beta_i\beta_i')+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{1}{2}\beta_i^2\tau^2r^2\right]+ \tag{24.3}$$
$$+\mu_i(2\alpha-\alpha^2-\beta_i^2\tau^2r^2),$$

$$\widehat{\vartheta z}_i = \mu_i\tau r\beta_i^2, \tag{24.4}$$

$$\widehat{r\vartheta}_i = 0, \quad \widehat{rz}_i = 0. \tag{24.5}$$

All the equations of equilibrium are satisfied except

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{rr}_i+\frac{1}{r}(\widehat{rr}_i-\widehat{\vartheta\vartheta}_i)=0 \tag{25}$$

which gives [5]

$$[2(\lambda_i+2\mu_i)+\lambda_i\tau^2r^2]\beta_i^2+(\lambda_i+2\mu_i)\left(\beta_i'^2+\frac{2}{r}\beta_i\beta_i'\right)r^2+ \tag{26}$$
$$+2\mu\int r\beta_i'^2\,dr = \text{const.}$$

Substituting,

$$\frac{2\mu_i}{\lambda_i+2\mu_i}=p_i,\ \frac{\lambda_i}{\lambda_i+2\mu_i}=q_i,\ q_1\tau^2r^2=t_1,\ q_2\tau^2r^2=e^T, \tag{27}$$

we obtain (8.1) and (8.2).
The boundary conditions are the same as given in § 5. The equations to be satisfied are given by (11), (12), (14) and (15.2), provided we put

$$\frac{2(\mu_1-\mu_2)}{\lambda_1-\lambda_2+2(\mu_1-\mu_2)}=g,\quad \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2+2(\mu_1-\mu_2)}=h, \tag{28.1}$$

$$\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_2+2\mu_2}=\delta,\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}=c,\quad \frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}=d. \tag{28.2}$$

Substituting the above values, the solutions obtained hold good. The torsional couple is given by (21) if we replace c_{44} by μ_1 and d_{44} by μ_2.
The neutral surface is given by (22) wring (27) and (28) for (7), (13) and (16).

11. Comparison Table

Taking $t_2 = 1$ for $r = a$ we have $T_a = 0$.
In the following table values of k_1, k_1', k_2, k_2' are compared when the materials composing the beam are iron and copper.

Table 2

$\tau^2 b^2$	A_0	A	B_0	k_1	k_2	k_1'	k_2'
2.5	1.1036	— 1.4814	1.252	1.3185	.1653	1	.1481
2.8	1.5529	— 1.7567	1.762	2.6113	.8476	1	.4402
3.1	1.1562	— 1.3817	1.312	1.4479	.6494	1	.7654

The solutions obtained can obviously be extended when the cylinder contains more than two different materials concentrically placed by taking for β solution of the type (9.2).

In conclusion, I wish to express my thanks to professor B. R. Seth, for suggesting me the problem and professor V. P. Venkatachari for his guidance and valuable criticism.

Received the 17 XI 1957

Osmania University, Hyderabad, India

LITERATUR

1. Muskhelishvili N. I., Bull. Ac. Sc. U.R.S.S., 1932, ser. VII, 7, pp. 907-945.
2. Payne L. E., Journal Iowa State College, 1946.
3. Seth B. R., Bull. Calcutta Math. Soc., 1946, **38**, pp. 39-44.
4. Ramakanth J., Z. A. M. M., 1955, **35**, *12*, pp. 453-459.
5. Seth B. R., Phil. Trans., 1925, **234**, pp. 231-264.

КОНЕЧНОЕ КРУЧЕНИЕ АЛЛОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРОВ (II)

(Резюме)

Автор в [4], применил метод Сета [3] к расчету значений кручения изотропных полых цилиндров и гексагональных анизотропных цилиндров.

В этой заметке исследуется задача конечного кручения прямого кругового гетерогенного цилиндра, составленного из различного ромбоидального материала.

TORSIUNEA FINITĂ A CILINDRILOR ALOTROPICI ŞI COMPUŞI (II)

(Rezumat)

În [4] autorul a aplicat metoda lui Seth [3] la calculul torsiunii cilindrilor tubulari izotropi precum şi a cilindrilor hexagonali anizotropi.

În această Notă, plecînd de la cunoscutele lucrări ale acad. Mushelişvili [1] ş.a., se studiază problema torsiunii finite a unui cilindru drept construit din diferite materiale romboedrale. Se deduce apoi ca un caz particular soluţia pentru materiale izotrope.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

531.133.1

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

М. З. ЛИТВИН-СЕДОЙ

При исследовании геометрических и кинематических свойств сложных механических систем, а также при проектировании векторов сил и моментов на оси различных координатных систем и определении направляющих косинусов этих векторов по отношению к требуемым направлениям, непосредственные геометрические построения не только весьма затруднительны, но и не приспособлены для выявления общих закономерностей рассматриваемых преобразований. В этих условиях с успехом применяются методы линейной алгебры [1] и матричного исчисления [2], [3], позволяющие не только находить кинематические соотношения аналитическим путем, но также строить системы координат, удобные для прикладных задач. В настоящей работе рассматриваются некоторые приложения матричных методов к геометрии и кинематике механических систем.

§ 1. МАТРИЦЫ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ МЕЖДУ ОСЯМИ ПАР ТРЕХГРАННИКОВ

Зададим систему правых прямоугольных трехгранников $O_k x_k y_k z_k$, $(k=1, 2, ..., n)$, в общем случае каким-либо образом перемещающихся. Введем матрицу $l_{pq} = \| l_{ij}^{(pq)} \|$, $(i, j=1, 2, 3;\ p, q = 1, 2, .., n)$ направляющих косинусов между осями двух трехгранников $O_p x_p y_p z_p$ и $O_q x_q y_q z_q$, которой соответствует таблица направляющих косинусов:

(1)

	x_q	y_q	z_q
x_p	$l_{11}^{(pq)}$	$l_{12}^{(pq)}$	$l_{13}^{(pq)}$
y_p	$l_{21}^{(pq)}$	$l_{22}^{(pq)}$	$l_{23}^{(pq)}$
z_p	$l_{31}^{(pq)}$	$l_{32}^{(pq)}$	$l_{33}^{(pq)}$

Желая подчеркнуть соответствие пар осей направляющим косинусам, введем для обозначения матриц l_{pq} запись $l_{pq} = (x_p y_p z_p, x_q y_q z_q)$, причем на первом месте в скобках ставится обозначение трехгранника, номер которого соответствует первому по порядку (слева направо) индексу в обозначении l_{pq} этой матрицы (в данном случае p). Очевидно, что матрица $(x_q y_q z_q, x_p y_p z_p)$ является транспонированной по отношению к l_{pq}, т. е. $l_{qp} = l_{pq}^T = (x_q y_q z_q, x_p y_p z_p)$, где значек T означает операцию транспонирования.

Пусть $\overline{A}$ — некоторый вектор, образующий с осями $O_k x_k$, $O_k y_k$, $O_k z_k$ углы, косинусы которых задаются таблицей

$$\overline{A} \quad \begin{matrix} x_k & y_k & z_k \\ l_x^{(k)} & l_y^{(k)} & l_z^{(k)} \end{matrix},$$

соответствующей матрице-строке

$$(\overline{A},\ x_k\, y_k\, z_k) = \left\| l_x^{(k)},\ l_y^{(k)},\ l_z^{(k)} \right\|.$$

Аналогичная запись имеет место и при пользовании матрицей-столбцом:

$$A_k = (x_k\, y_k\, z_k,\ \overline{A}) = \left\| l_x^{(k)},\ l_y^{(k)},\ l_z^{(k)} \right\|^T.$$

Напомним, что поскольку рассматриваемые трехгранники прямоугольные, всякая матрица типа $l_{pq} = \left\| l_{ij}^{(pq)} \right\|$ ортогональна: $l^T = l^{-1}$, где l^{-1} — матрица, обратная по отношению к l. Это означает, что $\det l = 1$, а каждый элемент этого определителя равен своему алгебраическому дополнению.

§ 2. ПОДСЧЕТ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ МЕЖДУ ОСЯМИ РАЗЛИЧНЫХ ПАР ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕХГРАННИКОВ

Пусть заданы n трехгранников $O_m x_m y_m z_m$, $(m = 1, 2, \ldots, n)$. Требуется найти косинусы между осями трехгранников $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $O_n x_n y_n z_n$, т. е. матрицу $l_{n1} = (x_n\, y_n\, z_n,\ x_1\, y_1\, z_1)$, если известны направляющие косинусы между осями последовательных пар трехгранников. Для этого рассмотрим два трехгранника $O_p x_p y_p z_p$, $O_q x_q y_q z_q$, $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$ и некоторый вектор $\overline{A}$. Проекции $\overline{A}$ на оси различных трехгранников преобразуются с помощью очевидных матричных соотношений [1], [2], [3]:

$$A_q = l_{qp} A_p = l_{pq}^T A_p;\quad A_p = l_{pq} A_q = l_{qp}^T A_q. \tag{2}$$

Используя (2), выпишем систему матричных равенств:

$$A_2 = l_{21} A_1,\ A_3 = l_{32} A_2, \ldots,\ A_n = l_{n(n-1)} A_{n-1},$$

равносильных соотношению

$$A_n = l_{n(n-1)}\ l_{(n-1)(n-2)} \cdots l_{32}\ l_{21} A_1.$$

Применяя же (2) к матрицам A_n и A_1, имеем $A_n = l_{n1} A_1$, откуда следует, что

$$l_{n1} = \prod_{x=1}^{n-1} l_{(n-x+1)(n-x)}. \tag{3}$$

Матрицы $l_{(n-x+1)(n-x)}$ в общем случае не перестановочны. С помощью обозначений § 1, перепишем (3) в виде:

$$(x_n\, y_n\, z_n,\ x_1\, y_1\, z_1) = (x_n\, y_n\, z_n,\ x_{n-1}\, y_{n-1}\, z_{n-1})(x_{n-1}\, y_{n-1}\, z_{n-1},\ x_{n-2}\, y_{n-2}\, z_{n-2}) \ldots \times$$
$$\times\ (x_2\, y_2\, z_2,\ x_1\, y_1\, z_1). \tag{4}$$

Аналогичное равенство можно написать для матрицы-столбца направляющих косинусов вектора $\overline{A}$:

$$(x_n\, y_n\, z_n,\ A) =$$

$$= (x_n\, y_n\, z_n,\ x_{n-1}\, y_{n-1}\, z_{n-1})\,(x_{n-1}\, y_{n-1}\, z_{n-1},\ x_{n-2}\, y_{n-2}\, z_{n-2})\ldots\times \tag{5}$$

$$\times\,(x_2\, y_2\, z_2,\ x_1\, y_1\, z_1)\,(x_1\, y_1\, z_1,\ \bar{A}).$$

и для матрицы-строки:

$$(\bar{A},\ x_n\, y_n\, z_n) = (\bar{A},\ x_1\, y_1\, z_1)\,(x_1\, y_1\, z_1,\ x_2\, y_2\, z_2)\,(x_2\, y_2\, z_2,\ x_3\, y_3\, z_3)\ldots\times \tag{6}$$

$$\times\,(x_{n-1}\, y_{n-1}\, z_{n-1},\ x_n\, y_n\, z_n).$$

§ 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ТРЕХГРАННИКА ОКОЛО ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОСЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЕГО НАЧАЛО

Рассмотрим задачу о разыскании направляющих косинусов между осями неподвижного трехгранника $OXYZ$ и осями подвижного трехгранника $Oxyz$ после последовательных его поворотов на конечные углы около осей, фиксированных по отношению к $OXYZ$ [2], [4]. Обозначив через Ox_0, Oy_0, Oz_0 оси подвижного трехгранника $Oxyz$ в исходном положении, зададим начальное взаимнорасположение систем $OXYZ$ и $Oxyz$ матрицей

$$l = \| l_{ij} \| = (x_0\, y_0\, z_0,\ XYZ), \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Требуется найти направляющие косинусы между осями трехгранника $OXYZ$ и осями $Ox'y'z'$ трехгранника $Oxyz$ после поворота последнего на угол φ из положения $Ox_0\, y_0\, z_0$ в положение $Ox'y'z'$ около оси On, заданной матрицей-строкой направляющих косинусов по отношению к $OXYZ$:

$$n = \| n_1, n_2, n_3 \| = (\bar{n}^0, XYZ)$$

или же матрицей ν этих косинусов по отношению к $Ox_0y_0z_0$:

$$\nu = \|\nu_1, \nu_2, \nu_3\| = (\bar{n}^0,\ x_0\, y_0\, z_0), \quad n = \nu l.$$

Здесь n^0—единичный вектор оси On, определяющий положительное направление этой оси.

Для разыскания матрицы $\Omega' = \| \Omega'_{ij} \| = (x'y'z',\ XYZ)$ введем вспомогательные трехгранники $On\eta\zeta$ и $On\eta'\zeta'$ так, что $L(O\eta', O\eta) = L(O\zeta', O\zeta) = \varphi$. Тогда в силу (4):

$$(x'y'z',\ XYZ) = (x'y'z',\ n\eta'\zeta')\,(n\eta'\zeta',\ n\eta\zeta)\,(n\eta\zeta,\ x_0y_0z_0)\,(x_0y_0z_0,\ XYZ). \tag{7}$$

При этом

$$(n\eta'\zeta',\ n\eta\zeta) = \lambda \equiv \lambda(\varphi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

Для иллюстрации, на рис. 1 представлена схема поворота на $L\varphi$. Далее положим $\sigma = \| \sigma_{ij} \| = (n\,\eta\zeta, x_0\,y_0\,z_0), (i, j = 1, 2, 3)$.

Тогда $\sigma' = (x'y'z', n\eta'\zeta') = \sigma^T$. Следовательно, в силу (7)

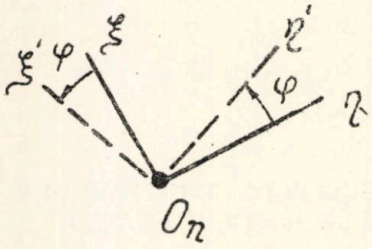


Рис. 1

$$\mathfrak{L}' = \sigma^T \lambda\, \sigma\, l \tag{8}$$

или, обозначая искомую матрицу преобразования через Щ, получим окончательно

$$\mathfrak{L}' = Щ\, l. \tag{9}$$

Вычисляя произведение $\sigma^T \lambda\, \sigma$ которое, естественно, не зависит от выбора исходной ориентации вспомогательных осей в плоскости, перпендикулярной On, выпишем матрицу Щ:

$$Щ = Щ(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \varphi) = \tag{10}$$

$$= \begin{Vmatrix} \nu_1^2+(1-\nu_1^2)\cos\varphi; & (1-\cos\varphi)\,\nu_1\,\nu_2+\nu_3\sin\varphi; & (1-\cos\varphi)\,\nu_1\,\nu_3-\nu_2\sin\varphi \\ \nu_2\,\nu_1(1-\cos\varphi)-\nu_3\sin\varphi; & \nu_2^2+(1-\nu_2^2)\cos\varphi; & (1-\cos\varphi)\,\nu_2\,\nu_3+\nu_1\sin\varphi \\ \nu_3\,\nu_1(1-\cos\varphi)+\nu_2\sin\varphi; & \nu_3\,\nu_2(1-\cos\varphi)-\nu_1\sin\varphi; & \nu_3^2+(1-\nu_3^2)\cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

Задачу о нахождении матрицы $\mathfrak{L}'$ можно решить и несколько иначе, определив положение оси вращения On относительно неподвижного трехгранника, а не относительно вращающегося трехгранника. Воспроизводя предыдущее рассуждение, получим $\mathfrak{L} = l\,Ж$,

$$Ж = Ж(n_1, n_2, n_3) = \tag{11}$$

$$= \begin{Vmatrix} n_1^2+(1-n_1^2)\cos\varphi; & (1-\cos\varphi)\,n_1\,n_2+n_3\sin\varphi; & (1-\cos\varphi)\,n_1\,n_3-n_2\sin\varphi \\ n_2\,n_1(1-\cos\varphi)-n_3\sin\varphi; & n_2^2+(1-n_2^2)\cos\varphi; & (1-\cos\varphi)\,n_2\,n_3+n_1\sin\varphi \\ n_3\,n_1(1-\cos\varphi)+n_2\sin\varphi; & n_3\,n_2(1-\cos\varphi)-n_1\sin\varphi; & n_3^2+(1-n_3^2)\cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

Сравнивая выражения для Щ и Ж найдем, что $Ж = Щ(n_1, n_2, n_3)$, $Щ = Ж(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Применяя (9) к последующим вращениям на углы φ_2 и φ_3 около осей On_2 и On_3 соответственно, получим $(\varphi = \varphi_1)$ $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}' = Щ_1\, l$, $\mathfrak{L}_2 = Щ_2\,\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_3 = Щ_3\,\mathfrak{L}_2$, т. е.

$$\mathfrak{L} = Щ_3\, Щ_2\, Щ_1\, l, \tag{12}$$

где $Щ_i = Щ_{(\nu_1^{(i)},\, \nu_2^{(i)},\, \nu_3^{(i)},\, \varphi_i)}$, $(i = 1, 2, 3)$.

Когда ориентация осей вращения On_i задана направляющими косинусами $n_j^{(i)}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ относительно неподвижного трехгранника $OXYZ$:

$$n_i = \| n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, n_3^{(i)} \| = (\overline{n}_i^0, X\,Y\,Z),$$

то косинусы $\nu_j^{(i)}$ вычисляются по формулам, получаемым с помощью $n = \nu l$ и свойства ортогональности матриц $\mathfrak{Q}_i$:

$$\nu_1 = n_1 l^T, \quad \nu_2 = n_2 \mathfrak{Q}_1^T = n_2 l^T \text{Щ}_1^T, \quad \nu_3 = n_3 \mathfrak{Q}_2^T = n_3 l^T \text{Щ}_1^T \text{Щ}_2^T.$$

При N последовательных поворотах подвижного трехгранника около N осей $On_1, On_2, On_3, \ldots, On_N$, обобщение соотношения (12) служит матричное соотношение

$$\mathfrak{Q}_N = \prod_{g=1}^{N} \text{Щ}_{N-g+1} l.$$

§ 4. СИСТЕМЫ УГЛОВ ЭЙЛЕРА

Углы типа Эйлера, характеризующие положение твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, можно выбирать различными равносильными способами, но выбор той или иной из систем этих углов, вообще говоря, не безразличен для данной задачи механики: произвольно взятая система эйлеровых углов может вырождаться в окрестности значений косого угла, важных для этой задачи. Поэтому целесообразно установить способ нахождения совокупности систем эйлеровых углов, среди которых могут оказаться и системы более удобные для конкретных задач.

Ограничимся рассмотрением частной задачи прикладного характера об аналитическом построении одного класса систем углов Эйлера: из всех возможных систем рассмотрим те, которые порождаются матрицами

$$\| 1, 0, 0 \|, \quad \| 0, 1, 0 \|, \quad \| 0, 0, 1 \|, \tag{13}$$

отождествляемыми в том или ином порядке с матрицами ν_i (§ **3**).

Пусть взаиморасположение трехгранников $OXYZ$ и $Oxyz$ определяется матрицей $\mathfrak{Q} = (xyz, XYZ)$. Разыщем совокупность $M_э$ систем трех последовательных вращений, переводящих подвижной трехгранник из положения $Ox_0y_0z_0$, в котором он совпадает с $OXYZ$, в положение $Oxyz$ путем отождествления каждой из матриц ν_1, ν_2, ν_3 с одной из матриц (13). Число получаемых таким образом систем равно $3! = 6$. Рассмотрим три из этих шести систем, каждая из которых полезна в определенном классе прикладных задач.

I-я система: пусть $\nu_1 = \| 0, 1, 0 \|$, $\nu_2 = \| 0, 0, 1 \|$, $\nu_3 = \| 1, 0, 0 \|$, а для углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, введем специальные обозначения ψ, ϑ, γ соответственно. Тогда

$$\text{Щ}_1 = l_\psi = \text{Щ}(0, 1, 0, \psi) = \begin{Vmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{Vmatrix},$$

$$\text{Щ}_2 = l_\vartheta = \text{Щ}(0, 0, 1, \vartheta) = \begin{Vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\text{Щ}_3 = l_\gamma = \text{Щ}(1, 0, 0, \gamma) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix}.$$

Матрицы l_ψ, l_ϑ, l_γ характеризуют частные повороты подвижного трехгранника на углы ψ, ϑ, γ соответственно. Как следует из вида матриц ν_i, первое вращение, на $L\psi$, выполняется около оси Oy_0, совпадающей с OY. Второе вращение, на $L\vartheta$, совершается около нового положения ON_1 оси Oz_0 — линии узлов, образованной пересечением плоскостей OXZ и Oyz. Третье вращение, на $L\gamma$, происходит около оси Ox. Матрицу Ω можно выразить через эйлеровы углы ψ, ϑ, γ с помощью (12), где следует положить $l=E$ (E — единичная матрица), так как, по определению, $\Omega = l_\gamma\, l_\vartheta\, l_\psi$,

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \cos\psi\cos\vartheta; & \sin\vartheta; & -\sin\psi\cos\vartheta \\ \sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\cos\gamma\sin\vartheta; & \cos\gamma\cos\vartheta; & \cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\cos\gamma\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\gamma\sin\vartheta; & -\sin\gamma\cos\vartheta; & \cos\psi\cos\gamma-\sin\psi\sin\gamma\sin\vartheta \end{matrix} \right\|.$$

Углы ψ, ϑ, γ и суть углы прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Заметим, что для каждой матрицы Ω, заданию трех матриц ν_1, ν_2, ν_3 отвечает, на определенном интервале изменения ψ, ϑ, γ, единственная совокупность этих трех углов.

2-я система: пусть $\nu_1 = \| 0, 0, 1 \|$, $\nu_2 = \| 0, 1, 0 \|$, $\nu_3 = \| 1, 0, 0 \|$, а для углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, введем специальные обозначения Θ, Ψ, Γ соответственно. Тогда

$$Ш_1 = Ш(0, 0, 1, \Theta) = l_\Theta = \left\| \begin{matrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$Ш_2 = Ш(0, 1, 0, \Psi) = l_\Psi = \left\| \begin{matrix} \cos\Psi & 0 & -\sin\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{matrix} \right\|,$$

$$Ш_3 = Ш(1, 0, 0, \Gamma) = l_\Gamma = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Gamma & \sin\Gamma \\ 0 & -\sin\Gamma & \cos\Gamma \end{matrix} \right\|.$$

Здесь, как следует из вида матриц ν_i, первое вращение, на $L\Theta$, выполняется около оси Oz_0, совпадающей с OZ. Второе вращение, на $L\Psi$, совершается около нового положения ON_2 оси Oy — линии узлов, образованной пересечением плоскостей OXY^0 и Oyz. Третье вращение, на $L\Gamma$, происходит около оси Ox; $\Omega = l_\Gamma\, l_\Psi\, l_\Theta$,

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \cos\Psi\cos\Theta; & \cos\Psi\sin\Theta; & -\sin\Psi \\ \sin\Psi\sin\Gamma\cos\Theta-\sin\Theta\cos\Gamma; & \sin\Psi\sin\Gamma\sin\Theta+\cos\Gamma\cos\Theta; & \cos\Psi\sin\Gamma \\ \sin\Psi\cos\Gamma\cos\Theta+\sin\Gamma\sin\Theta; & \sin\Psi\cos\Gamma\sin\Theta-\sin\Gamma\cos\Theta; & \cos\Psi\cos\Gamma \end{matrix} \right\|.$$

На интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$ изменения Θ, Ψ, Γ: $\Theta = \operatorname{arc\,tg}\Omega_{12}/\Omega_{11}$, $\Psi = -\operatorname{arc\,sin}\Omega_{13}$, $\Gamma = \operatorname{arc\,tg}\Omega_{23}/\Omega_{33}$.

3-я система: пусть $\nu_1 = \| 1, 0, 0 \|$, $\nu_2 = \| 0, 0, 1 \|$, $\nu_3 = \| 0, 1, 0 \|$, а для углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, введем специальные обозначения ψ, θ, γ соответственно. Тогда

$$Ш_1 = Ш(1, 0, 0, \gamma) = l_\gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix},$$

$$Ш_2 = Ш(0, 0, 1, \theta) = l_\theta = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$Ш_3 = Ш(0, 1, 0, \psi) = l_\psi = \begin{Vmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, в этой системе $\mathfrak{L} = l_\psi l_\theta l_\gamma = Ш_3 Ш_2 Ш_1$.

$$\mathfrak{L} = \begin{Vmatrix} \cos\psi\cos\theta; & \cos\psi\sin\theta\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma; & \cos\psi\sin\theta\sin\gamma - \sin\psi\cos\gamma \\ -\sin\theta; & \cos\gamma\cos\theta; & \cos\theta\sin\gamma \\ \sin\psi\cos\theta; & \sin\psi\sin\theta\cos\gamma - \cos\psi\sin\gamma; & \sin\psi\sin\theta\sin\gamma + \cos\psi\cos\gamma \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно показать, что все системы совокупности $M_э$ принадлежат к системам эйлеровых углов, т. е оси частных вращении образуют косоугольный трехгранник с одним косым углом, совпадающим с одним из трех углов φ_1, φ_2, φ_3 (или дополнением соответствующего угла до $\pi/2$ или до π).

В силу § **3** и учитывая, что $l = E$, получим

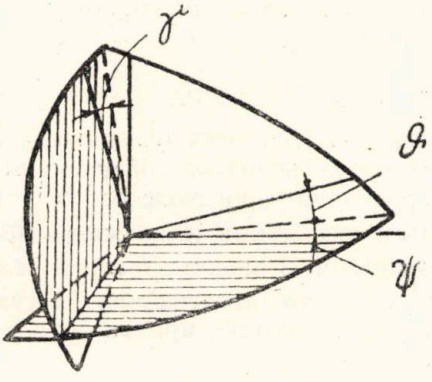


Рис. 2.

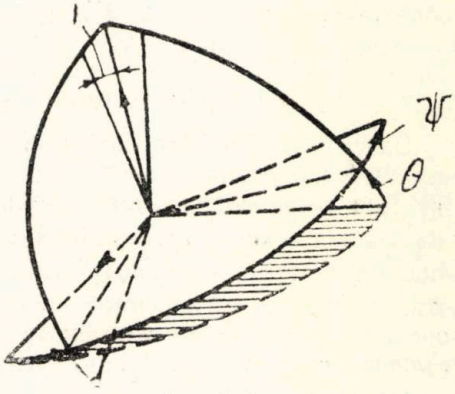


Рис. 3.

$$n_1 = \nu_1,\ n_2 = \nu_2 Ш_1,\ n_3 = \nu_3 Ш_2 Ш_1.$$

Подставляя вместо $\nu_i\,(i = 1, 2, 3)$ матрицы (13) в любом порядке убедимся, что два угла между тремя направлениями, определяемыми матрицами-строками n_i — прямые, а третий — косой, совпадающий с одним из углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Например, в первой системе:

$n_1 = \nu_1 = \| 0, 1, 0 \|$, ($n_1$ определяет ось OY),

$n_2 = \nu_2 l_\psi = \| \sin\psi, 0, \cos\psi \|$, ($n_2$ определяет ось ON_1),

$n_3 = \nu_3 l_\vartheta l_\psi = \| \cos\vartheta \cos\psi, \sin\vartheta, -\cos\vartheta \cos\psi \|$, ($n_3$ определяет ось Ox). n_3 совпадает с первой строкой матрицы $\mathfrak{L}$,

$$OY \perp ON_1,\ ON_1 \perp Ox,\ L(OY, Ox) = \frac{\pi}{2} - \vartheta.$$

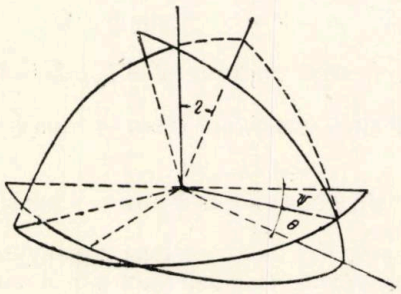


Рис. 4.

С помощью матриц n_1, n_2, n_3 для каждой из рассмотренных систем можно построить оси частных вращений; в результате получатся графики, изображенные на рис. 2, 3 и 4, приведенные здесь исключительно в иллюстративных целях.

§ 5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Здесь мы рассмотрим аналитический вывод этих уравнений, не связанный с операцией предельного перехода, используемой, например, в [2]. Для установления связи между проекциями произвольного вектора $\bar{A}$ на оси подвижного трехгранника $Oxyz$ и проекциями $\bar{A}$ на оси частных вращений системы эйлеровых углов (вектором $\bar{A}$ может быть, в частности, вектор $\bar{\omega}$ мгновенной угловой скорости трехгранника $Oxyz$), проведем рассуждение применительно к I-й системе, применимое и к остальным системам эйлеровых углов.

Обозначим через $\bar{\gamma}^0, \bar{\psi}^0$ и $\bar{\vartheta}^0$ единичные векторы осей косоугольного трехгранника Ox, OY, ON_1, соответственно; тогда в I-й системе

$$\bar{i} = \bar{\gamma}^0. \tag{14}$$

Следовательно

$$\bar{A} = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k} = A_\gamma \bar{i} + A_\psi \bar{\psi}^0 + A_\vartheta \bar{\vartheta}^0. \tag{15}$$

Рассмотрим матрицы-столбцы:

$$e' = \left\| \begin{matrix} \bar{i}'_0 \\ \bar{Y}^0 \\ \bar{k}' \end{matrix} \right\|, \quad e_0 = \left\| \begin{matrix} \bar{X}^0 \\ \bar{Y}^0 \\ \bar{Z}^0 \end{matrix} \right\|, \quad e_D = \left\| \begin{matrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{matrix} \right\|, \quad e_э = \left\| \begin{matrix} \bar{\gamma}^0 \\ \bar{\psi}^0 \\ \bar{\vartheta}^0 \end{matrix} \right\|,$$

где $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$ — единичные векторы осей Ox, Oy, Oz подвижного трехгранника соответственно, $\bar{i}'$ и $\bar{k}'$ — единичные векторы осей Ox' и Oz' соответственно. Как и выше, под Ox' и Oz' мы понимаем направления осей Ox_0 и Oz_0 после первого поворота на L_ψ около оси OY. При этом (см. (2)) $e_0 = l_\psi^T e'$. Но таким же образом $e_0 = \mathfrak{L}^T e_D$, т. е. $\mathfrak{L}^T e_D = l_\psi^T e'$, откуда

$$e' = l_\psi \mathfrak{L}^T e_D. \tag{16}$$

Вычисляя матрицу-произведение $l_\psi \mathfrak{L}^T = l_\vartheta^T l_\gamma^T$ получим:

$$l_\psi \mathfrak{L}^T = \left\| \begin{matrix} \cos\vartheta & -\cos\gamma \sin\vartheta & \sin\gamma \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\gamma \cos\vartheta & -\sin\gamma \cos\vartheta \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{matrix} \right\|.$$

Сравнивая второй и третий элементы матриц-столбцов в обоих частях равенств (16), выпишем $\bar{\psi}^0$ и $\bar{\vartheta}^0$ в функции $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и эйлеровых углов:

$$\bar{\psi}^0 = \sin\vartheta + \bar{j}\cos\gamma\cos\vartheta - \bar{k}\sin\gamma\cos\vartheta, \quad \bar{\vartheta}^0 = \bar{j}\sin\gamma + \bar{k}\cos\gamma.$$

Учитывая еще (14), напишем $e_э = Э^T e_D$, где

$$Э = \left\| \begin{matrix} 1 & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\cos\vartheta\sin\gamma & \cos\gamma \end{matrix} \right\|, \text{ (матрица } Э \text{ не ортогональная).}$$

Подставляя в соотношение (15) вместо $\bar{\psi}^0, \bar{\gamma}^0, \bar{\vartheta}^0$, их выражения через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, придем к кинематическим уравнениям Эйлера:

$$\begin{gathered} \omega_x = \dot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\gamma}, \quad \omega_y = \dot{\vartheta}\sin\gamma + \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma, \\ \omega_z = \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma, \end{gathered} \tag{17}$$

или в матричной форме

$$\omega_D = Э\dot{\Lambda}. \tag{18}$$

Здесь

$$\omega_D = \left\| \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \right\|, \quad \Lambda = \left\| \begin{matrix} \gamma \\ \psi \\ \vartheta \end{matrix} \right\|.$$

Так как $\det Э = \cos\vartheta$, последняя система разрешима, как известно, при $\cos\vartheta \neq 0$:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = Э^{-1}\omega_D; \quad Э^{-1} = \frac{C}{\det Э},$$

C-присоединенная матрица. Подобным же образом, во 2-й системе и в 3-й системе:

$$\omega_x = -\dot{\Theta}\sin\Psi + \dot{\Gamma} \qquad \omega_x = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\Gamma}\cos\psi\cos\theta,$$

$$\omega_y = \dot{\Psi}\cos\Gamma + \dot{\Theta}\cos\Psi\cos\Gamma, \qquad \omega_y = \dot{\psi} - \dot{\Gamma}\sin\theta,$$

$$\omega_z = -\dot{\Psi}\sin\Gamma + \dot{\Theta}\cos\Psi\cos\Gamma, \qquad \omega_z = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\Gamma}\sin\psi\cos\theta,$$

соответственно.

Таким образом, 1-я система вырождается при особых значениях угла ϑ, 2-я—при особых значениях угла Ψ, а 3-я—при особых значениях угла θ. Эти обстоятельства предопределяют классы задач, в которых целесообразно использовать ту или иную систему эйлеровых углов. Так как при исследовании дифференциальных уравнений динамики, в частности при электромоделировании и при численном интегрировании погрешность, при прочих равных условиях, возрастает при приближении переменных к их особым значениям, следует выбирать такую из систем эйлеровых углов, при которой на определенном промежутке времени достигается значительное удаление косого угла от его особых значений.

§6. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Перейдем к обобщению рассмотренных соотношений на систему подвижных трехгранников. Рассмотрим $n+1$ правый прямоугольный трехгранник

$$OXYZ\,(Ox_0y_0z_0),\ Ox_1y_1z_1,\ldots,\ Ox_ny_nz_n\ .$$

Пусть $\bar{\omega}_{lm}$ $(l,m=0,1,\ldots,n)$ — вектор мгновенной угловой скорост l-го трехгранника относительно m-го трехгранника. Введем эйлеровы углы, с помощью которых будем характеризовать направление $\bar{\omega}_{lm}$ в пространстве.

Оси частных вращений систем эйлеровых углов образуются с помощью двух прямоугольных трехгранников: одна из этих осей совпадает с одной из осей первого трехгранника, вторая — с одной из осей второго трехгранника, а линия узлов служит пересечением двух определенных координатных плоскостей первого и второго трехгранников. В качестве таких образующих трехгранников мы можем выбрать любые два трехгранника из имеющихся $n+1$-го. Пусть это будут g-ый и h-ый т. е. $Ox_gy_gz_g$ и $Ox_hy_hz_h$. Разложим вектор $\bar{\omega}_{lm}$ по осям каждого из этих двух трехгранников:

$$\bar{\omega}_{lm} = \omega^{(h)}_{xlm}\bar{i}_h + \omega^{(h)}_{ylm}\bar{j}_h + \omega^{(h)}_{zlm}\bar{k}_h = \omega^{(g)}_{xlm}\bar{i}_g + \omega^{(g)}_{ylm}\bar{j}_g + \omega^{(g)}_{zlm}\bar{k}_g\ .$$

Одновременно разложим $\bar{\omega}_{lm}$ по осям частных вращений системы эйлеровых углов, построенной на g-ом и h-ом трехгранниках. Рассмотрим для определенности первую систему (**§4**). За оси косоугольной координатной системы частных вращений примем Ox_h, Oy_g и линию узлов ON_{gh}, образованную пересечением плоскостей Ox_gy_g и Oy_hz_h. Обозначая через $\gamma^{(gh)}_{lm}$,

$\psi_{lm}^{(gh)}$ и $\vartheta_{lm}^{(gh)}$ углы Эйлера в построенной системе, $\psi_{lm}^{(gh)} = L$ (проекция Ox_h на плоскость $Ox_g z_g$, Ox_g), $\vartheta_{lm}^{(gh)} = L\,(Ox_h,\ Ox_g z_g)$, $\gamma_{lm}^{(gh)} = L\,(Oy_g,\ Ox_h y_h)$, напишем

$$\bar{\omega}_{lm} = \dot{\gamma}_{lm}^{(gh)}\ \bar{i}_h + \dot{\psi}_{lm}^{(gh)}\ \bar{j}_g + \vartheta_{lm}^{(gh)}\ \bar{N}_{gh}^0 .$$

Здесь $\bar{N}_{gh}^0$ — единичный вектор линии узлов ON_{gh}. Заметим, что порядок следования индексов здесь не безразличен: в общем случае

$$\gamma_{lm}^{(gh)} \neq \gamma_{lm}^{(hg)}, \ldots, \bar{N}_{gh}^0 \neq \bar{N}_{hg}^0 .$$

Введем еще матрицу направляющих косинусов

$$l_{gh} = (x_g\, y_g\, z_g,\ x_h y_h z_h) = l_{hg}^T = \| l_{ij}^{(gh)} \|, (i, j = 1, 2, 3),$$
$$l_{ij}^{(gh)} = l_{ij}^{(gh)}\,(\gamma_{lm}^{(gh)},\ \psi_{lm}^{(gh)},\ \vartheta_{lm}^{(gh)})$$

и матрицы

$$\Theta_{gh} = \begin{Vmatrix} 1 & \sin\vartheta_{gh} & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_{gh}\cos\gamma_{gh} & \sin\gamma_{gh} \\ 0 & -\cos\vartheta_{gh}\sin\gamma_{gh} & \cos\gamma_{gh} \end{Vmatrix},$$

$$\omega_{lm}^{(b)} = \begin{Vmatrix} \omega_{xlm}^{(b)} \\ \omega_{ylm}^{(b)} \\ \omega_{zlm}^{(b)} \end{Vmatrix},\quad \Lambda_{lm}^{(gh)} = \begin{Vmatrix} \gamma_{lm}^{(gh)} \\ \psi_{lm}^{(gh)} \\ \vartheta_{lm}^{(gh)} \end{Vmatrix},\quad (b = 0, 1, \ldots, n).$$

В этих условиях, разберем две задачи:

А) Задана матрица Θ_{hg}, осуществляющая переход от $\omega_{lm}^{(h)}$ к $\dot{\Lambda}_{lm}^{(gh)}$ и матрица l_{gh}. Требуется найти матрицу $\omega_{lm}^{(g)}$ проекций $\bar{\omega}_{lm}$ на оси $Ox_g y_g z_g$.

По условию, в силу (18), $\omega_{lm}^{(h)} = \Theta_{gh}\,\dot{\Lambda}_{lm}^{(gh)}$. Но (см. (2)) $\omega_{lm}^{(h)} = l_{hg}\,\omega_{lm}^{(g)}$. Сравнение двух последних равенств доставляет решение задачи:

$$\omega_{lm}^{(g)} = l_{gh}\,\dot{\Theta}_{gh}\,\dot{\Lambda}_{lm}^{(gh)}. \tag{19}$$

Б) Пусть векторы $\bar{\omega}_{p(p-1)}$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$ мгновенных угловых скоростей трехгранников $Ox_p y_p z_p$ относительно трехгранников $Ox_{p-1}\, y_{p-1}\, z_{p-1}$ заданы своими проекциями на оси p-го трехгранника. Зная матрицы направляющих косинусов между осями рассматриваемых прямоугольных координатных систем, найти проекции вектора $\bar{\omega}_{n0}$ мгновенной угловой скорости трехгранника $Ox_n\, y_n\, z_n$ относительно трехгранника $OXYZ$ на оси q-го трехгранника $Ox_q y_q z_q$ $(q = 0, 1, \ldots, n;\ p \neq q)$.

По условию, начала всех $n+1$-ой систем совпадают, поэтому $\bar{\omega}_{n0} = \sum_{p=1}^{n} \bar{\omega}_{p\,(p-1)}$, или, разлагая $\bar{\omega}_{n0}$ по осям p-ой системы:

$$\bar{\omega}_{n0} = \sum_{p=1}^{n} \left[\omega_{xp(p-1)}^{(p)}\ \bar{i}_p + \omega_{y\,(p-1)}^{(p)}\ \bar{j}_p + \omega_{zp\,p-1)}^{(p)}\ \bar{k}_p \right].$$

Но (см. (2)) $e_p = l_{pq}\, e_q$.

Выражая $\bar{i}_p$, $\bar{j}_p$, $\bar{k}_p$ через $\bar{i}_q$, $\bar{j}_q$, $\bar{k}_q$ и подставляя выражения проекций ω_{n0} на оси $Ox_qy_qz_q$ через проекции ω_{n0} на оси $Ox_py_pz_p$ в матрицу

$$\omega_{n0}^{(q)} = \left\| \begin{matrix} \omega_{xn0}^{(q)} \\ \omega_{yn0}^{(q)} \\ \omega_{zn0}^{(q)} \end{matrix} \right\|$$

получим, после преобразований, решение задачи в виде матричного соотношения

$$\omega_{n0}^{(q)} = \sum_{p=1}^{n} l_{qp}\, \omega_{p(p-1)}^{(p)}, \quad (q = 0, 1, \ldots, n).$$

§ 7. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАССМОТРЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

а) Применение к теории механизмов. Установим связь между угловыми параметрами многозвенного пространственного механизма для перемещения инструмента, обрабатывающего какое-либо изделие. Механизм состоит из n звеньев, последовательно соединенных с помощью пространственных шарниров. Движения механизма и изделия рассматриваются по отношению к неподвижной станине, с которой связана система отсчета $OXYZ$. С каждым звеном механизма свяжем систему координат $C_\mu x_\mu y_\mu z_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, M$). Перемещение всякого μ-го звена относительно предыдущего $\mu-1$-го звена описывается эйлеровыми углами $\varphi_1^{(\mu)}$, $\varphi_2^{(\mu)}$, $\varphi_3^{(\mu)}$. Перемещение первого звена ($\mu=1$) рассматривается по отношению к станине. Через $l_{(\mu-1)\mu}$ обозначим матрицу направляющих косинусов между осями $\mu-1$-ой и μ-ой координатных систем: $l_{(\mu-1)\mu} = (x_{\mu-1}\, y_{\mu-1}\, z_{\mu-1}, x_\mu\, y_\mu\, z_\mu)$, причем $l_{01} = (XYZ, x_1\, y_1\, z_1)$.

Конструкция механизма может быть следующей: первое выполнено в виде круглой цилиндрической трубы, один конец которой соединен, с помощью плоского шарнира, с вертлюгом; последний может вращаться, вместе с трубой, около оси, фиксированной по отношению к станине. Координатой $\varphi_1^{(1)}$ является угол поворота вертлюга относительно станины, а координатой $\varphi_2^{(1)}$ — угол поворота оси трубы относительно вертлюга (т. е. $\varphi_1^{(1)}$ играет роль азимута, а $\varphi_2^{(1)}$ — возвышения трубы). На свободный конец трубы надета гильза, способная вращаться около оси трубы и координатой $\varphi_3^{(1)}$ служит угол поворота гильзы относительно трубы, т. е. некоторого диаметра её перпендикулярного сечения. Гильза снабжена площадкой, несущей вертлюг второго звена и т. д.

С неизменяемой частью изделия свяжем систему координат $Cxyz$. Пусть перемещение изделия по отношению к станине описывается эйлеровыми углами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ т. е. $l = (x\, y\, z, X\, Y\, Z) = l(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Найдем связь между углами $\varphi_1^{(\mu)}$, $\varphi_2^{(\mu)}$, $\varphi_3^{(\mu)}$, ($\mu=1, 2, \ldots, M$) и углами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ так, чтобы угловое перемещение M-го звена, несущего инструмент, относительно обрабатываемого изделия определялось, во всех положениях инструмента, матрицей направляющих косинусов $u = (x_M\, y_M\, z_M, xyz)$, коль скоро задано перемещение изделия по отношению к станине (т. е. матрица l) и число M звеньев.

Задача решается с помощью разложения (4). Так как, по определению, $(XYZ, XYZ) = E$, то

$$E = (XYZ, x_1\, y_1\, z_1)(x_1\, y_1\, z_1, x_2\, y_2\, z_2) \ldots \times$$

$$\ldots \times (x_{M-1}\, y_{M-1}\, z_{M-1}, x_M\, y_M\, z_M)(x_M\, y_M\, z_M, x\, y\, z)(x\, y\, z, X\, Y\, Z)$$

и искомая связь выражается матричным соотношением

$$\left(\prod_{\mu=1}^{M} l_{(\mu-1)\,\mu}\right) u\, l - E = 0,$$

равносильного трем независимым скалярным соотношениям. Здесь

$$l_{(\mu-1)\,\mu} = l_{(\mu-1)\mu}(\varphi_1^{(\mu)}, \varphi_2^{(\mu)}, \varphi_3^{(\mu)}).$$

б) Применение к геометрии гироскопа в полном карданово м подвесе. Пусть твердое тело G, с которым связана система координат $Cxyz$, совершает пространственное движение по отношению к системе координат $OXYZ$, принимаемой за инерциальную. Угловое положение трехгранника $Cxyz$ относительно отсчетного трехгранника $OXYZ$ опишем с помощью трех эйлеровых углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (в любой из систем, разобранных в § 4). Для экспериментального определения этого углового положения применяют трехстепенные гироскопы [5], [6]. Найдем соотношения, выражающие искомые эйлеровые углы в функции координат гироскопических приборов при произвольной установке оси наружного карданового кольца гироскопа в теле G, произвольной установке оси гироскопа в пространстве и при произвольном пространственном движении тела G.

Введем единичные векторы направлений: $\overline{p^0}$ — гироскопа, $\overline{н^0}$ — оси наружного кольца прибора, $\overline{в^0}$ — оси его внутреннего кольца, $\overline{h^0}$ — перпендикуляра к плоскости наружного кольца; $\overline{м^0}$ и $\overline{л^0}$ — направлений, фиксированных в теле G ($\overline{м^0} \perp \overline{л^0}$) так, что плоскость $(\overline{м^0}, \overline{л^0}) \perp \overline{н^0}$. Тройки векторов $\overline{н^0}\ \overline{h^0}\ \overline{в^0}$ и $\overline{н^0}\ \overline{л^0}\ \overline{м^0}$ образуют, в указанном порядке следования, правые прямоугольные трехгранники.

Гироскопический прибор измеряет углы $\chi = L(\overline{p^0}, \overline{h^0})$ и $\varphi = L(\overline{в^0}, \overline{м^0}) = L(\overline{h^0}, \overline{л^0})$.

Пусть $p = \| \lambda, \mu, \nu \|$ — матрица-строка направляющих косинусов вектора p^0 по отношению к отсчетной системе $OXYZ$,

$$m = \| -\sin\chi,\ \cos\chi,\ 0 \|,\quad M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

$S = \| S_{ij} \|$, $(i, j = 1, 2, 3)$ — матрица направляющих косинусов между осями трехгранников $\overline{н^0}\ \overline{л^0}\ \overline{м^0}$ и $x\ y\ z$, $\Omega = \| \Omega_{ij} \|$ то-же между осями трехгранников $Cxyz$ и $OXYZ$. Матрица p характеризует ориентацию гироскопа в пространстве, матрица S — ориентацию оси наружного кольца и направления отсчета угла φ в теле G, матрица Ω — ориентацию тела G в пространстве. Тогда, в силу (6), справедливо матричное соотношенне $p = m\,M\,S\,\Omega$ или, иначе, $p = m\,M\,N$, где $N = S\,\Omega$, с помощью которого выразим χ и φ в функции элементов матриц P, S, Ω:

$$\sin\chi = N_{11}\,\lambda + N_{12}\,\mu + N_{13}\,\nu, \tag{20}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{N_{31}\,\lambda + N_{32}\,\mu + N_{33}\,\nu}{N_{21}\,\lambda + N_{22}\,\mu + N_{23}\,\nu}. \tag{21}$$

Например, пусть ось наружного кольца гироскопа установлена в плоскости Cxy под углом θ к оси Cy: $L(\overline{н^0}, y) = L(\overline{л^0}, x) = \theta$; гироскоп ориентирован по оси OX, т.е.

$$p = \| 1, 0, 0 \|,\quad S = \begin{Vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и (см. (21)), $\operatorname{tg}\varphi = N_{31}/N_{21}$.

Выбирая эйлеровы углы, для определенности, в первой системе (§4), $\Omega = \Omega(\psi, \vartheta, \gamma)$ найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma\sin\vartheta}{\cos\psi\cos\vartheta\cos\theta + (\sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\cos\gamma\sin\vartheta)\sin\theta},$$

откуда следует

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(\cos\vartheta\cos\theta - \cos\gamma\sin\vartheta\sin\theta)\operatorname{tg}\varphi - \sin\gamma\sin\vartheta}{\cos\gamma - \sin\gamma\sin\theta\operatorname{tg}\varphi},$$

В частном случае, $\operatorname{tg}\psi|_{\gamma=0} = \operatorname{tg}\varphi\cos(\vartheta+\theta)$, т.е. при $\gamma=0$, угол θ установки оси наружного кольца гироскопа вызывает, как известно, дополнительное искажение показаний азимутального угла ψ, равносильное искажению от увеличения угла ϑ на угол θ.

Для нахождения всех трех углов ψ, ϑ, γ с помощью двух таких гироскопических приборов, установленных различным образом в теле G, следует написать соотношения (20) и (21) для одного из них и соотношение (21) для другого.

в) Применение к общей кинематике. Исходя из кинематических уравнений Эйлера в проекциях на оси подвижной системы координат, написать эти уравнения в проекциях на оси неподвижной системы координат. Задача сразу-же решается с помощью матричного соотношения (19): положив $g = 0$, $h = 1$, $l = 1$, $m = 0$, получим матрицу-столбец $\omega_{10}^{(0)}$ проекций вектора $\overline{\omega}_{10} = \overline{\omega} = \omega_X \overline{X}^0 + \omega_Y \overline{Y}^0 + \omega_Z \overline{Z}_0$ на неподвижные оси:

$$\omega_{10}^{(0)} = l_{01}\,\Theta_{01}\,\dot{A}_{10}^{(01)}.$$

Здесь $\Theta_{01} = \Theta$, $l_{01} = (x\,y\,z,\ X\,Y\,Z) = \Omega$. Например, в первой системе углов (§ 4): $\Omega = \Omega(\psi, \vartheta, \gamma)$, $\Theta = \Theta(\psi, \vartheta, \gamma)$ (§ 4) и мы придем к искомым соотношениям в скалярном виде:

$$\omega_X = \dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\gamma}\cos\psi\cos\vartheta,\quad \omega_Y = \dot{\psi} + \dot{\gamma}\sin\vartheta,$$

$$\omega_Z = \dot{\vartheta}\cos\psi - \dot{\gamma}\sin\psi\cos\vartheta.$$

Поступило 28 X 1957

Московский Государственный
Университет им. „М. В. Ломоносова“
СССР

ЛИТЕРАТУРА:

1. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, ГТТИ, Москва, 1953.
2. Frazer R. A., Duncan W. I. and Collar A. R., *Elementary matrices*, 1945.
3. Морошкин Ю. Ф., ДАН, 1953, **91**, *4*, стр. 745—748.
4. Литвин-Седой М. З., Вестник МГУ, 1955, *10*, смр. 59—65.
5. Richardson J., *Gyroscope applied.*
6. Ferry E. S. *Applied Gyrodynamics*, New York, 1933.

QUELQUES RELATIONS GÉOMÉTRIQUES CONCERNANT LES SYSTÈMES MÉCANIQUES À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

(Résumé)

L'Auteur examine quelques applications de l'algèbre linéaire et du calcul matriciel à la géométrie d'un ensemble de trièdres mobiles. L'exposé est suivi d'exemples concernant la cinématique, la géométrie des mécanismes et, en particuler, le joint de Cardan.

UNELE RELAŢII GEOMETRICE RELATIVE LA SISTEME MECANICE CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

(Rezumat)

Autorul consideră unele aplicaţii ale algebrei liniare şi ale calcului matricial la geometria unei mulţimi de triedre de referinţă. Expunerea este urmată de exemple din domeniile cinematicii şi geometriei mecanismelor. Autorul se opreşte în particular asupra mecanismului universal.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

531.314.2

ASUPRA FORMEI ECUAŢIILOR LUI LAGRANGE DE SPECIA A DOUA PENTRU SISTEME DE PUNCTE CU MASE VARIABILE

DE

N. IRIMICIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 28–29 iunie 1958

Considerarea, din ce în ce mai mult, în unele aplicaţii tehnice, a aspectului variabil al masei, în sensul separării sau detaşării de particule după legi anumite, a dus la adîncirea problemelor de mecanica corpurilor de masă variabilă, al căror studiu îl începuse încă I. V. Mescerski în magistralele sale lucrări din 1897 [1], la extinderea teoremelor fundamentale ale mecanicei clasice şi apoi la extinderea principiilor şi ecuaţiilor mecanicei analitice, la cazul corpurilor de masă variabilă, în această ordine de idei trebuind să fie menţionate lucrările lui A. A. Kosmodemianski [2], [3] şi ale lui V. S. Novoselov [4], [5].

În Nota de faţă se expune o formă de prezentare a ecuaţiilor lui Lagrange pentru sisteme de puncte cu mase variabile, diferită de cea dată în [5] şi prezentînd oarecare interes.

Se va considera un sistem de puncte materiale, olonom, cu legături ideale şi avînd m grade de libertate, cu masele — funcţii de coordonatele generalizate, de vitezele generalizate şi de timp, explicit

Ecuaţia generală a dinamicei, din care vor fi deduse ecuaţiile lui Lagrange, va avea forma:

$$(1)\qquad \left[\frac{d}{dt}(m_i \bar{v}_i)\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} - \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} - \bar{v}_{R_i}\frac{dm_i}{dt}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0,\ (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m),$$

i şi j fiind indici einsteinieni de sumare, iar produsele $\bar{v}_{R_\nu}\frac{dm_\nu}{dt} = \bar{F}_{R_\nu}$, reprezentînd forţele reactive absolute acţionînd asupra punctelor cu numerele de ordine ν ($\nu=1,2,\ldots,n$).

Primul grup de termeni din (1), în baza cunoscutelor relaţii ale lui Lagrange, poate fi scris sub forma:

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}(m_i \bar{v}_i)\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j}\right] - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j}T_i\right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j}T_i\right]$$

unde s-a notat: $\frac{1}{2}\bar{v}_\nu^2 = T_\nu$ şi $m_i T_i = E_c$.

Al doilea grup de termeni din (1) reprezintă, după cum se știe, forțele active generalizate:

$$\bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = Q_j . \tag{3}$$

Înfine, ultimul grup de termeni din (1), introducînd notațiile:

$$\bar{v}_{R_\nu} \bar{v}_\nu = \bar{R}_\nu \quad \text{și} \quad \frac{d\bar{v}_{R_\nu}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j} - \frac{\partial \bar{v}_{R_\nu}}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{dt} = \langle \bar{v}_{R_\nu}, \bar{r}_\nu \rangle$$

și introducînd noțiunea de funcție reactivă absolută, definită prin relația:

$$\mathcal{R} = m_i R_i = m_i \bar{v}_{R_i} \bar{v}_i \tag{4}$$

poate fi scris sub forma:

$$\bar{v}_{R_i} \frac{dm_i}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j}\right] - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} R_i\right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j} R_i\right] - m_i \langle \bar{v}_{R_i}, \bar{r}_i \rangle - \tag{5}$$

$$- \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial \bar{v}_{R_i}}{\partial \dot{q}_j} \bar{v}_i\right).$$

Introducînd (2), (3) și (5) în (1), folosind notațiile:

$$E_c - \mathcal{R} = W \text{ și } T_\nu - R_\nu = \frac{v_\nu^2}{2} - \bar{v}_{R_\nu} \bar{v}_\nu = S_\nu$$

și egalînd cu zero coeficienții lui δq_j, aceștia fiind indepedenți, se obțin ecuațiile lui Lagrange sub forma:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j}\right] - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} S_i\right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j} S_i\right] + m_i \langle \bar{v}_{R_i}, \bar{r}_i \rangle + \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial \bar{v}_{R_i}}{\partial \dot{q}_j} \bar{v}_i\right) = Q_j \tag{6}$$

Ecuațiile iau forme simplificate în următoarele cazuri:

1) Dacă vitezele reactive absolute nu depind de $\dot{q}$, ci numai de q și t, atunci $\frac{\partial \bar{v}_{R_\nu}}{\partial \dot{q}_j} = 0$ și ecuațiile (6) se vor prezenta sub forma:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j}\right] - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} S_i\right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j} S_i\right] + m_i \langle \bar{v}_{R_i}, \bar{r}_i \rangle = Q_j \tag{7}$$

2) Dacă sînt realizate condițiile: $\frac{\partial \bar{v}_{R_i}}{\partial \dot{q}_j} = 0$ și $m_i \langle \bar{v}_{R_i}, \bar{r}_i \rangle = 0$ atunci ecuațiile se simplifică și mai mult, luînd forma:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j}\right] - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} S_i\right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j} S_i\right] = Q_j . \tag{8}$$

Se verifică imediat că aceste condițiuni sînt satisfăcute cel puțin în următoarele împrejurări:

a) $\bar{v}_{R_\nu} = k_\nu \bar{r}_\nu$, k_ν fiind factori constanți de proporționalitate;

b) $\bar{v}_{R_\nu} = \bar{v}^0_{R_\nu}$, $\bar{v}^0_{R_\nu}$ fiind vectori constanți.

3) Simplificările cele mai substanțiale ale sistemului (6) se obțin în cazurile cînd masele punctelor nu depind de q și $\dot{q}$, ci numai de t, adică atunci cînd $\frac{\partial m_i}{\partial q_j} = 0$ și $\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$ și dacă sînt satisfăcute și condițiile de la punctul 2). În acest caz ecuațiile lagrangiene iau forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = Q_j \tag{9}$$

iar dacă forțele generalizate active admit o funcție de forță U, depinzînd numai de q atunci, extinzînd noțiunea de funcție lagrangiană la suma $\Lambda = W + U = E_c - \mathcal{R} + U$ se obține sistemul lagrangian corespunzător:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} = 0, \qquad (j=1,\ldots,2m) \tag{10}$$

4) În cazul cînd $\bar{v}_{R_\nu} = \frac{1}{2}\bar{v}_\nu$ și cînd deci $S_\nu = 0$ și $W = 0$, sistemul (6) ia forma

$$\frac{1}{2} m_i < \bar{v}_R, \bar{r}_i > + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j. \tag{11}$$

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Mecanică și Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Мещерский И. В., **Работы по механики тел переменнои массы,** Гостехиздат, М., 1949.
2. Космодемьянский А. А., **Обшие теоремы динамики тела переменнои массы,** Ученые записки МГУ, **3**, *152*, Механика, 1951.
3. — **Курс теоретическои механики,** Учпедгиз, М., 1955.
4. Новоселов В. С., Вестник ЛГУ, *19*, 1956 стр. 101—113.
5. — Вестник ЛГУ, *1*, 1957, стр. 130—140.

О ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ СИСТЕМ ТОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

(Резюме)

В настоящей заметке даются уравнения Лагранжа второго рода, для системы точек переменной массы, под видом (6) позволяющим выявить частные случаи где система уравнений принимает упрощенные формы 1), 2), 3), и 4).

Системы точек переменных масс, в зависимости ор обобщенных координат, обобщенных скоростей и от времени, считаются голономными, с идеальными связями и имеющими m степеней свободы.

SUR LA FORME DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE POUR DES SYSTÈMES MÉCANIQUES DE POINTS, DONT LES MASSES SONT VARIABLES

(Résumé)

Dans cette Note sont présentées les équations de Lagrange de deuxième espèce, pour des systèmes de points aux masses variables, sous la forme (6), qui permet de mettre en évidence les cas particuliers dans lesquels le système d'équations prend les formes simplifiées 1), 2), 3) et 4).

Les systèmes de points matériaux, dont les masses dépendent des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps, explicitement, sont considérés holonomes, au liaisons idéales et présentant m degrés de liberté.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

531.32

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES TRAJECTOIRES DÉCRITES PAR UN POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP DE FORCES

PAR

ALFRED BRAIER

Note présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, de 27—29 Juin 1958

§ 1. Introduction

1. Lors du IV-ème Congrès International d'Astronautique (Zürich, 1953), A. Lopes Cardozo [1] mentionne que l'utilisation des machines mathématiques écarte les difficultés posées par les calculs effectifs et souligne la nécessité d'étudier directement les trajectoires d'un corps soumis à l'action d'un champ de gravitation complexe. À l'aide des calculs effectués directement en coordonnées cartésiennes, l'auteur élimine le temps et obtient une formule qui donne la liaison entre un champ de forces et la trajectoire décrite là-bas par un point matériel. Le même problème a été résolu en 1945, pour le cas des coordonnées polaires planes, par le prof. Al. Stoenescu [2], qui également, après une série de calculs laborieux, élimine le temps et aboutit à une relation générale qu'il appelle formule de Binet généralisée.

Dans cette Note, on établit dans un système de coordonnées générales orthogonales, les équations différentielles des trajectoires qui peut décrire un point matériel soumis à l'action d'un champ de forces, fonction seulement de la position. Le temps est éliminé à l'aide du principe de Maupertuis. On étudie d'abord les champs de forces qui dérivent d'un potentiel; les résultats qu'on trouve peuvent intéresser l'Astronautique (étude du mouvement d'une fusée interplanétaire dans le champ dû à plusieurs corps célestes, par exemple le Soleil et la Terre) ou l'Optique Électronique (mouvement des charges électriques dans un champ électrostatique, en particulier lentilles électrostatiques).

On donne ensuite les équations valables pour un champ quelconque et on retrouve comme des cas particuliers les formules de A. Lopes Cardozo et du prof. Al. Stoenescu.

Les relations qu'on établit permettent aussi de résoudre un problème inverse, à savoir, la détermination des systèmes de forces sous l'action desquelles un point décrit une trajectoire qu'on s'impose. Dans ce cas il en est nécessaire encore de s'imposer une relation entre les composantes de la force ou de fixer sa direction.

2. Les équations du mouvement d'un point matériel s'écrivent comme suit, dans un système de coordonnées générales q_j:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = H_j F_j, \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

où $T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \sum_1^3 H_j^2 \dot{q}_j^2$ représente l'énergie cinétique du mobile, $H_j = H_j(q_1, q_2, q_3)$ sont les coefficients de Lamé et $F_j = F_j(q_1, q_2, q_3)$ les projections de la force.

Si la force dérive d'une fonction uniforme $U(q_1, q_2, q_3)$, l'intégrale des forces vives s'écrit

$$\frac{1}{2} mv^2 = U + E, \tag{2}$$

où E est l'énergie totale du point. Alors, le principe de Maupertuis s'éxprime par

$$\delta \int \sqrt{2(U+E)}\, ds = 0, \tag{3}$$

ou $ds = \sqrt{\sum_1^3 H_j^2 dq_j^2}$ est l'élément d'espace parcouru. Le calcul des trajectoires du point dans le mouvement décrit par (1) revient à la recherche des fonctions qui rendent extremum l'intégrale de (3).

§ 2. Mouvements dans un plan

A. *Champ de forces qui dérivent d'un potentiel*

3. Si on prend q_1 en qualité de variable indépendante et si on pose $q_2' = \frac{dq_2}{dq_1}$, (3) devient

$$\delta \int \sqrt{2[U(q_1, q_2) + E]}\ \sqrt{H_1^2 + H_2^2 q_2'^2}\, dq_1 = 0. \tag{3'}$$

Utilisant l'équation d'Euler du calcul des variations, après une série de calculs on obtient l'équation différentielle des trajectoires

$$\begin{aligned} &H_1^2 H_2^2 q_2'' + H_2^4 \left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{2(U+E)}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right] q_2'^3 - \\ &- H_1 H_3 \left[2 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_2} + H_1 H_2 \frac{1}{2(U+E)}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right] q_2'^2 + \\ &+ H_1 H_2 \left[2 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_1} + H_1 H_2 \frac{1}{2(U+E)}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right] q_2' - \\ &- H_1^4 \left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{2(U+E)}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

En tenant compte que $\frac{\partial U}{\partial q_j} = H_j F_j$, $(j = 1, 2)$, on peut mettre l'équation (4) sous la forme suivante

$$(5)\qquad U+E=\frac{1}{2}\,\frac{\left[F_2H_2-\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2F_1H_1q_2'\right]\left[q_2'^2+\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2\right]}{q_2''+q_2'(h_{12}-h_{21}q_2')+\frac{1}{H_1}\left[q_2'^2+\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2\right]\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}q_2'-\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)},$$

avec

$$(6)\qquad h_{12}=\frac{\partial}{\partial q_1}\ln\left(\frac{H_2}{H_1}\right);\qquad h_{21}=\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right).$$

En introduisant aussi les notations

$$(7)\qquad k_{12}=\frac{\partial}{\partial q_1}\ln\left[H_2\sqrt{2(U+E)}\ \right];\qquad k_{21}=\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\left[H_1\sqrt{2(U+E)}\ \right],$$

on peut écrire au lieu de (4) l'équation

$$(8)\qquad q_2''+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2k_{12}q_2'^3-(h_{21}+k_{21})\,q_2'^2+(h_{12}+k_{12})\,q_2'-\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2k_{21}=0,$$

qui sous une forme convenable offre la solution du problème proposé [1]. Une fois précisé le champ de forces U et choisi le système de coordonnées qui convient, l'équation (8) peut être integrée à l'aide des moyens actuels de calcul (machines mathématiques).

4. Dans le cas particulier des systèmes de coordonnées générales avec $H_1=H_2=H$ (par exemple coordonnées cartésiennnes, bipolaires, elliptiques, paraboliques) les fonctions définies par (6) sont nulles, les équations etablies se simplifient et on obtient

$$(8')\qquad \frac{q_2''}{1+q_2'^2}=k_2-k_1q_2',$$

avec

$$(7')\qquad k_j=\frac{\partial}{\partial q_j}\ln\left[H\sqrt{2(U+E)}\ \right],\quad (j=1,2).$$

B. *Champ de forces quelconques*

5. Rappelons que la différentielle du premier membre de l'équation (5), $dU=\sum_1^2 F_jH_j\,dq_j=\delta L$, représente le travail élémentaire des forces du champ pour un déplacement élémentaire du point matériel. Quand les forces dérivent d'un potentiel, (5) représente donc une intégrale première de l'équation générale valable pour un champ quelconque (dans lequel le travail élémentaire n'est pas une différentielle totale d'une fonction U). Alors, si on dérive l'égalite (5), on obtient

1) Évidemment que si $U=$ const., (8) représente l'équation des lignes géodésiques.

$$2(F_1 H_1 + F_2 H_2 q_2') =$$

$$(9) \qquad = \frac{d}{dq_1}\left\{ \frac{\left[F_2 H_2 - \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 F_1 H_1 q_2'\right]\left[q_2'^2 + \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2\right]}{q_2'' + q_2'(h_{12} - h_{21} q_2') + \frac{1}{H_1}\left[q_2'^2 + \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2\right]\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} q_2' - \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)} \right\},$$

c'est-à-dire l'équation des trajectoires dans un champ plan quelconque.

6. A fin de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire la détermination des systèmes des forces sous l'action desquelles un point matériel décrit une trajectorie $f(q_1, q_2) = 0$ qu'on s'impose, il faut utiliser également l'équation (9). On doit évidemment tenir compte que F_1, F_2, H_1 et H_2, qui sont fonctions de q_1 et q_2, deviennent en ce cas fonctions seulement de la variable q_1. Donc l'équation (9) fournit une relation et il en est nécessaire encore de s'imposer une autre condition, qui par exemple peut exprimer une propriété géométrique de la force

$$(10) \qquad \Phi(F_1, F_2, q_1, q_2) = 0 .$$

C. *Quelques cas particuliers*

7. Coordonnées cartesiennes. En posant $q_1 = x$ et $q_2 = y$ et en tenant compte que $H_1 = H_2 = 1$, l'équation (5) devient

$$(11) \qquad y'' + \frac{1}{2(U+E)}(1 + y'^2)(y' F_x - F_y) = 0 .$$

Si les forces ne dérivent pas d'un pontentiel, alors en vertu de (9) on obtient

$$(12) \qquad 2(F_x + y' F_y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{(F_y - y' F_x)(1 + y'^2)}{y''}\right].$$

En posant encore

$$F_x = ma_x = ma\cos\varphi \quad \text{et} \quad F_y = ma_y = ma\sin\varphi ,$$

on obtient la formule générale de A. Lopes Cardozo, écrite sous la forme potentielle ([1], formule (5))

$$(12') \qquad 2a(\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy) = d\left\{ \frac{a\left(\sin\varphi - \frac{dy}{dx}\cos\varphi\right)\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right\}.$$

L'équation (12) résout aussi le problème inverse. On doit lui ajouter une condition

$$(10') \qquad \Phi(F_x, F_y, x, y) = 0 .$$

En particulier si la trajectoire donnée est $y = f(x)$ et si on pose $F_x = X$, $F_y = Y$ et on fait les calculs nécessaires, l'équation (12) devient

$$(12'') \qquad \frac{d^2f}{dx^2}\frac{dY}{dx} - \frac{d^3f}{dx^3}Y = \frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx^2}\frac{dX}{dx} - X\left[\frac{df}{dx}\frac{d^3f}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)^2\right],$$

relation établie par le prof. Al. Stoenescu ([2], formule (7)).

8. Coordonnées polaires. Si on choisit $q_1 = \vartheta$ et $q_2 = \varrho$, alors $H_1 = \varrho$ et $H_2 = 1$. Les relations (6) et (7) fournissent

$$h_{12} = 0\,,\quad h_{21} = \frac{1}{\varrho}\,,\quad k_{12} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln\sqrt{2(U+E)} \text{ et } k_{21} = \frac{1}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial\varrho}\ln\sqrt{2(U+E)}\,.$$

En utilisant (8) on a

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln\sqrt{2(U+E)}\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^3 - \left[\frac{2}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial\varrho}\ln\sqrt{2(U+E)}\right]\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln\sqrt{2(U+E)}\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right) - \left[1 + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\ln\sqrt{2(U+E)}\right] = 0. \end{aligned}$$

Si on transforme cette équation en passant à la fonction $\frac{1}{\varrho}$, on obtient [2])

$$(14) \qquad \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{U+E}\left\{\left[\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right\}\left[\varrho\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right)F_\vartheta + F_\varrho\right]\varrho^2\,,$$

qui représente une généralisation de la formule de Binet pour les forces qui dérivent d'un potentiel.

En effet, si les forces sent centrales

$$F_\varrho = F(\varrho)\,,\quad F_\vartheta = 0$$

et on peut écrire aussi la relation nommée parfois la deuxième formule de Binet

$$v^2 = C^2\left\{\left[\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right\},$$

où C est la constante des aires. Alors, en tenant compte de l'intégrale des forces vives (2), l'equation (14) se réduit à

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho} = -\frac{\varrho^2 F(\varrho)}{mC^2}$$

qui représente la formule bien connue de Binet (la première formule).

Pour l'étude des trajectoires dans des champs quelconques, on doit particulariser l'équation (9) qui fournit

$$(15) \qquad \frac{1}{\varrho}F_\vartheta - \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right)F_\varrho = \frac{d}{d\vartheta}\left\{\frac{\left[\varrho F_\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - F_\varrho\right]\left\{\left[\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right\}\varrho^2}{\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho}}\right\}.$$

2) On peut, plus simplement, utiliser (5).

Après les calculs nécessaires on peut aboutir à

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\vartheta}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{\varrho^2 F_\theta}{\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho}}\right]-\frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{\varrho^2 F_\varrho}{\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho}}\right]= \tag{15'}$$

$$=\frac{F_\theta\left[2\varrho^2-3\varrho\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}+5\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2\right]}{\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho}},$$

c'est-à-dire on retrouve la formule du prof. Al. Stoenescu ([2], formule (13))[3].

L'équation (15) résout aussi le problème inverse.

3. Mouvements dans l'espace

A. *Champ de forces qui dérivent d'un potentiel*

9. Avec q_1 variable independante, (3) devient

$$\delta\int\sqrt{2\left[U(q_1,q_2,q_3)+E\right]}\sqrt{H_1^2+H_2^2q_2'^2+H_3^2q_3'^2}\,dq_1=0. \tag{3''}$$

En utilisant les deux équations d'Euler, après une série de calculs on aboutit à un système d'équations, que voici :

$$\begin{cases}\left[1+\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_3'^2\right]q_2''-\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_2'q_3'q_3''+\left[\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2(h_{23}^3q_3'-h_{32}^2q_2'+h_{23}^1)q_3'^2+\right.\\ \left.+(h_{21}^3q_3'-h_{12}^2q_2'+h_{21}^1)\right]q_2'+\left[1+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'^2+\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_3'^2\right]\times\\ \times\left\{\left[k_{32}q_2'-\left(\frac{H_3}{H_2}\right)^2k_{23}q_3'\right]q_3'+\left[k_{12}q_2'-\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2k_{21}\right]\right\}=0,\\ \left[1+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'^2\right]q_3''-\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'q_3'q_2''+\left[\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2(h_{32}^2q_2'-h_{23}^3q_3'+h_{32}^1)q_2'^2+\right.\\ \left.+(h_{31}^2-h_{13}^3q_3'+h_{31}^1)\right]q_3'+\left[1+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'^2+\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_3'^2\right]\times\\ \times\left\{\left[k_{23}q_3'-\left(\frac{H_2}{H_3}\right)^2k_{32}q_2'\right]q_2'+\left[k_{13}q_3'-\left(\frac{H_1}{H_3}\right)^2k_{31}\right]\right\}=0,\end{cases} \tag{16}$$

où on a utilisé les notations

3) L'équation (14) est une intégrale première de (15').

$$(17)\qquad h^i_{jl} = \frac{\partial}{\partial q_i} \ln \frac{H_j}{H_l} \quad \text{et} \quad k_{st} = \frac{\partial}{\partial q_s} \ln \left[H_t \sqrt{2(U+E)} \right].$$

Dans le cas particulier des systèmes de coordonnées générales pour lesquelles deux coefficients de Lamé sont identiques (coordonnées ellipsoïdales, toroïdales, bipolaires spatielles, paraboloïdales) il en est utile de prendre en qualité de variable indépendante la coordonnée qui correspond au troisième coefficient.

On doit mentionner que le système (16) peut prendre une autre forme

$$(18)\qquad \begin{cases} U+E = \dfrac{1}{2} A \dfrac{q'_2 F_1 H_1 - \left(\dfrac{H_1}{H_2}\right)^2 \left[1 + \left(\dfrac{H_3}{H_1}\right)^2 q'^2_3\right] F_2 H_2 + q'_2 q'_3 F_3 H_3}{\left(\dfrac{H_3}{H_1}\right)^2 q'_2 q'_3 q''_3 + AB_2 - C_2 - \left[1 + \left(\dfrac{H_3}{H_1}\right)^2 q'^2_2\right] q''_2}, \\ U+E = \dfrac{1}{2} A \dfrac{q'_3 F_1 H_1 + q'_2 q'_3 F_2 H_2 - \left(\dfrac{H_1}{H_3}\right)^2 \left[1 + \left(\dfrac{H_2}{H_1}\right)^2 q'^2_2\right] F_3 H_3}{\left(\dfrac{H_2}{H_1}\right)^2 q'_2 q'_3 q''_2 + AB_3 - C_3 - \left[1 + \left(\dfrac{H_2}{H_1}\right)^2 q'^2_2\right] q''_3}, \end{cases}$$

où on a utilisé les notations

$$A = 1 + \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 q'^2_2 + \left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2 q'^2_3,$$

$$B_2 = \frac{1}{H_2}\left[\left(\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} q'_3 - \frac{\partial H_2}{\partial q_3} q'_2\right) q'_3 + \left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{\partial H_2}{\partial q_1} q'_2\right)\right],$$

$$(19)\qquad C_2 = q'_2\left[\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2 \left(h^3_{23} q'_3 - h^2_{32} q'_2 + h^1_{23}\right) q'^2_3 + \left(h^3_{21} q'_3 - h^2_{12} q'_2 + h^1_{21}\right)\right],$$

$$B_3 = \frac{1}{H_3}\left[\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} q'_2 - \frac{\partial H_3}{\partial q_2} q'_3\right) q'_2 + \left(\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial H_3}{\partial q_1} q'_3\right)\right],$$

$$C_3 = q'_3\left[\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 \left(h^2_{32} q'_2 - h^3_{23} q'_3 + h^1_{32}\right) q'^2_2 + \left(h^2_{31} q'_2 - h^3_{13} q'_3 + h^1_{31}\right)\right].$$

B. *Champ de forces quelconques*

11. Par analogie avec le cas des mouvements dans un plan, le système d'équations qui correspond aux mouvements dans l'espace s'obtient en dérivant les équations (18). On voit que ce système admet une intégrale première et on peut l'écrire sous la forme suivante

$$
(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&2(F_1H_1+F_2H_2q_2'+F_3H_3q_3')=\\
&=\frac{d}{dq_1}\left\{A\,\frac{q_2'F_1H_1-\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2\left[1+\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_3'^2\right]F_2H_2+q_2'q_3'F_3H_3}{\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_2'q_3'q_3''+AB_2-C_2-\left[1+\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_3'^2\right]q_2''}\right\},\\
&\frac{q_2'F_1H_1-\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2\left[1+\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_3'^2\right]F_2H_2+q_2'q_3'F_3H_3}{\left(\frac{H_3}{H_1}\right)^2q_2'q_3'q_3''+AB_2-C_2-\left[1+\left(\frac{H_3}{H_2}\right)^2q_3'^2\right]q_2''}=\\
&=\frac{q_3'F_1H_1+q_2'q_3'F_2H_2-\left(\frac{H_1}{H_3}\right)^2\left[1+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'^2\right]F_3H_3}{\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'q_3'q_2''+AB_3-C_3-\left[1+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2q_2'^2\right]q_3''}.
\end{aligned}\right.
$$

La deuxième équation, qui représente une relation en termes finis entre les composantes de la force et les éléments géométriques de la trajectoire, exprime la propriété géométrique de la force de se trouver dans le plan osculateur de la trajectorie.

Le système (20) permet aussi la détermination des forces sous l'action desquelles un point matériel décrit une trajectorie donnée $f_1(q_1, q_2, q_3) = 0$, $f_2(q_1, q_2, q_3) = 0$. La troisième condition qu'on doit ajouter, peut avoir la forme

$$
(21)\qquad \Phi(F_1, F_2, F_3, q_1, q_2, q_3) = 0.
$$

C. *Cas particuliers*

12. Coordonnées cartésiennes. Tous les coefficients h^i_{jl} donnés par (17) sont nuls et on obtient pour les mouvements dans les champs de forces qui dérivent d'un potentiel, les équations suivantes:

$$
(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{(1+z'^2)y''-y'z'z''}{1+y'^2+z'^2}+\frac{1}{2(U+E)}[F_xy'-F_y(1+z'^2)+F_zy'z']=0,\\
&\frac{(1+y'^2)z''-y'z'y''}{1+y'^2+z'^2}+\frac{1}{2(U+E)}[F_xz'+F_yy'z'-F_z(1+y'^2)].
\end{aligned}\right.
$$

Pour étudier les trajectoires dans un champ quelconque, le système (20) fournit

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&2(F_x+F_yy'+F_zz')=\frac{d}{dx}\left[\frac{F_xy'-F_y(1+z'^2)+F_zy'z'}{(1+z'^2)y''-y'z'z''}(1+y'^2+z'^2)\right],\\
&F_x(z'y''-y'z'')+F_yz''-F_zy''=0.
\end{aligned}\right.
$$

Si on impose la trajectoire et on ajoute une condition $\Phi(F_x, F_y, F_z, x, y, z)$ le système (22) résout aussi le problème inverse. En particulier, si la trajectoire donnée est une courbe définie par les équations $y=f(x), z=\varphi(x)$ on retrouve des résultats établis dans [2].

Intsitut Polytechnique de Jassy
Chaire de Mécanique

BIBLIOGRAPHIE

1. Lopes Cardozo A., *A general formule for the relation between a field of forces an the orbit of a body therein, Problèmes d'Astronautique*, Laubscher et C-ie, Biel-Bienne, Suisse, 1953, pp. 103—105.
2. Stoenescu Al., Bull. de l'Éc. Polyt. de Bucarest, 1942, **13**, *3—4*, pp. 309—315; 1943, **14**, *3—4*, pp. 157—162.
3. — Gazeta Matematică, Bucureşti, 1945, **51**. *1*, pp. 130—134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЕЙ В ПОЛЕ СИЛ

(Резюме)

По принципам Мопертюи, устанавливаются дифференциальные уравнения траекторий, описанных материальной частицей в полях консервативных плоских (8) и пространственных (16) сил,—движение относящееся к системе криволинейных ортогональных координат. Даются также уравнения, для некоторых позициональных плоских (9) и пространственных (20) полей, при использовании обозначений (2), (6), (7) и (17).

В частном случае, получаются в декартовых плоских координатах формула (12′) Лопеса Кардосо [1], а в плоских полярных координатах-формула (15′) профессора Ал. Стоэнеску [3], установленные авторами расчётами прямого исключения времени из уравнения движения. Следует также и выражение (15), обобщающее формулу Бинета для нецентральных потенциальных полей сил.

Установленные отношения позволяют разрешение инверсной задачи, а именно, определение системы сил под действием которых частица описывает необходимую траекторию. Приводя к частному случаю, находятся в декартовых координатах, установленные проф. Ал. Стоэнеску в [2], отношения.

Полученные результаты могут быть использованы в астронаутике (исследование движения межпланетной ракеты в гравитационном поле, созданной многими небесными телами, например Солнцем и Землей), или в электронную оптику изучение движения электрической нагрузки в электростатическом поле, например электростатические линзы).

ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A TRAIECTORIILOR UNEI PARTICULE MATERIALE ÎNTR-UN CÎMP DE FORŢE

(Rezumat)

Folosind principiul lui Maupertuis, se stabilesc ecuaţiile diferenţiale ale traiectoriilor descrise de o particulă materială în cîmpuri de forţe conservative plane (8) şi spaţiale (16), mişcarea fiind raportată la un sistem de coordonate curbilinii ortogonale. Se dau apoi ecuaţiile pentru cîmpuri poziţionale oarecare plane (9) şi spaţiale (20), notaţiile fiind cele din (2), (6), (7) şi (17).

Prin particularizare se obţine în coordonate carteziene plane formula (12′) a lui Lopes Cardozo [1], iar în coordonate polare în plan, formula (15′) a prof. Al. Stoenescu [3], stabilite de autori prin calcule laborioase de eliminare directă a timpului din ecuaţiile de mişcare. De asemenea rezultă şi (15) care generalizează formula lui Binet la cîmpurile de forţe potenţiale necentrale.

Relaţiile care se stabilesc permit şi rezolvarea unei probleme inverse şi anume, determinarea sistemelor de forţe sub acţiunea cărora o particulă descrie o traiectorie impusă. Particularizînd în coordonate carteziene, se regăsesc relaţii stabilite de prof. Al. Stoenescu în [2].

Rezultatele ce se obţin pot interesa Astronautica (studiul mişcării unei rachete interplanetare în cîmpul gravitaţional creat de mai multe corpuri cereşti, de pildă de Soare şi Pămînt) sau Optica Electronică (studiul mişcării sarcinilor electrice într-un cîmp electrostatic, în particular lentile electrostatice).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

531.314.2

ASUPRA MIŞCĂRII RELATIVE A SOLIDULUI CU MASĂ VARIABILĂ

DE

N. IRIMICIUC

Într-o serie de lucrări, savanţi şi cercetători sovietici în domeniul mecanicii corpurilor cu masă variabilă, ca F. R. Gantmaher şi L. M. Levin [1], A. A. Kosmodemianski [2] şi apoi N. I. Golovin [3], au stabilit teoremele fundamentale şi ecuaţiile de mişcare pentru solidul cu masă variabilă, în ipoteza că centrul de masă al solidului nu-şi schimbă, datorită variaţiei masei, poziţia în solid şi că axele principale de inerţie, corespunzătoare polului ales, respectiv axele centrale, dacă drept pol se ia centrul de masă, nu-şi schimbă nici ele în procesul mişcării şi ca urmare a variaţiei masei, poziţia faţă de solid.

F. R. Gantmaher şi L. M. Levin au considerat chiar un caz mai general, stabilind ecuaţiile de mişcare în ipoteza că centrul de masă îşi păstrează poziţia fixă în solid, dar că axele centrale au o mişcare oarecare în jurul centrului de masă, cu viteza unghiulară $\overline{\Omega_s}$.

Un caz şi mai general este considerat de V. M. Karagodin, în lucrările sale [5] şi [6], stabilind ecuaţiile de mişcare ale solidului cu masă variabilă, în raport cu sistemul central de axe, în ipoteza că centrul de masă, mobil în solid, se deplasează cu o viteză absolută $\overline{v_c}$, iar sistemul central de axe de coordonate se roteşte în raport cu corpul, cu viteza unghiulară $\overline{\omega_s}$.

În lucrarea de faţă, ca urmare a unor probleme ridicate de buna desfăşurare a procesului tehnologic la o serie de maşini textile, se stabilesc, pentru solidul cu masă variabilă, teoremele fundamentale şi apoi ecuaţiile de mişcare în raport cu un sistem de referinţă, având la rîndul său o mişcare oarecare faţă de un reper absolut.

Se va considera în dezvoltare tot un caz general, cu centrul de masă deplasîndu-se faţă de solid şi cu sistemul de axe invariabil legat de solid, luat iniţial oarecare, făcîndu-se la urmă discuţiile cazurilor particulare.

I. Relaţii auxiliare

Înainte de a se trece la deducerea teoremelor generale pentru mişcarea relativă a solidului, vor fi calculate unele elemente care intră în ecuaţiile reprezentînd teoremele.

1. *Expresia vitezei unui punct în mişcarea compusă a solidului*

Dacă se notează cu $\mathfrak{R}''$ reperul absolut, cu $\mathfrak{R}'$ reperul mobil faţă de care are loc mişcarea relativă a solidului şi cu $\mathfrak{R}$ reperul invariabil legat de solid, cu indicele superior ($''$) elementele cinematice care se re-

feră la reperul fix, cu indicele superior (') elementele cinematice care se referă la reperul mobil şi fără nici un fel de indice elementele care se referă la reperul invariabil legat de solid, atunci între vectorii de poziţie ai unui punct M arbitrar al solidului, faţă de aceste repere, se poate scrie relaţia:

$$\bar{r}'' = \bar{r}''_{O'} + \bar{r}'_O + \bar{r}. \tag{1}$$

Prin derivarea absolută a acestei relaţii în raport cu timpul, se obţine expresia vitezei absolute a punctului M sub una din formele:

$$\bar{v} = \bar{v}_{Ot} + \bar{v}_{Or} + (\bar{\omega}_t + \bar{\omega}_r) \times \bar{r} = \bar{v}_{Ot} + \bar{\omega}_t \times \bar{r} + \bar{v}_r \tag{2}$$

unde $\bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}'_O = \bar{v}_{Ot}$ reprezintă viteza de transport a polului O invariabil legat de solid, $\bar{v}_{Or}$ este viteza relativă (faţă de reperul $\mathfrak{R}'$) a aceluiaşi punct, $\bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_r \times \bar{r} = \bar{v}_r$ este viteza relativă a punctului M al solidului în raport cu reperul $\mathfrak{R}'$, iar $\bar{\omega}_t$ şi $\bar{\omega}_r$ sînt respectiv vectorii viteză unghiulară pentru mişcarea de transport (mişcarea reperului $\mathfrak{R}'$ faţă de reperul $\mathfrak{R}''$) şi mişcarea relativă (mişcarea reperului $\mathfrak{R}$ faţă de reperul $\mathfrak{R}'$).

2. *Expresia impulsului*

Efectuînd integrala $\bar{H} = \int_V \bar{v} dm$ se obţine următoarea expresie a impulsului pentru mişcarea absolută:

$$\bar{H} = \bar{H}_r + M(\bar{v}_{Ot} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}_C), \tag{3}$$

unde $\bar{H}_r$, care poate fi numit impulsul solidului pentru mişcarea relativă faţă de reperul $\mathfrak{R}'$, are expresia:

$$\bar{H}_r = M(\bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}_C), \tag{4}$$

3. *Expresia momentului cinetic*

Efectuînd integrala $\bar{K} = \int_V \bar{r}'' \times \bar{v} dm$ se ajunge la următoarea expresie pentru momentul cinetic absolut al solidului:

$$\bar{K} = (\bar{r}''_{O'} + \bar{r}'_O) \times \bar{H} + M\bar{r}_C \times (\bar{v}_{Ot} + \bar{v}_{Or}) + \bar{K}^*_{Or} + \bar{K}_{Ot} \tag{5}$$

unde $\bar{K}^*_{Or}$ şi $\bar{K}_{Ot}$ au semnificaţiile:

$$\bar{K}^*_{Or} = \int_V [\bar{r}^2 \bar{\omega}_r - (\bar{r}\,\bar{\omega}_r)\bar{r}]\, dm = \mathfrak{J}_{ij}\omega_{ri}\bar{i}_j, \tag{6}$$

$$\bar{K}_{Ot} = \int_V \bar{r} \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r})\, dm = \mathcal{J}_{ij}\, \omega_{ti}\, \bar{i}_j\,, \quad (i,\ j = 1, 2, 3) \text{ [1]} \tag{7}$$

4. Expresia energiei cinetice

Dezvoltînd integrala $E_c = \frac{1}{2}\int_V \bar{v}^2\, dm$ se ajunge la următoarea expresie a energiei cinetice:

$$E_c = \frac{1}{2} M \left\{ \bar{v}_{Ot}^2 + \bar{v}_{Or}^2 + 2\,\bar{v}_{Ot}\,\bar{v}_{Or} + 2\,(\bar{v}_{Ot} + \bar{v}_{Or})\,[(\bar{\omega}_t + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_C] \right\} + \tag{8}$$

$$+ \frac{1}{2}\, \mathcal{J}_{ij}\, (\omega_{t_i} + \omega_{r_i})\, (\omega_{t_j} + \omega_{r_j})\,, \quad (i,\ j = 1, 2, 3)\,.$$

Dacă se ţine seama de cea de-a doua expresie a vitezii absolute (2), se mai obţine pentru energia cinetică a solidului expresia:

$$E_c = E_{cr} + \bar{v}_{Ot}\bar{H}_r + \bar{\omega}_t \bar{K}_r + \frac{1}{2}\int_V (\bar{v}_{Ot} + \bar{\omega}_t \times \bar{r})^2\, dm \tag{8'}$$

unde $\bar{K}_r = M\bar{r}_C \times \bar{v}_{Or} + \bar{K}^*_{Or}$.

II. Teoremele fundamentale

1. Teorema impulsului

Plecînd de la teorema impulsului faţă de reperul absolut şi înlocuind impulsul solidului prin expresia (3), efectuînd derivările — ţinînd seama de faptul că în expresia lui $\bar{r}_C$ variază şi masa — şi reducînd termenii asemenea, se obţine pentru teorema impulsului forma:

$$\frac{d}{dt}\,[\bar{H}_r] + \frac{dM}{dt}\,(\bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}'_O) + M\,[\bar{a}_{O'} + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'_O) + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'_O) +$$

$$+ \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}_C + \bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}_C) + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}_C)] + \tag{9}$$

$$+ \bar{\omega}_t \times \int_V \bar{r}\, \frac{d\varrho}{dt}\, dV = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_R\,,$$

$\bar{F}$, $\bar{R}$ şi $\bar{F}_R$ fiind rezultantele forţelor active, de legătură şi reactive.

Observînd acum că expresia $\bar{a}_{O'} + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'_O + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'_O) = \bar{a}_{Ot}$, reprezintă acceleraţia de transport a polului O, efectuînd derivata absolută a impulsului H_r şi remarcînd încă faptul că termenii $-M\bar{a}_{Ot} = \bar{F}^i_{Ot}$

1) Se adoptă convenţia indicilor muţi.

şi $-2M\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Or} = \bar{F}^i_{Oc}$, pot fi consideraţi drept forţe de inerţie de transport, respectiv complimentare, ale polului, considerîndu-se concentrată în el întreaga masă a solidului, teorema impulsului mai poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt}[\bar{H}_r]_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_R + \bar{F}^i_{Ot} + \bar{F}^i_{Oc} - \frac{dM}{dt}\bar{v}_{Ot} - M[\bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}_C + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}_C) +$$

(10)

$$+ 2\bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}_C)] - \bar{\omega}_t \times \int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV.$$

Relaţiei (9) i se poate da şi o altă formă observîndu-se că se poate scrie:

$$\bar{a}_{Ot} + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}_C + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}_C) = \bar{a}_{O'} + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'_C + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'_C) = \bar{a}_{C_t}$$

şi

$$\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}_C) = \bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Cr}$$

şi folosind notaţiile $-M\bar{a}_{Ct} = \bar{F}^i_{Ct}$ şi $-2M\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Cr} = \bar{F}^i_{Cc}$, $\bar{F}^i_{Ct}$ şi $\bar{F}^i_{Cc}$ putînd fi considerate ca forţe de inerţie de transport, respectiv complimentare, ale centrului de masă al solidului, obţinîndu-se astfel relaţia:

$$\frac{d}{dt}[\bar{H}_r]_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_R + \bar{F}^i_{Ct} + \bar{F}^i_{Cc} - \frac{dM}{dt}\bar{v}_{Ot} - \bar{\omega}_t \times \int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV. \tag{11}$$

Dacă se înlocuiesc forţele reactive absolute prin forţele reactive relative, în baza relaţiei:

$$\bar{F}_R = \bar{F}_{R_r} + [\bar{v}_{O'} + \bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_t \times \bar{r}'_O]\frac{dM}{dt} + (\bar{\omega}_t + \bar{\omega}_r) \times \int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV$$

atunci relaţia (11) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt}[\bar{H}_r]_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_{Rr} + \bar{F}^i_{Ct} + \bar{F}^i_{Cc} + \frac{dM}{dt}\bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_r \times \int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV. \tag{11'}$$

Ecuaţia va fi succeptibilă încă de unele transformări dacă se efectuează în membrul sting derivata relativă (în raport cu reperul $\mathfrak{R}'$) ţinînd seama că:

$$\frac{d}{dt}[\bar{\omega}_r]_r = \bar{\varepsilon}_r \; ; \; \frac{d}{dt}(\bar{r}_C)_r = \bar{\omega}_r \times \bar{r}_C + \frac{1}{M}\int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV - \frac{\bar{r}_C}{M}\frac{dM}{dt}$$

şi

$$\frac{d}{dt}[\bar{H}_r]_r = \frac{dM}{dt}\bar{v}_{Or} + M\bar{a}_{C_r} + \bar{\omega}_r \times \int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV,$$

ajungîndu-se astfel la relaţia:

$$M\bar{a}_{Cr} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_{Rr} + \bar{F}^{i}_{Ct} + \bar{F}^{i}_{Cc}, \tag{12}$$

studiul reducîndu-se astfel la studiul mişcării unui singur punct material, centrul de masă al solidului, considerîndu-se concentrată în el întreaga masă şi că acţionează asupra lui toate forţele aplicate solidului.

În cazul solidului cu masă constantă, relaţia (12) ia forma:

$$M\bar{a}_{Cr} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}^{i}_{Ct} + \bar{F}^{i}_{Cc} \tag{12'}$$

Dacă se dezvoltă vectorial relaţia (12) se obţine:

$$\begin{aligned} M[\bar{a}_{Or} + \bar{\varepsilon}_r \times \bar{r}_C + \bar{\omega}_r \times (\bar{\omega}_r \times \bar{r}_C)] = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_{Rr} - M\{\bar{a}_{O'} + \\ + \bar{\varepsilon}_t \times (\bar{r}'_O + \bar{r}_C) + \bar{\omega}_t \times [\bar{\omega}_t \times (\bar{r}'_O + \bar{r}_C)]\} - 2M\bar{\omega}_t \times (\bar{v}_{Or} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}_C). \end{aligned} \tag{13}$$

Dacă centrul de masă are poziţie fixă în solid, atunci el poate fi ales drept pol invariabil legat de solid şi atunci, deoarece $\bar{r}_C = 0$, relaţia (13) ia forma simplificată:

$$M\bar{a}_{Cr} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{F}_{Rr} - M[\bar{a}_{O'} + \bar{\varepsilon}_t \times \bar{r}'_C + \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'_C)] - 2M\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Cr}. \tag{13'}$$

2. *Teorema momentului cinetic*

Va prezenta importanţă în deosebi teorema momentului cinetic în raport cu reperul legat de solid. Plecînd de la teorema momentului cinetic scrisă în raport cu reperul absolut în care se înlocuieşte momentul cinetic $\bar{K}$ prin expresia (5) şi efectuînd toate reducerile şi calculele, se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{K}^{*}_{Or} + \bar{K}_{Ot}) + \left(\frac{1}{M}\int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV\right) \times (\bar{v}_{Ot} + \bar{v}_{Or}) + M[\bar{r}_C \times (\bar{a}_{Ot} + \bar{a}_{Qr} + \\ + 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Or})] = \bar{\mathfrak{M}}_{(O)} + \bar{\mathfrak{M}}_{L(O)} + \bar{\mathfrak{M}}_{R(O)} \end{aligned} \tag{14}$$

unde $\bar{\mathfrak{M}}_{(O)}$, $\bar{\mathfrak{M}}_{L(O)}$ şi $\bar{\mathfrak{M}}_{R(O)}$ reprezintă momentele faţă de polul O invariabil legat de solid, ale forţelor active, de legătură şi reactive absolute. Notînd $\bar{K}^{*}_{Or} + \bar{K}_{Ot} = \bar{K}_{Or}$ şi înlocuind momentul rezultant al forţelor reactive absolute prin momentul rezultant al forţelor reactive relative:

$$\bar{\mathfrak{M}}_{R(O)} = \bar{\mathfrak{M}}_{Rr(O)} + \left(\int_V \bar{r}\frac{d\varrho}{dt}dV\right) \times (\bar{v}_{Ot} + \bar{v}_{Or}) + \int_V \bar{r} \times \left[(\bar{\omega}_t + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}\right]\frac{d\varrho}{dt}dV,$$

după efectuarea reducerilor se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\bar{K}_{Or}\right] - \int_V \bar{r} \times \left[(\bar{\omega}_t + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}\right]\frac{d\varrho}{dt}dV = \bar{\mathfrak{M}}_{(O)} + \bar{\mathfrak{M}}_{L(O)} + \bar{\mathfrak{M}}_{Rr(O)} - \\ - M\bar{r}_C \times \bar{a}_{Ot} - 2M\bar{r}_C \times (\bar{\omega}_t \times \bar{v}_{Or}) - M\bar{r}_C \times \bar{a}_{Or}. \end{aligned} \tag{15}$$

Dacă centrul de masă are poziție fixă în solid și e luat drept pol, atunci: $\bar{a}_{Ot}=\bar{a}_{Ct}$, $\bar{v}_{Or}=\bar{v}_{Cr}$ și $\bar{r}_C=O$, astfel că ecuația (15) ia forma:

$$(15')\quad \frac{d}{dt}\left[\bar{K}_{Or}\right]-\int_V \bar{r}\times\left[(\bar{\omega}_t+\bar{\omega}_r)\times\bar{r}\right]\frac{d\varrho}{dt}dV=\overline{\mathfrak{M}}_{(C)}+\overline{\mathfrak{M}}_{L(C)}+\overline{\mathfrak{M}}_{Rr(C)}.$$

3. *Teorema energiei*

Pentru mișcarea absolută a solidului cu masă variabilă, teorema energiei, stabilită de A. A. Kosmodemianski, are expresia:

$$\frac{dE_c}{dt}=\mathfrak{P}_e+\mathfrak{P}_i+\mathfrak{P}_R+\frac{1}{2}\int_V v\,\frac{d\varrho}{dt}dV$$

$\mathfrak{P}_e$, $\mathfrak{P}_i$ și $\mathfrak{P}_R$ fiind respectiv puterile forțelor exterioare, interioare și de legătură.

Ținînd seama de relația (8'), înlocuind pe v sub semnul de integrare în baza relației (2) și folosind notația $\mathfrak{P}_s=\frac{1}{2}\int_V \bar{v}_r^2\frac{d\varrho}{dt}dV$, acest termen putînd fi numit putere reactivă suplimentară, se obține teorema energiei pentru mișcarea relativă a solidului cu masă variabilă sub forma:

$$(16)\quad \frac{dE_{cr}}{dt}+\int_V \frac{d}{dt}\left[\bar{v}_r(\bar{v}_{Ot}+\bar{\omega}_t\times\bar{r})\right]dm+\frac{1}{2}\int_V\frac{d}{dt}\left[(\bar{v}_{Ot}+\bar{\omega}_t\times\bar{r})^2\right]dm=$$
$$=\mathfrak{P}_e+\mathfrak{P}_i+\mathfrak{P}_R+\mathfrak{P}_s.$$

III. Stabilirea ecuațiilor de mișcare

Ecuațiile de mișcare se vor obține proiectînd ecuația vectorială reprezentînd teorema impulsului, pe axele reperului $\mathfrak{R}'$ și ecuația vectorială reprezentînd teorema momentului cinetic, pe axele reperului invariabil legat de solid.

1. *Ecuațiile corespunzătoare teoremei impulsului*

Dezvoltînd analitic în raport cu reperul $\mathfrak{R}'$ ecuația (13), respectiv (13') înmulțindu-le scalar cu versorii $\bar{i}'_\sigma$ ($\sigma=1,2,3$), ținînd seama că $\bar{i}'_k\bar{i}'_\sigma=\delta_{k\sigma}$ și $\delta_{ijk}\delta_{k\sigma}=\delta_{ij\sigma}$ se obțin ecuațiile de proiecții pentru teorema impulsului, primul sistem de ecuații ale mișcării, sub forma:

$$M\ddot{x}'_{O\sigma}=\delta_{ij\sigma}\varepsilon'_{ri}x_{Ch}\alpha'_{hj}+\omega'_{ri}\omega'_{r\sigma}x_{Ch}\alpha'_{hi}-\omega^2x_{Ch}\alpha'_{h\sigma}=F'_\sigma+R'_\sigma+F'_{Rr\sigma}-$$
$$-M\left[a'_{O\sigma}+\delta_{ij\sigma}\varepsilon'_{ti}(\dot{x}'_{Oj}+x_{Ch}\dot{\alpha}'_{hj})+\omega'_{ti}(\dot{x}'_{Oi}+x_{Ch}\dot{\alpha}'_{hi})\omega'_{t\sigma}-\omega_t^2(x'_{O\sigma}+x_{Ch}\alpha'_{h\sigma})\right]-$$
$$(\mathrm{I})\qquad -2M\delta_{ij\sigma}\omega'_{ti}\dot{x}'_{Oj}-2M\left[\omega'_{ti}\omega'_{r\sigma}x_{Ch}\alpha'_{hi}-\omega'_{ti}\omega'_{ri}x_{Ch}\alpha'_{h\sigma}\right],\quad \begin{pmatrix}\sigma=1,2,3\\ i,j,h=1,2,3\end{pmatrix}$$

pentru cazul general și:

$$M\ddot{x}'_{C\sigma}=F'_\sigma+R'_\sigma+F'_{Rr\sigma}-M\left[a'_{O\sigma}+\delta_{ij\sigma}\varepsilon'_{ti}x'_{Cj}+x'_{Ci}\omega'_{ti}\omega'_{t\sigma}-\omega'^{2}_{t}x'_{C\sigma}\right]- \tag{I'}$$
$$-2M\delta_{ij\sigma}\omega_{ti}\dot{x}'_{Cj}$$

pentru cazul cînd polul O coincide cu centrul de masă $(a'_{\nu\sigma}=\bar{i}_\nu\bar{i}'_\sigma)$.

2. *Ecuaţiile corespunzătoare teoremei momentului cinetic*

Observînd că cei doi termeni din membrul stîng al relaţiei (15) pot fi scrişi sub forma:

$$\bar{K}_{Or}=\int_V\bar{r}\times\left[(\bar{\omega}_t+\bar{\omega}_r)\times\bar{r}\right]dm=(\omega_{ti}+\omega_{ri})\bar{i}_j\int_V(\delta_{ij}x_kx_k-x_ix_j)\,dm=\mathcal{J}_{ij}(\omega_{ti}+\omega_{ri})\bar{i}_j$$

şi

$$\int_V\bar{r}\times\left[(\bar{\omega}_t+\bar{\omega}_r)\times\bar{r}\right]\frac{d\varrho}{dt}dV=(\omega_{ti}+\omega_{ri})\bar{i}_j\frac{d}{dt}\left[\int_V(\delta_{ij}x_kx_k-x_ix_j)\,dm\right]=$$
$$=\frac{d\mathcal{J}_{ij}}{dt}(\omega_{ti}+\omega_{ri})\bar{i}_j$$

relaţia (15), dezvoltată analitic în raport cu reperul invariabil legat de solid dă, prin multiplicare, scalar, cu versorii $\bar{i}_\sigma$, ecuaţiile de proiecţii pentru teorema momentului cinetic şi deci al doilea sistem de ecuaţii de mişcare:

$$\mathcal{J}_{i\sigma}\frac{d}{dt}(\omega_{ti}+\omega_{ri})+\delta_{ij\sigma}\mathcal{J}_{hj}(\omega_{th}+\omega_{rh})(\omega_{ti}+\omega_{ri})=\mathfrak{M}_{(O)\sigma}+\mathfrak{M}_{L(O)\sigma}+\mathfrak{M}_{Rr(O)\sigma}-$$
$$-\delta_{ij\sigma}Mx_{Ci}a_{Otj}-2M\left[(x_{Ci}v_{Ori})\omega_{t\sigma}-(x_{Ci}\omega_{ti})v_{Or\sigma}\right]-\delta_{ij\sigma}Mx_{Ci}a_{Orj}, \tag{II}$$
$$\begin{pmatrix}\sigma=1,\,2,\,3\\ i,\,j,\,h=1,\,2,\,3\end{pmatrix}.$$

Dacă axele de coordonate sînt şi rămîn în tot timpul mişcării, axe principale de inerţie, atunci ecuaţiile (II) iau forma simplificată:

$$\mathcal{J}_{\sigma\sigma}\frac{d}{dt}(\omega_{t\sigma}+\omega_{r\sigma})+\delta_{ij\sigma}\mathcal{J}_{jj}(\omega_{tj}+\omega_{rj})(\omega_{ti}+\omega_{ri})=\mathfrak{M}_{(O)\sigma}+\mathfrak{M}_{L(O)\sigma}+\mathfrak{M}_{Rr(O)\sigma}- \tag{II'}$$
$$-\delta_{ij\sigma}Mx_{Ci}a_{Otj}-2M\left[(x_{Ci}v_{Ori})\omega_{t\sigma}-(x_{Ci}\omega_{ti})v_{Or\sigma}\right]-\delta_{ij\sigma}Mx_{Ci}a_{Orj}.$$

Dacă polul O coincide cu centrul de masă al solidului, atunci ecuaţiile de mişcare (II) iau forma şi mai simplă:

$$\mathcal{J}_{\sigma\sigma}\frac{d}{dt}(\omega_{t\sigma}+\omega_{r\sigma})+\delta_{ij\sigma}\mathcal{J}_{jj}(\omega_{tj}+\omega_{rj})(\omega_{ti}+\omega_{ri})=\mathfrak{M}_{(C)\sigma}+\mathfrak{M}_{L(C)\sigma}+\mathfrak{M}_{Rr(C)\sigma}. \tag{II''}$$

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Гантмахер Ф. Р. и Левин Л. М., ПММ, 1947, **11**, *3*.
2. Космодемьянский А. А. **Лекций по механике тел переменной массы.** Учение записки МГУ, *152*, Механика, 1951.
3. Головин Н. Я., **Механика.** Сборник статеи, *50*, Оборонгиз, 195 стр. 27—49.
4. Карагодин В. М., Труды МАИ, 1956, *13*, стр. 12—22.
5. — Труды МАИ, 1956, *13*, стр. 27—31.
6. — Труды МАИ, 1956, *13*, стр. 22—27.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

(Резюме)

Даются фундаментальные теоремы и уравнения движения твердого тела переменной массы относнтельно системы координированных осей с любым движением в абсолютной системе, предполагая, что центр массы перемещается в твердом тела и что система осей, неподвижно связаная с телом, взята произвольно.

Фундаментальные теоремы выраженны отношениями (13), (15) и (16), а уравнения движения—системами (I) и (II).

SUR LE MOUVEMENT RELATIF DU SOLIDE DONT LA MASSE EST VARIABLE

(Résumé)

Dans cette Note sont exposés les théorèmes généraux et les équations de mouvement d'un solide dont la masse est variable par rapport à un repère, mobile à son tour envers un système absolu, dans les hypothèses que le centre de masse change de position dans le solide, et que le système d'axes de coordonnées, invariablement lié au solide, soit quelquonque.

Les théorèmes sont exprimés par les relations (13), (15) et (16) et les équations de mouvement, par les systèmes (I) et (II).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

530 145.63

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРИНИАНОВ И ВАКУУМНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПАРНОЙ ТЕОРИИ

Ю. М. ЛОМСАДЗЕ и Б. И. МАКСИМОВ

Известно, что вариационный метод Швингера [1] в применении к электродинамике, а также к некоторым вариантам (преимущественно к *PS* (*PS*)-варианту) мезонной теории в определенной мере оказался весьма плодотворным (см., напр. [2]). В частности, используя идею Гельфанда и Минлоса [3], удалось получить точное, **без помощи метода возмущений,** решение уравнений движения для указанных выше вариантов квантовой теории полей (см. [4]...[6]). И хотя такое решение получено в форме функционального (континуального) интеграла и, ввиду отсутствия **эффективных** методов расчета последнего, может рассматриваться, по крайней мере в настоящее время, лишь как красивая форма записи **по-прежнему неизвестной величины,** метод этот чрезвычайно полезен при общетеоретических исследованиях.

Представляется поэтому желательным распространить вариационный метод и на **другие** варианты мезонной теории. В этом отношении, как нам кажется, **особый** интерес представляют варианты теории с так называемой „нелинейной" мезонной связью, т. е. варианты, содержащие во взаимодействии, помимо двух операторов нуклонного поля, произведение двух или более операторов мезонных полей. Указанные варианты, главным образом вследствие принципиальных трудностей, обусловленных их „неперенормируемостью", остались почти совершенно в стороне от новейшего развития квантовой теории полей, и только недавно предварительному исследованию этих вариантов был посвящен ряд работ [7], [8]. Вместе с тем, имеются соображения, основанные, в частности, на известных экспериментах по множественному рождению мезонов, свидетельствующие о том, что привлечение вариантов теории с нелинейной мезонной связью к решению ряда важных проблем окажется отнюдь не лишенным смысла.

Можно надеяться, что применение вариационного метода к вариантам теории с нелинейной мезонной связью позволит разрешить ряд принципиальных вопросов, касающихся этих вариантов. В частности, было бы очень важно подтвердить полученное одним из нас [9], [10] другим путем утверждение, что трудность с неперенормируемостью этих вариантов мезонной теории есть следствие дефектности **не самóй теории,** а только используемого при расчетах **метода возмущений** [1]).

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением простейшего варианта теории с нелинейной мезонной связью, именно парной теории, причем мезонное поле будем считать нейтральным. В первом параграфе мы получим уравнения в вариационных производных для гриниановв как функционалов внешних источников — уравнения, решить которые в общем виде, вследствие их нелинейности, как и в случае электродинамики, не

1) В работах [9] и [10] это утверждение получено только для парной теории, однако аналогичным путем оно может быть получено, повидимому, и для любого другого варианта теории с нелинейной мезонной связью.

представляется возможным. Во втором параграфе будут получены уже линейные уравнения в вариационных производных для вакуумного функционала, из которых следуют уравнения для гриниановв и решение которых может быть найдено в форме функционального интеграла.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРИНИАНОВ НУКЛОНА И МЕЗОНА

Для конкретности рассмотрим случай скалярной связи в парном взаимодействии квантованных спинорного (нуклонного) поля $\psi(x)$ с действительным псевдоскалярным (π^0 - мезонным) $\varphi(x)$. При этом, следуя [1], к лагранжиану взаимодействия $\mathfrak{L}^{\text{кв}}$ квантованных полей мы добавим выбираемый в обычной форме лагранжиан взаимодействия $\mathfrak{L}_1^{\text{вн}}$ квантованного мезонного поля с внешним неквантованным источником $I(x)$ этого поля:

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}^{\text{кв}} + \mathfrak{L}_1^{\text{вн}};$$

$$\mathfrak{L}^{\text{кв}} \equiv -(g/2)\,[\bar{\psi}(x)\,,\ \psi(x)]\,\varphi(x)\,\varphi(x)\,,\quad \mathfrak{L}_1^{\text{вн}} \equiv -I(x)\,\varphi(x)\,;\quad (\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma_4)\,. \tag{1}$$

Введем, как обычно (см. [2], вводная статья), обозначения для гриниановв:

$$G^{nm}[x_1,\ldots,x_n\,,\ y_1,\ldots,y_n\,,\ \xi_1,\ldots,\xi_m;\ I(x)] \equiv$$

$$\equiv (1/S_{00})\,(T\{\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\,\bar{\psi}(y_1)\ldots\bar{\psi}(y_n)\,\varphi(\xi_1)\ldots\varphi(\xi_m)\,S\})_{00} = \tag{2}$$

$$= (1/S_{00})\,(S\,T\{\psi^H(x_1)\ldots\psi^H(x_n)\,\bar{\psi}^H(y_1)\ \ldots\bar{\psi}^H(y_n)\,\varphi^H(\xi_1)\ldots\varphi^H(\xi_m)\})_{00}\,,$$

где

$$S_{00} \equiv (S)_{00} \equiv \left(T\left\{\exp\left[-i\int d^4x\,\mathfrak{L}'(x)\right]\right\}\right)_{00}, \tag{3}$$

$\psi(x)$ и $\varphi(x)$—операторы полей в представлении взаимодействия и $\psi^H(x)$ и $\varphi^H(x)$ — операторы в гейзенберговском представлении, удовлетворяющие уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&(i\hat{\partial} + m)\,\psi^H(x) = g\,\psi^H(x)\,\varphi^H(x)\,\varphi^H(x)\\ &\bar{\psi}^H(x)\,(-i\hat{\partial} + m) = g\,\bar{\psi}^H(x)\,\varphi^H(x)\,\varphi^H(x)\end{aligned}\right\}\quad \hat{\partial} \equiv (1/i)\,\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,, \tag{4}$$

$$(\hat{\partial}^2 + \mu^2)\,\varphi^H(x) = 2g\,\bar{\psi}^H(x)\,\psi^H(x)\,\varphi^H(x) + I(x) \tag{5}$$

(значок $^+$ обозначает эрмитово-сопряженный оператор). Тогда

$$G(x,y) \equiv G^{10}[x,y;\ I \equiv 0] \tag{6}$$

есть функция Грина одного нуклона и

$$\Delta(x,y) \equiv G^{02}[x,y;\ I \equiv 0] \tag{7}$$

есть функция Грина одного мезона. Наша ближайшая цель — получить уравнения в вариационных производных для гриниановв $G^{10}[x,y;\ I]$ и

$G^{02}[x, y; I]$, в дальнейшем для краткости обозначаемых как $G^{10}(x, y)$ и $G^{02}(x, y)$, соответственно.

Первая и вторая вариации выражения (2), взятого при $n=1$ и $m=0$, и первая вариация этого выражения, взятого при $n=1$ и $m=1$, дают соответственно:

$$\frac{\delta G^{10}(x, y)}{\delta I(x)} = i G^{11}(x, y, x) - i G^{10}(x, y) G^{01}(x), \tag{8}$$

$$\frac{\delta^2 G^{10}(x, y)}{\delta I(x) \delta I(x)} = - G^{12}(x, y, x, x) + G^{11}(x, y, x) G^{01}(x) - i \frac{\delta G^{10}(x, y)}{\delta I(x)} G^{01}(x) - i G^{10}(x, y) \frac{\delta G^{01}(x)}{\delta I(x)}, \tag{9}$$

$$\frac{\delta G^{11}(x, y, x)}{\delta I(x)} = i G^{12}(x, y, x, x) - i G^{11}(x, y, x) G^{01}(x). \tag{10}$$

С другой стороны, применяя к (2) при $n=1$ и $m=1$ оператор $(i\hat{p}+m)$ и используя (4), получим

$$(i\hat{p} + m) G^{10}(x, y) = g G^{12}(x, y, x, x) - i \delta(x - y). \tag{11}$$

Исключив теперь из уравнений (8)...(11) G^{12}, G^{11} и $\frac{\delta G^{11}}{\delta I}$, получим первое из искомых уравнений для гриниановых:

$$\left[i\hat{p} + m + g \frac{\delta^1}{\delta I(x) \delta I(x)} + 2 i g G^{01}(x) \frac{\delta}{\delta I(x)} + i g \frac{\delta G^{01}(x)}{\delta I(x)} - g G^{01}(x) G^{01}(x) \right] G^{10}(x, y) = - i \delta(x - y). \tag{12}$$

Далее, применяя к (2) при $n=0$ и $m=1$ оператор $(\hat{p}^2 + \mu^2)$ и исключая из полученного уравнения $\mathrm{tr}\, G^{11}(x, x, x)$ при помощи (8), в котором положено $x=y$, найдем второе уравнение

$$i(\hat{p}^2 + \mu^2) G^{01}(x) = i I(x) - 2g\, \mathrm{tr} \left\{ \left[\frac{\delta}{\delta I(x)} + i G^{01}(x) \right] G^{10}(x, y) \right\}. \tag{13}$$

И, наконец, варьируя по $I(y)$ выражения (2) при $n=0$ и $m=1$ и (13) и исключая из полученных уравнений $\frac{\delta G^{01}}{\delta I}$, найдем третье из искомых уравнений:

$$[\hat{p}^2 + \mu^2 + 2g\, \mathrm{tr}\, G^{10}(x, x)] [G^{02}(x, y) - G^{01}(x) G^{01}(y)] - 2g\, \mathrm{tr} \left[\frac{\delta^2}{\delta I(x) \delta I(y)} + i G^{01}(x) \frac{\delta}{\delta I(y)} \right] G^{10}(x, x) = - i \delta(x - y). \tag{14}$$

При желании систему трех уравнений (12)...(14) относительно трех неизвестных функционалов G^{10}, G^{02} и G^{01} можно свести к сис-

теме двух уравнений относительно первых двух интересующих нас функционалов, однако делать это нет особого смысла. Если бы удалось решить в общем виде систему (12)...(14), найдя гринианы и, следовательно, функции Грина нуклона и мезона, то, как известно [11], тем самым была бы решена основная задача квантовой теорий полей — задача расчета S-матриц для различных процессов. К сожалению, система (12)...(14), как и аналогичная система в случае электродинамики, является нелинейной, и решение ее в общем виде без использования метода возмущений, приводящего к обычным трудностям, по-видимому, не представляется возможным (о решении аналогичной системы в простейших, физически мало интересных случаях, см., напр., [12]). Поэтому, оставляя эту систему для дальнейших общетеоретических исследований, мы применим во втором параграфе иной метод нахождения функций Грина—метод, связанный с введением так называемого вакуумного функционала [4]...[6].

§ 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВАКУУМНОГО ФУНКЦИОНАЛА И ЕГО РЕШЕНИЕ

Для дальнейшего нам понадобится ввести в лагранжиан взаимодействия, помимо внешнего источника $I(x)$ мезонного поля, внешние источники $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$ спинорного поля, антикоммутирующие как между собой, так и с операторами $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$:

$$\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}^{\text{кв}} + \mathfrak{L}_1^{\text{вн}} + \mathfrak{L}_2^{\text{вн}}; \quad \mathfrak{L}_2^{\text{вн}} \equiv -\bar{\psi}(x)\,\eta(x) - \bar{\eta}(x)\,\psi(x). \tag{15}$$

Методом аналогиинным примененному в [11] или в [4] легко получить следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\frac{\delta S}{\delta \eta(x)} = i S \bar{\psi}^H(x), \quad \frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}(x)} = i S \psi^H(x), \quad \frac{\delta S}{\delta I(x)} = i S \varphi^H(x), \\
\frac{\delta^3 S}{\delta \eta(x)\,\delta I(y)\,\delta I(z)} = -i S T[\bar{\psi}^H(x)\,\varphi^H(y)\,\varphi^H(z)], \\
\frac{\delta^3 S}{\delta \bar{\eta}(x)\,\delta I(y)\,\delta I(z)} = -i S T[\psi^H(x)\,\varphi^H(y)\,\varphi^H(z)], \\
\frac{\delta^3 S}{\delta I(x)\,\delta \bar{\eta}(y)\,\delta \eta(z)} = i S T[\psi^H(y)\,\bar{\psi}^H(z)\,\varphi^H(x)].
\end{gathered} \tag{16}$$

С помощью этих соотношений и используя уравнения (4) и (5), по аналогии с тем, как это сделано в [4], можно получить для вакуумного функционала

$$Z[I, \eta, \bar{\eta}] \equiv \left(T\left\{\exp\left[-i\int d^4x\, \mathfrak{L}''(x)\right]\right\}\right)_{00} \tag{17}$$

систему трех уравнений в вариационных производных

$$\left[i\hat{\partial} + m + g\frac{\delta^2}{\delta I(x)\,\delta I(x)}\right]\frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} = i\eta(x) Z, \tag{18}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta(x)}\left[-i\hat{p}+m+g\frac{\delta^2}{\delta I(x)\,\delta I(x)}\right]=i\bar{\eta}(x)\,Z, \tag{19}$$

$$\left[\hat{p}^2+\mu^2+2g\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(x)}\right]\frac{\delta Z}{\delta I(x)}=iI(x)\,Z. \tag{20}$$

Разумеется, система (18)..(20) также могла быть получена, пожалуй, даже более изящным методом, примененным для случая электродинамики в [5] и основанным на использовании данного Н. Н. Боголюбовым обобщения известной теоремы Вика.

Рассмотренные в первом параграфе гриниаиы связаны с вакуумным функционалом следующими очевидными соотношениями

$$\begin{aligned}
G^{10}(x,y)&=-(1/S_{00})\,\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(y)}\Big|_{\eta\equiv\bar{\eta}\equiv 0},\\
G^{02}(x,y)&=-(1/S_{00})\,\frac{\delta^2 Z}{\delta I(x)\,\delta I(y)}\Big|_{\eta\equiv\bar{\eta}\equiv 0},\\
G^{01}(x)&=(1/iS_{00})\,\frac{\delta Z}{\delta I(x)}\Big|_{\eta\equiv\bar{\eta}\equiv 0}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Нетрудно убедиться, что система уравнений (12)...(14) для гриниановъ является следствием системы (18)...(20) для вакуумного функционала. Для этого достаточно проварьировать (18) по $\eta(y)$, (19) — по $\bar{\eta}(y)$ и (20) — по $I(y)$ и учесть соотношения (21). В отличие, однако, от системы (12)...(14) система (18)...(20) линейна и без особого труда может быть решена после перехода к импульсному представлению по аналогии с тем, как это сделано в [4]. Окончательно, решение системы (18)...(20) представляется в виде следующего функционального интеграла

$$\begin{aligned}
Z=\mathrm{const}\int\delta a(k)\cdot\exp\Big\{&i\int d^4k\,I(k)\,a(k)+i\iint d^4p\,d^4k\,\bar{\eta}(p)\,G[p,k;a]\,\eta(k)-\\
&-i/2\int d^4k\Big[a(k)(k^2+\mu^2)\,a(-k)+\\
&+\frac{g}{2(2\pi)^8}\iint d^4p\,d^4q\int_0^1 d\lambda\,G[p,q;\lambda a]\,a(q-p-k)\,a(k)\Big]\Big\},
\end{aligned} \tag{22}$$

где $G[p,k;a]$ — гриниан нуклона во внешнем, неквантованном поле a, удовлетворяющий уравнениям

$$(\hat{p}+m)\,G[p,k;a]-\frac{g}{(2\pi)^8}\iint d^4k'\,d^4k''\,a(p-k''-k')\,a(k')\,G[k'',k;a]=\delta(p-k), \tag{23}$$

$$(24)\quad G[k,p;a](\hat{p}+m)-\frac{g}{(2\pi)^8}\iint d^4k'\,d^4k''\,a(k''-p-k')\,a(k')\,G[k,k'';a]=$$
$$=\delta(p-k),$$

$$(25)\quad \frac{\delta G[p,q;a]}{\delta a(k)}=-\frac{g}{(2\pi)^8}\iint d^4k'\,d^4k''\,a(k''-k'-k)\,G[p,k'';a]\,G[k',q;a].$$

Полученные в этой статье уравнения для гринианов и решение уравнений для вакуумного функционала явятся предметом наших дальнейших исследований.

Поступило 5 III 1957

Ужгородский Государственный Университет, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger I., Proc. Nat. Acad. Sci., 1951, **37**, pp. 452, 455, (**Проблемы современной физики,** ИИЛ, 1955, вып. 3).
2. * * * **Проблемы современной физики,** ИИЛ, 1955, вып. 3.
3 Гельфанд И. М., Минлос Р. А., ДАН СССР, 1954, **97**, стр. 209.
4. Фрадкин Е. С., ДАН СССР, 1954, **98**, стр. 47.
5. Клепиков Н. П., ДАН СССР, 1954, **98**, стр. 937; 1954, **100**, стр. 1057.
6. Боголюбов Н. Н., ДАН СССР, 1954, **99**, стр. 225.
7. Ломсадзе Ю. М., ДАН СССР, 1956, **110**, стр. 545 ; см. также, Науч. Зап. Ужгор. Унив, 1956, **18**, стр. 101.
8. Ломсадзе Ю. М., Максимов Б. И., Сб. Ужгор. Унив. **„Некоторые проблемы современной физики ядра и элементарных частиц“**, изд. Львовского Университета, 1957, (в печати).
9. Ломсадзе Ю. М., ЖЭТФ, 1956, **31**, стр. 887.
10. Ломсадзе Ю. М., I. Науч. Зап. Ужгор. Унив., 1956, **18**, стр., 156 ; II, Сб. Ужгор. Унив. **„Некоторые проблемы современной физики ядра и элементарных частиц“**, изд. Львовского Университета, 1957, (в печати).
11. Utiyama R., Sunakawa S., Imamura T., Prog. Theor. Phys., 1952, **8**, p. 77, (**Проблемы сорвеменной физики,** ИЛИ, 1955, вып. 3).
12. Edwards S., Peierls R, Proc. Roy. Soc., 1954, **224**, p. 24, (**Проблемы современной физики,** ИИЛ, 1955, вып. 3).

EQUATIONS FOR THE GREENIANS AND THE VACUUM FUNCTIONALS IN THE PAIR THEORY

(Summary)

The variative method of Schwinger is applied to the pair theory of interaction of the spinor (nucleon) field with the real pseudoscalar (π^0-meson). One has obtained the equations for the greenians of nucleons and mesons and those for the vacuum functional. The solution of the last equations is given in the form of a functional (continual) integral.

ECUAŢIILE GREENIANILOR ŞI A FUNCŢIONALELOR DE VID ÎN TEORIA INTERACŢIUNII ÎNTRE UN CÎMP DE SPINORI ŞI UN CÎMP PSEUDOSCALAR REAL

(Rezumat)

Autorul aplică metoda variaţională a lui Schwinger la teoria interacţiunii între un cîmp de spinori şi un cîmp pseudoscalar real. Se scriu ecuaţiile greenianilor nucleonului şi mezonului precum acelea ale funcţionalei de vid. Soluţia acestor din urmă ecuaţii este dată sub forma de o integrală funcţională.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

521.030

К ВОПРОСУ ОБ ОТРАЖЕНИИ РАДИОСИГНАЛОВ ОТ СОЛНЦА

Ф. Г. БАСС и С. Я. БРАУДЕ

В последние годы был проведен ряд теоретических и экспериментальных исследований, посвященных радиоизлучению солнца [1]...[5] Как это обычно принято в современной радиоастрономии, в указанных исследованиях изучение солнца осуществлялось путем наблюдения за интенсивностью и угловым распределением энергии на различных частотах. Такие измерения могут быть существенно дополнены наблюдением сигналов отраженных от солнца, облученного радиоволнами с поверхности земли.

Хотя вопрос о возможности отражения радиоволн от солнца рассматривался в литературе [6], однако ряд допущений, использованных в этой работе, представляются недостаточно обоснованными (расчет эффективной площади, направленность отражающего диска, распределение энергии допплеровским частотам и др.).

Учитывая изложенное, представлялось целесообразным провести схематические расчеты и оценить возможность построения радиолокационной установки, предназначенной для наблюдения сигналов, отраженных от солнечной короны.

В настоящее время солнечная корона рассматривается как полностью ионизированная плазма, плотность которой в каждой точке зависит лишь от расстояния этой точки от центра солнца.

Для зависимости плотности электронов от расстояния от центра солнца дается следующая формула:

$$N_e(\eta) = 10^8 (1{,}55\,\eta^{-6} + 2{,}99\,\eta^{-16}) \tag{1}$$

где N_e — плотность электронов, $\eta = r/R_\odot$, $R_\odot$ — радиус оптического диска солнца, r — расстояние от центра до точки, в которой плотность равна N_e.

При теоретическом исследовании распространения радиоволн в короне, обычно используется приближение геометрической оптики. В этом приближении не учитывается рассеяние электромагнитных волн на различных неоднородностях флюктуационного происхождения.

Влияние флюктуаций диэлектрической постоянной на мощность отраженного сигнала можно грубо учесть следующим образом. Предположим, что распространение электромагнитных волн в солнечной короне происходит по законам геометрической оптики, но поверхность полного

внутреннего отражения будем считать шероховатой за счет турбулентных и тепловых флюктуаций. Несмотря на схематичность эта модель отражает основные черты явления.

Заметим, что при прохождении радиоволн как через земную ионосферу, так и внутри солнечной короны на величину отраженного сигнала существенно влияют рефракция и поглощение электромагнитных волн.

Как показывают расчеты поглощение сантиметровых и дециметровых волн настолько велико, что для обнаружения сигнала нужно использовать волны длиной от 5 до 20 м. Использование столь длинных волн существенно осложняет конструирование направленных систем, поэтому при расчетах мы ограничились антеннами с углом раствора не меньше трех градусов.

Для определения эффективной площади необходимо сделать определенные предположения о законе рассеяния радиоволн солнечной короной.

Будем считать, что солнечная корона рассеивает по закону Ламберта:

$$df_{л} = \frac{F}{\pi}\cos^2\alpha\, dS \tag{2}$$

либо по закону Ломмеля-Зеелигера:

$$df_{з} = \frac{F}{2\pi}\cos\alpha\, dS. \tag{3}$$

В этих формулах df—элементарный поток энергии, рассеянный площадкой с площадью dS, F—поток падающей энергии, α—угол между рассеянным лучем и нормалью к рассеивающей поверхности.

Допустим, что рассеивающая поверхность является сферой с неким эффективным радиусом $R_э$.

Заметим, что если солнце облучать монохроматической волной, то рассеянный сигнал окажется размытым за счет допплер-эффекта от вращающегося солнца.

Обозначим через β безразмерное допплеровское смещение Δf частоты падающего излучения f, определяемое следующей формулой:

$$\beta = \frac{c}{2v}\frac{\Delta f}{f} \tag{4}$$

(c — скорость света, v—экваториальная скорость сферы, вращающейся угловой скоростью равной скорости фотосферы).

Можно показать (см. [7]), что спектральная плотность рассеянного излучения $g(\beta)$ определится следующими формулами:

$$g_{л}(\beta) = FR_э^2\frac{1-\beta^2}{2}; \quad g_{з} = \frac{F}{\pi}R_э^2\sqrt{1-\beta^2}. \tag{5}$$

Индексы $_{л}$ и $_{з}$ относятся к законам Ламберта и Ломмеля-Зеелигера соответственно.

Поток рассеянной энергии в интервале допплеровских частот β_1, β_2 определится по очевидной формуле

$$\Phi = \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(\beta) d\beta. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6) имеем:

$$\Phi_{\text{л}} = \frac{F}{2} R_{\text{э}}^2 (\beta_2 - \beta_1)\left(1 - \frac{\beta_1^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_2^2}{3}\right), \tag{7}$$

$$\Phi_{\text{з}} = \frac{F}{2\pi} R_{\text{э}}\left(\beta_2\sqrt{1-\beta_2^2} + \arcsin\beta_2 - \beta_1\sqrt{1-\beta_1^2} - \arcsin\beta_1\right). \tag{8}$$

Перейдем к определению эффективного радиуса. Обозначая через n показатель преломления ионизированной плазмы, имеем следующее уравнение траектории луча

$$n(\eta)\,\eta = d_0, \tag{9}$$

где $n(\eta) = \sqrt{1 - \frac{4\pi N_e e^2}{m\omega^2}}$, $d_0 = \frac{d}{R_\odot}$, d — расстояние от луча в пустоте до параллельного ему радиуса солнца.

Из формулы (9) вытекает, что наиболее глубоко проникает луч при $d_0 = 0$. При $\eta = d_0$ луч проходит через корону, почти не отклоняясь.

Естественно, определить эквивалентный радиус следующим образом:

$$R_{\text{э}} = R_\odot \frac{\eta_0 + \eta_1}{2}, \tag{10}$$

где η_0 решение уравнения (9) при $d_0 = 0$, а η_1 соответствует приведенному радиусу для случая когда ионизация солнечной короны такова, что $|d_0 - \eta| \ll 1$[1]).

Перейдем к вычислению мощности сигнала, отраженного от солнечной короны. Если обозначить через P—мощность передатчика станции, через G—коэффициент направленного действия передающей антенны и $\varkappa_1$—коэффициент полезного действия передающего фидера, то плотность потока энергии падающего на солнце F, будет равна

$$F = \frac{PG\varkappa_1}{4\pi R^2} e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} f^2(\Theta, \varphi),$$

где $f(\Theta, \varphi)$ — диаграмма направленности антенны по полю, R — расстояние от земли до солнца, Γ_1, Γ_2 — коэффициент поглощения в солнечной короне и ионосфере земли соответственно.

Мощность рассеянного излучения в интервале $[\beta_1, \beta_2]$, поглощенная приемником радиолокатора $P_{\text{с}}$, определится из соотношения:

---

1) Подробное вычисление $R_{\text{э}}$ приведено в работе [7].

$$P_c = \frac{\Phi(\beta_1, \beta_2)}{R^2} \frac{G\lambda^2}{4\pi} \varkappa_2 e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} f^2(\Theta, \varphi).$$

Обычно в радиолокации существенно знать отношение мощности отраженного сигнала P_c к мощности шумов на входе приемника.

Шумы на входе приемника определяются радиоизлучением Солнца и Галактики, а также собственными аппаратурными шумами, причем оценка показывает, что в диапазоне метровых волн, последними можно пренебречь. В этом случае мощность суммарного шума определяется формулой:

$$P_{ш} = \frac{2kV}{\lambda}(\beta_2 - \beta_1)\left[\frac{GT_e}{2}\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2 \eta^2(\lambda) + T_a\right], \tag{11}$$

где k — постоянная Больцманна, T_a—температура антенны для галактических радиошумов и

$$\eta^2(\lambda) = \left[3{,}6 \cdot 10^8 \left(\frac{10^4}{T_e}\right)^{3/2} \frac{R_\odot}{f^2}\right]^{2/n}. \tag{12}$$

Пользуясь приведенными выше формулами, получаем для отношения сигнала к шуму:

$$\left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_л = \frac{PG^2\lambda^3 \varkappa_1 \varkappa_2 \eta R_\odot \tau_\odot e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)} f^4(\Theta, \varphi)}{128k\pi^3 R^4\left[\frac{GT_e}{2}\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2 \eta^2(\lambda) + T_a\right]}\left(1 - \frac{\beta_2^2 + \beta_1\beta_2 + \beta_1^2}{3}\right),$$

$$\left(\frac{P_c}{P_{ш}}\right)_з = \frac{PG^2\lambda^3 \varkappa_1 \varkappa_2 \eta R_\odot \tau_\odot e^{-2(\Gamma_1+\Gamma_2)} f^4(\Theta, \varphi)}{128k\pi^4 R^4\left[\frac{GT_e}{2}\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2 \eta^2(\lambda) + T_a\right]} \times \tag{13}$$

$$\times \frac{\beta_2\sqrt{1-\beta_2^2} + \arcsin\beta_2 - \beta_1\sqrt{1-\beta_1^2} - \arcsin\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Здесь $\tau_\odot$—период обращения солнца, Γ_1 вычисляется по формуле [2]

$$\Gamma_1 = 1{,}65 \cdot 10^9 \left(\frac{10^4}{T_e}\right)\frac{R_\odot}{f^2}(0{,}22\,\eta_0^{-11} + 0{,}44\,\eta_0^{-21} + 0{,}29\,\eta_0^{-31}) \tag{14}$$

а Γ_2 определяется из графиков, приведенных в работе [8]. Воспользовавшись (13) можно определить $\frac{P_c}{P_{ш}}$. Проведем такой расчет для следующего варианта:

$$P = 250 \text{ квт}; \quad G = 3000; \quad \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0{,}9;$$
$$f(\Theta, \varphi) = 1; \quad T_e = 10^6;$$

$\tau > 7$ сек. (τ — продолжительность импульса передатчика). Тогда из (13) получаем величину :

$$A(\lambda) = \frac{P_c/P_ш}{f(\beta_2, \beta_1)},$$

где

$$f_1(\beta_2, \beta_1) = 1 - \frac{1}{3}(\beta_2^2 + \beta_1^2 + \beta_1 \beta_2),$$

$$f_2(\beta_2, \beta_1) = \frac{\beta_2\sqrt{1-\beta_2^2} + \arcsin\beta_2 - \beta_1\sqrt{1-\beta_1^2} - \arcsin\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Величина $A(\lambda)$ для различных значений углов Θ[2]) и длин волн приведена в таблице 1 в виде дроби, где числитель относится к случаю применимости закона Ломмеля-Зеелигера.

Таблица 1

λм \ $\Theta°$	90	70	50	30	20
5	0,12 / 0,04	—	—	—	—
10	1,14 / 0,36	1,11 / 0,36	1,05 / 0,33	1,02 / 0,32	0,9 / 0,3
15	3,76 / 1,2	3,46 / 1,1	3,46 / 1,1	3,3 / 1,07	3,0 / 0,95
20	6,15 / 2.0	6,08 / 1,95	5,85 / 1,9	4,95 / 1,95	3,6 / 1,2

Как следует из таблицы для рассматриваемых параметров радиостанционной станции, удлинение волны от 5 до 20 м увеличивает сигнал при $\Theta = 90°$. Однако уже при $\Theta = 20°$ из-за большого поглощения в ионосфере резко замедляется рост полезного сигнала с удлинением волны.

Учитывая это обстоятельство и то, что в рассматриваемом диапазоне с удлинением волны возрастают атмосферные помехи, а также трудности, связанные с конструированием антенн, представляется целесообразным выбрать рабочую волну станции 10...15 м, где величина $A(\lambda)$ порядка единицы. Если учесть схематичность расчета, то для надежной работы, необходимо увеличить соотношение сигнала к шуму и так как для получения отраженного сигнала от солнца используется радиолокационная установка, то для этой цели можно применить методы когерентного и некогерентного накопления.

2) Здесь Θ — угол места.

В этом случае возможен такой вариант, когда передатчик станции излучает когерентные высокочастотные импульсы, которые принимаются приемником, у которого вся полоса пропускания (до детектора), разбивается с помощью фильтров на n более узких полос. Ширина полосы каждого из таких фильтров должна быть такой, чтобы узкополосная система могла раскачаться.

При заданной волне, время раскачки узкополосных контуров будет определяться радиальными ускорениями на солнце.

Такие фильтры позволят провести спектральный анализ сигналов отраженных от солнца, но не увеличат соотношение сигнала к шуму. Поэтому на выходе этих фильтров необходимо использовать некогерентное накопление, которое следует объединить с модуляционной техникой. Из за шумов, связанных с тепловым радиоизлучением солнца, модуляцию следует осуществлять изменяя частоту.

Выигрыш при некогерентном накоплении M равен

$$M = \sqrt{\frac{\Delta F \cdot t}{2}} \tag{16}$$

где $\Delta F = n\,\Delta f$; здесь ΔF— ширина полосы фильтра, t — время накопления, из которого половина используется для приема отраженного сигнала. Так как

$$\Delta F = f_2 - f_1 = \frac{2V_э}{\lambda}(\beta_2 - \beta_1) = \frac{4 \cdot 10^3\,\eta}{\lambda_м}(\beta_2 - \beta_1),$$

то

$$M = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3\,\eta}{\lambda_м} t (\beta_2 - \beta_1)}, \tag{17}$$

$$\frac{P_с}{P_ш} = A(\lambda) f(\beta_2, \beta_1) M. \tag{18}$$

Максимальная полоса ΔF_{max}, в которой заключены все допплеровские частоты ограничена β, для которых $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$. Поэтому если взять n фильтров. то для ΔF_{max}:

$$\beta_2 - \beta_1 = 2/n. \tag{19}$$

Если подставить (19) в $f(\beta_2, \beta_1) M$, то оказывается, что для заданной допплеровской частоты β_2 можно подобрать оптимальное число фильтров $n_{опт}$. Ввиду схематичности расчетов не имеет смысла рассматривать в общем виде вопрос об определении $n_{опт}$. Если в качестве примера рассмотреть тот случай, когда $n = 3$ то окажется, что

$$[M f(\beta_2, \beta_1)]_л = 0{,}5\sqrt{t}\,, \text{ а } [M f(\beta_2, \beta_1)]_з = 0{,}75\sqrt{t}\,.$$

Для этого случая, полагая $t = 10$ сек., получаем из (18) $P_с/P_ш$. Эти величины приведены в таблице 2. Как следует из таблицы 2, при $t = 10$ сек

для волн 10...15 м соотношение сигнала к шуму может достигать 10...20 дб.

Таблица 2.

λм	5	10	15	20
$\left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_л$; $\Theta=90°$	6,4	47,0	138,0	206,0
$\left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_л$; $\Theta=20°$	6,4	38,0	110,0	118,0
$\left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_з$; $\Theta=90°$	3,2	24,0	67,0	100,0
$\left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_з$; $\Theta=20°$	3,2	19,0	53,0	60,0

В заключение следует отметить что при современном уровне техники построение станции с приведенными выше параметрами, которая может позволить наблюдать сигналы, отраженные от солнца, является весьма сложной, однако разрешимой технической задачей.

Поступило 23 X 1957.

Академия Наук УССР,
Киев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Астр. Журнал, 1949, **26**, стр. 84.
2. Шкловский И. С. и Пикельнер С. И., Изв. Кр. А. О., 1950, **6**, стр. 29.
3. Smerd S. F., Austr. Jour. Sc. Res., 1950, **3**, p. 34.
4. Sander K., Nature, 1947, **159**, p. 506.
5. Raber I., Nature, 1946, **158**, pp. 506, 945.
6. Kers F. I., PIRE, 1952, **40**, p. 660.
7. Басс Ф. Г., Брауде С. Я., Укр. Физ. Журнал, 1957, **2**, стр. 149.
8. Казанцев А. Н., Изв. АН СССР, сер. техн., 1946, **9**, стр. 1261.

ON THE REFLECTION OF RADAR SIGNALS FROM THE SUN

(Summary)

This paper considers the possibility of solar location. It is assumed that the Sun scatter the incident electromagnetic radiation like a rought surface. The spectral composition change of the scattered radiation due to the Doppler effect arising from the Sun's rotation is taken into account.

If 30 Mc pulses are transmitted with 250 kw power and with an amplification of the receiving-transmitting antenna of 3000, the power ratio of the signal reflected by the Sun and received on the Earth to the solar and galactic noises is of the order of unity.

The authors suggest the use of a spectrum analyser as a means of investigating the spectral composition of the reflected signal. It is shown that from spectral analysis of the reflected signal some information may be obtained about the mechanism of electromagnetic wave scattering by the Sun's corona.

To discern the signal from the noises, an incoherent accumulation is necessary, which allows the signal-to-noise ratio to be increased by a factor of several tens.

ASUPRA REFLEXIEI SEMNALELOR RADAR DE CĂTRE SOARE

(Rezumat)

Autorii studiază condiţiile în care mijloacele de radiolocaţie pot fi folosite pentru cercetarea soarelui.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

536.512

EINE KALIBRIERUNGSMETHODE DER QUECKSILBERTHERMOMETER

VON

MIHAI ŞCHIOPU, VIORICA ONU und MARIANA PĂSTRĂVANU

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 26—29 Juni 1958

Nach den bekannten Kalibrierungsverfahren der kalorimetrischen Quecksilberthermometer [1]...[5], wird bei der Ausmessung der Länge eines Quecksilberfadens, die Thermometerskala als Massstab benutzt. Dabei stetzt man voraus, dass die Skalenteilung gleichmässig ist.

Anstatt der üblichen optischen Vorrichtung [1], [2], nahmen wir ein Werkzeugmikroskop zu Hilfe, mit dem wir die Abstände der Teilstriche mit einer Ungenauigkeit von etwa $2\,\mu$ abmessen. Somit konnten wir die Koordinatenkorrektionen Δx bestimmen die den Koordinaten x der Teilstriche anzubringen sind, um die Thermometerskala auf eine solche mit gleichmässiger Teilung zurückzuführen.

In Abb. 1 sind die von uns erhaltenen Koordinatenkorrektionen nebst den Kaliberkorrektionen Δ_s und den Gesamtkorrektionen $\Delta_t = \Delta_x + \Delta_s$ für ein in 1/100°C geteiltes Beckmannthermometer dargestellt. Man bemerkt dass die beiden Korrektionen Δ_x und Δ_s gleich hoch ausfallen. Die Mikrostruktur der Kurven Δ_x und Δ_t ist auf das zufällige Charakter der Lagefehler einzelner Teilstriche zurückzuführen. Wir geben unten einige Zahlenwerte der Teilstrichabstände an:

Teilstrich in °C:	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26
Abstand in μ:		449	408	437	432	447	434

Wie ersichtlich, betragen die Schwankungen $\pm 5\%$. Solche Teilungsfehler, die bei allen Skalenteilungen festgestellt wurden, treten vorwiegend bei der Messung kleiner Temperaturdifferenzen stark in Erscheinung.

Es leuchtet ein, dass wenn man diese Fehler vernachlässigt, wird jedes Kalibrierungsverfahren illusorisch. Es erschien uns deshalb angemessen eine Kalibrierungsmethode zu entwickeln, die sowohl die Kaliber- als auch die Teilungsfehler berücksichtigt. Das Prinzip unserer Methode besteht darin, dass man mit einem Werkzeugmikroskop, von einem als Nullpunkt gewählten Ende der Skala, die Koordinaten aller Teilstriche, sowie die Länge eines abgetrennten Quecksilberfadens an verschiedenen Stellen der Kapillare misst, und daraus die entsprechenden Korrektionen berechnet.

Die Benutzung des Werkzeugmikroskopes bietet manche Vorteile an:

1) Es ist ein gebräuchliches und leistungfähiges Messgerät, das genaue und zuverlässige Messergebnisse gewährleistet. Das Messen,

insbesondere das des Fadens lässt sich bequem durchführen, indem es nur je eine einzige Einstellung der beiden Enden der Quecksilbersäule genügt.

2) Die Teilungsfehler der Skala und die Veränderungen des Kapillarquerschnittes können getrennt bestimmt werden und daher einwandfreie Ergebnisse erzielt.

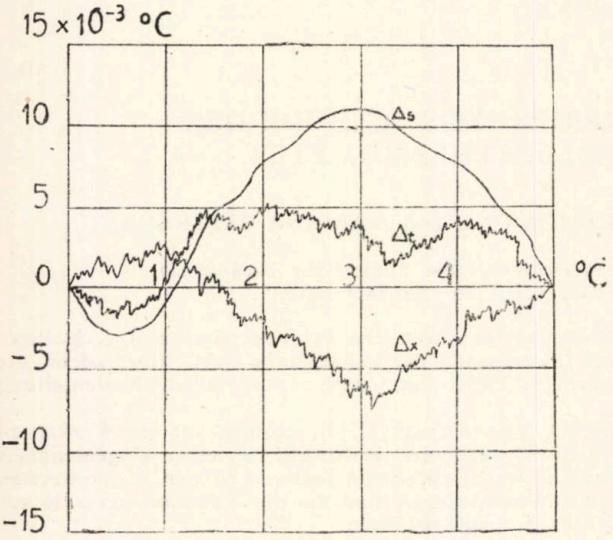


Abb. 1

3) Da die Messungen bis auf etwa 2 μ reproduzierbar und sicher sind, genügt ein ungefähr 10 mm langer Quecksilberfaden um die Korrektionen bis auf wenige Prozenten des Teilungswertes zu bestimmen. Die Querschnittsveränderungen werden um so besser zur Erscheinung gebracht, je kürzer der dazu benutzte Quecksilberfaden ist.

4) Schliesslich, werden die Korrektionen für alle Teilstriche auf einmal gewonnen, was nach den klassischen Verfahren eine ungemein grosse Mess-und Rechenarbeit verlangen würde, weil, wie bekanntlich, die Zahl der zu lösenden Gleichungen eine quadratische Funktion der Zahl der Messstellen ist [1].

Um die Koordinatenkorrektionen zu bestimmen, nimmt man dieselben der beiden Skalenenden gleich Null an. Es ergibt sich dann die berechnete Gradlänge:

$$x_1 = L/N, \tag{1}$$

wo L die Länge der in N Graden geteilten Thermometerskala bedeutet.

Dadurch ist selbstverständlich der Gradwert nicht bestimmt; dieser wird durch eine besondere Operation erzielt, indem man das Thermometer mit einem bekannten Normalinstrument vergleicht. Bezeichnet man mit x den vom gewählten Nullpunkt gemessenen Abstand eines auf der Skala mit t^0C gezeichneten Teilstriches, so ergibt sich die entsprechende Koordinatenkorrektion:

$$\Delta_x = x/x_1 - t. \tag{2}$$

Um nun die Kaliberkorrektionen zu bestimmen, trennt man einen kurzen Quecksilberfaden ab, dessen Länge an gleich entfernten Stellen der Kapillare gemessen wird. Dabei werden die Temperaturveränderungen vermieden. Die Lage des Fadens wird durch diejenige seines Mittelpun-

festgelegt. Die Länge des Fadens soll nur klein sein, sonst ist sie beliebig.

Bezeichnet man mit x die Koordinate eines Punktes, mit l die an dieser Stelle gemessene Fadenlänge und mit a das konstante Volumen des Queksilberfadens, gleich der in Abb. 2 geschrafften Fläche, so kommt der Kapillarquerschnitt in M:

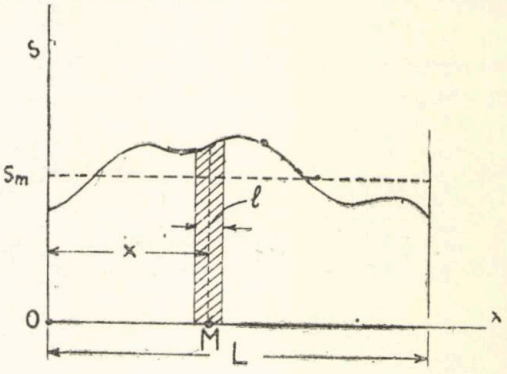


Abb. 2

$$s = a/l. \tag{3}$$

Diese Gleichung würde streng gelten, wenn die Länge l und mithin das Volumen a unendlich klein wären. Da aber der Kapillarquerschnitt sich stetig und verhältnismässig langsam verändert, und das Werkzeugmikroskop mit kurzen Quecksilberfaden zu arbeiten erlaubt, gilt Gl. (3) hinreichend genau. Offenbar liegt die Möglichkeit vor, die Fehler auf graphischem Wege weiter zu verringern.

Das Volumen a ist zwar unmessbar und daher wird der relative Querschnitt s_r eingeführt:

$$s_r = s/s_m\,. \tag{4}$$

Hier berechnet sich der mittlere Querschnitt s_m (siehe Abb. 2):

$$s_m = \frac{1}{L}\int_0^L s\,dx = \frac{a}{L}\int_0^L \frac{1}{l}\,dx. \tag{5}$$

Für den relativen Querschnitt wird dann leicht ermittelt:

$$s_r = l_m/l. \tag{6}$$

Die Grösse $1/l$ ersetzt den Querschnitt s und ihr Mittelwert berechnet sich aus der Formel:

$$\frac{1}{l_m} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{1}{l}\,dx. \tag{7}$$

Bei der Auswertung des Integrals kann man graphisch oder unter Anwendung einer Näherungsformel, z. B. der Trapez-oder Parabelformel, verfahren. Dabei ist es bequemer die Temperatur als unabhängige Veränderliche zu wählen. Da man näherungsweise setzen kann $t \cong x/x_1$ lässt sich Gl. (7) umschreiben:

$$\frac{1}{l_m} = \frac{1}{N}\int_0^N \frac{1}{l}\,dt. \tag{8}$$

Liegt die Quecksilberkuppe in M (Abb. 2), so wird die bezüglich der Teilungs-und Kaliberfehler korrigierte Temperatur:

$$t_{x,s} = V_x/V_{x_1}, \tag{9}$$

Hier ist $V_x = \int_0^{x_1} s dx$ gleich dem Rohrinhalt zwischen Nullpunkt und Quecksilbermeniskus, und $V_{x_1} = s_m x_1$ das der Gradeinheit entsprechende Volumen. Es ergibt sich dann $t_{x,s} = \frac{1}{x_1}\int_0^x s_r dx$ oder nach leichter Umformung:

$$t_{x,s} = \frac{x}{x_1} + \int_0^{x/x_1} (s_r - 1)\, d\frac{x}{x_1}. \tag{10}$$

Der zweite Summand ist die gesuchte Kaliberkorrektion und wenn man wieder die Temperatur als unabhängiges Veränderliche einführt:

$$\Delta_s = \int_0^t (s_r - 1)\, dt\ . \tag{11}$$

Bei der Berechnung des Integrals verfährt man ähnlich wie bei Gl. (7). Da die Kurve $\Delta_s = f(x)$ stetig ist, kann man durch Interpolation die Kaliberkorrektionen für jeden Teilstrich ermitteln. Aus Gl. (2) und (10) folgt schliesslich:

$$t_{x,s} = t + \Delta_x + \Delta_s = t + \Delta_t\ , \tag{12}$$

wo t die Thermometerablesung bedeutet. Die Gesamtkorrektionen Δ_t werden in einer Tafel eingeschrieben.

Die so erhaltenen Korrektionen gelten nur für den Fall wenn die Quecksilberkuppe mit einem Teilstrich zusammenfällt. Liegt dieselbe zwischen zwei Teilstrichen, so muss man ausserdem die Abweichung des betreffenden Teilstrichabstandes von dem gerechneten in Betracht nehmen. Diese dritte Korrektion kann leicht aus den Teilstrichkoordinaten ermittelt werden.

Technische Hochschule, Jassy,
Laboratorium f physikal Chemie

LITERATURVERZEICHNIS

1. Попов М. М., Термометрия и Калориметрия, М., 1954.
2. Reilly J., Rae W. N., *Physico-chemical methods*, London, 1954, v. I.
3. Stähler A., *Handbuch der Arbeitsmethoden in der anorganischen Chemie*, Leipzig, 1919, Bd. II.
4. Wien-Harms, *Handbuch der Experimentalphysik*, Leipzig, 1926, Bd. I.
5. Eucken A., Suhrmann R., *Physikalisch-chemische Praktikumsaufgaben*, Leipzig, 1928

МЕТОД КАЛИБРОВАНИЯ РТУТНЫХ ТЕРМОМЕТРОВ

(Резюме)

В данном методе калибрования, кроме известных поправок на калибр, учитываются и ошибки нанесения деления шкалы, которые вынуждают дополнительные поправки, того же порядка величин.

O METODĂ DE CALIBRARE A TERMOMETRELOR CU MERCUR

(Rezumat)

S-a elaborat o metodă de calibrare a termometrelor calorimetrice cu mercur, care în afară de cunoscutele erori de calibru ale capilarei, ţine seama şi de erorile de divizare a scării.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

552.57

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД

А. Д. МАНАСЕВИЧ

1. О МЕТОДИКЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ГОРНЫХ ПОРОД

Одна из важнейших и до сих пор не решенных задач горной науки—создание научно-обоснованной теории горного давления; теории, которыми до настоящего времени пользуются, не более, как эмпирические рабочие гипотезы с достаточно примитивным обоснованием. Они сыграли свою положительную роль, но теперь уже перестали удовлетворять. С одной стороны, все расширяется потребность в ответственных подземных сооружениях—долговременных и крупногабаритных. С другой стороны, все острее становится потребность поставить расчеты этих сооружений на тот же высокий уровень в отношении достоверности исходных данных и определенности принятого коэффициента запаса, на каком находятся наземные инженерные сооружения. С 1955 года в Советском Союзе введен, как общеобязательный, расчет всех строительных конструкций по предельным состояниям. Распространение этого прогрессивного метода на подземные сооружения останется фикцией, пока мы так грубо и неточно определяем самое существенное—горное давление, являющееся нагрузкой подземных сооружений.

Построение научной теории горного давления — задача крайне трудная и требующая немалого времени. Задача эта мировой горной наукой не решена.

В разрешении проблемы горного давления большую роль должны сыграть показатели прочности, упругости и пластичности горных пород. Без них применение любой теории горного давления повиснет в воздухе. Научное изучение физико-механических свойств горных пород — это тот фундамент, на котором можно будет построить современную теорию горного давления.

В области испытания геологических пород положение таково. Методика исследования сыпучих и связных грунтов сделала крупные успехи; эта методика хорошо разработана и имеет надежное научное обоснование. Совещание по гидро-геологическим проблемам, проводившееся с 15 по 19 апреля 1957 года Академией Наук СССР и Московским Университетом, свидетельствует о крупных успехах советской науки в этой области. Что же касается методики испытания твердых (скальных) горных пород, то в этой области положение несравненно хуже. Методы полевых испытаний (в пласте) почти не разработаны. В лабораторных исследованиях используется по существу та же методика, которая выработана для материалов, применяемых в машиностроении и строительстве; при этом основное внимание обращено на определение показателей прочности; физические константы деформативности определяются сравнительно редко; между тем, для научного изучения и обоснования теории горного давления эти константы имеют, пожалуй, большее значение, чем прочность.

Как и для сыпучих пластов, для твердых горных пород необходимы методы лабораторных испытаний на образцах и полевых испытаний в пласте; последние практически наиболее важны; однако, говорить о научно-обоснованной методике таких испытаний еще рано: слишком сложны и разнообразны факторы, из которых складывается прочность пласта. Пока — что реальной задачей надо считать выработку методов испытаний твердых горных пород в лабораториях. Здесь еще есть много нерешенного.

Прежде всего надо отметить, что общепринятые виды испытаний отдельных стержней при линейном напряженном состоянии недостаточно характеризуют свойства горных пород — пластов большой протяженности; для последних характерно объемное напряженное состояние, на больших глубинах близкое к гидростатическому; такого вида испытания не разработаны. Кроме того, повидимому, необходима дифференциация методов испытаний по двум направлениям: 1) для обоснования расчетов горного давления на подземные сооружения; 2) для расчета мощности и рабочих органов машин, разрабатывающих горные породы.

По нашему мнению, комплекс лабораторных физико-механических испытаний горных пород для целей строительства должен охватывать следующие показатели:

А. Испытания обычного характера: а) осевое сжатие, б) осевое растяжение, в) скалывание (по разным направлениям), г) чистый изгиб, д) местное смятие (твердость), е) модуль упругости 1-го и 2-го рода, ж) коэффициент Пуассона.

Б. Испытания специфические: а) объемное сжатие, б) объемное растяжение, в) пластическое течение при сжатии (длительное действие нагрузки при сжатии), г) то же при изгибе, д) определение масштабных факторов при испытаниях разного рода, е) влияние глубины залегания пласта, влажности, газонасыщенности породы и др. физических факторов. Желательно установить связь (коэффициенты перехода) сложных по выполнению испытаний с наиболее простыми на осевое сжатие, изгиб. Если выявятся достаточно достоверные связи между показателями линейного и объемного напряженного состояния, окажется возможным в ряде случаев отказаться от испытаний последнего рода, как значительно более сложных.

Для того, чтобы дать серьезное обоснование инженерным расчетам подземных сооружений и породо-разрабатывающих машин, необходимо стремиться к тому, чтобы для всякого геологического пласта, в котором промышленность ведет разработку (для строительства или эксплуатации), были получены полные физико-механические характеристики, своего рода „технический паспорт". Наличие таких данных является обязательной предпосылкой для рационального и экономного проектирования.

* * *

Ниже. хотелось бы поделиться некоторыми методами таких специфических испытаний, которые были разработаны нами при исследовании кемеровских углей (Кузнецкий угольный бассейн) в период 1953—1956 гг.

2. ВЛИЯНИЕ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА ПРИ СЖАТИИ

Обычное испытание на осевое сжатие малых образцов (20×20×30 мм) дает очень пестрые результаты и не характеризует прочности пласта в целом, со всеми его особенностями (кливаж, включения, прослойки и т. д.). Испытание крупного блока должно дать показатели усредненные, т. е. близкие к прочности пласта. Нами проведена серия опытов на сжатие на 42 образцах с площадью сечения от 1 кв. см до 260 кв. см (Кемеровские угли, пласт Волковский). Все образцы изготовлены из одного блока.

Опыты дали весьма интересные результаты.

1) Чем больше сечение образца, тем ниже оптимальные показатели прочности:

Плосчади сечения кв. см.	1	4	25	50	100	165	260
Предел прочности: кг/кв. см	536	480	450	390	270	250	220

2) Чем меньше сечение, тем больше рассеяние результатов:

Плосчади сечения кв. см.	1...2	4...6	10...30	100...260
Предел прочности: кг/кв. см.	180...536	180...364	279...447	207...271
Отношение мин.: макс.	1 : 3	1 : 2	1 : 1,6	1 : 1,3

3) При площади сечения порядка 150—250 кв. см показатели прочности почти стабилизируются. Можно считать, что блок размером 15×15 см уже дает показатель прочности пласта.

Для иллюстрации приводится график (рис. 1) с результатами испытаний.

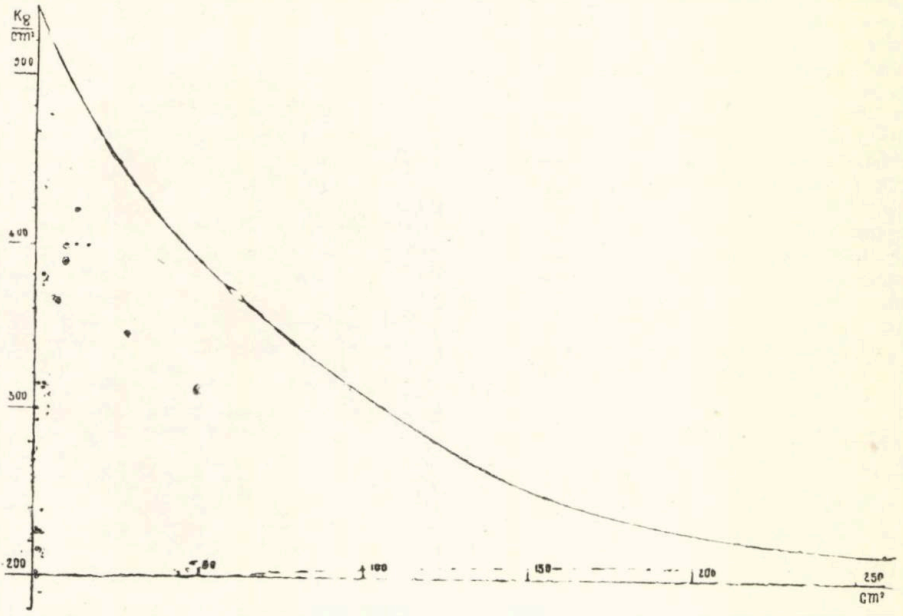


Рис. 1.

3. ОБЪЕМНОЕ СЖАТИЕ

Известны некоторые опыты, имевшие целью воспроизвести в угле объемное напряженное состояние. Так, акад. Динник (Днепропетровск) испытывал донецкие угли на сжатие в металлической матрице, однако, в такой матрице, при ее очень высокой жесткости происходит, в сущности, не сжатие, а прессование. Были предложения делать матрицу с одной открытой стороной, что, по мысли авторов, должно было моделировать обнаженную поверхость породы в выработке. Однако, здесь на-

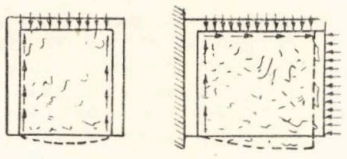


Рис. 2.

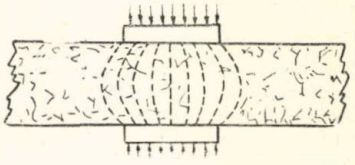


Рис. 3.

лицо несимметричность поперечных деформаций и сил трения; из-за этого условия опыта отклоняются настолько сильно, что о самом явлении сжатия трудно сделать какие-либо выводы (рис. 2).

Непригодно также по неопределенности условий и испытание путем надавливания небольшого штампа на угольной пластинке (рис. 3).

Нами разработана и использована методика воссоздающая условия сжатия, максимально приближающиеся к естественным. Методика такова: цилиндрический образец породы (угля) диаметром 22,6 мм (=4 кв. см), высотою 30 мм покрывается очень тонким слоем парафина и плотно вставляется в подготовленное для него отверстие в угольном диске диаметром 115 мм и высотою 28 мм. Зазор порядка 0,2 мм заливается гипсом. Диск служит для образца упругой средой. Угольный диск снаружи усиливается металлическим ободком, моделирующим неограниченную протяженность пласта. Цилиндрический образец, таким образом, испытывается на сжатие в упругой среде, отвечающей природным условиям. В то же время образец четко отграничен от обоймы. Парафиновое покрытие практически снимает силы трения (рис. 4). Было испытано две серии образцов (19 образцов из 2 блоков).

Во время испытаний наблюдалась такая картина разрушения. При

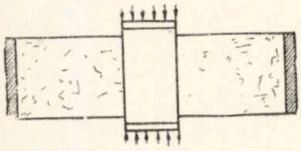


Рис. 4.

Рис. 5.

росте нагрузки сперва происходит разрушение образца (ясно слышимый треск, четкая остановка роста нагрузки). В дальнейшем раздробленный материал образца вызывает разрушение угольной обоймы в виде радиальных трещин — при нагрузке примерно в 3 раза большей, чем при разрушении самого образца (рис. 5).

Результаты этих опытов весьма интересны. Отношение предела прочности образцов в обойме к контрольным образцам на простое осевое сжатие оказалось в первой серии 2,76 во второй — 3,27. Характерно сравнительно небольшое рассеяние результатов для образцов в обойме (отношение макс.: миним. 1,20 и 1,42).

Внешний металлический ободок угольного диска играет большую роль; он может считаться абсолютно жестким, т. к. отношение модулей упругости стали и угля в наших опытах равнялось 80...100. Ободок достаточно точно моделирует неограниченную протяженность угольного пласта. В наших опытах отношение диаметров угольного диска и образца было принято равным пяти. При этом соотношении были сопоставлены по методике Ламэ данные для поперечной деформации образца и для напряжений по касательной на внутренней поверхности диска 1) для угольного диска, у которого внешний диаметр в 115 мм не изменяется (условия опыта) и 2) для угольного диска неограниченного диаметра (пласт). Разница оказалась для напряжений в пределах 1)... 12% и для деформаций в пределах 9...11% (при значениях коэффициента Пуассона) 0,12 до 0,25).

Это показывает, что данная методика моделирует условия объемного сжатия в пласте достаточно близко.

4. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

При испытаниях на изгиб в настоящее время применяют две схемы нагружения: 1) упрощенная схема — изгиб одной сосредоточенной силой; 2) чистый изгиб — двумя симметричными силами. Обе этих схемы неудачны для испытания таких хрупких ма-

териалов, как горные породы : сказывается решающее влияние скалывающих напряжений в местах приложения нагрузок.

Нами была предложена и использована при испытании углей другая схема — 4 равными силами (рис. 6), с соотношением длин участков : 1 : 1, 6 : 2 : 1, 6 : 1 (испытывались угольные балочки пролетом 180 мм). Нагружение 4 равными силами осуществлялось, как видно из схемы, при помощи системы подвесных серег.

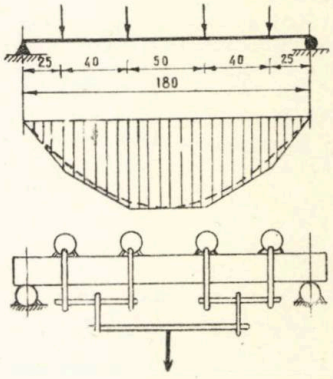


Рис 6.

Преимущества данной схемы таковы :

1) Средний участок находится в условиях чистого изгиба, причем на его границах поперечная сила в два раза меньше, чем по общепринятым схемам.

2) Эпюра моментов весьма близка к эпюре от равномерно распределенной нагрузки ; случаи нагружения пласта распределенной нагрузкой более характерны, чем нагрузка сосредоточенной силой.

При выбранных соотношениях длины участков момент в среднем участке как раз равен наибольшему моменту от равномерно-распределенной нагрузки. Разница в прогибах составляет 3,5%.

Правильность размещения подвесок для груза обеспечивается применением установочного шаблона.

5. ИЗГИБ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

Нарастание деформаций при длительном действии нагрузок представляет большой практический интерес, так как связано с изменением давления на крепление, с так называемым „заплыванием“ выработок, которое иногда становится катастрофичным. Это явление в горных породах изучено очень слабо.

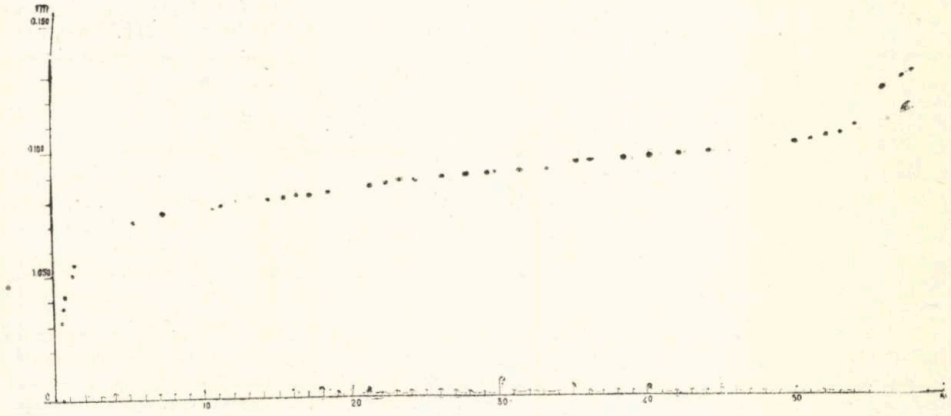


Рис. 7

Нами были поставлены опыты на изгиб по описанной выше схеме, длительностью до 300...400 суток и более.

Опыты убедительно показывают, что при длительном действии постоянной нагрузки хрупкий уголь деформируется так же, как и типично-пластические материалы. Наблюдаются три характерные фазы : 1) начальная фаза быстро затухающего роста значительных деформаций (длительность около 7...10 суток), причем основная часть деформации образуется за 1...2 часа); длительный период, исчисляемый иногда месяцами, в течение которого деформация растет очень медленно ; 3) в случае разрушения

—наступает заключительная фаза (6...10 суток), во время которой скорость роста прогиба все увеличивается, завершаясь разрушением.

Образующаяся при длительном нагружении деформация в значительной мере (55...75%) превращается в необратимую пластическую, как это показывают временные разгрузки. Интересно отметить, что при новой нагрузке получается как бы продолжение прежней кривой. Для первой фазы нагружения нами получено такое уравнение кривой: $d=A+t/(at+b)$ где d — прогиб в микронах, t—время в минутах, A, a, b—постоянные (напр. $A=1$; $a=0{,}02$; $b=0{,}60$). Это уравнение пригодно и для второй фазы. Однако, для нее значительно лучшую сходимость дает уравнение вида: $d=B+C\log t+D\log^2 t$, где t — время в сутках, B, C, D—постоянные (напр. $B=1$; $C=0{,}66$; $D=0{,}005$).

Поступило 26 XI 1957.

Воронежский лесотехнический институт, СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барон Л. И., Изв. Акад. Наук СССР, 1948, *11*.
2. Довидянц В. Г., Судаков Н. Х., **Результаты исследований механических, свойств горных пород Донецкого бассейна,** „Работы Дон. УГИ", 1950, 7, Москва-Харьков.
3. * * * **Исследование горного давления применительно к механизированным крепям,** Углетехиздат, М., 1954.
4. * * * **Материалы совещания при институте Горного дела Акад. Наук СССР по координации исследований в области разрушения углей,** М., 1952,
5. Манасевич А. Д., **Физико-механические свойства углей шахты „Центральная" треста Кемеровоуголь на горизонте 160.** Отчет по научно-исследовательской работе, Кемерово, 1954, (рукопись); idem, гор. 320, (рукопись).
6. — **Установка для испытания на изгиб хрупких материалов,** АН СССР Институт технико-экономической информации, Серия „Приборы и стенды", 1955, Москва, тема № 2, № ПС-55-427.
7. — **О специфической методике испытания твердых горных пород.** Труды совещания, отделения геолого-географических наук А Н СССР по инженерно-геологическим свойствам горных пород, (апрел 1957), том III(в печати).
8. Пеньков А. М., **Инструкция по выемке блоков и изготовлению образцов каменного угля,** Институт Горного дела, 1950, АН УССР, Киев.
9. * * * **Разработка месторождений полезных ископаемых,** Сб., 1956, АН УССР, Киев.
10. * * * **Сборник трудов комиссии по управлению кровлей,** ОНТИ, 1937.
11. * * * **Труды совещания по управлению горным давлением,** Углетехиздат М. 1948 г.
12. Щубин В, П., **К вопросу об исследований физико-механических свойств некоторых пород каменных углей шахт Кузбасса.** Изв. ТПИ, 1951, **68**.

MÉTHODES DE LA DÉTERMINATION DES QUALITÉS PHYSICO-MÉCANIQUES DES MINÉRAUX

(Résumé)

On donne quelques détails concernant les méthodes élaborées par l'Auteur quant à la détermination des qualités physico-mécaniques des minéraux, utiles pour l'étude: 1) du facteur de dimension de l'éprouvette; 2) de la pression triaxiale; 3) de la flexion pour les matériaux fragiles; 4) de la charge durable. Ces méthodes sont illustrées par les résultats obtenus pour les houilles du bassin de Kouznetsk (Sibérie).

METODE DE DETERMINARE A CALITĂŢILOR FIZICO-MECANICE A ROCILOR

(Rezumat)

Se dau cîteva amănunte privind metodele elaborate de autor relative la determinarea calităţilor fizico-mecanice a minereurilor, pentru studiul: 1) factorului de dimensiune al epruvetei: 2) presiunii triaxiale; 3) încovoierii pentru materialele fragile; 4) sarcinii durabile. Aceste metode sînt ilustrate prin rezultatele obţinute pentru cărbunii din bazinul Kuzneţk.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

660

CONTRIBUŢII LA CALCULUL REACTORILOR CHIMICI

DE

ADOLF HAIMOVICI ŞI ION CURIEVICI

1. În calculul reactorilor dinamici pentru desfăşurarea reacţiilor chimice, prezintă o mare importanţă determinarea variaţiei schimbului *necesar* de căldură de-a lungul reactorului. Numai prin realizarea schimbului adecvat de căldură în fiecare secţiune, se poate respecta regimul de temperatură impus de considerente chimico-tehnologice şi economice şi, prin aceasta, folosirea cea mai raţională a spaţiului de reacţie.

Problema enunţată a fost tratată şi rezolvată, pentru diferite cazuri particulare, de diverşi autori, printre care S. K. Boreskov [1], S. N. Obreadcikov [2]. O încercare de formulare mai generală a fost dată de către D. I. Orociko [3].

Evident, luîndu-se în consideraţie numai cazuri particulare, problema s-a pus la un reactor de formă dată (de obicei un cilindru cu secţiune circulară sau dreptunghiulară) şi în cadrul unui anumit regim de temperatură (regim optim, regim izoterm, etc.).

În cele ce urmează ne propunem tratarea sub formă generală a problemei schimbului necesar de căldură de-a lungul unui reactor dinamic cu reactanţi gazoşi, avînd forma unei suprafeţe de revoluţie, regimul de temperatură fiind o funcţie oarecare cunoscută de-a lungul reactorului; această tratare generală permite, cum se va vedea, şi punerea unor probleme noi, ca de pildă aceea a posibilităţii de a impune variaţia schimbului necesar de căldură chiar la un regim dat de temperatură, prin modificarea adecvată a curbei meridiane a reactorului.

2. Fie un reactor dinamic avînd forma unei suprafeţe de revoluţie în jurul axei $O\xi$ şi $r(\xi)$ raza secţiunii la abscisa ξ. Reactanţii, presupuşi gazoşi, pătrund în reactor cu viteza liniară w_0 prin secţiunea corespunzătoare abscisei $\xi = 0$. Fie încă $T = T(\xi)$ temperatura absolută la abscisa ξ. Formele funcţiilor $T(\xi)$ şi $r(\xi)$ vor putea fi determinate ulterior din condiţii chimico-tehnologice sau economice.

Să notăm cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ debitele reactanţilor la intrare, exprimate în m³/unitatea de timp, la temperatura $T(0) = T_0$ de intrare şi la presiunea constantă la care se petrece procesul. Să notăm de asemenea cu X cantitatea din componentul iniţial A_1 transformată pînă la un

moment oarecare τ. La acest moment vor rămîne netransformate următoarele cantităţi din cantităţile intrate în unitatea de timp: $A_1 - \nu_1 X$, $A_2 - \nu_2 X, \ldots, A_n - \nu_n X$, ν_i fiind diferiţi factori constanţi dintre care ν_1 evident egal cu 1, iar factorii ν_i de la componenţii inerţi, egali cu zero. Componenţii rezultaţi în urma reacţiei se vor găsi în momentul τ în cantităţile: $\mu_1 X, \mu_2 X, \ldots, \mu_m X$, μ_i fiind şi ei factori constanţi, cunoscuţi. Cu aceste notaţii volumul total intrat iniţial în unitatea de timp, $\sum A_i$, devine după timpul τ: $\sum_1^n A_i + \left(\sum_1^m \mu_i - \sum_1^n \nu_i\right) X$, măsurat în m^3 la temperatura T_0 şi presiunea de lucru.

Să introducem încă notaţiile:

$$a_i = \frac{A_i}{\sum A_i}, \quad x = \frac{X}{\sum A_i}, \quad \sum_1^n A_i = A \text{ şi } \sigma = \sum_1^m \mu_i - \sum_1^n \nu_i.$$

Cu ajutorul acestora, expresia volumului la momentul τ şi temperatura T_0 se va scrie:

$$A(1 + \sigma x). \tag{1}$$

Cu aceleaşi notaţii, forma generală a vitezei de reacţie este:

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, T), \tag{2}$$

F fiind cunoscută pentru reacţia dată.

Cantitatea de căldură care trebuie schimbată cu mediul exterior în unitatea de timp, între două secţiuni perpendiculare pe $O\xi$, cu abscisele ξ şi $\xi + d\xi$, este suma dintre efectul termic dQ' al reacţiei şi variaţia dQ'' de entalpie corespunzătoare variaţiei prescrise prin funcţia $T(\xi)$ a temperaturii, ambele în intervalul $d\xi$ menţionat. Să evaluăm pe rînd termenii dQ' şi dQ''.

3. *Pentru evaluarea lui dQ'* vom proceda astfel, ţinînd seama de faptul că ne aflăm în regim permanent: într-un interval $d\tau$ intră în reactor volumul

$$\pi r_0^2 w_0 \, d\tau, \qquad r_0 = r(0), \tag{3}$$

în care w_0 este viteza liniară a amestecului de reacţie la intrare.

După timpul τ, frontul gazului, presupus perpendicular pe axa de rotaţie a reactorului, se va afla la o abscisă ξ, unde temperatura e $T(\xi)$; în acest moment mărimea x are valoarea $x(\tau)$. De aceea volumul (3) devine:

$$\pi r_0^2 w_0 [1 + \sigma x(\tau)] \frac{T(\xi)}{T_0} d\tau.$$

Pe de altă parte, acest volum este cuprins între două secţiuni paralele ξ şi $\xi + d\xi$. Din formula cunoscută a elementului de volum închis de o suprafaţă de rotaţie, se capătă pentru acelaşi volum:

$$\pi r^2(\xi) \, d\xi.$$

Din egalarea acestor două expresii ale aceluiași volum se obține

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{r_0^2 w_0}{T_0} \frac{(1+\sigma x)\, T(\xi)}{r^2(\xi)}. \tag{4}$$

Pentru calculul lui dQ' utilizăm relația $dQ' = q\,dX$, în care q este efectul termic al reacției la temperatura T, raportat la un m³ gaz din primul component la temperatura T_0.

Pe de altă parte, după cum rezultă din considerațiile introductive, $dX = A\,dx$ și deci $dQ' = qA\,dx$. Dar în cazul nostru A este debitul inițial $s_0 w_0$ (s_0 fiind secțiunea la intrare) și deci

$$dQ' = q s_0 w_0\, dx. \tag{5}$$

4. *Valoarea lui* dQ'' se calculează după relația

$$dQ'' = -c_p A\, dT = -s_0 w_0 c_p\, dT, \tag{6}$$

în care c_p este căldura specifică a amestecului de reacție la temperatura T și la timpul τ.

5. Căldura totală ce trebuie schimbată va fi

$$dQ = dQ' + dQ'' = s_0 w_0 (q\,dx - c_p\, dT). \tag{7}$$

Pentru a afla cîtă căldură trebuie schimbată *pe porțiunea* $d\xi$ de reactor, vom scrie expresia precedentă sub forma

$$dQ = s_0 w_0 \left(q - c_p \frac{dT}{dx}\right) \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{d\xi} d\xi,$$

din care, folosind relațiile (2) și (4), obținem:

$$dQ = T_0 r^2(\xi) \left(q - c_p \frac{dT}{dx}\right) \frac{1}{T_1(x)(1+\sigma x)} F(x, T)\, d\xi, \tag{8}$$

unde am notat $T_1(x) = T(\xi(x))$.

Presupunînd regimul temperaturilor, adică $T_1(x)$, cunoscut și forma reactorului, adică $r(\xi)$, dată, din integrarea ecuațiilor (2) și (4) se află x și ξ în funcție de τ și prin aceasta și x în funcție de ξ; înlocuind acestea în (8), se află căldura ce trebuie schimbată cu mediul exterior pe porțiunea $d\xi$ de reactor.

Faptul că reactorul a fost presupus o suprafață de revoluție are o importanță secundară; la o formă oarecare a reactorului, factorul $\pi r^2(\xi)$ din expresia (8) trebuie înlocuit cu aria secțiunii la abscisa ξ.

6. În diferite probleme tehnice particulare, funcțiile $T_1(x)$ și $r(\xi)$ se determină pe baza unor condiții suplimentare. Mai jos vom trata cîteva asemenea cazuri.

a) *Cazul regimului optim al temperaturilor*, adică al regimului de temperaturi astfel alese, încît în fiecare moment, adică la fiecare grad de transformare, viteza de reacție să fie maximă. Aceasta înseamnă că regimul optim e dat de soluția ecuației

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = 0,$$

adică

$$\frac{\partial F}{\partial T} = 0. \tag{9}$$

Această ultimă ecuaţie ne va da pe $T_1(x)$.

b) Un caz interesant ar fi acela în care s-ar cere ca determinarea regimului temperaturilor să se facă astfel încît Q să aibă valoarea extremă. Aceasta conduce la extremizarea integralei

$$\int_0^{x_f} dQ = \int_0^{x_f} \left(q - c_p \frac{dT_1}{dx}\right) dx, \tag{10}$$

în care x_f este valoarea finală a lui x.

Ecuaţia lui Euler care dă funcţia T în cazul de faţă este

$$\frac{dQ}{dT_1} + \frac{\partial c_p}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

care determină funcţia $T_1(x)$ căutată.

c) Evident, se poate dispune şi de forma reactorului. Dacă se presupune funcţiunea $T_1(x)$ cunoscută, forma reactorului, adică funcţiunea $r(\xi)$, poate fi determinată aşa fel încît cantitatea de căldură care trebuie schimbată pe toată lungimea reactorului sau pe elemente, să varieze după o lege dată. În acest din urmă caz, înseamnă că ne este dat $\frac{dQ}{d\xi} = \Phi(\xi)$. Aceasta ne conduce la ecuaţia

$$\pi r^2(\xi)\, T_0 \left(q - c_p \frac{dT_1}{dx}\right) \frac{1}{T_1(x)(1+\sigma x)} F(x, T_1) = \Phi(\xi), \tag{12}$$

în care singura necunoscută este $r(\xi)$, avînd în vedere că $T_1(x)$ este cunoscut, iar $x(\xi)$ rezultă din ecuaţiile diferenţiale (2) şi (4). Evident, $r(\xi)$ se află imediat.

d) Cazul acesta cuprinde drept caz particular pe acela al regimului adiabatic, cînd $\Phi(\xi) = 0$. Aceasta ne conduce la ecuaţia

$$\frac{dT_1}{dx} = \frac{q}{c_p}; \tag{13}$$

cînd q şi c_p sînt constante, se obţine o relaţie liniară între T şi x.

Cînd $q = q(T)$ iar c_p are forma

$$c_p = \alpha + \beta T + \gamma x + \delta Tx, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ — constante}, \tag{14}$$

ecuaţia diferenţială a adiabaticelor este ecuaţia liniară

$$\frac{dx}{dT_1} = \frac{\alpha + \beta T_1}{q(T_1)} x + \frac{\gamma + \delta T_1}{q(T_1)},$$

a cărei integrală este

$$(15)\quad x = \exp\int\left[\frac{\gamma + \delta T_1}{q(T_1)}\right]dT_1\left\{C - \int\frac{\alpha + \beta T_1}{q(T_1)}\exp\left[-\int\frac{q + \delta T_1}{q(T_1)}dT_1\right]dT_1\right\},$$

C fiind o constantă de integrare.

e) Dacă se impune o anumită valoare C căldurii schimbate pe o porțiune finită dată ξ_0, ξ_1 din lungimea reactorului, atunci ajungem la ecuația

$$(16)\quad \pi\int_{\xi_0}^{\xi_1} r^2(\xi\ T_0\left(q - c_p\frac{dT_1}{dx}\right)\frac{1}{T_1(x)(1+\sigma x)}F(x, T_1)\,d\xi = C,$$

în care singura necunoscută este $r(\xi)$. Aceasta este o ecuație integrală de forma

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} f(\xi)\, r^2(\xi)\, d\xi = C,$$

în care $f(\xi)$ este factorul care intervine pe lîngă $r^2(\xi)$ în membrul I al ecuației (16).

Ecuația admite drept soluție

$$(17)\quad r^2(\xi) = \frac{1}{(\xi_1 - \xi_0) f(\xi)}.$$

7. Să tratăm cazul particular al reacțiilor de dehidrogenare catalitică a cicloparafinelor cu p atomi de carbon în ciclu, în regim izoterm. Aceste reacții sînt monomoleculare. Ecuația cinetică (2) este în acest caz

$$(18)\quad \frac{dx}{d\tau} = k(T)(1 - x)$$

și are, în regim izoterm, integrala

$$(19)\quad x(\tau) = 1 - e^{-k\tau}.$$

Să observăm că un regim izoterm corespunde, în cazul ecuației (18), regimului optim al temperaturilor, după cum rezultă din relația (6): este vorba de izoterma $\frac{dk}{dT} = 0$. Din ecuația stochiometrică, rezultă că, dacă prin dehidrogenarea unei molecule se obțin n molecule de hidrogen, atunci vom avea $\sigma = n$, după cum se vede făcînd un bilanț ca în **2.** Ecuația (4) este în cazul nostru

$$\frac{d\xi}{d\tau} = r_0^2 w_0 \frac{1 + nx}{r^2(\xi)}.$$

Presupunînd reactorul cilindric şi înlocuind pe x cu expresia obţinută în (19), găsim

$$\frac{d\xi}{d\tau} = w_0\left[1 + n(1 - e^{-k\tau})\right] \tag{20}$$

şi deci

$$\xi(\tau) = \frac{w_0}{k}\left[(n+1)k\tau - n(1 - e^{-k\tau})\right]. \tag{20'}$$

În sfîrşit, din (5), folosind şi (6), găsim:

$$\begin{cases} dQ' = \pi q r_0^2 w_0\, dx = \pi q r_0^2 w_0 k(1-x)\, d\tau = \pi q r_0^2 w_0 k e^{-k\tau} d\tau = M w_0 e^{-k\tau} d\tau, \\ M = \pi q r_0^2 k, \quad dQ'' = 0, \end{cases} \tag{21}$$

unde de data aceasta q şi deci şi M sînt constante.

Rezultă de aici

$$dQ = \frac{M r_0^2 k e^{-k\tau}}{(n+1) - n e^{-k\tau}} d\xi = \frac{M'}{(n+1)e^{k\tau} - n} d\xi, \tag{22}$$

M' fiind un factor de proporţionalitate constant, care se poate determina integrînd prima relaţie (21) între 0 şi ∞, adică calculînd Q necesar pentru ca reacţia să se petreacă complet. Se găseşte

$$Q = M w_0 / k,$$

de unde şi interpretarea lui M şi M'.

Ecuaţia (22) dă sarcina calorică în lungul suprafeţei de încălzire a reactorului. Dacă se construieşte diagrama $\left(\frac{1}{M'}\frac{dQ}{d\xi}, \frac{k\xi}{w_0}\right)$ se poate vedea uşor că panta pentru $\xi = 0$ a curbei este $-(n+1)$, adică la dehidrogenarea diverselor cicloparafine cu p atomi de carbon în ciclu, sarcina calorică la intrarea în reactor creşte cu numărul de molecule de hidrogen, care apare conform ecuaţiei stochiometrice.

În tabelele 1 şi 2 se dau valorile necesare construirii diagramelor pentru $n = 3$ şi $n = 4$.

Tabelul 1

$n = 3$

$k\tau$	$e^{k\tau}$	$x_\tau = 1 - e^{-k\tau}$	$\frac{1}{M}\frac{dQ}{d\xi}$	$\frac{k\xi}{w_0}$	$\frac{1}{w_0}\frac{d\xi}{d\tau}$
0	1	0	1	0	1
0,5	1,650	0,394	0,278	0,818	2,182
1,0	2,718	0,632	0,127	2,104	2,896
1,5	4,480	0,777	0,067	3,659	3,331
2,0	7,400	0,865	0,038	5,404	3,596
2,5	12,150	0,918	0,022	7,246	3,754
3,0	20,000	0,950	0,013	9,150	3,850

Tabelul 2

$n = 4$

$k\tau$	$e^{k\tau}$	$x_\tau = 1 - e^{-k\tau}$	$\frac{1}{M}\frac{dQ}{d\xi}$	$\frac{k\xi}{w_0}$	$\frac{1}{w_0}\frac{d\xi}{d\tau}$
0	1	0	1	0	1
0,5	1,650	0,394	0,235	0,924	2,576
1,0	2,718	0,632	0,104	2,472	3,528
1,5	4,480	0,777	0,054	4,492	4,108
2,0	7,400	0,865	0,030	6,540	4,460
2,5	12,150	0,918	0,018	8,828	4,672
3,0	20,000	0 950	0,010	11,200	4,800

Cu cele obținute mai sus, calculul pentru dimensionarea unui reactor poate fi condus în modul următor:

Fie x_f valoarea lui x pe care vrem să o obținem în reactor și W viteza de alimentare în litri de materie primă pe litru de catalizator pe oră, obținută din diagrama lui N. D. Zelinski și N. I. Șciukin [2]. Alegem un reactor de tip tubular în care agentul de încălzire este tot materia primă (vezi schema reactorului în [2]). Fie A secțiunea totală a tuburilor umplute cu catalizator și S secțiunea lor liberă; între aceste două secțiuni există relația

$$A = \varrho S, \tag{23}$$

în care ϱ este funcție de structura granulară a catalizatorului și este dat pentru fiecare caz în parte.

Înlocuim în relația (20') pe $k\tau$ prin valoarea corespunzătoare a lui x_f pentru n corespunzător reacției (vezi tabelele de tipul celor de mai sus); fie ϑ această valoare. Relația (20') devine atunci:

$$L = \xi\left(\frac{\vartheta}{k}\right) = \frac{w_0}{k}\left[(n+1)\vartheta - nx_f\right]. \tag{24}$$

Înmulțim relațiile (23) și (24) membru cu membru; ținînd seama de faptul că Sw_0 este debitul inițial A, cunoscut din datele problemei și AL este volumul total V al catalizatorului, egal cu raportul dintre debitul de materie primă și viteza de alimentare, se obține

$$k = \frac{\varrho A}{V}\left[(n+1)\vartheta - nx_f\right];$$

expresia din paranteză poate fi luată direct din tabel, din coloana $\frac{k\xi}{w_0}$.

De aici se deduce și timpul de contact, egal cu $\frac{\vartheta}{k}$, dacă se cunoaște V.

Din (22) se află $\frac{dQ}{d\xi}$.

Primit la 25 VI 1958

Universitatea „Al. I. Cuza", Iași, Seminarul matematic „Al. Myller" și Institutul Politehnic, Iași, Catedra de Termotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Боресков Г. К., **Катализ в производстве серной кислоты**, М., Госхимиздат, 1954.
2. Обрядчиков С. Н., **Избирательный катализ в переработке нефти**, Гостоптехиздат, М.-Л., 1948.
3. Орочко Д. И., **Теоретические основы ведения синтезов жидких топлив**, Гостехиздат, М., 1951.
4. Михеев М. А., **Основы теплопередачи**, Госэнергоиздат, М.—Л., 1949.

К РАСЧЕТУ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ

(Резюме)

Рассматривается, под общей формой, задача необходимого обмена тепла у химического динамического реактора с газовыми реактантами. Общее выражение предназначенного к обмену тепла относящихся к элементу $d\xi$ реактора, представляющего собой поверхность вращения вокруг $O\xi$, дана отношением (8). При любой форме реактора, фактор $\pi r^2(\xi)$ из выражения (8) необходимо заменить площадю сечения соответствующей абсциссе ξ.

Рассматриваются следующие частные случаи:

a) случай оптимального режима температуры (§ **6**a);

b) случай температурного режима определенного таким образом, что общее обменное тепло получает экстремальную величину (§**6**b); решение дано выражением (11);

c) случай, в котором, при данном температурном режиме, требуются определить форму реактора таким образом, что закон изменения обмена тепла вдоль реактора получает данную форму;

d) случай адиабатического режима с учётом удельного тепла и термического эффекта как функция температуры (§ **6**d); температурный режим дан отношением (15);

e) случай требующий величину обменного тепла в определенной области (§ **6**e); форма реактора дана выражением (17).

В заключении дан частный случай реакторов для каталитической дегидрогенации циклопарафинов с p атомами углерода в цикле.

CONTRIBUTIONS AU CALCUL DES RÉACTEURS CHIMIQUES

(Résumé)

Les Auteurs étudient sous forme générale le problème de l'échange nécessaire de chaleur le long d'un réacteur chimique dynamique, à réactants gaseux, en supposant que le réacteur est une surface de révolution le long d'un axe $O\xi$. L'expression générale de la chaleur à échanger, correspondante à l'élément $d\xi$ de réacteur est donnée par (8). Si la forme du réacteur est quelconque, le facteur $\pi r^2(\xi)$ de (8) doit être remplacé par l'aire de la section à l'abscisse ξ.

On considère en particulier:

a) le cas du régime optimum des températures (§ **6**a);

b) le cas du régime des températures qui conduit à une valeur extrémale de la chaleur échangée (§ **6**b); la solution est donnée par (11);

c) le cas où le régime des températures étant donné, on détermine la forme du réacteur en imposant la variation de la chaleur échangée (§ **6**c); la solution est donnée par (12);

d) le cas du régime adiabatique, la chaleur spécifique et l'effet thermique étant des fonctions de la température (§ **6**d); le régime des températures est donné par (16);

e) le cas où l'on impose la valeur de la chaleur échangée sur une portion finie de réacteur (§ **6**e); la forme du réacteur est donnée par (17).

Enfin, on étudie à titre d'exemple, le cas des réacteurs de déhydrogénation catalytique des cycloparaphines à p atomes de carbone dans le cycle.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

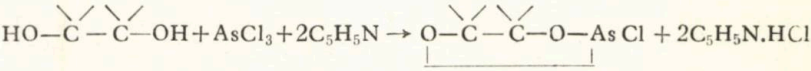
547.26—119

О ПОЛУЧЕНИИ И СВОЙСТВАХ ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ

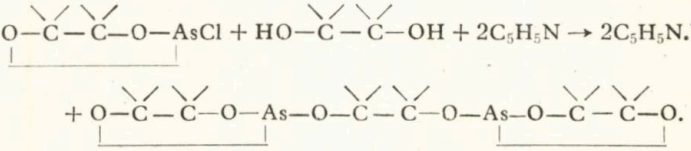
З. Л. ХИСАМОВА и ГИЛЬМ КАМАЙ

Паскаль и Дюпир [1] впервые описали синтез этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты путём взаимодействия этиленгликоля с трёхокисью мышьяка в присутствии растворителей образующих азеотропные смеси (бензол и толуол).

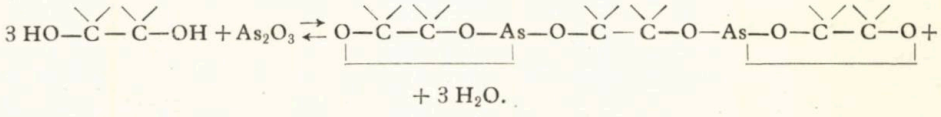
Ранее нами [2] было установлено, что при действии равномолекулярного количества трёххлористого мышьяка на этиленгликоль в среде абсолютного эфира в присутствии безводного пиридина образуется циклический хлорангидрид этиленгликольмышьяковистой кислоты, как главный продукт реакции:



Было выяснено также, что при этой реакции образуется и полный этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты, как продукт вторичной реакции по схеме:

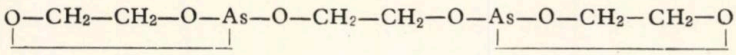


Далее этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты получен нами [3] почти с количественными выходами путём этерификации мышьяковистого ангидрида этиленгликолем при температуре 140...145°:

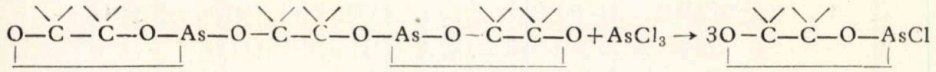


Применяемый нами метод удаления воды из реакционной среды под вакуумом, значительно упрощает получение эфира, сокращая число операций, сохраняя высокие выходы эфира 87...94%.

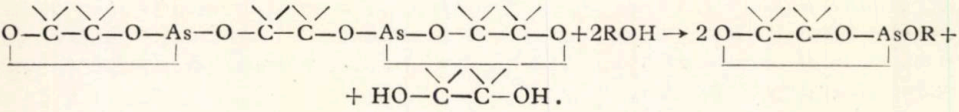
Этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты с галоидными алкилами в реакцию не вступает, не присоединяет серу и однобромистую медь. При взаимодействии эфира с хлористой ртутью нам удалось выделить кристаллическое вещество состава:



При действии равномолекулярного количества трёххлористого мышьяка на этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты, образуется количественно хлорангидрид этиленгликольмышьяковистой кислоты:

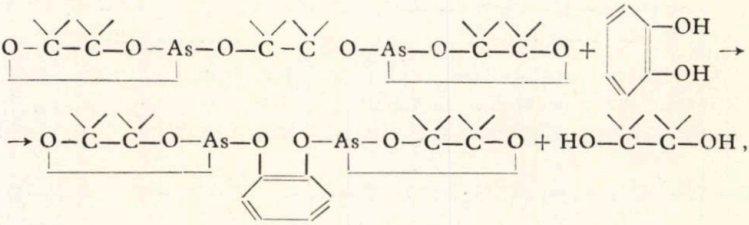


С целью полной переэтерификации этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты нами изучена реакция взаимодействия с одноатомными спиртами, причем для взаимодействия взято на 1 моль эфира не менее 6 молей соответствующего спирта. В трёх случаях, т. е. с н-гексиловым, н-гептиловым и н-октиловым спиртами этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты при нагревании образует продукт частичной переэтерификации:

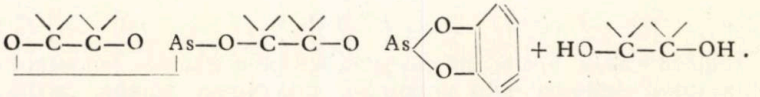


Однако попытка переэтерификации этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты этиловым или н-бутиловым спиртом как путём продолжительного нагревания в колбе с обратным холодильником, так и в запаянной трубке не увенчалась успехом, в обоих случаях получены обратно исходные вещества без изменения.

Совершенно иначе протекает реакция переэтерификации этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты с пирокатехином при повышенной температуре. В этом случае основным продуктом реакции является пирокатехиновый эфир диэтиленгликольмышьяковистой кислоты состава I и II:

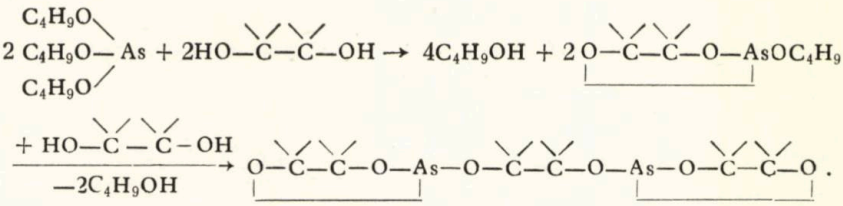


или



Строение выделенного нами продукта подробно не изучено.

Далее интересно отметить, что реакция переэтерификации три-н-бутиларсенита этиленгликолем протекает вероятно ступенчато с образованием смешанного н-бутилового эфира этиленгликольмышьяковистой кислоты и полного этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты по схеме:



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛНОГО ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ

Опыт 1. К раствору 4,2 г этиленгликоля, 10,4 г безводного пиридина в 200 мл сухого эфира при перемешивании и охлаждении прибавлялось 22,6 г хлорангидрида этиленгликольмышьяковистой кислоты. После отделения солянокислого пиридина и отгонки растворителя производилась разгонка остатка в вакууме. Главная фракция в количестве 9,0 г (54,5%) имела т. кип. 166...167° при 4 мм.

Найдено: As% = 45,46, 45,23,
$C_6H_{12}O_6As_2$. Вычислено: 45,40.

Этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты представляет собой бесцветную густую жидкость. $d_4^{20} = 1{,}8951$; $n_D^{20} = 1{,}5433$; $MR_D = 54{,}91$; $AR_{DAs} = 8{,}65$.

Опыт 2. В перегонную колбу системы Арбузова было взято 10 г мышьяковистого ангидрида и 14,5 г этиленгликоля. Колба нагревалась на масляной бане при 140...145° в течение 30 минут. Для удаления выделившейся воды при этой реакции был включен водоструйный насос. После удаления воды в вакууме и двухкратной перегонки получено вещество с т. кип. 160...161° при 2 мм в количестве 15,8 г. Выход 94,6% теории.

Найдено: As% = 45,49, 45,60,
$C_6H_{12}O_2As_2$. Вычислено: 45,40.

Полученный эфир имел $d_0^{20} = 1{,}8915$; $n_D^{20} = 1{,}5378$; $MR_D = 54{,}68$; $AR_{DAs} = 8{,}50$.

Этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты не присоединяет однобромистую медь, а также серу при повышенной температуре.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ С ХЛОРНОЙ РТУТЬЮ

В пробирочку, снабженную термометром, доходящим до дна пробирочки, взято 0,5 г сулемы и к ней прибавлялось 0,3 г этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты. При перемешивании замечено повышение температуры смеси от 18 до 32°. Далее содержимое пробирки нагрето до получения однородной прозрачной массы и оставлено на ночь в вакуум-эксикаторе. На другой день масса закристаллизовалась.

Т. пл. сырых кристаллов 91°. После перекристаллизации из горячего бензола т. пл. повысилась до 220°.

Найдено: Hg %=46,44; Cl %=17,67; As%=18,21,
17,68,
$C_6H_{12}O_6As_2Hg_2Cl_4$. Вычислено: 45,94; 16,24, 17,15.

Полученная соль хорошо растворяется в бензоле, трудно в эфире. В горячей воде быстро гидролизуется с выделением белого мышьяка.

Сделанные нами анализы дают возможность сделать вывод, что выделенное вещество представляет собой продукт присоединения хлорной ртути к этиленгликолевому эфиру мышьяковистой кислоты.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ С ПИРОКАТЕХИНОМ

В колбу взято 10 г этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты и 3,4 г пирокатехина и постепенно нагревалсь под вакуумом. Выделены две фракции: I-я, т. кип. 93...96° при 10 мм и II-я, 155...170° при 1,5 мм. При перегонке при обыкновенном давлении первой фракции вещество кипело при 190°, $n_D^{20} = 1{,}4321$, которое оказалось чистым этиленгликолем.

Вторая фракция после повторной перегонки имела т. кип. 157...160° при 1,5 мм. Выход 4,1 г, 35,4% теории.

Найдено: As %=39,96,
40,11,
$C_{10}H_{12}O_6As_2$. Вычислено: 39,63.

Смешанный эфир пирокатехиндигликольмышьяковистой кислоты представляет собой бесцветную, густую без запаха жидкость. При стоянии на воздухе эфир легко гидролизуется.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ С н-ГЕКСИЛОВЫМ СПИРТОМ

В перегонной колбе нагревалась смесь 10 г этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты и 18,7 г н-гексилового спирта в продолжение 3 часов при 155...159°. После отгона избытка н-гексилового спирта оставшаяся жидкость перегонялась в вакууме. При двухкратной перегонке выделена фракция с т. кип. 85...87° при 1,5 мм в количестве 2,5 г.

Найдено: As %=31,63,
31,59,
$C_8H_{17}O_3As$. Вычислено: 31,72.

По данным анализа на мышьяк и физических констант выделенное вещество оказалось ранее нами изученным н-гексиловым эфиром этиленгликольмышьяковистой кислоты. $n_D^{20} = 1{,}4735$; $d_4^{20} = 1{,}2716$.

Кроме указанного эфира при вакуум-разгонке было выделено вещество с т. кип. 160...161° при 2 мм и $n_D^{20} = 1{,}5425$, что соответствует физическим константам исходного этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты.

По вышеуказанной методике при взаимодействии этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты с н-гептиловым или н-октиловым спиртами нами были выделены соответствующие смешанные эфиры этиленгликольмышьяковистой кислоты.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРИ-н-БУТИЛАРСЕНИТА С ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕМ

В трубку из тугоплавкого стекла запаивалось 10 г три-н-бутиларсенита и 4,7 г этиленгликоля. Трубка нагревалась в продолжение 6 часов при 250° и после охлаж-

дения была вскрыта. При обыкновенном давлении отогнан н-бутиловый спирт с т. кип. 117...118° и $n_D^{20} = 1{,}3995$. В вакууме отогнаны: I-я фракция с т. кип. 69...70° при 10 мм, 1,5 г, $n_D^{20} = 1{,}4782$ и II-я фракция, 186° при 10 мм, 4,92 г, $n_D^{20} = 1{,}5406$.

Как по физическим, так и по аналитическим данным первая фракция являлась ранее изученным [3] н-бутиловым эфиром этиленгликольмышьяковистой кислоты, а вторая, полным этиленгликолевым эфиром мышьяковистой кислоты.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ С ТРЁХХЛОРИСТЫМ МЫШЬЯКОМ

В круглодонную колбу с обратным холодильником и капельной воронкой помещалось 15 г этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты. К нему прикапывался трёххлористый мышьяк в количестве 6 г. Далее содержимое колбы нагревалось на масляной бане при 130° в течение 30 минут. После перегонки из арбузовской колбочки в вакууме, получена фракция с т. кип. 66...67° при 9 мм и т. пл. 44...45°.

	Найдено: As %=44,08;	Cl %=20,67,
	43,80,	
$C_2H_4O_2AsCl$. Вычислено:	44,00;	20,82.

По данным анализа и физическим константам полученное вещество является хлорангидридом этиленгликольмышьяковистой кислотой.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭТИЛЕНГЛИКОЛЕВОГО ЭФИРА МЫШЬЯКОВИСТОЙ КИСЛОТЫ С ИОДИСТЫМ МЕТИЛОМ

3 г этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты и 3,5 г иодистого метила нагревались в запаянной трубке при 100°, 6 часов. После охлаждения трубка была вскрыта, причём наблюдалось небольшое давление. При обыкновенном давлении отогнан непрореагировавший иодистый метил (3 г). Затем остаток перегнан в вакууме. Т. кип. 146...150° при 1,5 мм, $d_4^{20} = 1{,}8848$ и $n_D^{20} = 1{,}5446$.

	Найдено: As %=44,79,	
	44,90,	
$C_6H_{12}O_6As_2$. Вычислено:	45,40.	

В результате этой операции выделен обратно этиленгликолевый эфир мышьяковистой кислоты.

ВЫВОДЫ

1. Разработан более простой способ получения этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты.
2. Изучены реакции взаимодействия этиленгликолевого эфира мышьяковистой кислоты с хлорной ртутью, пирокатехином, некоторым одноатомными спиртами, треххлористым мышьяком и иодистым метилом.
3. Описана реакция переэтерификации три-н-бутиларсенита с этиленгликолем и дано истолкование полученным результатам.

Поступило 25 III 1958

Казанский филиал Академии Наук, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Pascal P., Dupire A., C. r. Ac. Sci., Paris, 1932, **195**, p. 14.
2. Камай Гильм и Хисамова З. Л., ДАН СССР, 1951, **76**, стр. 535; ЖОХ, 1953, **23**, стр. 1323.
3. Камай Гильм, Хисамова З. Л. и Чадаева Н. А., ДАН СССР, 1953, **89**, стр. 1015.

ÜBER DIE DARSTELLUNG UND EIGENSCHAFTEN VON GLYKOLARSENIGSÄUREESTER

(Zusammenfassung)

Es wurde eine einfachere Methode für die Darstellung von Glykolarsenigsäureester ausgearbeitet. Die Reaktion des Zusammenwirkens von Glykolarsenigsäureester, mit Quecksilberchlorid, Pyrocatechin, einigen Alkoholen und Methyliodid, wurde untersucht. Es wurde die Reaktion der Umesterung von Tri-n-butylarsenit mit Äthylenglykol beschrieben und die gewonnenen Ergebnisse erklärt.

ASUPRA PREPARĂRII ŞI PROPRIETĂŢILOR ESTERULUI GLICOLIC AL ACIDULUI ARSENIOS

(Rezumat)

Autorii expun o metodă simplă de preparare a esterului glicolic al acidului arsenios. Se cercetează reacţia esterului glicolic al acidului arsenios cu clorura mercurică, cu unii alcooli monoatomici şi cu iodura de metil.

Se descrie reacţia de reesterificare a arsenitului de tri-butil-n cu etilenglicol şi se precizează rezultatele obţinute.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

679.574

POLYMÈRES ANALOGUES

Note I

URÊTHANS POLYVINYLIQUES

PAR

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU
et MARIA GRIGORAŞ

Note présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 26—29 Juin 1958

1. Introduction

Tout récemment la chimie des produits macromoléculaires se limitait, presque exclusivement, à la synthèse des différentes classes de hauts polymères, en partant des monomères respectifs ; c'est ainsi que le chimiste, en variant la structure chimique du monomère de départ, réussissait à élargir la gamme de leurs propriétés et donc à multiplier leurs utilisations.

Plus récemment, la chimie des combinaisons macromoléculaires réussit à atteindre une orietation supérieure, par l'extension de l'étude des groupements fonctionnels de la chimie organique, à l'étude du comportement des groupements fonctionnels des hauts polymères de synthèse. On obtient ainsi, par les transformations chimiques qui ont lieu, différentes classes de nouveaux polymères avec des propriétés spécifiques. C'est ainsi que dans la technique, on emploie aujourd'hui des polymères obtenus par la saponification des esters polyvinyliques, par l'estérification ou l'acétalisation de l'alcool polyvinylique.

Actuellement, dans la chimie macromoléculaire, on travaille avec la même intensité à la synthèse des nouveaux types de polymères et à la modification chimique des polymères déjà connus, pour leur conférer des propriétés nouvelles ou pour améliorer les propriétés du polymère de départ, dans le but d'élargir les domaines d'application, suivant l'exigence croissante de la technique moderne.

Selon ces considérations, on s'est proposé de préparer une série de polymères, ayant les groupements fonctionnels des polymères analogues modifiés, pour élever la thermoplasticité du matériel, pour lui imprimer la capacité de se colorer directement avec des colorants organiques, et même pour obtenir des polymères colorés.

Nous nous occuperons d'abord de l'obtention des polyuréthans.

2. Uréthans polyvinyliques

Les polyuréthans, produits obtenus par la polyaddition des alcools polyatomiques aux polyisocianates, ont acquis une grande importance technique.

La littérature de spécialité indique de nombreux brevets relatifs à la possibilité d'obtenir des types variés de polyuréthans, dont nous citons seulement quelques exemples :

Ainsi, des polyuréthans très visqueux et fusibles sont obtenus en chauffant le 1.6. hexandiol avec le 1.6. hexandiisocyanate [1].

On peut préparer des polyuréthans linéaires an partant soit des diisocyanates et des glycols, en continu [2], soit des polyamines (hexaméthylène diamine et tetraméthylènediamine) et des esters de l'acide bischlorformique comme le bischlorformiate de 1.4. butanediol. On obtient soit des matériaux filables de la matière en fusion, soit des matériaux qui peuvent être transformés en films, etc. [3].

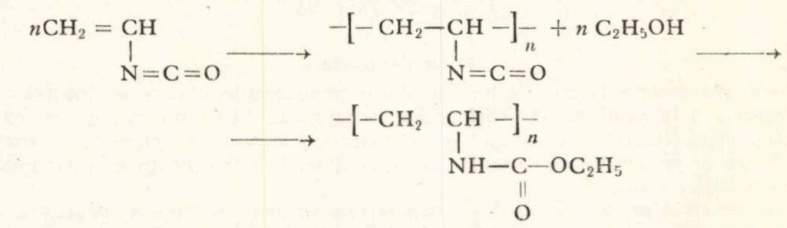
On obtient des produits ayant des propriétés analogues à celles du caoutchouc par la polyaddition aux diisocyanates, des polyesters, préparés au moyen des acides bibasiques et des glycols [4].

Des polyuréthans ayant des propriétés haut élastiques (Vulcollan), sont obtenus en utilisant des polyesters linéaires, des diisocyanates et des petites quantités d'eau. Ces petites quantités d'eau conduisent aux groupements uréiques qui établissent des ponts entre les chaînes [5].

Des produits qui donnent des films élastiques et stables en présence des substances chimiques, sont obtenus par la polyaddition des phénols polyatomiques aux polyisocianates [6].

Le polyuréthan résultant de l'huile de ricin et des diisocyanates est un matériel ayant de bonnes propriétés mécaniques et électriques [7].

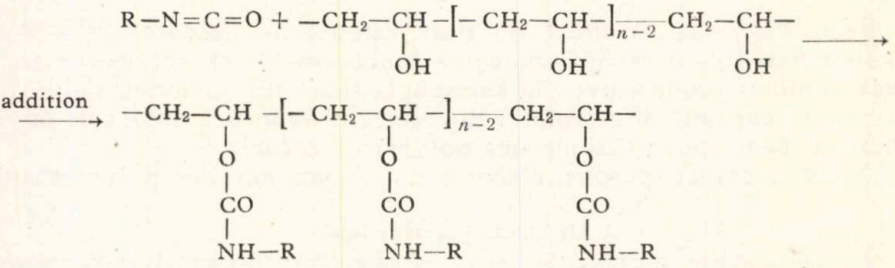
On indique dans un brevet, la préparation du poly-N-vinylcarbamate d'éthyle en partant de l'isocyanate de vinyle qu'on soumet à la polymérisation et en additionant de l'alcool éthylique aux groupements isocyaniques libres du polymère résulté [8], conformément au schéma:



Dans cette Note on s'est proposé de préparer des uréthans par une voie différente, en créant la fonction uréthan sur la chaîne d'un macropolymère. Nous avons utilisé comme polymère de départ, soit l'alcool polyvinylique, soit l'acétate de polyvinyle.

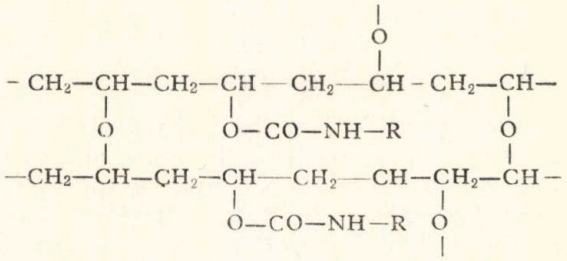
A. *Uréthans polyvinyliques obtenus par addition*

L'alcool polyvinylique mis en réaction avec l'isocyante de phénile conduit à l'uréthan polyvinylique respectif, conformément au schéma:



L'addition à l'isocyante se produit très énergiquement, même en chauffant faiblement; si la température n'est pas bien maîtrisée, le procèssus

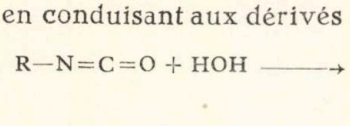
peut devenir violent, conduisant à un produit insoluble et qui n'est pas homogène. L'insolubilité de l'uréthan polyvinylique pourrait être due à la création d'une structure réticulaire par l'étérification intermoléculaire de certains groupes alcooliques du polymère, favorisée par la chaleur dégagée pendant l'addition. Le polymère résulté, présenterait en ce cas la structure :



Il en suffit qu'ils soient présents quelques ponts intermoléculaires pour que le matériel perde sa solubilité dans les solvants organiques; la température de ramollissement augmente et lorsque le nombre des ponts s'accroit, la thermoplasticité de l'uréthan résulté peut même disparaître.

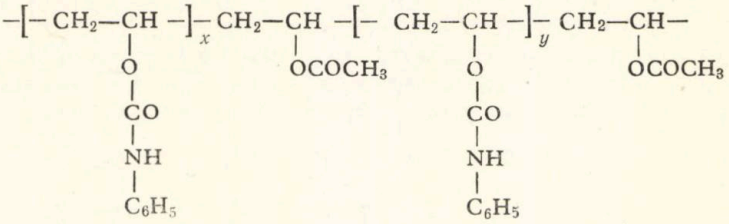
On évite cette difficulté en employant comme milieu de dispersion pour l'alcool polyvinylique et comme diluant pour l'isocyanate, le benzène ou le toluène parfaitement anhydre.

En même temps que l'addition de l'alcool polyvinylique, une partie de l'isocyanate est consomée à cause des traces d'eau résultées des faibles treilles, en conduisant aux dérivés carbaminiques à petite molécule :



En travaillant avec soin on peut éviter les réactions secondaires et on obtient des uréthans polyvinyliques suffisamment purs.

L'alcool polyvinylique, employé par nous dans la réaction, avait encore environ 13,6% groupements CH_3-CO-, donc sur la chaîne du phénile uréthan résulté, on trouve ci et là, des motifs d'acétate de vinyle :



Le pourcentage d'azote et le degré d'estérification du polymère indique que le phénilecarbamate de polyvinyle obtenu, possède environ 94% groupements carbamyles, le reste étant formé par des groupements

acétyles, ce qui prouve que l'isocyanate mis en excès a substitué en partie les groupements acétyles de la chaîne du polymère initial.

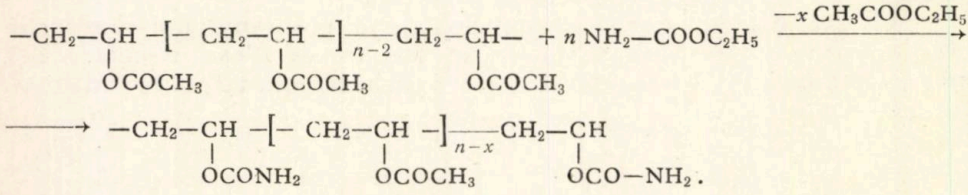
Le N-phénile carbamate polyvinylique, par opposition à l'alcool polyvinylique de départ, est insoluble dans l'eau, soluble à froid, mais plus vite à chaud, dans l'acétone. De la solution acétonique, le polymère est précipité avec de l'alcool. Il est thermoplastique et donne des films transparents et incolores.

B. *Uréthans polyvinyliques obtenus par réestérification*

Nous avons obtenu des carbamates polyvinyliques et par la réestérification de l'acétate de polyvinyle avec les uréthans habituels.

a) C'est ainsi qu'en chauffant, à une température modérée, une solution glycolique d'acétate de polyvinyle avec du carbamate d'éthyle et une petite quantité d'acide minéral comme catalyseur, se produit le procèssus de réestérification.

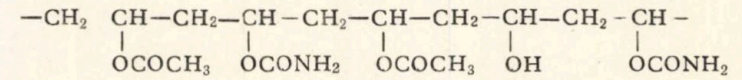
Sur la chaîne du polymère résulté, on trouve aussi, à côté des motifs d'acétate de vinyle, des motifs de carbamate de vinyle. Selon la concentration de la solution du polymère et du carbamate d'ethyle, selon le temps et la température de réaction, on peut varier aussi le nombre des motifs de carbamate d'ethyle de la chaîne de l'uréthan polyvinylique résulté. Ce fait donne la possibilité d'obtenir une gamme large d'uréthans polyvinyliques, ayant des propriétés différentes:



Dans nos essais de réestérification, nous avons pris pour chaque motif d'acétate de vinyle du polymère initial, 0,75 moles carbamate d'éthyle et nous avons obtenu un acétocarbamate de polyvinyle avec un contenu de 5,7% groupements $-CO-NH_2$ et 69,6% groupements $-CO-CH_3$. Il en résulte que pendant la réaction de réestérification réalisée en solution glycolique, il intervient une hydrolise partielle des groupements $-CO-CH_3$; elles se sont fixées au glycol, en créant ainsi sur la chaîne, environ 25% groupements OH libres.

Ces groupements apparaissent quantitativement dans la réaction d'addition du polymère carbaminique à l'isocyanate de phénile.

Par conséquent, le polymère carbaminique aura la structure:

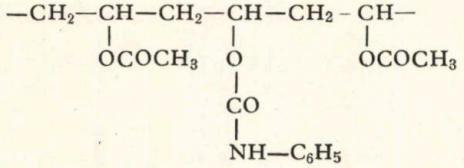


La réestérification est une réaction reversible, d'équilibre, donc il reste toujours du carbamate d'éthyle non réactionné, qui peut être séparé du milieu de réaction et employé de nouveau.

L'acétocarbamate ayant 5,7% groupements carbamyle sur la chaîne, est soluble dans les solvants organiques habituels, il ressemble à ce point de vue à l'acétate de polyvinyle.

En outre il a quelques propriétés caractéristiques. Il est transparent, parfaitement incolore et grâce à la présence des groupements $-NH_2$, il peut être coloré facilement avec divers colorants organiques.

b) En employant, dans la réaction pour la réestérification de l'acétate de polyvinyle, le N-phénile carbamate d'éthyle, nous avons obtenu un copolymère, l'acéto-N-phénile carbamate de polyvinyle, qui contient 14,5% groupements N-phénile-carbamyle, quoique dans cette réaction on a employé seulement 0,5 moles N-phénile carbamate pour chaque motif d'acétate de vinyle :



Il semble que la présence du groupement phénile dans l'uréthan utilisé, déplace l'équilibre de la réaction de réestérification vers la formation du carbamate, d'une manière plus accentuée que dans le cas précédent.

Par opposition au N-phénile carbamate de polyvinyle obtenu par l'addition de l'alcool polyvinylique au phénile isocyanate, qui contient 94% groupements $-CO-NH-C_6H_5$, le N-phénile carbamate résulté par réestérification, avec 14,5% groupements $-CO-NH-C_6H_5$ sur la chaîne, est plus soluble dans les solvants habituels, étant plus proche, à cet égard, de l'acétate de polyvinyle. Le polymère est incolore et transparent.

Une particularité essentielle, qui caractérise les phénile-uréthans obtenus, soit par addition, soit par réestérification, est leur thermoplasticité plus prononcée si on les compare aux polymères de départ. Cela est dû à la présence du groupement phénile dans la chaîne, qui produit une plastification interne des macromolécules copolymères resultées.

L'acétocarbamate de polyvinyle ainsi que l'acéto-N-phénile carbamate de polyvinyle préparés, ont des propriétés adhésives prononcées pour le verre et les métaux ; ils présentent ainsi de larges perspectives d'utilisation.

Nous continuerons nos recherches pour étudier encore les propriétés et le comportement des polymères obtenus ci-dessus.

C. *Conclusions*

Il en résulte de nos recherches que:

1. On peut préparer des uréthans polyvinyliques par l'addition de l'alcool polyvinylique aux isocyanates.

2. On peut aussi préparer des uréthans polyvinyliques par la réaction de réestérification de l'acétate de polyvinyle avec des uréthans simples.

3. Les polymères carbaminiques obtenus peuvent être colorés par différents colorants organiques.

4. Ces uréthans ont des propriétés différentes de celles des polymères de départ; ils sont caractérisés par un grand pouvoir adhésif au verre et aux métaux.

3. Partie expérimentale

N-phénile-carbamate de polyvinyle, obtenu par addition

On fait une dispersion d'alcool polyvinylique, finement pulvérisé et bien séché, dans du benzène anhydre et l'on ajoute de l'isocyanate de phénile dans un rapport molaire de 1 : 1, en agitant continuellement.

Immédiatement après l'homogénéisation, le polymère qui était pulvérulent et opaque devient transparent et présente un aspect gélatineux.

On chauffe avec précaution le mélange de réaction, en agitant continuellement pour atteindre pendant $2^1/_2$...4 heures la température d'ébullition du solvant.

Pendant ce temps, le polymère devient une masse transparente, faiblement colorée en jaune, complètement insoluble dans l'eau et l'alcool.

Il est soluble dans l'acétone, et de la solution acétonique on peut le précipiter avec de l'alcool ou de l'eau. Il est aussi soluble dans un mélange d'alcool et de benzène.

Le polymère est purifié par des dissolutions répétées et des reprécipitations; séché à 45...50° il est incolore, transparent, ayant son point de ramolissement à 140°.

Analyse : N% = 8,05
Groupements N-phénile-carbamyle % = 94.

Acétocarbamate de polyvinyle obtenu par réestérification

En agitant avec efficacité, on chauffe à 60...80° une solution glycolique d'acétate de polyvinyle et de carbamate d'éthyle (rapport molaire 1 : 0,75) en présence de PO_4H_3.

Peu de temps après (environ 15 minutes) on reconnaît facilement la formation de l'acétate d'éthyle, comme résultat de la réaction de réestérification.

Après 3/4...1 heure d'agitation et de chauffage, le polymère se sépare de la solution sous forme d'une masse gélatineuse, transparente, qui devient de plus en plus visqueuse. La durée de la réaction est de 3...5 heures.

Le polymère, libéré du solvant, est lavé avec soin, plusieurs fois, à l'eau chaude, pour éloigner le catalyseur et l'uréthan non réactionné, puis avec une solution très diluée de NaOH et de nouveau à l'eau.

On peut le purifier en le précipitant d'une solution alcoolique.

L'acétocarbamate de polyvinyle ainsi obtenu est incolore, transparent, rigide à la température ordinaire ; il devient plastique à chaud, au-dessus de 75 ... 80°. On peut le colorer facilement et d'une manière homogène, avec de petites quantités de colorants organiques.

La solution alcoolique ou acétonique forme un film adhérent, transparent sur le verre.

Analyse : N %= 0,92,
0,94,
groupements CH_3-CO %=69,6,
groupements NH_2-CO %= 5,7.

Les données analytiques montrent que pendant le procèssus de réestérification, une partie des groupements CH_3-CO- sont hydrolysés, et sur la chaîne du macropolymère résulté, on trouve environ 25 % de groupements OH libres, qui peuvent être mises en évidence par voie chimique.

Acéto-N-phénile carbamate de polyvinyle obtenu par réestérification

On soumet à la réestérification, avec du N-phénile-carbamate d'éthyle, une solution glycolique d'acétate de polyvinyle, acidulée à l'acide phosphorique. Rapport molaire 1 : 0,5. En agitant, on maintient la température entre 75...80°, environ 4..4 1/2 heures.

À mesure que la réaction avance, le polymère commence à se séparer sous forme de masse transparente, gélatineuse et l'agitation devient de plus en plus difficile.

On sépare le produit par décantation, on le lave plusieurs fois à l'eau chaude pour éloigner le catalyseur, ensuite, avec une solution de NaOH, et de nouveau à l'eau.

Le polymère est soluble dans l'alcool, dans l'acétone et le benzène ; on peut le purifier facilement. Enfin on le sèche à 45 ... 50° et il devient une masse parfaitement transparente, incolore, thermoplastique.

Le matériel se rapproche, par ses propriétés, de l'acétate de polyvinyle de départ, mais il possède une thermoplasticité plus prononcée. Il commence à se ramollir à 65 ... 70° et peut être coloré par des colorants organiques.

De sa solution alcoolique ou acétonique, après l'évaporation du solvant, un film est déposé, transparent, incolore, très adhérent au verre.

Analyse :

N %= 1,25,
groupements acétyle % =85,6,
groupements N - phénile-carbamyle % =14,5.

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire de Technologie des Substance Organiques

BIBLIOGRAPHIE

1. C. 1954, No. 14, p. 3117, DBP 898682.
2. C. 1955, p. 6633 [D.P. (D.D.R.) 5005 Kl 39 c. du 3/10 1943].
3. C. 1955, p. 8276 (A.P. 2658886 du 6/10 1951), Jack Swerdloff et Samuel B.Mc Farlane.
4. C. 1954, p. 4279 (A.P.P. 2625531 et 2625532/1950 et 1953), A.P. 2625535/1953,
C. 1954, p. 5187 (E.P.P. 696449, 696450/1950—1953),
C. 1954, p. 5190 (DBP 905787 ad. à DBP 883347, C. 1953, 8227).
5. Bayer O., Müller E., Petersen S., Piepenbrink H. F. u. Windermuth E., Angw. Ch., 1950, *3*, S. 57—84.
6. C. I., 1950, p. 3270 (Ind. Vernice, 1950, **4**, pp. 190—193).
7. C. II. 1950, p. 1515 (Chem Enging., Chem. Metallurg. Enging., 1950, **57**, pp. 165—66).
8. C. I. 1951, p. 1673 (A. P. 2514328 du 23/10 1945).

АНАЛОГИЧНЫЕ ПОЛИМЕРЫ

Заметка I

Поливинильные уретаны

(Резюме)

Поливинильные уретаны были получены примесью поливинильного спитра к изоцианатам. Он могут быть также получены при переэстерификационной реакции поливинильного ацетата с простым уретаном.

Полученные карбаминовые полимеры могут быть окращены различными органическими красителями.

Эти уретаны имеют различные свойства исходных полимеров, характеризуясь большой притягательной силой к стеклу и металлам.

POLIMERI ANALOGI

Nota I

URETANI POLIVINILICI

(Rezumat)

S-au preparat uretani polivinilici prin adiţia alcoolului polivinilic la izocianaţi. Aceştia se pot prepara de asemenea şi prin reacţia de reesterificare a acetatului de polivinil cu uretani simpli.

Polimerii carbaminici obţinuţi pot fi coloraţi cu diverşi coloranţi organici.

Aceşti uretani au proprietăţi diferite de cele ale polimerilor de plecare, caracterizîndu-se printr-o mare putere adezivă la sticlă şi metale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

579.574

POLYMÈRES ANALOGUES

Note II

DÉRIVÉS URÉIQUES POLYVINYLIQUES

PAR

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU
et MARIA GRIGORAŞ

Note présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 26 — 29 Juin 1958

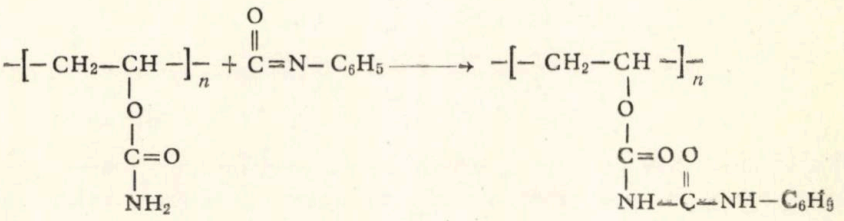
Dans cette Note nous avons continué l'étude des transformations chimiques de la chaîne des uréthans polyvinyliques, préparés antérieurement [1], pour obtenir des dérivés uréiques.

Habituellement on obtient des polyurées, par des méthodes analogues à celles utilisées lors de l'obtention des polyuréthans, à savoir, par l'addition des diamines alyphatiques ou aromatiques aux diisocyanates [2] ou en partant des polyamines alyphatiques ou cycloalyphatiques, en les chauffant avec du CO_2 à 100...300° et au-dessus de 100 at. Les produits résultés ont le point de ramollissement à 130...300° et peuvent être tirés en feuilles et filés [3].

La formation des polyurées a lieu selon le schéma :

$$-H_2N-R-NH_2+OCN-R'-NCO \longrightarrow -NH-R-NH-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-NH-R'-NH-CO-$$

En substituant la diamine par le carbamate de polyvinyle, la réaction conduira à l'urée substituée, respective, comme on le constate dans l'équation :

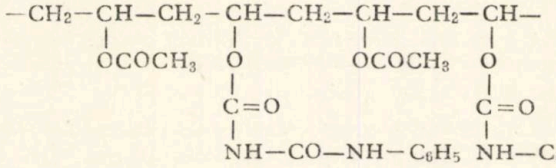


a) La réaction a été réalisée dans un milieu anhydre, en traitant avec de l'isocyanate de phénile, l'acétocarbamate de polyvinyle, ayant un contenu en groupements $-CO-NH_2 = 5,7\%$.

On a obtenu un polymère ayant un pourcentage double d'azote, par rapport au contenu en azote du carbamate de départ. Théoriquement le pourcentage de N contenu dans le dérivé uréique résulté devait être de $1,75\%$, nous l'avons trouvé égale à $2,07\%$. L'augmentation du contenu en N avec 25% résulte de l'addition à l'isocyanate de phénile, des groupements OH libres qui existent déjà dans le carbamate de polyvinyle, ainsi que nous l'avons mentionné dans [1].

Cette augmentation de l'azote indique la présence des motifs d'alcool vinylique dans la chaîne de l'acétocarbamate de polyvinyle, préparé antérieurement.

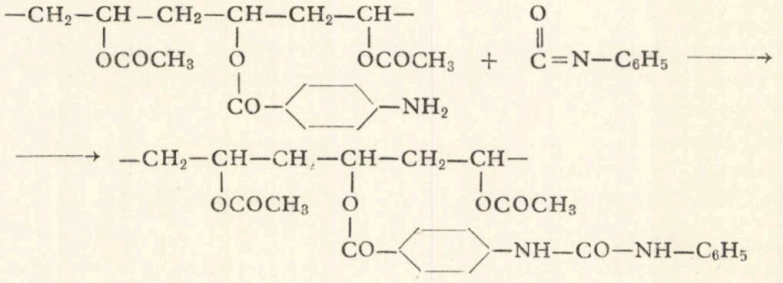
Par conséquent, le polymère obtenu par cette transformation chimique, possède une chaîne formée de motifs d'urée substituée, de motifs d'acétate de vinyle et de N-phénile carbamate, ayant probablement la structure suivante:



Le polymère est soluble dans les solvants organiques habituels, il n'a plus le caractère adhésif si prononcé que l'uréthan de départ, en échange il est thermoplastique, incolore, prêt à être coloré au moyen des colorants organiques et à être transformé en objets finis, habituels dans la technologie des polymères vinyliques.

b) Nous avons préparé un autre dérivé uréique polyvinylique par l'addition de l'acéto-p-aminobenzoate de polyvinyle à l'isocyanate de phénile.

Par l'addition, à l'isocyanate, du groupemement $-NH_2$ de la chaîne latérale du polymère, on obtient l'urée bisubstituée, respective, dont la structure est, probablement, la suivante:



En considérant la représentation de la structure on peut voir que le contenu en N du polymère obtenu est doublé, résultat confirmé aussi

par les données analytiques. Le polymère de départ a, en moyenne un contenu de 1,36% N et le dérivé uréique polyvinylique a un contenu de 2,67% N.

À cause de la grande ramification latérale de la chaîne polyvinylique, le matériel présente une certaine plasticité, même à la température de 25...30°.

Le polymère bien purifié est parfaitement transparent, ayant la même couleur jaune que le p-aminobenzoate de polyvinyle dont il provient, mais par contre, le caractère adhésif est très faible.

En créant un plus gand nombre de groupements uréiques à la chaîne polyvinylique, le point de ramollissement pourrait être abaissé, et le matériel serait employé comme plastifiant macromoléculaire pour d'autres types de plastiques plus rigides.

Nous continuerons nos recherches pour étudier encore les propriétés et le comportement des polymères obtenus.

Conclusions

1. Nos essais montrent que les dérivés uréiques polyvinyliques peuvent être obtenus par l'addition des carbamates polyvinyliques, ayant un groupement $-NH_2$ dans la chaîne latérale des isocyanates.

2. On a obtenu un dérivé uréique polyvinylique par l'addition de l'acéto-carbamate de polyvinyle à l'isocyanate de phénile.

3. On a obtenu aussi un dérivé uréique polyvinylique par l'addition de l'acéto-p-amino-benzoate de polyvinyle à l'isocyanate de phénile.

4. On a constaté que si les ramifications latérales, attachées à la chaîne polyvinylique, sont plus longues, il en résulte des matériaux ayant une grande thermoplasticité et qui pourraient servir comme plastifiants pour d'autres macropolymères.

Partie expérimentale

Dérivé uréque de l'acétio-carbamate de polyvinyle

On fait réagir l'acéto-carbamate de polyvinyle, parfaitement sec et pulvérisé, avec de l'isocyanate de phénile, pris en excès par rapport aux groupements carbaminiques qui existent sur la chaîne du polymère. On chauffe, au bain-marie, à l'ébulition, le mélange de réaction, protégé contre le contact avec l'humidité atmosphérique. Temps de réaction 5...8 heures.

Au debut le polymère gonfle dans l'isocyanate, l'addition ayant lieu au fur et à mesure du chauffage.

Finalement, après avoir éloigné, avec de l'éther, l'isocyanate de phénile non réactionné, on obtient un matériel incolore, transparent, ayant un caractère thermoplastique plus accentué que le polymère de départ, des propriétés adhésives plus faibles et une solubilité plus prononcée dans les solvants organiques habituels.

Incolore, on peut lui donnér diverses nuances et puis il peut être usiné selon la manière habituelle.

Analyse: calculé 1,75% N,
trouvé 2,07% N.

Nous croyons que l'augmentation de 25% du contenu en N, comparé au chiffre calculé, est due à l'addition de l'isocyanate mis en excès, aux groupements OH libres du polymére de départ, provenus de l'hydrolise partielle des groupements acétyles, dans nos conditions de travail.

Dérivé uréique de l'acéto-p-aminobenzoate de polyvinyle

On fait réagir l'aceto-p-aminobenzoate de polyvinyle, purifié et bien séché, avec un petit excès d'isocyanate de phénile par rapport à la quantité des groupements $-NH_2$.

L'addition est réalisée de la même manière que pour le polymère antérieur.

Le dérivé uréique résulté est soluble dans l'alcool et dans l'acétone ; le matériel peut être facilement purifié.

Le polymère séché à 45...50°, a une couleur jaunâtre, il est transparent et présente des propriétés plastiques prononcés même à la température ordinaire.

Analyse : calculé 2,72% N,
trouvé 2,67% N.

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire de Technologie des Substances Organiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Cocea E., Mărculescu C., Grigoraş M., Ce bulletin, pp. 159—166.
2. C. 1953, p. 1409, D. B. P. 851550 Kl. 39 c du 25/7 1950, ausg. 6/10 1952.
3. C. (II), 1950, p. 1064, F. P. 956 086 du 29/11 1949, ausg. 24/1 1950.

АНАЛОГИЧНЫЕ ПОЛИМЕРЫ

Заметка II

Производные поливинильные уреиды

(Резюме)

Поливинильные уреиды могут быть получены присоединением поливинильных карбаматов, с аминовой группой в боковой цепи, к изоцианатам.

Также, был получен поливинильный уреид присоединением ацетокарбамата поливинила, или же ацето—амино—бензоата поливинила к фенил—изоцианату.

Замечено, что при увеличении боковых ветвей, прикреплённых к поливинильной цепи, получаются материалы с большой термопластичностью, которые могли бы служить пластификаторами для высших полимеров.

POLIMERI ANALOGI

Nota II

DERIVAŢI UREICI POLIVINILICI

(Rezumat)

Se pot obţine derivaţi ureici polivinilici prin adiţia carbamaţilor polivinilici cu grupă aminică în catena laterală, la izocianaţi.

De asemenea, s-a obţinut derivat ureic polivinilic prin adiţia aceto-carbamatului de polivinil la izocianat de fenil.

Tot derivat ureic polivinilic s-a obţinut şi prin adiţia aceto-p-amino-benzoatului de polivinil la izocianat de fenil.

S-a constatat că prin creşterea ramificaţiilor laterale, ataşate la catena polivinilică, rezultă materiale cu termoplasticitate mare, care ar putea servi ca plastifianţi pentru polimeri înalţi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

579.574

POLYMÈRES ANALOGUES

Note III

POLYMÈRES VINYLIQUES COLORÉS

PAR

ELENA COCEA, CRISTINETA MĂRCULESCU
et MARIA GRIGORAŞ

Note présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, la 26–29 Juin 1958

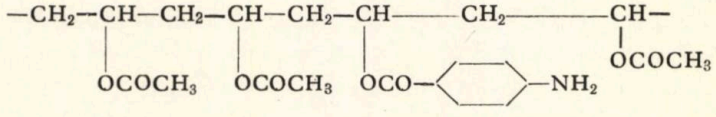
La littérature de spécialité donne quelques indications sur la possibilité de colorer certains polymères vinyliques en dispersant le colorant dans le matériel polymère [3].

De même, on peut obtenir un chloracétale coloré par l'acétalisation de l'alcool polyvinylique avec de l'orto-chlorbenzaldehide et puis en le traitant avec un colorant basique, ayant de l'affinité pour le polymère, par exemple le Chlorazolid Heliosolide 2 RK [4].

Un brevet [5] indique la préparation de l'acétale polyvinylique intermédiaire macromoléculaire pour les colorants, par l'acétalisation de l'alcool polyvinylique avec le m-benzoyle-acétamido-benzaldéhide.

En continuant la série des recherches [1], [2] ayant pour but la modification des groupements fonctionnels attachés à la chaîne polymère, on s'est proposé à préparer des polymères colorés, dont la ramification, fixée à la chaîne polyvinylique, soit le reste d'un colorant.

a) Par la réestérification de l'acétate de polyvinyle avec le p-amino-benzoate d'éthyle, nous avons obtenu un polymère vinylique qui contient sur sa chaîne environ 15% de groupements p-amino-benzoyle, ayant la structure probable:

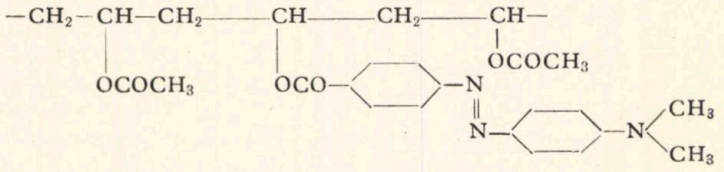


Le produit obtenu (l'acéto-p-aminobenzoate de polyvinyle) est soluble dans l'alcool, dans l'acétone à chaud et peut être facilement précipité par addition d'eau. Après la purification et le séchage, le matériel semble faiblement coloré en jaune, transparent, ayant une bonne adhésivité au verre.

Étant donné la présence des groupements $-NH_2$, attachés à la chaîne polyvinylique, le matériel peut être facilement coloré au moyen de divers colorants organiques.

D'autre part, l'acéto-p-aminobenzoate de polyvinyle peut servir comme produit intermédiaire macromoléculaire pour les polymères colorés. Par la diazotation du groupement aminique et la copulation du sel de diazonium macromoléculaire obtenu, avec divers agents de copulation, on peut préparer des colorants azoïques polyvinyliques de diverses couleurs.

Dans nos essais, ces intermédiaires ont été diazotés et puis copulés avec la diméthyle aniline, en obtenant un polymère coloré, dont la structure probable est la suivante:



c'est l'acéto-p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoate de polyvinyle.

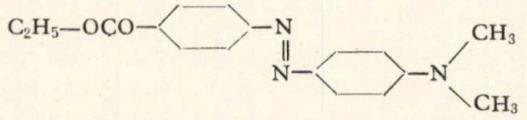
Les données analytiques indiquent que sur la chaîne polyvinylique on trouve environ 7% de motifs de diméthyle-amino-phénile-azobenzoate de vinyle.

Cela suffit pour imprimer au produit une couleur rouge-orange intense. Le polymère est parfaitement transparent; au-dessus de 80...90° il commence à se ramollir, sa couleur est stable, même à chaud.

Le matériel tel qu'il est, permet d'obtenir des articles colorés et peut servir aussi de colorant pour d'autres polymères incolores.

b) Le même polymère coloré nous l'avons préparé aussi, en substituant des groupements acétyles de la chaîne d'acétate de polyvinyle au moyen des groupements p-amino-phénile-azobenzoyle. Cette méthode constitue une voie directe et plus commode de travail, car on évite ainsi les phases intermédiaires, avec toutes les réactions secondaires qui peuvent intervenir habituellement dans la préparation des colorants et qui sont capables d'affecter, dans le cas des polymères, le degré même de polymérisation des chaînes.

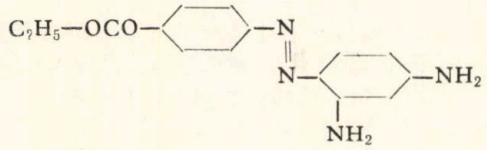
Dans ce but nous sommes partis d'un ester de l'acide p-aminobenzoïque, le p-amino-benzoate d'éthyle, qui par diazotation et copulation avec la diméthyle aniline, en employant la méthode habituelle utilisée dans la technologie des colorants monoazoïques, nous a conduit au p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoate d'éthyle:



Le colorant obtenu est semblable au Jaune B, connu dans la littérature; il a de plus un groupement carboxyle estérifié en position para. Il est très difficilement soluble dans l'eau, facilement soluble dans l'alcool et dans l'acétone. Il peut être cristallisé de la solution alcoolique et acétonique sous forme de paillettes brillantes colorées rouge intense.

Le colorant a le caractère d'indicateur, la solution neutre ou basique est jaune orange ; par acidulation elle passe au rouge-betterave.

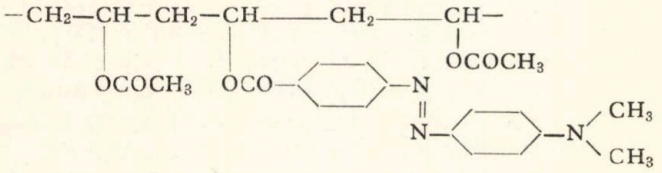
En substituant l'agent de copulation dans la préparation du colorant azoïque avec la m-phénilène diamine, nous avons obtenu le 2'. 4'-diamino-phénile-azo-benzoate d'éthyle :



Le colorant est dérivé de la chrysoïdine, ayant en plus un groupement carboxyle estérifié en position para. Il est insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool et dans l'acétone ; la solution est rouge foncé.

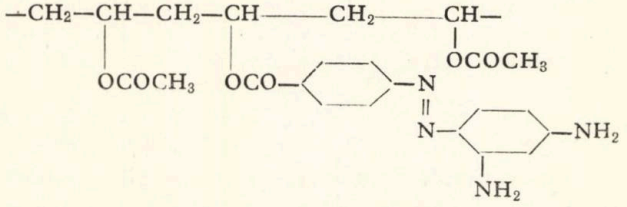
À l'aide de ces esters colorants nous avons réestérifié l'acétate de polyvinyle, substituant en partie les groupements acétyles, soit par des groupements p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoyle, soit par des groupements 2'. 4' — diamino-phénile-azobenzoyle.

Dans le premier cas, en utilisant seulement 0,05 moles d'ester colorant, par rapport au motif vinylique, on a obtenu un polymère coloré en rouge orange, qui selon les données analytiques possède environ 7,2 % de groupements azoïques, esterifiés, sur la chaîne polyvinylique :



Cet ester polyvinylique coloré est parfaitement identique, en ce qui concerne ses propriétés, au polymère coloré, obtenu par diazotation et copulation du p-amino-benzoate de polyvinyle.

Par la réestérification de l'acétate de polyvinyle avec l'ester de l'acide chrysoïdine-4-carbonique, c'est à dire le 2'. 4'—diamino-phénile-azobenzoate d'éthyle, on obtient le polymère coloré respectif, dont la structure pourrait être représentée comme suit :



Le matériel qui en résulte est parfaitement transparent, coloré en rouge-orange, tirant vers le brun, plus foncé que le précédent, sa couleur étant stable avec le temps, même à chaud.

Il en ressort des données analytiques que sur la chaîne polyvinylique, il existe seulement environ 2% de motifs de diamino-phénile-azobenzoate de vinyle, le reste étant formé par des motifs d'acétate de vinyle.

Quoique le nombre des motifs de colorant est petit, le plastique obtenu a une couleur intense.

Cela démontre que pour obtenir un matériel plastique, coloré, de l'acétate de polyvinyle, qui est incolore, il en suffit une très légère modification du polymère initial avec des radicaux convenables, pour que l'effet poursuivi soit atteint.

Ainsi, dans la réaction de réestérification de l'acétate de polyvinyle, nous avons utilisé 0,0056 moles d'ester de l'acide chrysoïdine-4-carbonique, par rapport au motif vinylique, et quand même le plastique obtenu est intensivement coloré.

En augmentant le degré de substitution des groupements acétyles par des groupements de colorant, la couleur du polymère devient plus intense et en même temps d'autres propriétés du matériel peuvent être modifiées.

En variant la constitution du colorant azoïque, employé pour la réestérification de l'acétate de polyvinyle, et en augmentant le degré de substitution, on peut obtenir une large gamme de polymères vinyliques colorés.

Ces matériaux, par leur propriétés, ressemblent aux esters polyvinyliques connus jusqu'à présent dans la technique et peuvent en même temps satisfaire aux exigences de l'esthétique.

Ainsi on peut réaliser plus facilement et d'une manière meilleure la coloration des polymères et copolymères vinyliques, la réaction se prêtant à n'importe quelle chaîne vinylique, qui contient des groupements fonctionnels capables d'être substitués par un radical de colorant azoïque ou d'un autre type.

De plus, les polymères vinyliques colorés obtenus, présentent des propriétés tinctoriales telles qu'ils peuvent être utilisés pour colorer d'autres polymères incolores.

Nous continuerons nos recherches pour étudier encore les propriétés et le comportement des polymères obtenus.

Conclusions

Dans cette Note nous présentons les résultats de nos essais concernant la préparation, par deux méthodes différentes, des polymères vinyliques colorés :

1. On a réestérifié l'acétate de polyvinyle avec le p-aminobenzoate d'éthyle. Le polymère obtenu, diazoté et copulé avec la diméthyle aniline a conduit au colorant polyvinylique — l'acéto-p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoate de polyvinyle.

2. Le même polymère coloré nous l'avons obtenu en réestérifiant, l'acétate de polyvinyle avec l'ester éthylique de l'acide p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoïque.

3. On a préparé encore un polymère vinylique coloré, en réestérifiant l'acétate de polyvinyle avec l'ester éthylique de l'acide chrysoïdine-4-carbonique.

4. On a préparé les agents suivants de réesterification: l'ester éthylique de l'acide p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoïque et l'ester éthylique de l'acide chrysoïdine-4-carbonique.

5. On constate que par la substitution d'un petit nombre de groupements acétyles au moyen d'un reste de colorant, on obtient des matériaux intensivement colorés.

6. Les polymères colorés peuvent être employés tels quels à la fabrication de différents articles, pour satisfaire les demandes de la technique et les exigences de l'esthétique.

7. Ces polymères colorés peuvent servir à teindre d'autres polymères incolores.

8. On peut obtenir des polymères de couleurs variées, en utilisant d'autres types de colorants pour modifier les groupements fonctionnels de la chaîne polyvinylique.

Partie expérimentale

Acéto-p-amino-benzoate de polyvinyle

On soumet à la réestérification une solution glycolique d'acétate de polyvinyle avec le p-amino-benzoate d'éthyle, en utilisant comme catalyseur une petite quantité d'acide phosphorique.

Les réactants ont été employés dans un rapport molaire 1 : 0,5.

La réaction a lieu en agitant continuellement la solution et en la chauffant au bain marie à 75...85°, pendant 5 ... 7 heures.

La solution sirupeuse est tout d'abord incolore, puis elle prend une teinte jaunâtre et en même temps l'acétate d'éthyle commence à se former, ce qui indique la substitution des groupements $-CO-CH_3$ par des groupements p-amino-benzoyle.

Après 2...3 heures d'agitation et de chauffage, le nouveau polymère commence à se séparer du milieu sirupeux, sous forme d'une masse gélatineuse, transparente, jaune, de plus en plus consistante et l'agitation devient encore plus difficile à exécuter.

Le polymère séparé du mélange de solvants est lavé soigneusement à l'eau, puis avec une solution très étendue de NaOH et de nouveau à l'eau jusqu'à un pH neutre.

La masse gélatineuse, purifiée avec de l'eau ou de l'acétone, est séchée à 60...70°. On obtient un matériel transparent, coloré en jaune, rigide au froid, parfaitement adhérent au verre, facilement soluble dans les solvants organiques habituels.

Analyse : N% 1,38,
1,34,
Groupements $-CO-CH_3$ % 85,
Groupements p-aminobenzoyle % 15,7 .

Les données analytiques indiquent que sur la chaîne du polymère on trouve seulement 15,7% de groupements p-amino-benzoyles, le reste étant formé par des groupements acétyles. Il serait possible d'accentuer le déplacement de l'équilibre de réestérification vers la formation du p-amino-benzoate de polyvinyle, en modifiant le rapport des réactants, en variant la quantité de catalyseur et même sa nature.

Le changement du régime de travail peut conduire aux matériaux ayant des propriétés spécifiques, par rapport au degré moyen d'estérification.

Acéto-p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoate de polyvinyle obtenu par diazotation et copulation

On prépare une solution alcoolique, suffisamment diluée, d'acéto-p-amino-benzoate de polyvinyle, acidulée à l'acide acétique et on la soumet à la diazotation avec une solution de NO_2Na, en quantité équivalente aux groupements $-NH_2$ du matériel polymère.

Le milieu de réaction est maintenu sous 0° et on agite continuellement la solution pendant qu'on ajoute goutte à goutte le NO_2Na. Le sel de diazonium du polymère est jaune. Il est copulé avec la diméthyle aniline, selon la méthode habituelle utilisée pour la préparation des colorants azoïques. Après la copulation on obtient un sirop rouge dont le polymère sépare sous forme d'une masse, coagulée, orange, lorsque on y ajoute de l'eau.

Pour purifier le produit, il est nécessaire de le laver plusieurs fois à l'eau pour enlever les traces des réactants non réactionnés, les traces d'acide et les produits secondaires ayant une petite molécule, qui peuvent se former pendant ce temps. Ensuite on fait des solubilisations répétées dans l'alcool et dans l'acétone et des reprécipitations jusqu'à ce que les solutions demeurent incolores après la séparation du polymère. Le polymère est séché à 50...70° jusqu'à ce qu'il devient parafaitement transparent, rouge-orange intense, rigide au froid. Il est soluble dans l'alcool et l'acétone, il commence à se ramollir si on le chauffe au-dessus de 80°. La couleur est stable à chaud, le matériel se prétant à être modelé par compression sans que la couleur soit modifiée.

Il peut colorer d'autre polymères vinyliques incolores. Le mélange de 5...10 p. polymère coloré et 100 p. acétate de polyvinyle, conduit, après une parafaite homogénéisation, à un matériel intensivement coloré.

En variant la quantité de polymère coloré, on peut obtenir une large gamme de nuances.

Analyse :	N% = 0,99,
Groupements p-diméthyle-amino-phénile-azo-benzoyle	% = 7,
Groupements acétyles %	= 90,8.

Un polymère analogue à celui-là peut être préparé directement en partant de l'acétate de polyvinyle et du p-diméthyle-amino-azobenzoate d'éthyle.

À une solution glycolique d'acétate de polyvinyle, acidulée à l'acide phosphorique, on ajoute du p-diméthyle-amino-phénile-azo-benzoate d'éthyle pris en rapport molaire 1 : 0,05.

En chauffant au bain marie et en agitant la solution 3...5 heures, on obtient un produit qui après une bonne purification possède des propriétés semblables au polymère obtenu par diazotation.

Analyse :	N% = 1,03,
Groupements p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoyle	% = 7,2,
Groupements acétyles %	= 92,8.

On obtient l'*acéto-2'. 4'-diamino-phénile-azobenzoate de polyvinyle* en substituant l'agent de réestérification par le 2'. 4'—diamino-phénile-azobenzoate d'éthyle, en rapport molaire 1 : 0,0055, si on maintient les mêmes conditions de travail que dans le cas précédent.

Le polymère purifié est transparent, coloré en orange tirant vers le brun, soluble dans les solvants habituels.

Analyse :	N% = 0,35,
Groupements diamino-phénile-azobenzoyle	% = 1,93,
Groupements acétyles %	= 97,5 .

Pour obtenir les polymères vinyliques colorés par réestérification, on a préparé en préalable des agents de réestérification, c'est à dire des colorants azoïques qui possèdent dans leur molécule le groupement ester nécessaire à la réaction de réestérification.

Dans ce but, on a diazoté le chlorhidrate de p-amino-benzoate d'éthyle, comme d'habitude, et on a copulé le sel de diazonium avec la diméthyle-aniline. Il en résulte une solution rouge foncé dont on peut séparer le colorant en ajoutant de l'acétate de sodium.

Le p-diméthyle-amino-phénile-azobenzoate d'éthyle obtenu, est insoluble dans l'eau, il est soluble dans l'acide acétique dilué, dans l'alcool et l'acétone.

Après la purification, le produit se présente sous forme de paillettes brillantes d'une couleur rouge intense.

Par la copulation du sel de diazonium du p-amino-benzoate d'éthyle avec de la m-phénilène diamine, on obtient le 2′. 4′ —diamino-phénile-azobenzoate d'éthyle, un produit crystallisé, coloré en rouge, plus foncé, soluble dans les solvants organiques.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de la Technologie des Substances Organiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Cocea E., Mărculescu C., Grigoraş M., Ce Bulletin, pp. 153—166.
2. — Ce Bulletin, pp. 167—170.
3. C. I., 1951, p. 3573 (N. P. 76109 du 13/8 1947).
4. C. II., 1950, p. 237 (Schwz. P. 263983 du 7/5 1945).
5. C. II., 1951, p. 1512 (A. P. 2513190 du 18/2 1948).

АНАЛОГИЧНЫЕ ПОЛИМЕРЫ

Заметка III

Цветные винильные полимеры

(Резюме)

Цветные винильные полимеры были приготовлены двумя методами: переэстерификацией ацетата поливинила с этиловым эфиром аминобензойной кислоты был получен полимер, который, диазотированием и сочетанием с диметиламином, привёл к поливиниловому красителю ацето-п-диметиламино-фенил азобензоату поливинила.

Тот же цветной полимер можно получить путём переэстерификации ацетата поливинила этиловым эфиром-п-диметиламино-фенил-азо-бензойной кислоты. Был также приготовлен цветной винильный полимер переэстерификацией ацетата поливинила с этиловым эфиром хризоидин-4-карбоновой кислоты.

Были приготовлены продукты переэстерификации, а именно: этиловый эфир-п′-диметил-амино-фенил-азо-бензойной и хризоидин-4-карбоновой кислот.

Было замечено, что замещением небольшого числа ацетильных групп на остатки красителя, получаются сильно окрашенные материалы.

Полученные цветные полимеры могут быть использованы как таковые для изготовления различных предметов, удовлетворяющих требованиям техники и эстетики, а также могут служить для окрашивания других бесцветных полимеров.

Получение окрашенных полимеров путём изменения функциональных групп можно осуществлять и другими видами красителей.

POLIMERI ANALOGI

Nota III

POLIMERI VINILICI COLORAŢI

(Rezumat)

S-au preparat polimeri vinilici coloraţi prin două metode. Prin reesterificarea acetatului de polivinil cu p-aminobenzoatul de etil s-a obţinut un polimer care, diazotat şi cuplat cu dimetilanilină, a condus la colorantul polivinilic aceto-p-dimetilamino-fenil-azobenzoat de polivinil.

Acelaşi polimer colorat se poate obţine reesterificînd acetàtul de polivinil cu esterul etilic al acidului p'-dimetil-amino-fenil-azo-benzoic.

S-a preparat de asemenea un polimer vinilic colorat, reesterificînd acetatul de polivinil cu esterul etilic al acidului crisoidin-4-carbonic.

S-au preparat produsele de reesterificare şi anume: esterul etilic al acidului p'-dimetil-amino-fenil-azo-benzoic şi esterul etilic al acidului crisoidin-4-carbonic.

Se constată că prin substituţia unui număr mic de grupe acetil cu rest de colorant, se obţin materiale intens colorate.

Polimerii coloraţi obţinuţi, se pot folosi ca atare pentru fabricarea diferitelor articole ce satisfac cerinţele tehnicii şi cele estetice şi pot servi de asemenea pentru colorarea altor polimeri incolori.

Obţinerea de polimeri coloraţi, prin modificarea grupelor funcţionale se poate face şi cu alte tipuri de coloranţi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

546.431

ÎMBOGĂŢIREA BARITINEI INDIGENE PRIN FLOTAŢIE

DE

C. BRANIŞTE, OREST NICHITA şi SILVIA ŞERBAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

Într-o lucrare anterioară, M. Savul [1] a studiat valorificarea baritinei indigene din regiunea Somova (Dobrogea), pentru obţinerea litoponului, care se prepară la noi în ţară, numai din baritina din import. În lucrarea citată s-au stabilit condiţiile optime de reducere a baritinei la BaS, în funcţie de natura şi proporţiile reducătorului, cît şi de temperatura şi timpul de reducere.

Ulterior, C. Branişte [2] a studiat procesele de reducere a baritinei cu alţi reducători decît în [1] şi a trecut la prepararea sărurilor de bariu ($BaCl_2$) din sulfura de bariu obţinută.

În 1957, V. Ianovici [3] stabileşte pentru baritina de la Somova zăcăminte de geneze diferite, cu procente variate de $BaSO_4$ şi anume:

1. Zăcămintele filoniene de baritină de la Cîşla unde predomină depuneri de baritină de natură hidrotermală, apărînd în parageneză, cu cuarţ şi fluorină şi mai puţină baritină prin substituire metasomatică în calcare.

2. Zăcămintele de baritină de la Dealul Cortel, unde predomină zăcăminte de natură metasomatică iar baritina apare în parageneză, cu masele de calcar.

Din profilele 1, 2 şi 3, indicate în [3], se constată că zăcămîntul de la Somova conţine corpuri importante de baritină şi de calcare intens şi slab baritizate.

Prin faptul că în ambele zăcăminte se găseşte baritină cu procente scăzute de $BaSO_4$, care nu rentează a fi supuse procesului de reducere, ne-am propus, ca o parte din aceste baritine (50...60% $BaSO_4$) să le îmbogăţim prin flotaţie.

Baritina luată în studiu aparţine complexului filonian de la Cîşla şi corpului de baritină din Dealul Cortel.

Baritina de la Cîşla, este de culoare albă, rareori de culoare gri şi conţine cristali mari de $BaSO_4$, pînă la cîţiva cm lungime. Parageneza cu cuarţul şi fluorina este destul de complexă, după cum se menţionează în [3]. Mai evident apar filonaşe de granule de cuarţ de formaţie secundară, care traversează, sau înconjoară cristalele mari de baritină (fig. 1–planşa).

Baritina de la Cîşla supusă analizei chimice corespunde compoziţiei de mai jos:

$BaSO_4$	74,05%
$CaSO_4.2H_2O$	0,39%
$CaCO_3$	14,51%
$MgCO_3$	9,38%
R_2O_3	0,45%
SiO_2	1,25%
	100,03%

Baritina de la Dealul Cortel, apare de culoare cenuşie sau de culoare rozie şi conţine baritină în parageneză cu mase de calcar.

În secţiunea microscopică cristalele de baritină apar uneori cu o dispoziţie radială (fig. 2-planşa), iar uneori sub formă de baghete mari, alături de cristali de calcită (fig. 3-planşa), sau sub formă de baghete mici, prinse în mase de calcită (fig. 4-planşa).

La analiza chimică, baritina de la Dealul Cortel corespunde compoziţiei de mai jos:

$BaSO_4$	59,65%
$CaCO_3$	22,78%
$MgCO_3$	14,90%
R_2O_3	0,73%
SiO_2	1,64%
$CaSO_4.2H_2O$	0,49%
	100,18%

Cercetările noastre au fost îndreptate asupra baritinei din Dealul Cortel, cu procentul mediu de 59,65% $BaSO_4$ pentru a fi îmbogăţită prin flotaţie.

Flotaţia constituie procedeul de separare a mineralelor utile, prin adeziunea selectivă a particulelor minerale la suprafaţa a două faze [4], [5].

Flotaţia poate fi de ulei, de peliculă şi de spumă; ultima are un caracter universal, fiind cea mai economică.

Mediul de flotaţie este format din trei faze: faza solidă — minereul, faza lichidă — apa şi faza gazoasă — aerul.

În flotaţie, factorul fizico-chimic de bază, îl constituie umectarea suprafeţei particulelor de minereu, cu apă. Umectarea este fenomenul ce se produce, la limita de separare a celor trei faze.

Prin adăugarea de reactivi de flotaţie, un mineral poate deveni din hidrofil, hidrofob; această schimbare se explică, prin aceea că moleculele de reactivi, se adsorb pe particulele de minereu hidrofil şi apa orientează grupele polare ale stratului adsorbant către suprafaţa minereului, iar radicalii hidrocarbonaţi (apolari) către mediul înconjurător şi în felul acesta particulele din hidrofile devin hidrofobe (deci flotabile).

Baritina este formată din componenţi hidrofili şi pentru a avea loc o flotaţie selectivă — cu scopul de a separa $BaSO_4$ de dolomit şi de restul de gangă — în încercările noastre, am folosit diverşi reactivi ca: săpunul de reziduu de petrol, crezol, fosfocrezoli, flotanol, silicatul de sodiu, acidul citric şi sulfatul de aluminiu. Reactivii folosiţi au fost aduşi în soluţie de concentraţie 20‰.

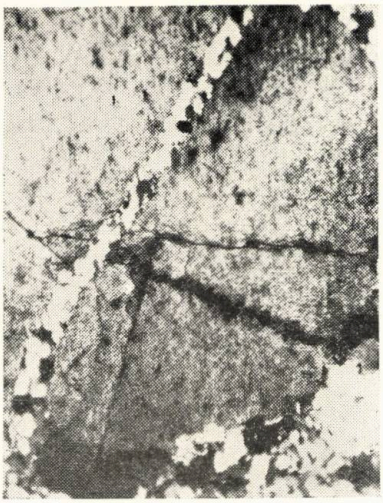


Fig. 1

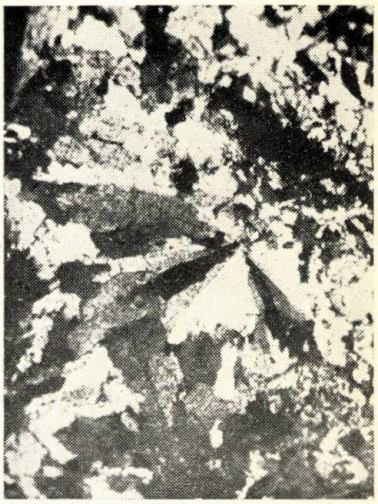


Fig. 2

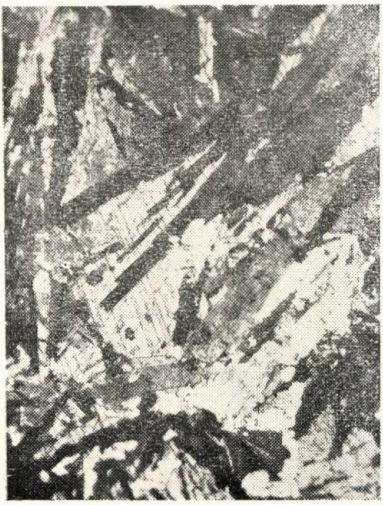


Fig. 3

Fig. 4

PLANŞA I

Folosindu-se săpunul de reziduu de petrol, silicatul de sodiu cu adaos de sulfat de aluminiu și flotanul, nu s-a obținut o îmbogățire a baritinei în $BaSO_4$, mai mare de 83...84% iar cantitatea de baritină flotată, nu a depășit un procent mai mare de 28...30%, fapt ce ne-a determinat să renunțăm la adaosul menționat.

Îmbogățirea baritinei s-a făcut atît în mediu bazic (pH=8 cît și în mediu acid (pH = 3...5); rezultate mai bune s-au obținut în mediu bazic.

Partea experimentală

Încercările de îmbogățire a baritinei s-au făcut cu aparatul reprezentat în fig. 5. Aparatul este o celulă de flotație, tip laborator, care se

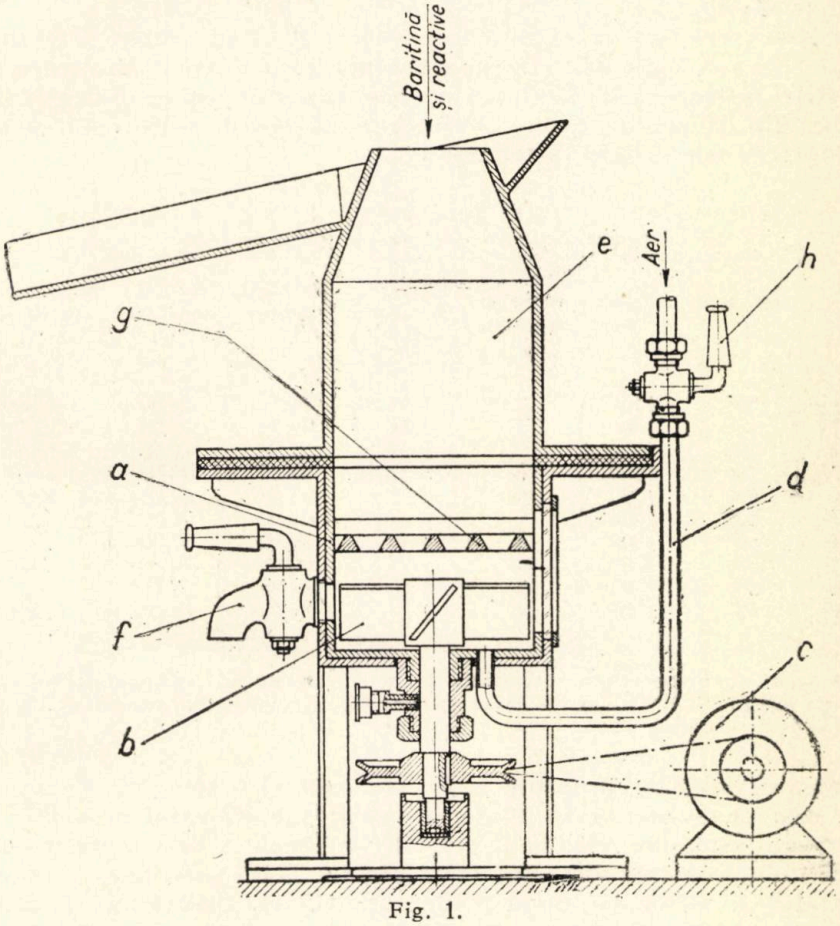


Fig. 1.

compune dintr-o cuvă de agitare *a* prevăzută cu un agitator cu palete *b* ce este acționat de un motor electric *c*. Motorul electric are o turație de 2800 rot/minut și a fost adus la 700 rot/minut.

În cuva de agitare, prin conducta *d*, se introduce aer cu o viteză

de 7 l/minut. Spuma formată se ridică în camera de spumă *e* şi prin jghiabul ei este dirijată către vasul colector. Partea neflotată se elimină prin robinetul *f*.

Metoda de lucru. Baritina cîntărită este adusă sub forma de emulsie în apă: 500 g baritină şi 1500 g apă.

Suspensia de baritină în apă, se introduce în aparat prin partea superioară, după aceea se adaugă şi reactivii. Înainte de a se introduce baritina şi reactivii, aparatul se pune în funcţiune, pentru a se evita înfundarea conductei de aer.

Spuma formată este culeasă într-un vas de laborator şi este supusă analizei chimice, pentru a determina randamentul de îmbogăţire a baritinei în $BaSO_4$.

Partea neflotată se extrage din aparat şi după aceea, prin spălări repetate cu apă, aparatul este pregătit pentru a doua determinare.

Date experimentale. Pentru a stabili raportul optim dintre reactivi (săpunul din reziduu de petrol şi silicatul de sodiu) s-au făcut probele obţinînd rezultatele date în tabelul 1.

Tabelul 1

Variaţia cantităţii de săpun şi silicat de sodiu

Probe	Baritina g	Apa g	Săpun din reziduu de petrol g	Silicat de sodiu g	Baritina flotată %	Baritina neflotată %	Randamentul în $BaSO_4$ %
I	500	1500	1	1	70,40	29,60	80,20
II	500	1500	1	1,5	64,20	35,80	82,20
III	500	1500	1	2	57,00	43,00	83,00
IV	500	1500	1	3	50,40	49,60	86,70
V	500	1500	1	4	33,00	67,00	88,03
VI	500	1500	1	5	24,00	76,00	90,01
VII	500	1500	2	1	89,00	11,00	75,00
VIII	500	1500	3	1	90,00	10,00	74,00
IX	500	1500	4	1	93,00	7,00	74,50
X	500	1500	5	1	94,00	6,00	73,50

S-au menţinut constante: cantitatea de baritină luată în lucru, cantitatea de apă, granulaţia baritinei (ø = 0,2 mm), temperatura (18...20°), pH-ul suspensiei (7...8) şi viteza aerului (7 l/minut).

Din examinarea probelor I...IV din tabelul 1 se pune în evidenţă că pe măsură ce mărim cantitatea de depresor (silicatul de sodiu) faţă de spumant (săpun de reziduu de petrol), randamentul $BaSO_4$ creşte (90%), însă cantitatea de baritină flotată descreşte (24%). Aceasta dovedeşte că silicatul de sodiu, pe lîngă dolomit şi calcită, depresează şi o parte din $BaSO_4$; or, în flotaţie se urmăreşte ca cel puţin jumătate din minereu să floteze (în cazul nostru raportul optim dintre spumant şi depresor este 1:3).

Pentru a se vedea ce fenomen are loc în cazul cînd mărim cantitatea de spumant faţă de depresor s-au făcut probele VII...X. În acest

caz cantitatea de baritină flotată, crește pe măsură ce se adaugă cantități de spumant mai mari, însă randamentul în $BaSO_4$ scade. Aceasta se explică prin faptul că spumantul fiind mărit față de depresor nu mai poate avea loc o flotație selectivă. Spuma antrenează toți componenții baritinei.

Din datele din tabelul 1 se deduce că silicatul de sodiu este un bun depresor pentru dolomit și calcită, de aceea în probele ce urmează s-a menținut același depresor și spumant, iar ca adaos s-a folosit crezolul. Datele obținute sînt cuprinse în tabelul 2.

Tabelul 2

Probe	Baritină g	Apă g	Săpun din reziduu din petrol g	Crezol g	Silicat de sodiu g	Baritina flotată %	Baritina neflotată %	Randament în $BaSO_4$ %
I	500	1500	1	0,4	1	60	40	80,20
II	500	1500	1	0,4	2	53	47	82.50
III	500	1500	1	0,4	3	50,20	49,80	87,70
IV	500	1500	1	0,4	4	30	70	89,50
V	500	1500	1	1	1	65	35	82,07
VI	500	1500	1	1	2	58	42	87,40
VII	500	1500	1	1	3	52	48	91,4
VIII	500	1500	1	1	4	40	60	91,8
IX	500	1500	1	5	—	94	6	78,60

S-a menținut constant săpunul din reziduul de petrol și s-a variat cantitatea de crezol și silicat de sodiu ; condițiile de lucru sînt aceleași ca cele specificate în tabelul 1.

Probele I...IV din tabelul 2, la care s-a menținut constantă cantitatea de săpun și crezol, variindu-se silicatul de sodiu (1...4 g) ne arată că cantitatea de crezol este insuficientă pentru a fi adsorbită pe suprafețele de separare ale particulelor de minereu, la limita de separare mineral — apă, ca să le dea acestor particule proprietăți hidrofobe. Aceasta se confirmă prin faptul că baritina flotată și cea neflotată precum și randamentul în $BaSO_4$ sînt aproape aceleași ca și în tabelul 1 (vezi probele I...IV). La probele V...VIII s-a mărit cantitatea de crezol la 1 g. În acest caz se remarcă o creștere a baritinei flotate față de primele probe din tabelul 2, ceea ce ne indică că raportul dintre săpun și crezol este preferabil să fie 1 : 1, în condițiile noastre de lucru ; randamentul în $BaSO_4$ este de asemenea ceva mai ridicat față de primele probe.

Dacă raportul dintre săpun și crezol este de 1 : 5 fără a se întrebuința depresor, baritina flotează în procent de 94% iar randamentul în $BaSO_4$ scade la 78,60%. Rezultatul probei IX ne confirmă că crezolul are rolul de spumant.

Datele din tabelele 1 și 2 s-au obținut în mediu de flotație alcalin, randamentul în $BaSO_4$ fiind cuprins între 88...90%. Pentru a vedea dacă în mediu acid se obțin randamente în $BaSO_4$ mai ridicate, s-a trecut

la o serie de determinări, în care silicatul de sodiu a fost înlocuit cu acidul citric. Rezultatele obţinute sînt date în tabelul 3.

Tabelul 3

Probe	Baritină g	Apă g	Săpun din reziduu de petrol g	Crezol g	Acid citric g	Baritina flotată %	Baritină neflotată %	Randamcnt în $BaSO_4$ %
I	500	1500	1	1	0,4	43	57	86,80
II	500	1500	1	2	0,4	42	56	87,06
III	500	1500	1	3	0,4	52	48	87,00

S-a menţinut constantă cantitatea de săpun şi acid citric şi s-a variat cantitatea de crezol.

Condiţiile de lucru au fost aceleaşi ca şi cele specificate în tabelul 1, cu excepţia pH = 3...5.

Din tabelul 3 se constată că randamentuf în $BaSO_4$ este mai scăzut în mediu acid faţă de mediul alcalin şi dacă mărim cantitatea de crezol, baritina flotată creşte. Se confirmă că, într-adevăr, crezolul are rolul de spumant.

S-au făcut probe în care s-a menţinut constantă cantitatea de săpun şi crezol şi s-a variat cantitatea de acid citric, condiţiile de lucru fiind aceleaşi ca cele specificate în tabelul 3. Rezultatele probelor sînt date în tabelul 4.

Tabelul 4

Probe	Baritina g	Apa g	Săpun din reziduu de petrol g	Crezol g	Acid citric g	Baritina flotată %	Baritina neflotată %	Randament în $BaSO_4$ %
I	500	1500	1	0,4	0,4	46	54	85,7
II	500	1500	1	0,4	0,6	44	56	86,1
III	500	1500	1	0,4	1,2	36	64	86,4
IV	500	1500	1	0,4	1,6	36	64	86,4

În cazul cînd se lucrează cu acid citric, silicatul de sodiu nu are nici o influenţă, deaceea în încercările ale căror rezultate sînt date în tabelul 4 s-a folosit ca depresor şi regulator al mediului, acidul citric. Datele obţinute, ne arată că pe măsură ce creşte cantitatea de acid citric, baritina flotată descreşte, ceea ce, confirmă faptul că acidul citric lucrează ca depresor, iar randamentul în $BaSO_4$ creşte foarte puţin şi la o mărire a cantităţii de acid citric tinde să rămînă constant; deci raportul optim între spumant şi depresor (acid citric) este 1 : 1,2.

Pentru a vedea dacă temperatura influenţează asupra randamentului în $BaSO_4$, s-au efectuat cîteva determinări cu proba VII din tabelul 2

la temperaturile de 30°, 40°, 50° și 60°C și s-a obținut un randament mai ridicat (93,22%) la temperatura de 50...60°C. Totuși, pe scară industrială, credem că s-ar putea mai greu realiza o flotație la temperaturi ridicate.

În regiunea Somova, pe lîngă baritina cu 60% $BaSO_4$ și 74% $BaSO_4$ se găsesc zăcăminte cu un procent destul de scăzut în $BaSO_4$ (20%). În încercările noastre pentru îmbogățirea baritinei cu 20% $BaSO_4$, nu am obținut o îmbunătățire mai mare de 36% $BaSO_4$.

Concluzii

1. Separarea minereurilor prin procedeul flotației a ajuns la un stadiu destul de avansat, prin faptul că astăzi se aplică pe cale industrială la separarea mineralelor de gangă, atît a celor hidrofobe cît și a celor hidrofile, cu ajutorul reactivilor de flotație.

2. Prin numeroase încercări cu raactivi diferiți, am reușit să găsim reactivii cei mai proprii pentru a îmbogăți baritina de la 60% $BaSO_4$ pînă la 91,4% $BaSO_4$, precum și raportul optim dintre acești reactivi.

3. Prin aplicarea rețetei stabilite (săpun din reziduu de petrol 2kg/t, crezol 2 kg/t și silicat de sodiu 6 kg/t) se vor putea valorifica importante zăcăminte de baritină indigenă de la Somova — Dobrogea.

Cu această rețetă s-au făcut determinări la temperaturi variind între 20°...70°C din 10°C în 10°C și s-a obținut o îmbogățire a baritinei pînă la 93,25% $BaSO_4$, la 60°C.

5. În continuare vom încerca să stabilim condițiile de flotație și pentru baritina cu un procent scăzut de $BaSO_4$ (20%) deoarece cu rețeta amintită nu am obținut rezultate satisfăcătoare.

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Tehnologia Produselor Anorganice,
Laboratorul de Industrii Electrochimice și Coroziune

BIBLIOGRAFIE

1. Savul M,. Ababi V., Branişte C. şi Idriceanu Tr., St. şi Cerc. şt., Acad. R.P.R., Filiala Iaşi, 1953, 4, *1—4*, pp. 197—212.
2. Branişte C., *Valorificarea baritinei indigene pentru prepararea sărurilor de bariu.* Disertaţie, Inst. Politehnic Iaşi, 1955.
3. Ianovici V. Giuşcă D., Steopol V. şi Bacalu V., An. Univ. „C. I. Parhon", Buc., 1957, *15*, pp. 149-160.
4. Petersen W., *La Flottation*, Ed. Dunod, Paris, 1938.
5. Fişman M. A., *Tehnologia substanţelor minerale utile*, Ed. Tehn., Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
6. Саградян А. Л., Контроль технологического процесса флотационных фабрик, 1954, М., Метааургиздат,

ФЛОТАЦИОННОЕ ОБОГАЩЕНИЕ МЕСТНОГО БАРИТА

(Резюме)

Рассматриваются возможности обогащения барита из Дялул Кортел (Добруджа), содержащего в среднем 59,65% $BaSO_4$ и заключается следующее :

1. Реактивами—минеральное мыло (2кг/тона), крезол (2кг/т) и натриевый силикат (6кг/т)— барит был обогащен от 59,65% до 91,40%.

2, По этому же рецепту, но при более повышенной температуре (60°Ц) содержание $BaSO_4$ было доведено до 93,25%.

3. Обогащение барита бедного в $BaSO_4$ (20%) не дало удовлетворительных результатов.

ENRICHISSEMENT DE LA BARITINE INDIGÈNE PAR FLOTATION

(Résumé)

Les Auteurs étudient les possibilités d'enrichissement de la baritine de Dealul Cortel (Dobroudja), ayant un contenu moyen en $BaSO_4$ de 59,65%. Ils aboutissent aux conclusions suivantes:

1. En utilisant la recette ci-dessous: savon du résidu de pétrole (2 kg/tone), crésol (2 kg/tone) et silicate de natrium (6 kg/tone), on a réussi à enrichir le contenu en $BaSO_4$, de la baritine, de 59,65% jusqu'a 91,40%.

2. À l'aide de la même recette, mais à une temperature plus élevée (60°C), on a majoré le contenu en $BaSO_4$ jusqu' à 93,25%.

3. Les tentatives d'enrichissemeut, à l'aide de la même recette, d'une baritine ayant un contenu réduit en $BaSO_4$ (20%), n'ont pas donné des résultats satisfaisants.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

541.135

CINETICA DESCOMPUNERII CHIMICE A AMALGAMULUI DE SODIU

DE

C. CALISTRU, RADU VASILIU şi CORNELIA LEONTE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 28–29 iunie 1958

1. Introducere

Procesul descompunerii amalgamului alcalin şi alcalinoteros, important din punct de vedere teoretic şi practic, a fost studiat de un mare număr de cercetători [1], [2]. W. Frenkel şi H. Heinz [3], A. Klein [4], W. Frenkel, E. Weingeln şi L. Cahen [5], F. Fletsher şi M. Kilpatrik [6] tratează descompunerea amalgamului în soluţii apoase, din punct de vedere al cineticii formale. S. I. Skliarenko şi B. A. Sahorov [7] leagă viteza descompunerii amalgamului de mărimea razei ionului metalului alcalin solvit în mercur. J. Brönsted şi N. Kane [8] tratează descompunerea amalgamului din punct de vedere al funcţiei acido-bazice a sistemului. Ei au stabilit că viteza de descompunere a amalgamului diluat în soluţii acide este funcţie liniară de rădăcina patrată a concentraţiei amalgamului:

$$-\frac{d\,[\mathrm{Na}]}{d\tau} = K\,[\mathrm{Na}]^{1/2}. \tag{1}$$

A. N. Frumkin [9], în 1932, a propus tratarea descompunerii amalgamului în soluţie apoasă ca proces electrochimic care se petrece la suprafaţa de separare a celor două faze lichide. La un punct de vedere analog ajung L. Hammet şi A. Lorch [10] precum şi C. Wagner şi W. Traud [11].

Sînt puţine lucrări consacrate verificării experimentale a teoriei electrochimice a descompunerii amalgamului. Z. A. Jofa şi Z. B. Pecikovskaia [2] şi O. L. Kaptan şi Z. A. Jofa [1] studiază amănunţit teoria electrochimică a descompunerii amalgamului şi verifică experimental concluziile ei în cazul descompunerii amalgamului de sodiu, potasiu, litiu, calciu, în soluţiile hidroxizilor lor.

În conformitate cu teoria electrochimică, procesul descompunerii amalgamului de sodiu în soluţia hidroxidului său constă din două reacţii simultane. Reacţia de ionizare a sodiului care se efectuează după ecuaţia

$$\mathrm{Na} \rightleftharpoons \mathrm{Na}^{+} + e \tag{2}$$

şi reacţia de degajare a hidrogenului din molecula apei:

$$\mathrm{H_2O} + e = \mathrm{OH}^{-} + \mathrm{H}_{\text{absorbit}}. \tag{3}$$

Cele două reacţii au loc la acelaşi potenţial şi anume, potenţialul descompunerii amalgamului, apropiat de potenţialul reversibil al electrodului de amalgam. Reacţia de degajare a hidrogenului nu influenţează potenţialul la care au loc reacţiile. Viteza procesului chimic de descompunere este limitată numai de reacţia de degajare a hidrogenului, legată de supratensiunea mare a hidrogenului la mercur, respectiv amalgame diluate.

Potenţialul reversibil al electrodului de amalgam de sodiu este:

$$E_{amalg} = E^0_{amalg} + \frac{RT}{F} \ln \frac{C_{Na^+} \cdot f_{Na^+}}{C_{Na} \cdot f_{Na}}, \tag{4}$$

în care E^0_{amalg} — potenţialul normal al electrodului de amalgam de sodiu, C_{Na^+}, C_{Na} — concentraţiile ionului de sodiu în soluţie şi a solidului în amalgam, f_{Na^+}, f_{Na} — coeficienţii respectivi de activitate.

Relaţia care indică dependenţa potenţialului de electrod de densitatea de curent şi de compoziţia soluţiei este:

$$E = A'_{alc} + \frac{RT}{F} \ln C_{Na^+} - \frac{2RT}{F} \ln i \tag{5}$$

în care

$$A'_{alc} = A_{alc} + \psi^0_1 \tag{6}$$

unde A_{alc} — constantă, ψ^0_1 — potenţialul de difuzie la stratul dublu, prin extrapolarea concentraţiei electrolitului pînă la unitate, i — densitatea de curent.

Pe baza relaţiilor (5) şi (6) s-a stabilit ecuaţia cinetică a descompunerii amalgamului în soluţii alcaline, pe unitatea de suprafaţă:

$$K' \tau = 2 V_{amalg} (f_{Na^+} / f_{Na})^{1/2} (C_i^{1/2} - C_f^{1/2}) \tag{7}$$

în care

$$K' = \frac{1}{F} \exp\left[\frac{F}{2RT} (A_{alc} - E^0_{amalg})\right],$$

unde V_{amalg} — volumul amalgamului luat în lucru, C_i, C_f — concentraţia iniţială şi finală a amalgamului de sodiu.

Verificînd această ecuaţie la descompunerea amalgamului de sodiu diluat în apă pură, Z. A. Jofa şi Z. B. Pecikovskaia [2] găsesc că acest proces se supune ecuaţiei (6). Autorii citaţi determină mersul descompunerii prin schimbarea concentraţiei hidroxidului de sodiu, constatată prin măsurarea conductibilităţii electrice a soluţiei şi stabilesc că dependenţa liniară se păstrează numai într-o anumită perioadă a procesului. O. L. Kapţan şi Z. A. Jofa [1], verificînd ecuaţia (7) la descompunerea amalgamului de potasiu, litiu şi calciu, stabilesc că descompunerea acestor amalgame se supune ecuaţiei menţionate şi că valoarea practică a constantei vitezei de descompunere a amalgamului este apropiată de cea teoretică. Ei măsoară viteza descompunerii amalgamului după cantitatea de hidrogen degajată în unitatea de timp şi găsesc de asemenea abateri de la dependenţa liniară, la începutul şi sfîrşitul procesului.

Abaterile iniţiale sînt explicate [1] ca fiind rezultatul descompunerii mai rapide a amalgamului, care se desface în picături la turnarea în aparat, iar cele finale [1], [2] ca rezultat al impurificării suprafeţei amalgamului, care micşorează supratensiunea hidrogenului şi ca urmare determină creşterea vitezei de descompunere.

C. Calistru, A. Popovici, C. Leonte şi M. Herşcovici [12] studiind mecanismul descompunerii amalgamului de sodiu în apă, stabilesc experimental că viteza descompunerii capătă valori care la un anumit moment al desfăşurării procesului se modifică brusc. Aceste date ar apare în discordanţă cu ecuaţia cinetică stabilită pe

baza teoriei electrochimice şi impun o verificare mai amănunţită a cineticii descompunerii amalgamului de sodiu.

Autorii îşi propun să efectueze o verificare detaliată a domeniilor de aplicabilitate a ecuaţiei cinetice menţionate, în cazul descompunerii amalgamului de sodiu în apă pură, soluţii cu impurităţi şi la diferite temperaturi. De asemenea pentru a putea folosi ecuaţia cinetică în proiectarea şi deservirea electrolizorului industrial, din instalaţiile de obţinere a clorului şi hidroxidului de sodiu după metoda cu catodă de mercur, se verifică ecuaţia cinetică şi pentru cazul descompunerii amalgamului de sodiu în saramură saturată cu clor.

O. L. Kaptan şi Z. A. Iofa [1] stabilesc teoretic influenţa substanţelor superficial active asupra vitezei de descompunere a amalgamelor. Ei verifică experimental concluziile teoretice numai în cazul descompunerii amalgamului de potasiu în prezenţa sulfatului de tetrabutilamoniu. De aceea, în cele ce urmează, ne propunem să studiem influenţa unui număr de substanţe superficial active asupra descompunerii amalgamului de sodiu.

În comunicarea de faţă se verifică detaliat ecuaţia cinetică în cazul descompunerii amalgamului de sodiu în apă pură, se studiază experimental dependenţa constantei vitezei de reacţie, de temperatură şi influenţa unor substanţe superficial actived in grupa aminelor, asupra vitezei de descompunere.

2. Partea experimentală

Viteza de descompunere a amalgamului a fost determinată prin măsurarea cantităţii de hidrogen degajată în unitate de timp. Totodată s-a măsurat şi variaţia f. e. m. a pilei:

$$NaHg\left(\begin{array}{c}\text{soluţie diluată}\\ \text{de NaOH saturată cu } H_2\end{array}\right)Pt.$$

Concentraţia în Na a amalgamului s-a determinat prin descompunere cu HCl, 0,1 *n* şi retitrare cu NaOH, 0,1 *n*, în prezenţa metil-orange-ului.

Dispozitivul pentru descompunerea amalgamului, indicat în fig. 1, se compune dintr-un balon *B*, prevăzut cu două tubuluri laterale. Prin tubulura *T*, închisă la capăt cu dop rodat, se introduce amalgamul în balon. Tubulura *E* este pusă în legătură printr-un tub de cauciuc cu o biuretă gradată şi serveşte la măsurarea volumului de hidrogen degajat prin descompunerea amalgamului. Prin dopul de cauciuc *C* străbate un tub de sticlă *A*, prevăzut cu două contacte de platină, unul la capătul tubului iar altul la cca 5 cm de capăt, care fac contactul electric respectiv cu amalgamul şi cu soluţia. Acelaşi tub serveşte şi ca agitator pentru amalgam, fiind pus în mişcare cu ajutorul unui excentric fixat pe axul motorului electric *M*. Prin lovirea tubului de către excentric, tubul este pus în vibraţie, pe care o transmite şi amalgamului.

Pentru etanşarea sistemului, tubulura laterală *E* şi cea centrală sînt prevăzute cu închideri cu mercur. Tot sistemul este introdus într-

un vas cu apă, menţinută la temperatura de lucru cu o abatere de ± 0,2°, cu ajutorul unui ultratermostat.

În balonul *B* se introduc 400 cc de apă bidistilată, prin care s-a barbotat hidrogen produs pe cale electrolitică, purificat şi uscat, încît apa să fie saturată împiedicînd astfel solvirea hidrogenului provenit din descompunerea amalgamului. După ce apa a căpătat temperatura de lucru, se introduc prin tubulura laterală 2 cc amalgam, dintr-un vas *Am* special construit, care permite păstrarea şi măsurarea amalgamului în atmosferă de hidrogen, evitîndu-se astfel oxidarea.

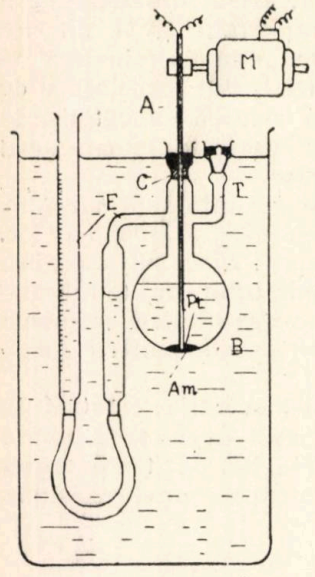


Fig. 1

Înainte de introducerea în vas, amalgamul este încălzit la temperatura la care se face determinarea, pentru a nu da loc la variaţii de volum datorită contractării sau dilatării amalgamului. După introducerea amalgamului, se închide tubulura *T*, acoperind dopul cu mercur. Din momentul introducerii amalgamului se cronometrează timpul, se măsoară volumul de H_2 degajat şi se face înregistrarea f. e. m. a elementului

Pt / sol. NaOH / amalgam.

Forţa electromotoare a elementului a fost măsurată cu ajutorul unui voltmetru electronic, a cărui schemă este indicată în fig. 2, care reprezintă schema de ansamblu a dispozitivului de măsură.

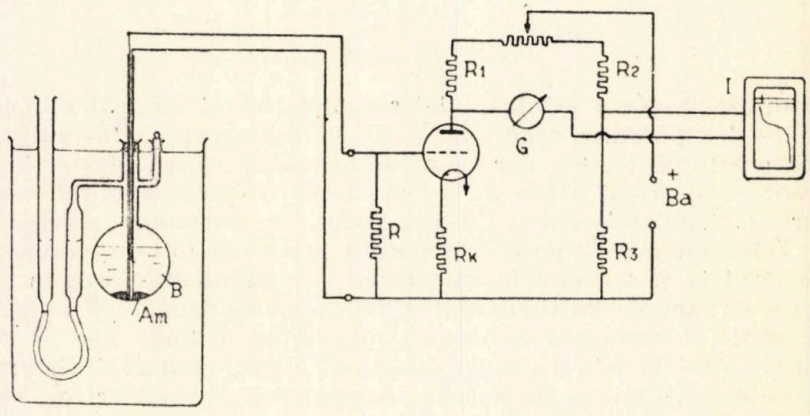


Fig. 2.

Dispozitivul este prevăzut cu un sistem de înregistrare mecanică *I*, a curbei potenţialului.

Întrucît reproductibilitatea determinărilor se realizează cu foarte mare greutate, datorită marei sensibilităţi a procesului de descompunere faţă de impurităţi, am folosit pentru determinări, mercur purificat prin degresare, spălare şi bidistilare. Prepararea amalgamului s-a făcut electrolitic, utilizînd NaCl chimic pură şi anod de grafit separat de spaţiul catodic prin diafragmă de sticlă poroasă. Separarea amalgamului se face sub tensiune, direct din vasul de electroliză în vasul de păstrare cu atmosferă de hidrogen.

3. Rezultate experimentale

Pentru verificarea, în cazul descompunerii amalgamului de sodiu, a ecuaţiei cinetice (7) s-au efectuat un număr mare de determinări; parte din rezultate sînt indicate în tabelul 1 şi fig. 3.

Tabelul 1

Curba 1 [1]		Curba 2 [1]		Curba 3 [1]		Curba 4 [1]	
τ	C_f	τ	C_f	τ	C_f	τ	C_f
0	0,397	0	0,561	0	0,669	0	0,803
15	0,391	15	0,558	18	0,652	12	0,798
60	0,375	90	0,523	36	0,646	30	0,794
90	0,364	135	0,496	50	0,643	75	0,786
120	0,352	165	0,481	60	0,636	150	0,761
135	0,347	210	0,464	72	0,628	360	0,658
150	0,346	270	0,456	84	0,612	390	0,658
165	0,341	390	0,450	96	0,597	445	0,644

Din fig. 3 (v. planşa) se constată că punctele experimentale se situează pe o dreaptă, cu excepţia celor iniţiale şi finale. Rezultatele coincid cu cele stabilite de Z. A. Iofa şi Z. B. Pecikovskaia [2].

Constanta vitezei de reacţie a fost calculată din pantele dreptelor din fig. 3 cît şi din ecuaţia (7). Molalitatea soluţiei de hidroxid de sodiu, rezultată în urma descompunerii, fiind de ordinul 0,01, coeficientul de activitate al ionului de sodiu s-a luat dintr-un tabel al coeficienţilor de activitate a ionilor pentru diferite tării ionice ale soluţiei [13].

În tabelul 2 sînt indicate valorile constantei vitezei de reacţie, calculate din pantele dreptelor şi din ecuaţia cinetică.

Se constată că valoarea constantei este aproximativ aceeaşi pentru diferite concentraţii iniţiale ale amalgamului. În cazul curbei 1, deşi concentraţia hidroxidului de sodiu este mai mare, valoarea constantei este mai mică. O abatere analoagă de la ecuaţia cinetică a fost constatată [1] în cazul amalgamului de potasiu.

1) Curbele sînt numerotate în ordinea abciselor crescătoare.

Tabelul 2

Curbele (din fig. 3)	1	2	3	4
Concentraţia (moli/l amalg.)	0,1576	0,3152	0,4485	0,6455
$K/s.10^7$, din ecuaţie	2,0	2,3	2,4	2,1
Molalitatea soluţiei	0,0180	0,0360	0,0023	0,0032
$K/s.10^7$, din pantă	1,9	2,3	2,3	2,3

Aplicabilitatea ecuaţiei (7) a fost verificată şi în cazul impurificării amalgamului şi soluţiei. Rezultatele sînt indicate în fig. 4 (v. planşa). Curbele din fig. 4 corespund unui amalgam insuficient purificat, curbele 4 şi 5 conţinînd în plus substanţe organice în electrolit. În toate cazurile se constată dependenţa liniară între τ şi $\sqrt{C_f}$.

Din fig. 3 se observă abateri spre sfîrşitul procesului, care indică o scădere a vitezei de descompunere, ce nu poate fi explicată prin impurificarea suprafeţei amalgamului.

Pe aceste considerente s-a cercetat în paralel şi variaţia potenţialului în întreg procesul descompunerii. Rezultatele obţinute sînt ilustrate în tabelul 3 şi fig. 5 (v. planşa).

Din fig. 5 se constată că în jurul căderii brusce a potenţialului se situează şi abaterile menţionate. Spre sfîrşitul procesului viteza de descompunere scade.

Pe baza celor de mai sus se presupune că viteza procesului de descompunere a amalganului de sodiu este determinată nu numai de viteza reacţiei chimice, ci la anumit moment şi de viteza de difuzie [14].

Tabelul 3

τ minute	0	18	42	66	84	96	114	126	131	150	168	210
$\sqrt{C_f}$ mcl/l	0,870	0,850	0,766	0,659	0,590	0,542	0,482	0,443	0,433	0,391	0,367	0,303
E volţi	2,1	2,09	2,08	2,06	2,06	2,05	2,04	2,01	0,68	0,68	0,71	0,73

Ecuaţia cinetică se verifică în intervalul de timp corespunzător domeniului respectiv, al cărui sfîrşit corespunde cu începutul căderii potenţialului. Abaterile constatate se datoresc schimbării domeniului în care se desfăşoară procesul.

Autorii menţionaţi [1], [8] nu verifică experimental dependenţa constantei vitezei de reacţie faţă de temperatură. În lucrarea de faţă s-a făcut verificarea ecuaţiei, determinînd constantele pentru temperaturile: 30°, 40° şi 50°C. Rezultatele sînt indicate în tabelul 4 şi fig. 6 (v. planşa).

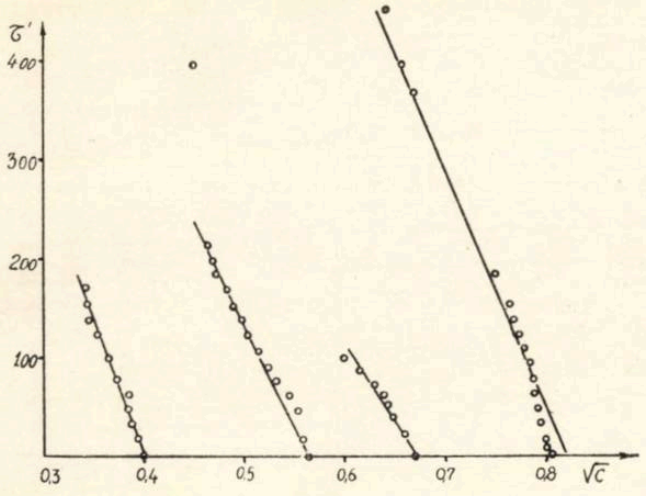


Fig. 3

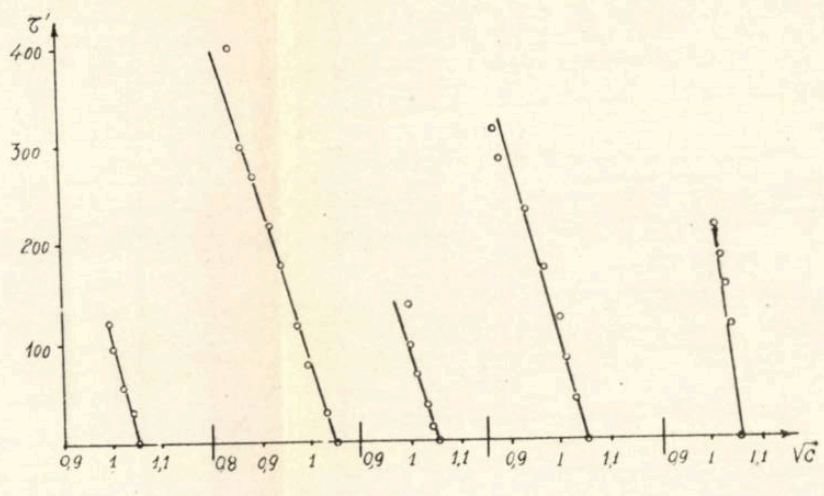


Fig. 4

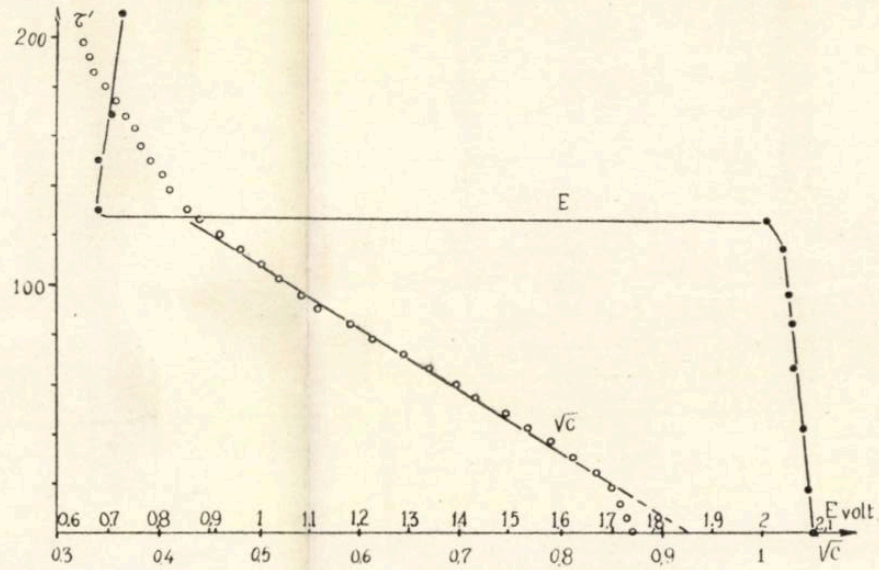


Fig. 5

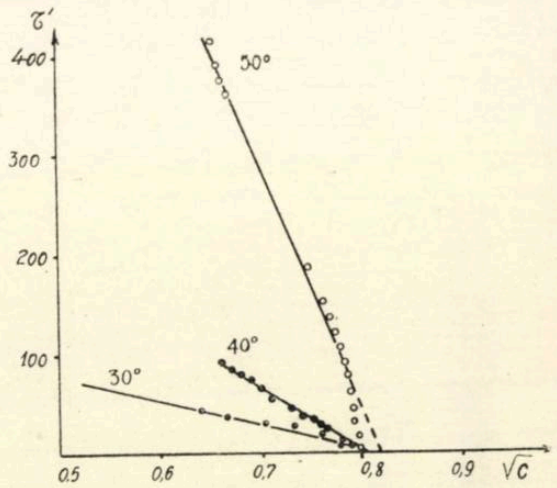


Fig. 6

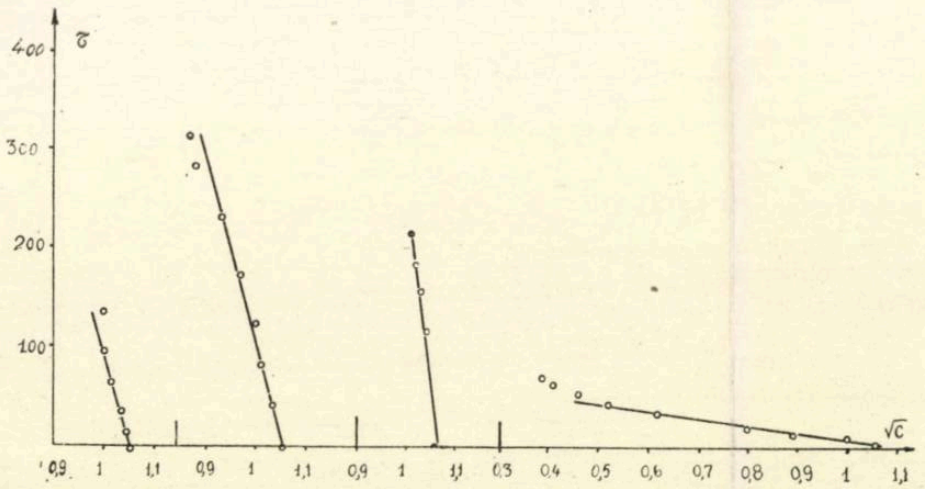


Fig. 7

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

PLANŞA I

Din tabelul 4 şi fig. 6 se observă că viteza de descompunere creşte de aproximativ patru ori de la 30° la 40° şi de la 40° la 50°C. În ceea ce priveşte influenţa substanţelor superficial active asupra descompunerii amalgamului de sodiu, s-au făcut determinări cu substanţe din grupa aminelor, semnalate în literatură ca avînd proprietăţi superficial active şi anume: camfor, borneol, o. fenilendiamina, l. naftalina, etilamina, trietanolamina, difenilamina, o. anisidina, fenilnitrozohidroxilaminamoniu, dimetilamina, etilendiamina. Influenţe remarcabile au dat etilamina ca inhibitor şi etilendiamina ca accelerator al descompunerii.

Tabelul 4

Valorile lui K' pentru diferite temperaturi

t	30°	40°	50°
K'	$2{,}0.10^{-7}$ $2{,}3.10^{-7}$ $2{,}1.10^{-7}$	$0{,}8.10^{-6}$ $1{,}0.10^{-6}$ $0{,}8.10^{-6}$	$2{,}1.10^{-6}$ $2{,}2.10^{-6}$ $2{,}6.10^{-6}$

În fig. 7 (v. planşa) sînt reprezentate rezultatele obţinute în cazul borneolului, etilaminei şi etilendiaminei. Curba 3 corespunde aceluiaşi amalgam fără adaus.

4. Concluzii

1. S-a verificat ecuaţia cinetică dedusă din teoria electrochimică a descompunerii amalgamelor în cazul amalgamului de sodiu, constatîndu-se dependenţa liniară a lui τ funcţie de $\sqrt{C_f}$.

2. Se explică cauza abaterilor de la sfîrşitul procesului de descompunere.

3. S-a studiat dependenţa constantei vitezei de descompunere funcţie de temperatură, constatîndu-se o creştere de aproximativ 0,4 ori pe grad.

4. S-a studiat influenţa substanţelor superficial active din grupa aminelor. S-au găsit influenţe apreciabile, negative în cazul etilaminei şi pozitive în cazul etilendiaminei.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Tehnologia Substanţelor Anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Капцан О. Л. и Иофа З. А., ЖФХ, 1952, **26**, стр. 193.
2. Иофа З. А., и Печковская З. В., ДАН, СССР, 1948, **56**, стр. 265.
3. Frenkel W. u. Heinz H., Z. anorg. Chem., 1924, **133**, S. 158.
4. Klein A, Z. anorg. Chem., 1924, **137**, S. 33.
5. Frenkel W., Weingeln E. u. Cahen L., Z. anorg. Chem., 1928, **171**, S. 82.
6. Fletsher F. a. Kilpatrick M., J. Phys. Chem., 1938, **42**, p. 113.

7. Скляренко С. И. и Сахаров С. И., ЖФХ, 1947, **21**, стр. 97.
8. Brönsted J. a. Kane N. J., Amer. Chem. Soc, 1931, **53**, p. 3524.
9. Frumkin A. N., Z. phys. Chem., 1932, **160**, S. 116.
10. Hammet L. a. Lorch A., J. Amer. Chem. Soc., 1932, **54**, p. 2128.
11. Wagner C. u. Troud W., Z. Electrochem., 1938, **44**, S. 391.
12. Calistru C., Popovici A., Leonte C. şi Herşcovici M, St. şi cerc. şt, Acad. R P.R., filiala Iaşi, 1954, **5**, *1—2*, p. 197.
13. Chireev V. A., *Curs de Chimie Fizică*, 1954, Buc., Ed. Tehn, p. 381, (trad. din l. rusă).
14. Франк-Каменецкий Д. А., **Диффузия и теплопередача химической кинетики**, Изд. АН СССР, Москва, 1947.

КИНЕТИКА ХИМИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ НАТРИЕВОЕ АМАЛЬГАМЫ

(Резюме)

Проверяется кинетическое уравнение, электрохимической теории разложения амальгам, применительно к натриевой амальгаме. Экспериментально устанавливается линейная зависимость времени разложения τ от $\sqrt{C_f}$, где C_f— концентрация амальгамы.

Дается объяснение причины отклонений, появляюшихся в конце процесса разложения.

Рассматривается зависимость постоянной скорости разложения от температуры а также и влияние поверхностно-активных веществ аминовой группы, устанавливая значительное отрицательное влияние в случае этиламина и положительное в случае этилендиамина.

LA CINÉTIQUE DE LA DÉCOMPOSITION CHIMIQUE DE L'AMALGAME DE NATRIUM

(Résumé)

Dans cette Note les Auteurs verifient, par voie expérimentale, l'équation cinétique déduite de la théorie électrochimique de la décomposition des amalgames, dans le cas de l'amalgame de natrium. On a constaté la dépendence linéaire du temps de décomposition τ en fonction de $\sqrt{C_f}$ ou C est la concentration de l'amalgame. Toutefois on explique la cause des écarts qui se manifestent au fin du procèssus de décomposition.

On étudie la dépendence de la constante de décomposition en fonction de la température et l'influence des substances superficièlement actives, appartenant au groupement de l'amine, en constatant des influences appréciables, négatives, dans le cas de l'éthylamine et positives, dans le cas de l'éthylènediamine.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

661.728

INTERACTIONS COLORANTS - MACROMOLÉCULES

INFLUENCE DES COLORANTS SUR LA VITESSE DU RAFFINAGE DES PÂTES [1])

PAR

GERMANO CENTOLA

1. Influence des polymères sur les propriétés des colorants

Les essais concernant l'influence de l'addition des polymères hydroxylés sur les propriétés des colorants en solution aqueuse ont eu pour but d'examiner les variations du spectre d'absorption de la lumière en fonction de l'addition de polymères, d'électrolytes ou de polymères et d'électrolytes ensemble [1].

On a mesuré, en fonction de la longueur d'onde de la lumière, la transmission des solutions, de colorants substantifs dérivés de la benzidine et de ces mêmes solutions, après l'addition de l'alcool polyvinylique, de la méthylcellulose ou du sulfate de sodium, à différentes concentrations, en présence ou non des polymères.

Les mesures ont été effectuées en utilisant la méthode de comparaison et en employant comme liquide de référence une solution de la même composition, sauf le colorant, que la solution de mesure, (fig.1...4, planche I).

On a observé les phénomènes suivants:

1) L'addition d'un polymère hydroxylé à la solution du colorant provoque un abaissement du minimum de transmission et son déplacement vers des longueurs d'onde plus grandes.

2) L'addition de sel à la solution de colorant produit un effet contraire, c'est à dire une augmentation du minimum de transmission et son déplacement vers des longueurs d'onde plus petites. L'effet est d'autant plus marqué que la concentration du sel est plus élevée.

3) L'addition du sel à la solution colorant + polymère augmente les effets produits par le polymère lui-même, à savoir, ces effets deviennent plus marqués au fur et à mesure qu'augmente la concentration du sel.

L'action du sel sur le spectre d'absorption du colorant dissous s'exerce ainsi d'une façon diamétralement opposée, selon qu'il agit sur la

1) Conférence tenue à l'Institut Polytechnique de Jassy, le 22 Septembre 1958.

solution de colorant ou sur la solution de colorant additionnée au polymère.

L'interprétation des phénomènes observés peut se faire en se basant sur l'hypothèse émise par Scheibe concernant l'association réversible des molécules de colorant en solution en tant que cause des variations des spectres d'absorption de la lumière [2].

Les colorants directs sont des électrolytes colloïdaux qui, en solution, tendent à s'associer en agrégats [3]. Par conséquent, la solution du colorant doit être envisagée comme un système polydispersé dans lequel se trouvent en équilibre dynamique des molécules isolées et des molécules associées en agrégats de complexités diverses.

Il n'y a aucun doute que le spectre d'absorption des solutions de colorant ne varie pas alors en même temps que le degré d'agrégation.

Bien que les résultats des recherches effectuées concernant ce sujet ne permettent guère un calcul exact des pourcentages des molécules simples et des agrégats moléculaires présents dans la solution, ni celui de la complexité de ces derniers, on peut affirmer, selon les observations de Scheibe concernant d'autres colorants, que, dans le cas examiné, les variations du spectre d'absorption en fonction d'une augmentation de l'agrégation ressortent de la comparaison des courbes I, V, VI des fig. 1 et 3.

Un déplacement de l'équilibre vers la dispersion moléculaire du colorant devrait agir en sens opposé à celui résultant de l'addition d'un électrolyte et, par suite, se traduire par un abaissement du minimum de transmission et un déplacement de celui-ci vers des longueurs d'onde plus grandes.

Cela se vérifie à l'aide de la comparaison que nous avons fait entre les spectres d'absorption du Rouge Congo et de la Benzo-Purpurine 4B, à parité de concentration molaire en eau et en solution aqueuse de pyridine à 20% (fig. 5) et tenant compte que l'addition de la pyridine à la solution engendre une diminution du degré d'association des molécules du colorant dans la solution.

On obtient un effet analogue si l'on ajoute un polymère hydroxylé à la solution du colorant et, lorsque à côté du polymère on introduit un électrolyte; cet effet se manifeste de façon croissante, au fur et à mesure qu'augmente la concentration de l'électrolyte.

Si l'on considère l'eau et le polymère dissous comme étant deux phases moléculairement dispersées, on peut émettre l'hypothèse que le colorant se répartit entr'elles de telle sorte que les molécules individuelles forment des complexes coordonnés avec les macromolécules du polymère, et se lient à ces dernières vraisemblablement par des ponts de hydrogène entre les groupes actifs de la molécule du colorant et les hydroxyles du polymère.

Le colorant étant fixé au polymère sous forme de molécules isolées, il en découle dans le système, un taux plus important de colorant sous forme de molécules individuelles, au détriment des agrégats.

À l'équilibre, la distribution du colorant entre l'eau et le polymère est déterminée par la concurrence entre les forces d'attraction molé-

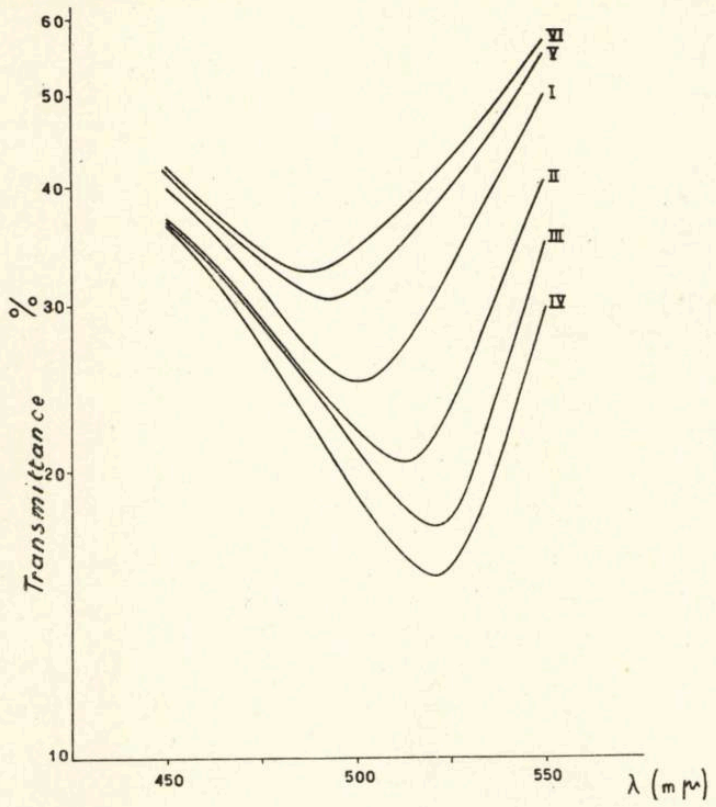


Fig. 1

I — Rouge Congo (0,01 millimol./l).
II — Rouge Congo (0,01 millimol./l) + méthilcellulose (1 millimol. base/l).
III — Rouge Congo (0,01 millimol./l) + méthylcellulose (1 millimol. base / l) + Na_2SO_4 (5 g au litre).
IV — Rouge Congo (0,01 millimol./l) + méthylcellulose (1 millimol. base/l) + Na_2SO_4 (20 g au litre).
V — Rouge Congo (0,01 millimol./l) + Na_2SO_4 (5 g au litre).
VI — Rouge Congo (0,01 millimol./l) + Na_2SO_4 (20 g au litre).

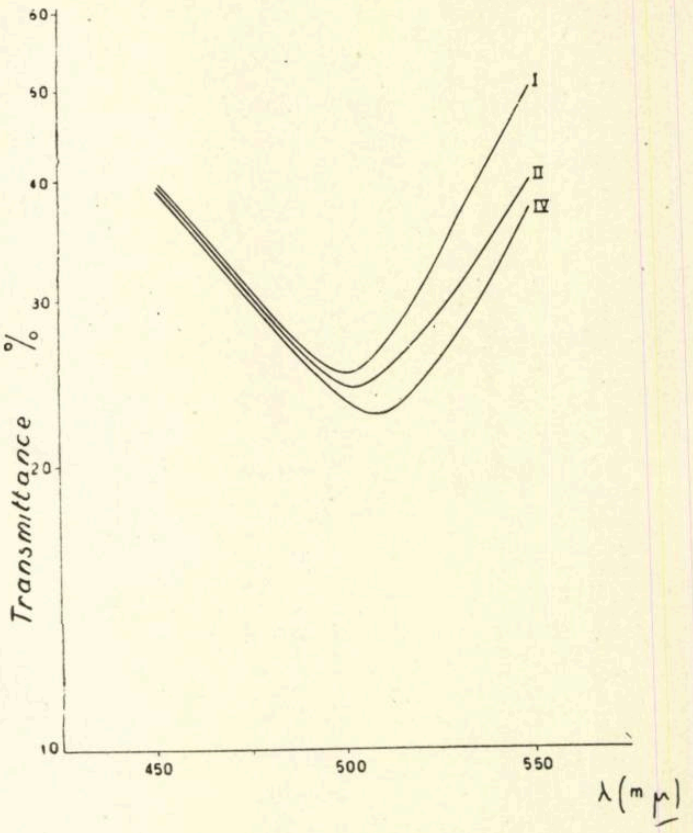


Fig. 2. Courbes de transmission de :

I — Rouge Congo (0,01 millimol./l).
II — Rouge Congo (0,01 millimol./l) + alcool polyvinylique (1 millimol. base/l).
IV — Rouge Congo (0,01 millimol /l) + alcool polyvinylique (1 millimol. base/l) + Na_2SO_4 (20 g au litre).

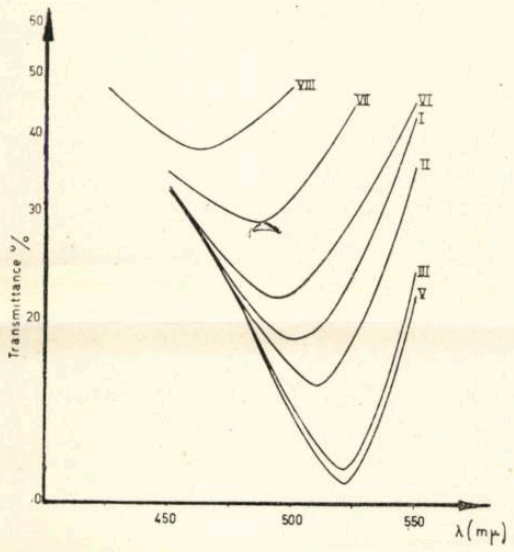


Fig. 3. Courbes de transmission de:

I — Benzopurpurine (0,01 millimol./l),
II — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + méthylcellulose (1 millimol. base/l).
III — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + méthylcellulose (1 millimol. base/l) + Na_2SO_4 (5 g au litre).
IV — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + méthylcellulose (1 millimol. base/l) + Na_2SO_4 (20 g au litre).
V — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + Na_2SO_4 (5 g au litre).
VI — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + Na_2SO_4 (20 g au litre).

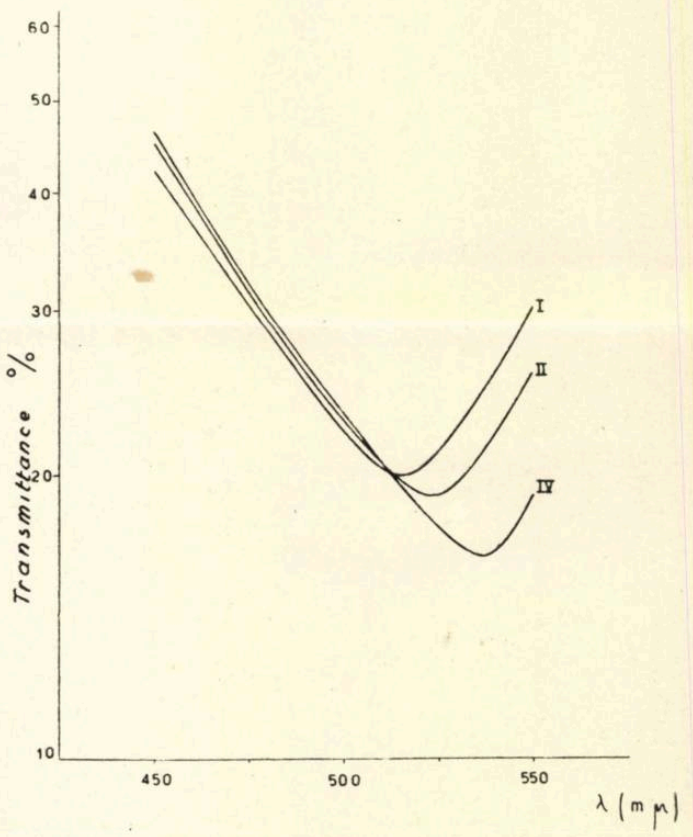


Fig. 4. Courbes de transmission de :

I — Benzopurpurine (0,01 millimol./l).
II — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + alcool polyvinylique (1 millimol. base/l).
IV — Benzopurpurine (0,01 millimol./l) + alcool polyvinylique (1 millimol. base/l) + Na_2SO_4 (20g au litre).

PLANCHE I

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

culaire reliant le polymère et le colorant dans le complexe (ce qui s'identifie avec l'affinité du colorant pour le polymère) et la solubilité du colorant.

Il est donc évident qu'une diminution de la solubilité du colorant par l'addition de l'électrolyte déclanche un déplacement de l'équilibre de répartition du colorant dans le sens d'une augmentation de la proportion reliée au polymère sous forme de molécules individuelles.

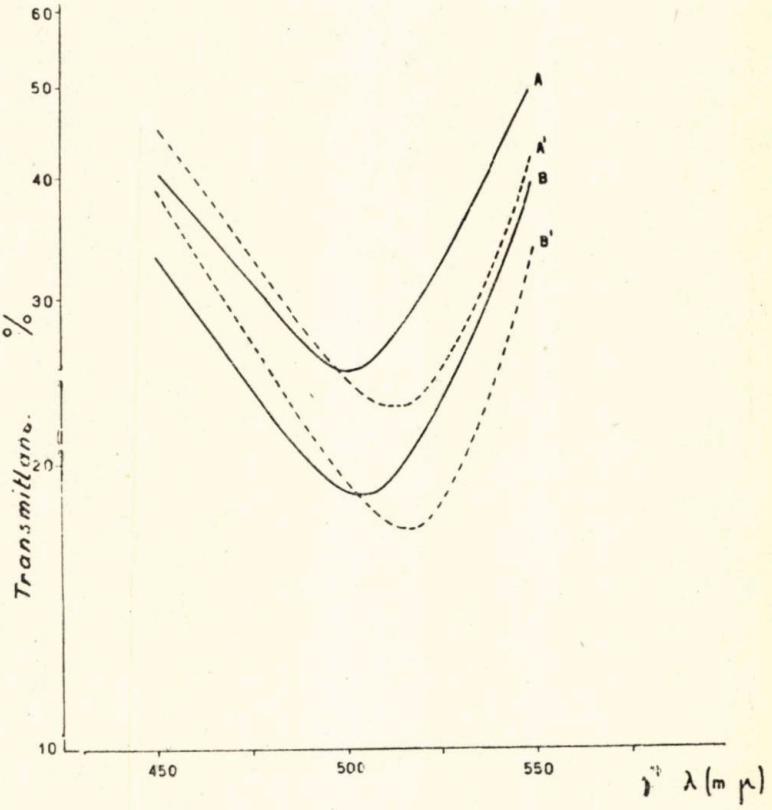


Fig. 5. — Courbes de transmission de :

A — Rouge Congo (0,01 millimol./l) en eau.

A' — Rouge Congo (0,01 millimol./l) en solution aqueuse de pyridine (20%).

B — Benzopurpurine 4_B (0,01 millimol./l) en eau.

B' — Benzopurpurine 4_B (0,01 millimol./l) en solution aqueuse de pyridine (20 %).

On peut ainsi expliquer le fait que les additions des électrolytes peuvent agir d'une manière diamétralement opposée, selon qu'elles sont effectuées dans la solution du colorant ou du colorant + polymère.

2. Influence des colorants sur les propriétés des polymères

Depuis longtemps nous avons observé une augmentation très remarquable de la viscosité des polymères hydroxylés, par l'addition des colorants substantifs, tandis que les colorants non substantifs n'exercent aucune action [4].

Les résultats d'une série d'essais sont résumés dans le diagramme ci-dessous (fig. 6).

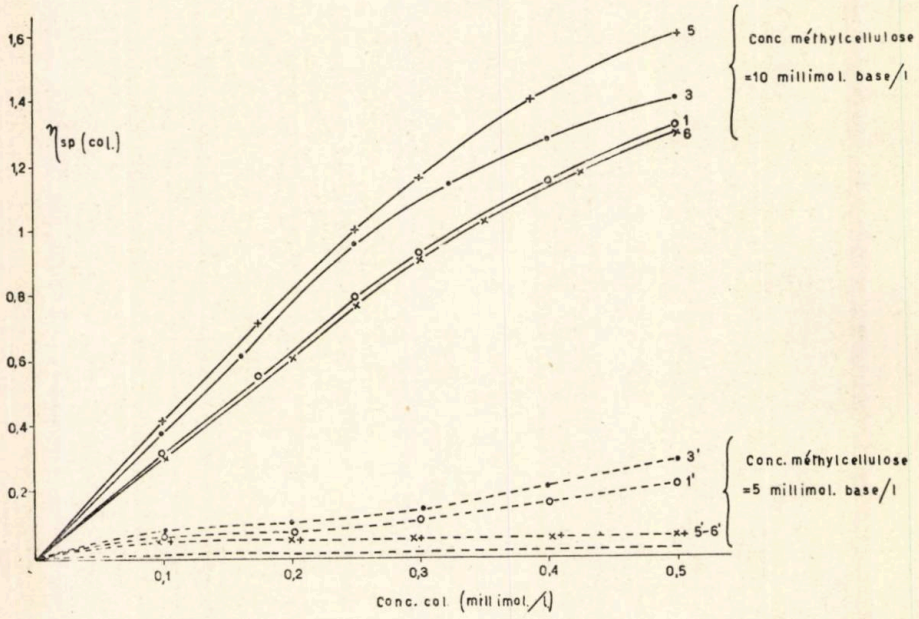


Fig. 6. — Viscosités spécifiques des colorants en solutions de méthylcellulose, en fonction de la concentration molaire du colorant :

1 — Rouge Congo + méthylcellulose (10 millimol./l).
1′ — Rouge Congo + méthylcellulose (5 millimol./l).
3 — Benzopurpurine 4_B + méthylcellulose (10 millimol./l).
3′ — Benzopurpurine 4_B + méthylcellulose (5 millimol./l).
5 — Bleu Chicago $_B$ + méthylcellulose (10 millimol./l).
5′ — Bleu Chicago $_B$ + méthylcellulose (5 millimol./l).
6 — Bleu Chicago 6_B + méthylcellulose (10 millimol./l).
6′ — Bleu Chicago 6_B + méthylcellulose (5 millimol./l).

Pour celui-ci, nous avons calculé la viscosité spécifique du colorant en prenant comme viscosité du solvant, soit la viscosité de l'eau, soit celle des solutions de méthylcellulose à différentes concentrations ; les courbes de la fig. 6 représentent donc les accroissements de la viscosité, dus à la présence du colorant.

Il sont presque nuls pour des solutions très diluées de méthylcellulose (1 millimol./base/litre, soit environ 0,02%), sensibles pour une

concentration de la méthylcellulose de 5 millimol./base/litre (0,1%) et très remarquables pour des concentrations plus élevées (10 millimol./litre = 0,2%).

On note donc une augmentation très considérable de la viscosité lorsque la concentration du polymère est supérieure à la limite au-delà de laquelle les interactions entre les macromolécules ne peuvent pas être considérées comme nulles.

Dans certains cas, avec quelques colorants et à des concentrations assez élevées, on peut remarquer que l'addition des colorants peut provoquer la coagulation de la méthylcellulose.

Ces phénomènes de coagulation n'ont jamais été constatés dans les solutions d'alcool polyvinylique: pour celles-ci, les augmentations de la viscosité en fonction des additions du colorant sont moins importantes. Toutefois, les solutions assez concentrées en alcool polyviny-

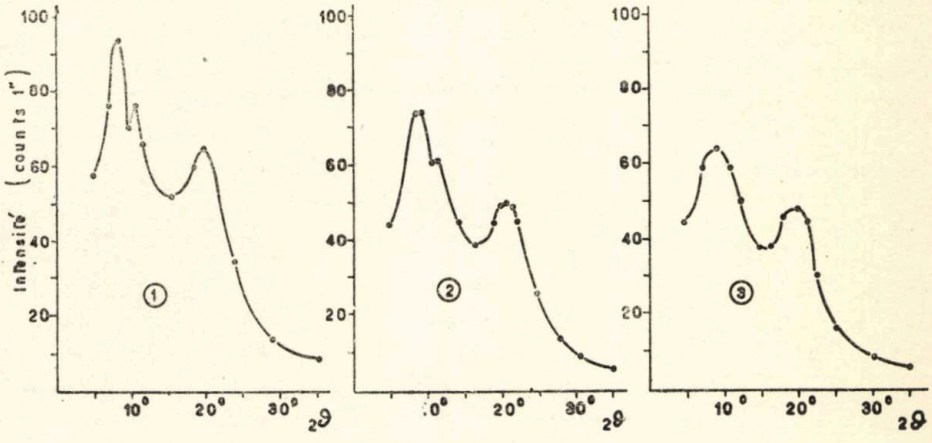


Fig. 7. — Enrégistrement au moyen du compteur Geiger du spectre de rayon K (Cu K) des pellicules de:

1) — Méthylcellulose.
2) — Méthylcellulose + Rouge Congo (rapp. mol. 20 : 1).
3) — Méthylcellulose + Rouge Congo (rapp. mol. 10 : 1).

lique (environ 2%) deviennent très filantes après l'addition des colorants substantifs: si dans une telle solution on plonge une baguette de verre, on peut, en la soulevant, tirer aisément des fils.

Pour obtenir d'autres données expérimentales, pouvant aider l'interprétation des phénomènes observés, nous avons effectué, par ultracentrifugation, une série de mesures de la vitesse de sédimentation des polymères et des complexes polymères-colorants.

Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus sont les suivantes:

a) La vitesse de sédimentation du polymère après l'addition du colorant augmente de 15...20% par rapport à la vitesse de sédimentation du polymère seul.

b) Dans certains cas, observés surtout quand le rapport colorant-polymère est très élevé, mais qui ne sont pas toujours reproductibles, on a constaté que les macromolécules se repartissent en deux groupes, caractérisés par des vitesses de sédimentation très différentes, et toutes les deux plus élevées que la vitesse de sédimentation, soit du polymère seul, soit du complexe polymère-colorant.

Les produits d'évaporation des solutions des polymères additionnées par des colorants, présentent un degré de cristallinité plus bas que celui des pellicules du polymère seul (fig. 7).

Le diagramme montre les résultats de l'enrégistrement au compteur Geiger des radiations X diffractées par une pellicule, provenant, soit d'une solution de méthylcellulose, soit de la même solution, après l'addition du colorant (Rouge Congo) dans le rapport molaire 1 : 20 et 1 : 10.

De plus, on observe qu'il n'y a aucun signe de diffractions attribuables aux cristaux de colorant et ceci démontre que ce dernier est dispersé moléculairement entre les macromolécules du polymère.

3. Discussion des résultats

Nous avons essayé, suivant différents raisonnements, d'expliquer les phénomènes observés.

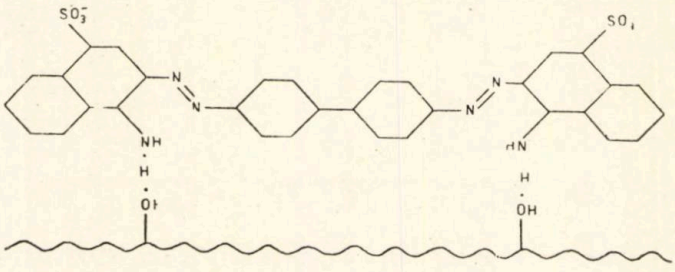


Fig. 8. — Addition d'une molécule de Rouge Congo à la cellulose.

Tout d'abord il faut considérer que les molécules des colorants substantifs qui donnent lieu aux phénomènes étudiés, portent d'un côté des groupes NH_2 ou des groupes OH qui, très probablement, sont responsables de la formation des ponts d'hydrogène avec les hydroxyles du polymère, et de l'autre côté des groupes $-SO_3$ $-Na$ ionisés, c'est-à-dire des groupes $-SO_3$ qui sont orientés vers l'eau. On admet donc que la molécule du colorant se fixe à la cellulose de la manière indiquée (fig. 8).

En effet, quand nous avons fait les premières remarques concernant les phénomènes d'augmentation de la viscosité de la méthylcellulose par l'addition du colorant, nous avons noté que les effets les plus marquants étaient donnés par le colorant dont la molécule présentait la distribution la plus symétrique des deux types de groupes actifs [4].

Par conséquent, la molécule neutre du polymère devient une molécule de polyélectrolyte, du fait que le complexe porte un certain nombre de groupes ionisables $-SO_3H$.

Il est bien connu que, lorsqu'une macromolécule se transforme en polyélectrolyte, la viscosité augmente et, dans plusieurs cas, on a expliqué l'augmentation de la viscosité comme étant causée par une modification de la configuration de la macromolécule en solution [5].

On imagine que, par suite de la répulsion entre les groupes ionisés présents le long de la macromolécule, cette dernière, éventuellement pelotonnée dans la solution, modifie sa configuration pour prendre un arrangement plus rectiligne.

Cette hypothèse n'est pas acceptable dans le cas présent. Il faut se rappeler que toutes les mesures de pression osmotique, de viscosité et de vitesse de sédimentation, montrent que les macromolécules de méthylcellulose ne peuvent pas prendre en solution aqueuse une configuration pelotonnée. De plus, la transformation d'une configuration pelotonnée en un arrangement plus rectiligne devrait provoquer une diminution de la vitesse de sédimentation et pas une augmentation, ce qu'on a vérifié par voie expérimentale.

Si donc nous admettons qu'il n'y a pas à prendre en considération des modifications de la forme des macromolécules, nous pouvons expliquer l'augmentation de la vitesse de sédimentation comme étant causée par un alourdissement des macromolécules.

Mais il n'est pas suffisant de considérer seulement l'alourdissement provoqué par l'addition des molécules de colorant.

En effet, l'addition du colorant dans un rapport molaire entre 1 : 100 à 1 : 50, c'est-à-dire l'addition de 1 molécule de colorant pour 100 à 50 résidus glucosidiques, engendre un alourdissement de la molécule d'environ 3,5 à 7%, alors que nous avons mesuré des augmentations de 15...20% de la vitesse de sédimentation.

Il faut donc envisager aussi une augmentation de l'hydratation de la macromolécule, conséquence de la présence des groupes ionisés $-SO_3$.

Parce que l'eau d'hidratation a un volume spécifique moindre que celui des molécules d'eau libre, on peut en déduire la possibilité d'un alourdissement supplémentaire de la macromolécule du colorant.

L'augmentation de l'hydratation est en accord, soit avec l'accroissement de la viscosité, soit avec les essais que nous avons accomplis sur l'influence des additions de colorants sur la formation des gels cellulosiques.

Au cours de la maturation d'une solution diluée de viscose, le xanthogénate de cellulose perd, par hydrolyse, des groupes hydrophiles et sa viscosité augmente. Ensuite intervient une transformation irréversible sol — gel et enfin la sinérèse du gel.

Le temps nécessaire pour la formation du gel, la diminution de volume et la résistance à la compression du gel même, sont dépendants de la concentration de la cellulose dans la solution, de son degré de polymérisation, du degré de sulfuration initial, du pH du milieu, etc.

Nous avons observé que, en tenant constants tous ces facteurs, l'addition des colorants substantifs engendre les variations suivantes:

a) retard très sensible de la formation du gel, surtout si la solution est préalablement neutralisée par l'addition d'acide acétique;

b) retard, aussi, de la synérèse du gel;

c) la résistance des gels qui contiennent des colorants est beaucoup plus faible que la résistance du gel sans colorants, mesurée après un temps donné.

Ces phénomènes deviennent plus importants au fur et à mesure qu'augmente le nombre des groupes ionisés $-SO_3-$ de la macromolécule du colorant, c'est à dire au fur et à mesure qu'augmente son hydratation.

Aucun effet n'est pas observable par l'addition d'autres colorants qui ne sont pas substantifs pour la cellulose.

Parce qu'il faut exclure le fait que la présence des colorants puisse causer une variation de la vitesse de décomposition du xanthogénate, on doit admettre que les phénomènes observés sont attribuables à l'augmentation de l'hydratation des molécules cellulosiques, par suite de la formation du complexe cellulose-colorant.

On peut donc tirer les conclusions préliminaires suivantes [6]:

a) Il est confirmé le fait que les macromolécules des colorants substantifs se lient aux macromolécules des polymères hydroxyles.

b) Le complexe de coordination est formé par des ponts d'hydrogène entre les groupes NH_2 ou OH de la molécule du colorant et des groupes OH du polymère.

c) Les groupes ionisés $-SO_3-$ qui se trouvent sur un côté de la molécule du colorant provoquent une augmentation de l'hydratation de la macromolécule et, dans certains cas, il sont responsables de l'augmentation des forces d'attraction intermoléculaires des macromolécules du polymère dissous.

4. Action des colorants sur le raffinage des pâtes cellulosiques

Nous avons accompli une série préliminaire d'essais en étudiant le raffinage au moulin Jokro d'une pâte au sulfate blanchie, de conifère, à laquelle on avait ajouté des colorants pour papier, à concentration constante de 2 millimoles par litre [7], [8].

Dans le tableau 1 on a résumé les résultats comparatifs les plus intéressants (degré de raffinage de la pâte, longueur de rupture, indice d'éclatement et de porosité des feuilles) apres 10000 tours de l'appareil à une vitesse de 150 tours/min.

On peut remarquer que les colorants qui engendrent une accélération du raffinage sont ceux qui en même temps jouent le rôle principal pour les phénomènes décrits ci-dessus.

L'action la plus remarquable est exercée par le Rouge-Congo et donc nous avons poursuivi les recherches avec ce colorant-ci en examinant trois pâtes cellulosiques: a) linter de coton, b) conifère au sulfate blanchie, c) conifère au bisulfite blanchie, dont on a determiné le

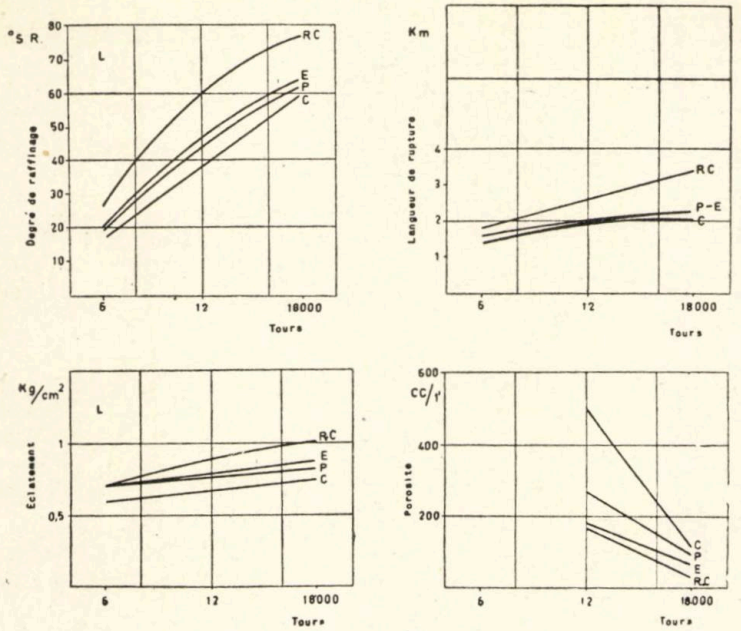


Fig. 9. — Cellulose de linter

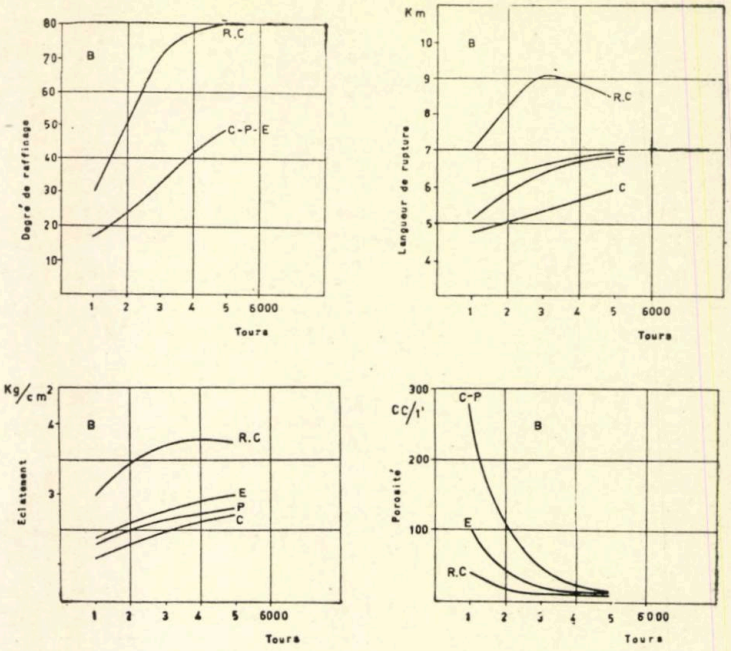


Fig. 10. — Pâte au sulfite blanchie

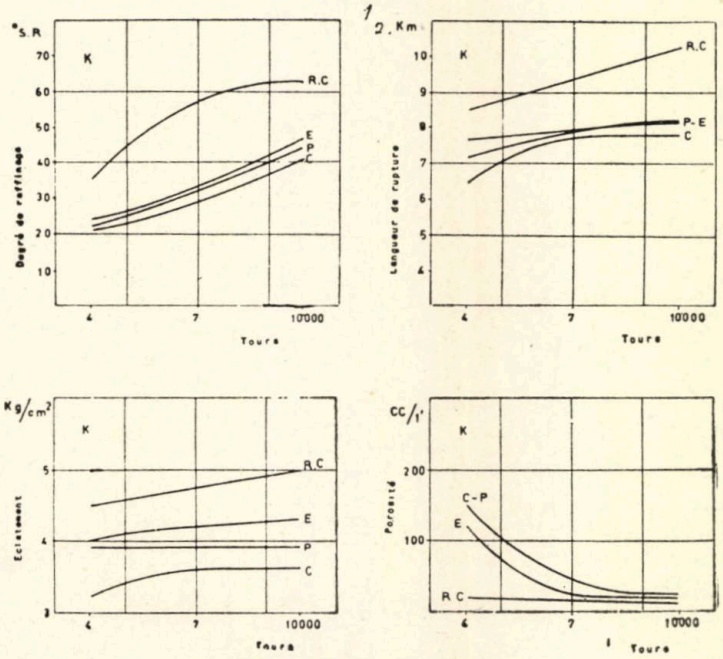


Fig. 11. — Pâte kraft blanchie

PLANCHE II

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁR

comportement au raffinage au moulin Jokro à une densité de pâte de 6% et à une vitesse constante de rotation de l'appareil de 150 tours/min.

Tableau 1

Colorant	Classe	Degré de raffinage °S. R.	Longueur de rupture m.	Eclatement kg/cm².	Porosité cm³/min
Eau courante		39	8800	6,0	30
Eau distilée		42	9100	6,0	30
Rouge Congo	Colorant direct	64	11000	6,6	20
Benzopurpurine 10 B	„ „	54	10640	6,2	20
Benzopurpurine 4 B	„ „	54	10700	6,3	23
Congo Corinth G	„ „	48	9560	6,1	22
Chicago Blue 6 B	„ „	59	10000	6,4	25
Benzoazurin G	„ „	47	9630	5,8	27
Direct Blue 2 B	„ „	51	10000	6,2	27
Direct Black conc. extra	„ „	47	9640	5,8	30
Erika BN	„ „	39	8900	5,9	30
Brilliant Paper Yellow	„ „	51	9700	6,2	22
Fuchsin S	Colorant acide	40	9000	5,5	36
Brilliant Croceine 3 B	„ „	43	8940	5,8	35
Bordeaux conc. extra	„ „	38	9300	5,8	47
Tartrazin J	„ „	40	9520	5,9	40
Safranin conc. extra	Colorant basique	33	7930	4,8	70
Vesuvin 4 B G	„ „	36	7870	4,3	50
Victoria Blue B conc.	„ „	35	7450	4,2	72

Après le raffinage, la pâte a été diluée à 0,8% et tirée en feuilles de 60 g/m² à la formette Rapid-Köthen suivant la normalisation allemande.

Les milieux de raffinage ont été les suivants :

	pH
Eau normale (dureté totale 24° français)	7,3
Eau permutée	8,0
Eau permutée + hexamétaphosphate (4 millimol./litre)	6,8
Eau permutée + rouge Congo (2 millimol./litre)	6,8

On a mesuré, après un conditionnement de 48^{h} à 20°C et 65% U.R., les caractéristiques suivantes des feuilles : a) longueur de rupture (m), b) résistence à l'éclatement (kg/cm²), c) porosité à l'air (cm³/min).

Les résultats sont groupés dans les tableaux 2, 3 et 4 et dans les figures 9, 10 et 11 (planche II).

Les courbes, qui représentent la variation des différents paramètres mesurés en fonction du nombre de tours du moulin Jokro, portent l'indication *C* pour l'eau commune, *P* pour l'eau permutée, *E* pour l'addition de l'hexamétaphosphate et *R C* pour l'addition de Rouge-Congo.

Tableau 2

Cellulose de linter

Milieu de raffinage	Tours par minute	Degré de raffinage °S. R.	Longueur de rupture m.	Éclatement kg/cm².	Porosité cm³/min.
Eau courante	6000	17	1420	0,60	—
	12000	37	1920	0,68	500
	18000	60	2140	0,76	110
Eau douce	6000	19	1300	0,70	—
	12000	44	1960	0,76	270
	18000	62	2340	0,84	90
Eau distillée	6000	20	1600	0,70	—
+hexamétaphos-	12000	47	1970	0,80	180
fate	18000	64	2300	0,84	63
Eau distillée +	6000	26	1870	0,70	—
rouge Congo	12000	60	2630	0,88	170
	18000	77	3440	1,08	30

Tableau 3

Pâte au sulfite blanchie

Milieu de raffinage	Tours par minute	Degré de raffinage °S. R.	Longueur de rupture m.	Éclatement kg/cm².	Porosité cm³/min.
Eau courante	1000	17	4750	2,1	270
	2000	22	4660	2	110
	3000	31	4940	2,46	35
	4000	42	6150	2,8	25
	5000	48	6170	2,7	15
Eau douce	1000	17	5030	2,3	260
	2000	23	6350	2,6	100
	3000	31	6460	2,6	35
	4000	42	6720	2,8	23
	5000	49	6700	2,7	15
Eau distillée +	1000	18	6050	2,4	100
hexamétaphosfate	2000	25	6300	2,6	40
	3000	33	6600	2,76	30
	4000	43	6860	2,76	20
	5000	49	6750	3,04	15
Eau distillée +	1000	31	6990	2,96	40
rouge Congo	2000	50	7700	3,5	15
	3000	72	9170	3,7	13
	4000	78	8690	3,78	12
	5000	81	8400	3,68	12

Tableau 4

Pâte kraft blanchie

Milieu de raffinage	Tours par minute	Degré de raffinage °S.R.	Longueur de rupture m.	Éclatement kg/cm²	Porosité cm³/min
Eau courante	4000	21	6380	3,2	150
	7000	29	7780	3,56	45
	10000	41	7700	3,52	25
Eau douce	4000	22	7430	3,9	150
	7000	32	7700	3,8	45
	10000	44	8300	3,8	20
Eau distillée + hexamétaphosfate	4000	24	7750	4	120
	7000	32	7900	4,28	22
	10000	47	8300	4,3	20
Eau distillée + rouge Congo	4000	35	8520	4,48	20
	7000	57	9440	4,56	15
	10000	63	10340	5,20	12

À fin d'obtenir d'autres informations qui puissent éclairer les phénomènes qui déterminent l'action d'accélération du raffinage de la pâte, nous avons accompli des essais pour évaluer l'influence des additions de Rouge-Congo sur la pâte déjà raffinée et de l'extraction, par une solution aqueuse de pyridine au 50%, du colorant de la pâte raffinée en sa présence.

Les tableaux 5 et 6 résument les résultats des mesures effectuées sur la pâte raffinée à l'eau commune (A), en présence du colorant (A'), après l'extraction du colorant (A'') et avec le colorant ajouté après le raffinage (A''').

On observe que:

a) le degré de raffinage, qui augmente beaucoup si on travaille en présence du colorant, diminue très sensiblement après l'extraction de celui-ci, mais reste toujours à un niveau plus élevé que celui des pâtes raffinées en présence de l'eau pure. La différence est d'autant plus marquée que le degré de raffinage atteint est plus élevé;

b) l'addition du colorant à la pâte raffinée à l'eau pure engendre des variations très modestes du °S.R.;

c) selon ce qu'on a demontré ci-dessus, la longueur de rupture des pâtes raffinées en présence du colorant est plus élevé, mais pour des durés de raffinage très longues, tombe assez rapidement à des valeurs plus basses, parce-que même le phénomène de la retrogradation de la résistance, causé par le prolongement du raffinage au delà d'une certaine limite, est accéléré par la présence du colorant. En général, la présence du Rouge-Congo accélère toutes les phénomènes qui se manifestent au cours du raffinage.

Tableau 5

Pâte au sulfite écrue

Tours	Degré de raffinage				Longueur de rupture m.				Porosité cm³/min.				Doubles plis №.			
	A	*A'*	*A''*	*A'''*	*A*	*A'*	*A''*	*A'''*	*A*	*A'*	*A''*	*A'''*	*A*	*A'*	*A''*	*A'''*
1000	16	24	21	18	6750	8900	7450	7285	353	100	120	375	2865	3100	3750	2840
1500	19	42	26	21	7640	10050	9300	7900	200	17	33	250	3300	3650	4850	2540
2500	23	58	33	28	9060	9900	9200	8250	91	5,8	11	110	4030	3800	5200	3200

Tableau 6

Pâte kraft blanchie

Tours	Degré de raffinage				Longueur de rupture m.				Porosité cm³/min				Doubles plis №.			
	A	*A'*	*A''*	*A'''*	*A*	*A'*	*A''*	*A'''*	*A*	*A'*	*A''*	*A'''*	*A*	*A'*	*A''*	*A'''*
3000	18	28	21	22	6840	9550	8000	7150	400	140	150	375	8100	8650	10100	7300
4500	21	37	26	29	8520	10400	9150	7650	250	58	70	300	7220	8520	11000	7300
7000	27	52	33	36	8130	10000	8850	7650	170	22	26	250	6330	7450	8850	6400

d) par l'extraction du colorant la longueur de rupture diminue, mais elle reste toujours à un niveau supérieur à celui de la pâte raffinée à l'eau pure;

e) l'addition du colorant à la pâte déjà raffinée n'engendre pas des variations importantes de la longuer de rupture;

f) quant à la porosité, les phénomènes sont du même ordre que ceux observés pour la résistence;

g) les mêmes observations sont valables pour les doubles plis, bien qu'il faut remarquer une augmentation du nombre de doubles plis après l'extraction du colorant par la solution de pyridine. Pour expliquer cette anomalie nous avons soumis à l'extraction avec une solution aqueuse de pyridine à 50%, les pâtes raffinées à l'eau pure et nous avons pu remarquer que l'action de la pyridine laisse inaltérées toutes les propriétés des feuilles à l'exception du nombre des doubles plis qui est augmenté.

5. Discussion des résultats et le mécanisme probable du raffinage

Depuis quelques années nous avons accompli une étude comparative sur la structure des feuilles de papier et des films de cellulose régénérée. On a tiré la conclusion qu'entre les structures des deux types d'objets existent des analogies très intéressantes [9].

Dans les films de cellulose régénérée (cellophane et cuprophane) on remarque une orientation uniplanaire sélective des plans cristallografiques (101) de la cellulose sur la surface (ce sont les plans de gonflement et de clivage de la cellulose).

Dans le papier il existe une tendence à une orientation du même type, bien qu'elle se manifeste seulement après un traitement de mercérisation.

Le degré de l'orientation sélective dépend de la nature des fibres cellulosiques, des conditions de raffinage et de la compression exercée sur le papier pendant sa formation.

Le papier a donc une structure lamellaire plus ou moins marquée, qui peut être décélée a l'échelle sousmicroscopique par des recherches roentgenographiques [10] et à l'échelle microscopique par l'examen des sections transversales du papier [11].

On peut tirer de là l'hypothèse que l'action du raffinage tend à cliver les fibres en lamelles ou, mieux, en éléments à forme de rubans, dans lesquels les plans cristallographiques les plus hydrophiles de la cellulose sont orientés parallèlement à la surface des rubans. On considère donc la fibre cellulosique comme un faisceau de rubans parallèles à l'axe de la fibre ou enroulés à peu près en spirale.

Selon Frey-Wissling [12] les plans (101) de la cellulose (qui sont les plans de clivage) sont orientés sur la surface des fibrilles à forme de rubans et nos recherches démontrent que ces plans-ci présentent une orientation parallèle aux couches concentriques disposées autour du lumen central.

Il est donc vraisemblable que le raffinage provoque la déchirure des couches concentriques et leur clivage en rubans, qui sont d'autant

plus poussés que la durée et l'intensité de l'usinage mécanique, exercée sur les fibres gonflées par l'eau, sont plus importantes.

En maintenant constantes tous les autres variables qui entrent en jeu dans l'opération, la vitesse d'engraissement d'une pâte cellulosique doit être proportionnelle à la cohésion des couches lamellaires, supposées comme sousdivisions d'une fibre.

Quelques auteurs ont essayé depuis longtemps d'établir des relations entre l'aptitude au raffinage et la composition chimique des pâtes. La méthode suivie permet à étudier le raffinage des pâtes, au fur et à mesure qu'on éliminait d'elles la lignine et les hémicelluloses.

Les résultats obtenus tendent à démontrer que la vitesse d'engraissement (et donc la résistence du papier) augmente au debut par l'élimination des premières parties des substances non cellulosiques et après avoir atteint une valeur maxima, diminue au fur et à mesure qu'augmente la purification de la cellulose.

Pour expliquer ces phénomènes on peut recourir à l'hypothèse que les matières incrustantes sont localisées entre les couches lamellaires et qu'elles puissent donc constituer les zones de clivage.

En effet, un premier attaque chimique et, par conséquent, une initiale élimination de cettes matières, peut favoriser leur gonflement et, en diminuant la cohésion entre les couches, le clivage des rubans. Au contraire, l'élimination totale des matières non cellulosiques provoque une diminution de la plasticité des fibres et un collage plus intime entr'elles. Ce fait se vérifie d'une façon particulière quand la dépuration de la cellulose est accomplie par extraction avec des solutions alcalines assez concentrées. Dans ce cas l'élimination des hémicelluloses s'accompagne d'un gonflement très poussé de la fibre et des modifications de la structure qui peuvent provoquer la soudure des couches et la passivation des fibres au raffinage.

À fin d'augmenter la vitesse du raffinage il faut favoriser le clivage des couches lamellaires en ajoutant des réactifs capables de pénétrer et de se fixer sur leurs surfaces pour en augmenter l'hydratation et agir comme des plastifiants interposés entre'elles.

Il est très vraisemblable que les colorants substantifs dérivés de la benzidine puissent exercer une action semblable. En effet ils sont capable de se lier à la cellulose en se disponsant sur les surfaces lamellaires. Les colorants les plus actifs à cet égard ont une configuration linéaire, portant d'une côté de la molécule des groupes capables d'établir des ponts d'hydrogène avec les oxhydriles cellulosiques et de l'autre côté des groupes SO_3Na dissociables et très hydratés.

Nous avons accompli des mesures concernant l'orientation lamellaire selective sur des papiers fabriqués à partir des pâtes raffinées à l'eau, à l'eau + colorant, qui ont donné les résultats résumés dans le tableau 7.

À l'examen microscopique des sections transversales des feuilles, les fibres raffinées en présence du Rouge Congo montrent un clivage en lamelles beaucoup plus marqué de fibres soumises au raffinage courant [11].

On peut donc supposer que les molécules de certains colorants pénètrent de préférence dans les zones moins compactes, c'est à dire entre les couches lamellaires concentriques, en augmentant l'hydratation et favorisent le clivage par l'action mécanique exercée sur la fibre pendant le raffinage.

Tableau 7

Cellulose	Raffinage durée (Jokro) minutes	Degré de raffinage °S. R.	D. O. S.
Linter (sans rouge Congo)	120	75	61
Linter (avec rouge Congo)	120	85	67
Linter (mercérisé)	120	35	32
Sapin (sulfite) (sans rouge Congo)	20	32	32
Sapin (sulfite) (sans rouge Congo)	35	69	64
Sapin (sulfite) (avec rouge Congo)	20	71	69
Sapin (sulfite) (avec rouge Congo)	35	84	75
Sapin (sulfite) (mercérisé)	20	13	44
Sapin (sulfite) (mercérisé)	35	14	50

De cette façon on peut expliquer aussi pourquoi l'élimination du colorant de la pâte déjà raffinée diminue le degré °S. R. et en même temps a une influence très limitée sur les propriétés de la résistence des feuilles, qui dépendent de l'état de clivage des fibres.

Bien qu'il ne soit pas possible d'envisager la possibilité d'une utilisation pratique des colorants comme accélérateurs du raffinage, toutefois nous croyons qu'il peuvent servir comme „modèles moléculaires" dans les tentatives de chercher ou de synthétiser des substances à bon marché et non colorantes, capables d'exercer des actions pareilles.

Il est très intéressant de remarquer qu'il y a déjà quelque temps qu'aux États Unis on poursuit des recherches et on commence à produire à l'échelle industrielle des celluloses à haute vitesse de raffinage par l'introduction dans la cellulose d'une petite quantité de groupes substituentes capables d'en augmenter l'hydrophilité, tels que des groupes carboxyméthyle ou hydroxyéthyle.

Station expérimentale pour cellulose, papier et fibres artificielles, Milano, Italie.

BIBLIOGRAPHIE

1. Centola G., Ann. Sc. Text. Belges, 1955, **4**, pp. 157-181.
2. Scheibe G., Z. Angew. Chem., 1937, **50**, S. 212; Kolloid Z., 1938, **82**, S. 1.
3. Vickerstaff Th., *The Physical Chemistry of Dyeing*, London, 1954, pp. 69-185.
4. Centola G., Ric. Sci., 1940, **11**, p. 905.
5. Strangs C P. u Fuoss R. M., *Das Makromolekül in Lösungen*, Berlin, 1953, Kap. 15.
6. Centola G., Bull. Inst. Text. France, 1956, *63*, p. 45.
7. Centola G. et Borruso D., Ind. della Carta, 1952, **6**, *4*, p. 41.
8. Borruso D, Ind. della Carta, 1952, **6**, *7*, p. 77.
9. Centola G., Das Papier, 1955, **9**, *23/24*, S. 588.
10. Centola G. et Borruso D., Ind. della Carta, 1955, **9**, *8—9*, p. 95.
11. Centola G. et Taraschi F., Ind. della Carta, 1956, **10**, *1*, p. 1.
12. Frey-Wyssling A., Science, 1954, **119**, *3081*, p. 80.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ КРАСИТЕЛЯМИ И МАКРОМОЛЕКУЛАМИ

Влияние красителей на скорость рафинирования паст

(Резюме)

Излагая обширный ряд, проводимых автором, исследований по взаимодействию между красителями и макромолекулами, подчёркивается, имеющий особое значение для технологии рафинирования бумажных паст, факт, что красители, образующие комплексы с целлюлозными макромолекулами, значительно повышают скорость рафинирования.

Объяснение рисунков

Рис. 1. I — Конго красный (0,01 ммолей/л);
II — Конго красный (0,01 ммолей/л) + метилцеллюлоза (1 ммолей основания/л);
III — Конго красный (0,01 ммолей/л) + метилцеллюлоза (1 ммоль основания/л) + + Na_2SO_4 (5 г/л);
IV — Конго красный (0,01 ммолей/л) + метилцеллюлоза (1 ммоль основания/л) + + Na_2SO_4 (20 г/л);
V — Конго красный (0,01 ммолей/л) + Na_2SO_4 (5 г/л);
VI — Конго красный (0,01 ммолей/л) + Na_2SO_4 (20 г/л).

Рис. 2. Кривые светопроницаемости:
I — Конго красный (0,01 ммолей/л);
II — Конго красный (0,01 ммолеи/л) + поливиниловый спирт (1 ммоль основания/л);
IV — Конго красный (0,01 ммолей/л) + поливиниловый спирт (1 ммоль основания/л) + Na_2SO_4 (20 г/л).

Рис. 3. Кривые светопроницаемости:
I — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л);
II — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л) + метилцеллюлоза (1 ммоль основания/л);
III — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л) + метилцеллюлоза (1 ммоль основания/л) + + Na_2SO_4 (5 г/л);
IV — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л) + метилцеллюлоза (1 ммоль основания/л) + + Na_2SO_4 (20 г/л);
V — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л) + Na_2SO_4 (5 г/л);
VI — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л) + Na_2SO_4 (20 г/л).

Рис. 4. Кривые светопроницаемости:
I — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л);
II — Бензопурпурин (0,01 ммолей/л) + поливиниловый спирт (1 ммоль основания/л);
IV — Вензопурпурин (0,01 ммолей/л) + поливиниловый спирт (1 ммоль основания/л) + Na_2SO_4 (20 г/л).

Рис. 5. A — Конго красный (0,01 ммолей/л) в воде;
A′ — Конго красный (0,01 ммолей/л) в водном растворе пиридина (20%);
B — Бензопурпурин 4_B (0,01 ммолей/л) в воде;
B′ — Бензопурпурин 4_B (0,01 ммолей/л) в водном растворе пиридина (20%).

Рис. 6. Удельная вязкость красителей в растворе метилцеллюлозы в зависимости от молярной концентрации красителя:
1 — Конго красный + метилцеллюлоза (10 ммолей/л);
1′ — Конго красный + метилцеллюлоза (5 ммолей/л);
3 — Бензопурпурин 4_B + метилцеллюлоза (10 ммолей/л);
3′ — Бензопурпурин 4_B + метилцеллюлоза (5 ммолей/л);
5 — Чикаго синий $_B$ + метилцеллюлоза (10 ммолей/л);
5′ — Чикаго синий $_B$ + метилцеллюлоза (5 ммолей/л);
6 — Чикаго синий 6_B + метилцеллюлоза (10 ммолей/л);
6′ — Чикаго синий 6_B + метилцеллюлоза (5 ммолей/л).

Рис. 7. Регистрация спектра лучей K (CuK) при помощи счётчика Гейгера следующих плёнок :
1 — Метилцеллюлоза ;
2 — Метилцеллюлоза + конго красный (молярное отношение 20 :1);
3 — Метилцеллюлоза + конго красный (молярное отношение 10 :1).
Рис. 8. Присоединение молекулы конго красного к целлюлозе.
Рис. 9. Хлопковая целлюлоза (линтерс).
Рис. 10. Сульфитная беленная целлюлозная масса.
Рис. 11. Беленная крафт-целлюлоза.

INTERACŢIUNEA DINTRE COLORANŢI ŞI MACROMOLECULE. INFLUENŢA COLORANŢILOR ASUPRA VITEZEI DE RAFINARE A PASTELOR

(Rezumat)

Trecînd în revistă o vastă serie de cercetări întreprinse de autor relativ la interacţiunea între coloranţi şi molecule, se subliniază, în particular, interesul ce-l prezintă pentru problema tehnologiei de rafinare a pastelor de hîrtie faptul că coloranţi, ce formează complexe cu macromoleculele celulozice, fac să crească în mod vădit viteza de rafinare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. I — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l);
II — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + metilceluloză (1 mmol bază/l);
III — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + metilceluloză (1 mmol bază/l) + Na_2SO_4 (5 g/l);
IV — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + metilceluloză (1 mmol bază/l) + Na_2SO_4 (20g/l);
V — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + Na_2SO_4 (5 g/l);
VI — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + Na_2SO_4 (20g/l).

Fig. 2. Curbe de transmisie pentru :
I — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l);
II — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + alcool polivinilic (1 mmol bază/l);
IV — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) + alcool polivinilic (1 mmol bază/l) + + Na_2SO_4 (20 g/l).

Fig. 3. Curbe de transmisie pentru :
I — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l);
II — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + metilceluloză (1 mmol bază/l);
III — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + metilceluloză (1 mmol bază/l) + Na_2SO_4 (5 g/l);)
IV — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + metilceluloză (1 mmol bază/l) + Na_2SO_4 (20 g/l;)
V — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + Na_2SO_4 (5/gl);
IV — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + Na_2SO_4 (20g/l) ;

Fig. 4. Curbe de transmisie pentru :
I — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l);
II — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + alcool polivinilic (1 mmol bază/l);
IV — Benzopurpurină (0,01 mmoli/l) + alcool polivinilic (1 mmol bază/l) + + Na_2SO_4 (20g/l).

Fig. 5. Curbe de transmisie pentru :
A — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) în apă;
A′ — Roşu de Congo (0,01 mmoli/l) în soluţie apoasă de piridină (20%);
B — Benzopurpurină 4_B (0,01 mmoli/l) în apă;
B′ — Benzopurpurină 4_B (0,01 mmoli/l) în soluţie apoasă de piridină (20%).

Fig. 6. Viscozităţi specifice ale coloranţilor în soluţii de meticeluloză, în funcţie de concentraţia molară a colorantului :
1 — Roşu de Congo + metilceluloză (10 mmoli/l);
1′ — Roşu de Congo + metilceluloză (5 mmoli/l);
3 — Benzopurpurină 4_B + metilceluloză 10 mmoli/l);
3′ — Benzopurpurină 4_B + metil celuloză (5 mmoli/l).

5 — Albastru de Chicago $_B$ + metilceluloză (10 mmoli/l);
5′ — Albastru de Chicago $_B$ + metilceluloză (5 mmoli/l);
6 — Albastru de Chicago 6_B + metilceluloză (10 mmoli/l);
6′ — Albastru de Chicago 6_B + metilceluloză (5 mmoli/l).

Fig. 7. Inregistrarea cu ajutorul contorului Geiger a spectrului de raze K (Cu K) a peliculelor de :
1) — Metilceluloză;
2) — Metilceluloză + Roşu de Congo (raport molar 20 : 1);
3) — Metilceluloză + Roşu de Congo (raport molar 10 : 1).

Fig. 8. Adiţia unei molecule de Roşu de Congo la celuloză.
Fig. 9. Celuloză linters.
Fig. 10. Pastă sulfit albită.
Fig. 11. Pastă kraft albită.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

661.728

CERCETĂRI ÎN DOMENIUL OBŢINERII CELULOZELOR DE MARE RANDAMENT

DE

V. DIACONESCU, EMANUEL POPPEL, GH. NICHITUŞ*), ERNA WEISS*),
ELENA CALISTRU, DOREL FELDMAN, C. MATASE*),
N. ASANDEI, GH. ROZMARIN
şi
CRISTOFOR SIMIONESCU**)
membru corespondent al Academiei R.P.R.

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 23–29 iunie 1958

I. Introducere

Cererea mereu crescîndă de materiale fibroase pentru industria hîrtiei a pus, încă cu ani în urmă, problema obţinerii acestora cu un randament mai ridicat. Astfel apare noţiunea de semiceluloze prin care se înţeleg semifabricatele fibroase, obţinute prin destrămarea mecanică a lemnului, supus în prealabil sau concomitent unei acţiuni chimice care urmăreşte slăbirea legăturilor dintre celule, fără distrugerea lor.

În urma unui astfel de tratament, pastele obţinute conţin o cantitate mai mare de lignină alături de care se menţin cea mai mare parte de hemiceluloze — cunoscute ca avînd un rol favorabil în tehnologia fabricării hîrtiei.

Din categoria semicelulozelor fac parte alături de pastele chimico-mecanice şi mecano-chimice, celulozele de mare randament (C. M. R.) — clasă de semifabricate fibroase obţinute din vegetale prin procedeele obişnuite de dezincrustare — cea mai apropiată din punct de vedere a compoziţiei chimice de celulozele propriu zise.

În ceea ce priveşte randamentul de obţinere a acestora din urmă, literatura de specialitate [1], stabileşte ca valori limite 50 ... 65%, deşi aceste valori pot fi depăşite.

Se cunosc mai multe rezolvări tehnologice ale procesului de prelucrare a lemnului în C.M.R. Ele sînt condiţionate parţial de natura materiei prime (lemn de răşinoase, lemn de foioase şi plante anuale) şi diferă fie funcţie de procedeul de dezincrustare (sulfat, natron, sulfit, sulfit neutru de sodiu) şi parametrii acestuia, cît şi de utilajul tehnologic întrebuinţat.

Aşa de exemplu W. D. Keer şi S. A. Harding [2] supun dezincrustării răşinoase, prin procedeul sulfit, variind concentraţia în SO_2 total şi bază, realizînd prin aceasta valori crescînde ale pH-ului, care în condiţiunile unor temperaturi care variază de la 130 ... 170°C conduc la randamente cuprinse între 50 ... 93%. Se înţelege că în limitele acestor randamente sînt integrate şi celulozele de mare randament.

N. A. Rozenberger [3] în cadrul unui studiu asupra diverselor tipuri de dezincrustări în vederea obţinerei celulozelor de mare randament se opreşte şi asupra fierberilor sulfit. El obţine randamente de 65%, efectuînd fierberea la 130°C, timp de 5 ore,

*) de la fabrica „Reconstrucţia" — Piatra Neamţ.
**) cu colaborarea absolvenţilor Stela Rădulescu, Agata Gheorghiu şi Feodosia Moroi.

cu o soluţie de următoarea compoziţie: 8% SO_2 total, 0,9% CaO şi apreciază că proprietăţile fizico-mecanice ale pastei obţinute sînt inferioare acelora realizate prin pocedeul sulfat.

Alte date din literatură referitoare la celulozele sulfit de mare randament conchid asupra posibilităţii executării fierberilor prin procedee discontinui, continui şi chiar în fază de vapori [4].

Interesante sînt concluziile privitoare la dezincrustarea foioaselor şi plantelor anuale prin procedeul sulfit neutru de sodiu [3], prin care se obţin randamente ridicate în paste înălbite, proprii mai ales pentru fabricarea hîrtiei de tipar şi a cartoanelor ondulate. Neajunsul procedeului constă în imposibilitatea de a utiliza lemnul de răşinoase, rezolvarea necorespunzătoare a problemei regenerării produselor chimice şi formarea abundentă a mucilagiilor.

În sfîrşit, obţinerea celulozelor sulfat de mare randament, ce constitue obiectul notei de faţă, preocupă specialişti din numeroase ţări, dovedindu-se una din problemele foarte actuale.

Importanţa ei trebuie subliniată şi prin faptul că procedeul sulfat de mare randament priveşte nu numai lemnele de răşinoase şi de foioase, ci şi plantele anuale şi chiar amestecuri de materii prime de naturi diferite.

Unul dintre noi [5] a arătat într-o notă publicată în 1957 că în esenţă, procedeul sulfat de mare randament se deosebeşte de cel obişnuit prin folosirea unei cantităţi reduse de alcalii active (10 ... 20% Na_2O raportat la greutatea lemnului) cu menţinerea compoziţiei normale a componenţilor, sau prin micşorarea sensibilă a duratei de fierbere, în special a fierberii propriu zise. Ca regim de temperatură sînt indicate limitele de 165 ... 175°C.

Repartizarea gradului de dezincrustare se cere a fi uniformă pe întregul material din fierbător, ceea ce rezultă dintr-o pătrundere completă şi omogenă a leşiei în material. În acest sens se cunosc unele mijloace, care s-au dovedit a fi utile, în tratarea preliminară a aşchiilor, ca cele folosite în procedeele „Va Purge", „Vilamo", „Va-Presse", „Pamen", etc.

Materialul obţinut în fierberile pentru celuloze de mare randament, fiind incomplet dezincrustat, se urmăreşte ca acesta, împreună cu leşiile de fierbere, să fie supus unei destrămări (consistenţa 4 ... 6%) pe cît posibil încă în stare caldă. Aceasta, datorită temperaturii şi prezenţei alcaliilor, conduce la o uşurare a desfacerii mecanice a materialului nefiert, în mănunchiuri de fibre şi chiar fibre separate.

Pentru faza de fabricaţie respectivă, se pot folosi mori cu disc tip Sutherland, Bauer, Voith, etc., sau mori conice, mori cu bile, cu bare şi altele.

Succesiunea operaţiilor după destrămare este aproape aceeaşi şi nu diferă principial de cele ale celulozei sulfat normale.

Procedeele de obţinere a celulozelor de mare randament cunosc aplicaţii industriale pe scară relativ redusă, fiind vorba doar de un început în experimentarea lor. Astfel la combinatul Kehra [6], de la sfîrşitul anului 1956 s-au efectuat fierberi de mare randament prin scăderea temperaturii de la 171 la 165°C şi a cantităţii de alcalii de la 3210 kg Na_2O pe fierbător (125 m^3) la 2700 kg. În aceste condiţii celuloza obţinută a înregistrat o scădere a lungimii de rupere de la 11000 la 10000 m, în timp ce numărul de duble îndoituri s-a ridicat de la cca. 1000 la 1700.

La fabrica Bathurst — Canada [7], la care s-au făcut cercetări şi experimentări de durată pentru obţinerea unui mare randament în celuloză sulfat, s-a ajuns la concluzia că această problemă este departe de a fi legată numai de o rafinare corespunzătoare a materialului brut, ci şi de o fierbere uniformă, în măsură să contribuie la rezolvarea problemei. Un factor însemnat la fierberea sulfat de mare randament îl reprezintă obţinerea unui material cu un grad de dezincrustare mai mic, dar uniform impregnat; impregnarea uniformă şi completă permite ridicarea temperaturii într-un timp mult mai scurt.

La Bathurst se obţine un randament în celuloză de la 62 ... 65%, cu aspectul unei celuloze mai moi decît la randamente de 50 ... 55%, drept urmare a fierberii uniforme şi a prelucrării mecanice ulterioare.

Celulozele produse la această fabrică, cu un indice de clor cuprins între 16 ... 19, prezintă însuşiri fizico-mecanice comparabile — menţiune specială pentru rezistenţa la plesnire — cu a celulozelor sulfat normale. Aceste celuloze sînt folosite cu succes la fabricarea cartonului ondulat şi a hîrtiei pentru saci.

La combinatul din Seghej [8] s-au efectuat încercări de laborator și la scară industrială, rezultatele obținute confirmînd posibilitatea obținerii celulozelor sulfat de mare randament, fără afectarea însușirilor fizico-mecanice.

La un randament de 55%, lungimea de rupere a fost de ordinul 10300 ... 10700 m cu o rezistență la plesnire de cca 7,5 kg/cm^2.

Drept consecințe cu caracter de generalizare, în cadrul celulozelor sulfat de mare randament se semnalează scăderea consumurilor specifice de materii prime, o creștere a indicelui de utilizare a utilajului (prescurtarea turnusului), o micșorare a consumului de substanțe chimice și dificultăți în tehnologia recuperării alcaliilor, drept urmare a unui procent mai scăzut de substanțe organice în leșiile negre.

II. Partea experimentală

Atît cercetările noastre de laborator, cît și primele probe din uzină pe care le prezentăm, au urmărit trecerea pe C.M.R. a actualei secții sulfat de la fabrica „Reconstrucția" — Piatra Neamț.

Soluțiile preconizate pe parcurs au drept scop de a aduce în cel mai scurt timp — fără modificări importante în circuitul actual — creșterea de producție, corespunzătoare unor randamente în material fibros de 55 ... 60%.

1. Rezultate de laborator

a) *Modul de lucru.* Pentru executarea unor fierberi de mare randament, în condiții de laborator, s-a folosit lemn de molid de următoarea compoziție:

celuloză 50,5%,
lignină 32,2%,
cenușă . . . . . 0,32%.

Surcelele, de dimensiuni în jur de 25 × 5 × 3 mm, au fost supuse fierberii într-o autoclavă de laborator de 2 l capacitate, în care s-au introdus 235 g lemn absolut uscat și 1350 cm^3 leșie de fierbere, realizîndu-se astel un hidromodul egal cu 6.

S-au menținut constante hidromodulul, durata de încălzire pînă la temperatura maximă de fierbere (105 min.), compoziția chimică a leșiei (causticitatea și sulfiditatea) și s-a urmărit influența modificărilor de alcalii active, raportate la lemn absolut uscat, a temperaturii maxime de fierbere și a duratei de menținere la această temperatură.

b) *Influența unor parametri de fierbere asupra randamentului și proprietăților materialului celulozic.* S-a menținut, în condițiile de laborator, un raport de alcalii active, la lemn absolut uscat, de 18, 20 și 25% pentru fierberea comparativă la temperaturile de 165°C și 170°C, cu durate de 15, 25, 35, 55 și 70 minute palier.

Compoziția leșiei de fierbere (factor constant) este dată în tabelul 1.

În tabelul 2 se cuprind datele experimentale ale fierberilor efectuate la temperatura de 165°C cu 18% alcalii active, la lemn absolut uscat, comparate cu fierberea de referință (nr. 7) efectuată cu 25% alcalii active, exprimate în Na_2O.

Tabelul 3 rezumă datele experimentale ale unor fierberi efectuate la aceeași temperatură, cu 20% alcalii active raportate la lemn absolut

Tabelul 1

Concentraţia leşiei în Na_2O g/l alcalii aetivi	Causticitate	Sulfiditate	NaOH exprimat în		Na_2CO_3 exprimat în		Na_2S exprimat în	
			NaOH g/l	Na_2O g/l	Na_2CO_3 g/l	Na_2O g/l	Na_2S g/l	Na_2O g/l
112,12	0,765	0,260	104,03	80,87	42,4	24,8	39,3	31,25

Tabelul 2

Nr. crt.	Timp la palier min.	Umiditate %	Celuloză %	Lignină %	Pentozane %	Umiditate pentozane %	Randament total %
1	15	10,81	63,9	24,9	11,9	6,0	66
2	25	5,31	65,2	20,16	11,4	2,65	63,1
3	35	10,7	70,3	20,0	10,9	4,0	62,8
4	45	10,16	71,7	20,0	10,6	4,16	62,2
5	55	11,38	74,63	18,5	10,6	3,31	58,5
6	70	9,16	76,6	15,05	10,5	3,88	57,5
7	50	9,8	82,3	8,0	10,89	—	—

uscat, comparate cu fierberea de referinţă (nr. 5) la o alcalinitate activă (Na_2O) de 25%. Materialul lemnos utilizat pentru aceste fierberi prezenta următoarea compoziţie:

umiditate 15,7%,
cenuşă 0,21%,
pentozane 10,65%,
celuloză 54,51%,
lignină . . . . . 30,4% .

Tabelul 3

Nr. fierberii	Durata de fierbere la 165°C min.	Randament în material brut %	Material nefiert %	Caracteristicile celulozei			
				Umiditate %	Celuloză %	Lignină %	Pentozane %
1	55	59	3,5	10,53	81,57	15,1	4,11
2	35	69	4,5	6,43	77,39	16,23	5,78
3	25	72	—	6,21	74,34	17,50	6,74
4	15	71	3,70	7,91	71,53	20,49	8,38
5	55	53	3,6	9,55	88,90	5,95	3,13

Tabelul 4

Nr. fier-berii	Timp la palier min.	Umiditate %	Celuloză %	Lignină %	Pentozane %	Umiditate pentozane %	Randament total %
1	15	10	68,92	19,4	11,1	6,66	73,7
2	25	10,7	73,4	16,47	10,25	5,94	66,8
3	35	10,2	74,8	15,84	10,03	4,23	66,2
4	45	9,5	77,0	12,88	10,2	8,11	62,0
5	55	8,6	80,19	11,3	10,4	7,3	59,5
6	70	9,4	81,8	9,7	10,2	5,6	53,0
7	50	9,8	82,3	8,0	10,89	—	—

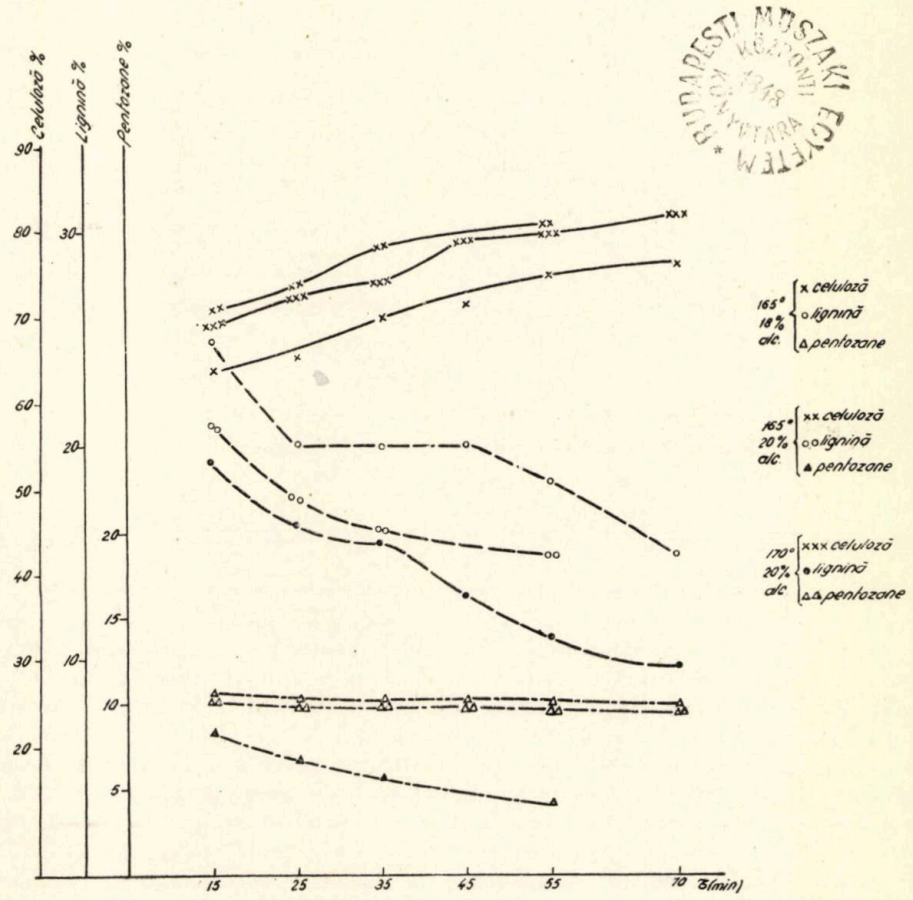


Fig. 1 — Variația conținutului de celuloză, lignină și pentozane.

Fierberile de la temperatura de 170°C, ale căror rezultate sînt prezentate în tabelul 4, se referă la un raport de 20% alcalii active, exprimate în Na_2O, la lemn absolut uscat, comparaţia fiind efectuată cu un proces clasic (fierberea Nr. 7, alcalinitatea activă fiind de 25%).

Pentru o mai uşoară urmărire a datelor prezentate în tabelele 2 ... 4, se reprezintă, în fig. 1 variaţia procentuală a celulozei, ligninei şi pentozanelor, pentru fierberile corespunzătoare, iar fig. 2 permite, în baza diagramei Ross, o mai bună interpretare a rezultatelor experimentale obţinute.

După spălare, materialul fibros a fost destrămat într-un aparat tip Oppener cu 500 rotaţii/minut, timp de 18 minute, adus la o consistenţă de 0,3% şi sortat în două trepte în circuitul continuu al staţiei noastre

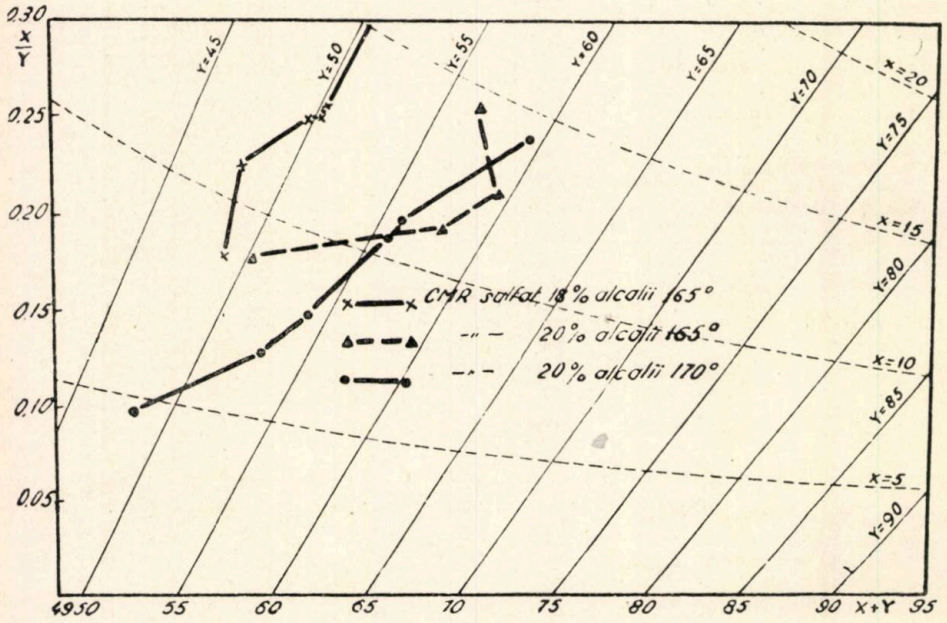


Fig. 2. — Reprezentarea pe diagrama Ross a fierberilor de mare randament sulfat.

pilot (sortator cu membrană, avînd 500 vibraţii pe minut). Pentru prima treaptă placa sortatoare prezintă orificii de 3 mm diametru, iar pentru a doua — fante cu dimensiunile de 0,3 × 30 mm. Materialul sortat şi îngroşat a fost măcinat la o consistenţă de 3,3% pînă la 32 ... 34° SR, într-un holendru de laborator tip Rieth. Pasta obţinută a fost trasă în foi pe aparatul Rapid-Kötchen, menţinîndu-se un gramaj constant de cca 70 g/m². Celulozele de mare randament, spre deosebire de cele de referinţă, au fost supuse, după fierbere, unei destrămări calde într-o moară de laborator cu bile, cu o lungime de 280 mm şi un diametru interior de 140 mm. Bilele de oţel, cu diametrul cuprins între 17 şi 23 mm, reprezintă o greutate de 3120 g. Turaţia morii a fost de 80 rotaţii/minut.

După spălare, s-a continuat destrămarea celulozei de mare randament în aparatul Oppener timp de 20 minute, după care s-a supus aceloraşi operaţiuni ca şi în cazul celulozei sulfat, obişnuite.

Se menţionează faptul specific pentru celuloza de mare randament că refuzul abundent de la sortare, după rafinări repetate, a putut fi complet recuperat.

Tabelul 5

Caracteristicile fizico-mecanice ale celulozelor sulfat obişnuite şi de mare randament cu 18% alcalii active la 165°C

Caracteristici	Celuloză sulfat obişnuită	C.M.R. (fierberea nr. 5)
Grad de măcinare (°SR)	31,6	32,0
Gramaj (g/m²)	73,3	73,6
Lungime de rupere (m)	8189	8170
Alungire (%)	1,81	1,61
Duble îndoituri	1142	977
Rezistenţă relativă la plesnire (kgf/cm²)	2,76	2,48
Săgeata de boltire (mm)	6,54	6,76

Tabelul 6

Caracteristicile fizico-mecanice ale celulozelor sulfat obişnuite, de mare randament şi ale celulozelor în amestec

Caracteristici	Celuloză sulfat obişnuită	Celuloza obişnuită 50% + C.M.R. 50%	C.M.R.
Grad de măcinare (°SR)	34	34	34
Gramaj (g/m²)	71	70	71
Lungime de rupere (m)	7711	7505	7480
Alungire (%)	2,23	2,09	2,05
Duble îndoituri	1326	1092	1397
Rezistenţă relativă la plesnire (kgf/cm²)	2,11	2,08	1,93
Săgeata de boltire (mm)	6,8	7,1	6,83

Foile din celuloza sulfat obişnuită şi din celuloza de mare randament de la aparatul Rapid-Kötchen, condiţionate la o umiditate $\varphi = 65\%$ şi la temperatura de 20°C, au fost supuse încercărilor fizico-mecanice, obţinîndu-se rezultatele din tabelele 5...7. Aceste rezultate corespund fierberilor, ale căror caracteristici au fost date în tabelele 2...4.

c) *Interpretarea rezultatelor de laborator.* În condiţii de laborator s-au obţinut, fără dificultăţi, celuloze de mare randament. Aceste produse, mai închise la culoare decît celuloza sulfat normală, prezintă procente de lignină mai ridicate decît aceasta din urmă şi, firesc, randamente sporite.

Se remarcă o creştere proporţională a randamentului, cu scurtarea turnusului de fierbere la temperatura maximă. Spre exemplu, pentru celuloza cu 18% alcalii active, la o durată de 15 minute, randamentul a fost de 66%, în timp ce la 70 minute valoarea sa a scăzut la 57,5%. În mod analog, pentru cazul unei alcalinităţi de 20% şi o temperatură de 170°C, randamentul a scăzut de la 73,7% la 53%, pentru acelaşi interval de timp.

Tabelul 7

Caracteristicile fizico-mecanice ale celulozelor sulfat obişnuite şi de mare randament cu 20% alcalii active la 170°C

Caracteristici	Celuloză sulfat obişnuită	C.M.R. (fierbere Nr. 4)
Grad de măcinare (°SR)	31,6	31,5
Gramaj (g/m²)	73,3	72,3
Lungime de rupere (m)	8189	7809
Alungire (%)	1,81	2,3
Duble îndoituri	1142	1253
Rezistenţă relativă la plesnire (kgf/cm²)	2,76	2,70
Săgeată de boltire (mm)	6,54	6,30

Scăderea randamentului cu creşterea duratei de fierbere la temperatura maximă, se face pe seama trecerii în soluţie a ligninei, prin menţinerea în cea mai mare parte a procentului de hemiceluloze — fapt cunoscut drept favorabil în cazul celulozelor papetare. Acest lucru rezultă din analiza curbelor reprezentate în fig. 2, deoarece raportul lignină/hidraţi de carbon totali scade pe măsura măririi duratei de dezincrustare.

O dată cu creşterea alcalinităţii active, concomitent cu solubilizarea ligninei, are loc şi trecerea parţială în soluţie a hidraţilor de carbon. Astfel, din fig. 2 se observă că în cazul fierberii cu o alcalinitate de 18%, la 165°C, curba urmăreşte îndeaproape dreapta y = const., în timp ce pentru alcalinitatea de 20%, la 165 şi 170°C, curbele prezintă pante, în raport cu aceeaşi dreaptă în sensul micşorării cantităţii de hidraţi de carbon.

La mărirea palierului, raportul lignină/hidraţi de carbon se micşorează, ceea ce denotă o deplasare a procesului în direcţia obţinerii de celuloze mai moi. Micşorarea alcalinităţii, la aceleaşi intervale de timp, duce la creşterea raportului lignină/hidraţi de carbon, respectiv spre celuloze mai tari, cu randamente crescute.

Însuşirile fizico-mecanice ale materialului studiat se referă la unele fierberi specifice de mare randament. Pentru cazul fierberilor cu 18% şi şi 20% alcalii active, la temperatura de 165°C, aceste date sînt sensibil apropiate de cele ale fierberilor de referinţă, pentru ca la 20% alcalii şi 170°C să se observe unele scăderi ale lungimii medii de rupere şi creşteri a numărului de duble îndoituri la C.M.R. Rezistenţa relativă la

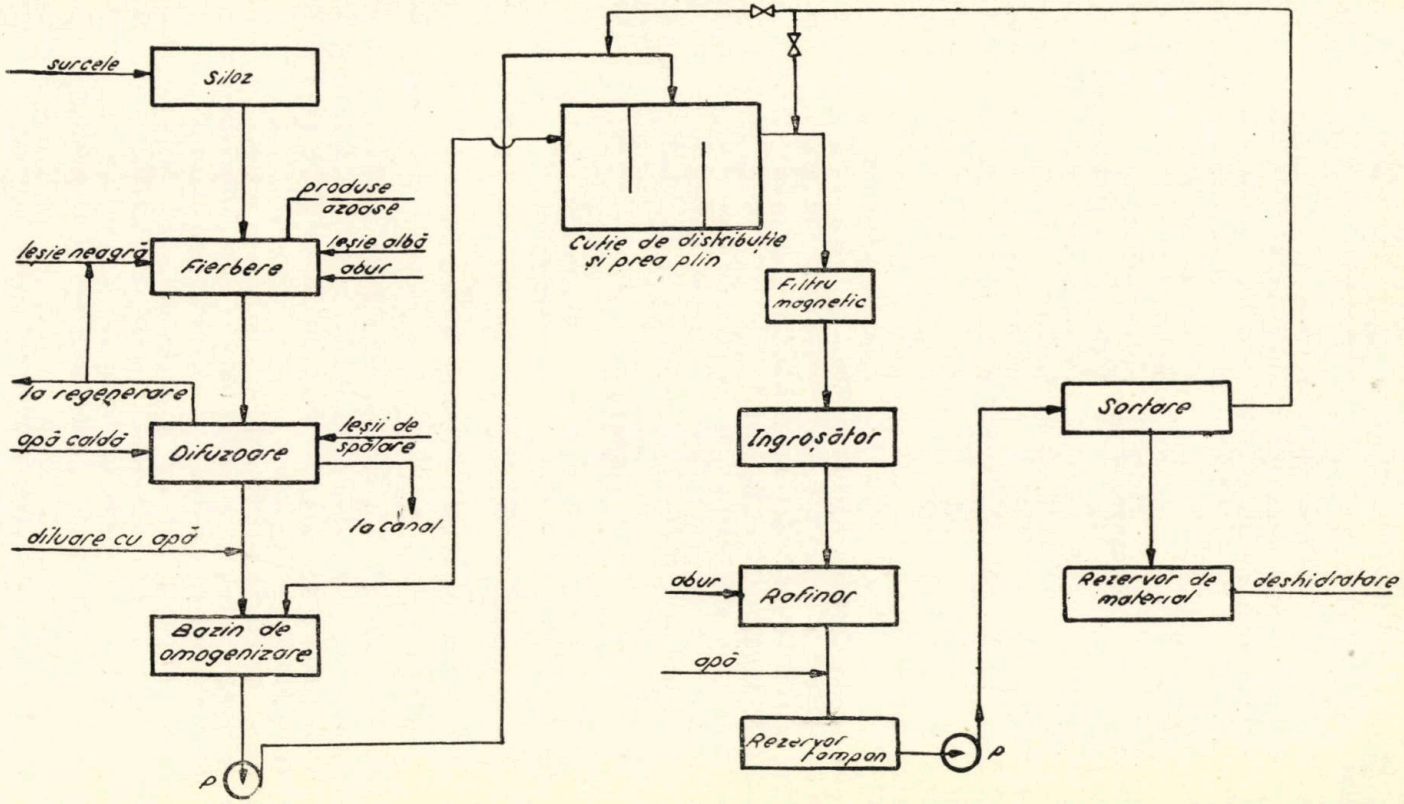


Fig. 3. — Schema tehnologică de obținere a celulozei de mare randament (aplicată la posibilitățile prezente ale fabricii „Reconstrucția"-Piatra Neamț, secția sulfat).

plesnire, săgeata relativă şi alungirea, păstrează valori asemănătoare celulozelor sulfat normale.

2. Rezultate de uzină

Pentru a se experimenta, în condiţii industriale, obţinerea unor celuloze cu randament sporit, au fost necesare unele adaptări pe circuitul actual al fabricii. Aceste modificări sînt specificate în schema din fig. 3. Facem remarca, că în momentul de faţă, fierberea sulfat de la fabrica „Reconstrucţia"- Piatra Neamţ este în fapt o fierbere sodă — sulf. Deşi aceasta nu afectează principial parametrii tehnologici, este firesc ca atît leşiile de fierbere, cît şi materialul celulozic obţinut, să fie consecinţa cineticii procesului în condiţiile date ale fierberii.

Tabelul 8

Componenţii	Conţinutul %
Celuloză	51,81
Lignină	29,48
Pentozane	7,18
Solubili (eter etilic)	0,93
Cenuşă	0,61
Umiditate	13,34

Pentru prima dată se produc celuloze de mare randament pe fierberi sodă – sulf. S-a urmărit o fierbere de mare randament, comparativ cu una din fabricaţia curentă. Compoziţia materiei prime utilizate (lemn de molid) este specificată în tabelul 8.

Fierberile s-au efectuat cu un amestec de leşie albă şi neagră din fabricaţia curentă. Compoziţia leşiei albe este redată în tabelul 9. De asemenea s-a găsit în leşia neagră un conţinut de 32,43 g/100 cm^3 re-

Tabelul 9

Causticitate %	Sulfiditate %	NaOH g/l exprimat în		Na_2CO_3 g/l exprimat în		Na_2S g/l exprimat în	
		NaOH	Na_2O	Na_2CO_3	Na_2O	Na_2S	Na_2O
81,54	9,80	115,55	89,59	34,768	20,33	12,40	9,85

ziduu uscat, din care 12,13 g/100 cm^3 reprezintă substanţe anorganice, iar 20,40 g/100 cm^3 – substanţe organice. În analiza leşiei negre s-au întîmpinat greutăţi, provenite din prezenţa în mediu a unor substanţe puternic reducătoare.

Pentru completarea alcalinităţii necesare s-a introdus în fierbător NaOH, iar pentru realizarea sulfidităţii — cantitatea corespunzătoare de sulf. Sub aspectul cantitativ, la încărcarea fierbătorului s-au păstrat aceleaşi valori atît pentru lemn, cît şi pentru chimicale, la fierberea C.M.R. şi la cea sulfat normală; fierberea de mare randament s-a realizat prin micşorarea duratei de fierbere la presiunea maximă.

Condiţiile în care au fost realizate cele două fierberi sînt redate în tabelul 10.

Pentru fierberea de mare randament, după primele 20 minute s-a

Tabelul 10

	Condiții de lucru	Fierberea (307) normală	Fierberea (301) C.M.R.
1.	Volumul fierbătorului (m^3)	40	40
2.	Lemn încărcat în fierbător (kg)	6400	6400
3.	Leșie albă (m^3)	4,8	4,0
4.	Leșie neagră (m^3)	18,0	19,0
5.	NaOH adăugat în fierbător (kg)	370,0	570,0
6.	Sulf adăugat în fierbător (kg)	70,0	70,0
7.	Causticitatea (%)	88,02	89,88
8.	Sulfiditatea (%)	21,43	24,13
9.	Alcalii totale (%)	13,60	13,20
10.	Alcalii active (%)	12,10	11,87
11.	Durata încălzirii la presiune maximă	2 ore 15 min.	2 ore 10 min.
12.	Durata menținerii la palier	1 oră 25 min.	10 min.
13.	Durata degazării terpenice	5 min.	5 min.
14.	Durata golirii	13 min.	20 min.
15.	Timpul total util de fierbere (11+12+13+14)	4 ore	2 ore 45 min.
16.	Durata spălării în difuzor	13 ore	6 ore

găsit în soluția de fierbere 31,30 g/100 cm^3 substanță uscată, 13,17 g/100 cm^3 cenușă și 18,13 g/100 cm^3 substanță organică.

Se remarcă din tabelul 10 că la operația de golire a fierbătorului, după fierberea de mare randament, s-a înregistrat o creștere a duratei, de 7 minute, creștere neesențială față de întregul turnus.

Suflarea materialului s-a făcut în condiții normale în difuzor, iar spălarea, datorită structurii materialului și a tasării acestuia, a necesitat numai 6 ore, față de 13 ore la o fierbere normală.

Evacuarea materialului spălat a înregistrat oarecare greutăți datorită unei staționări prelungite în difuzor. Din această cauză, s-a consumat o cantitate mai mare de apă pentru antrenare, ceea ce a determinat o consistență scăzută în holendrul de omogenizare.

Operațiunea de rafinare, în conformitate cu schema tehnologică din fig. 3, s-a efectuat prin trecerea integrală a materialului într-un rafinor cu discuri tip Voith cu următoarele caracteristici principale :

diametrul discurilor	800 mm,
nr. de rotații	725 rot/min.,
motor	180 kw,
motor șnec	1450 rot/min., 8 kw,
nr. maxim de rotații al șnecului	90 rot/min.,
distanța dintre discuri	0,25 mm.,
consistența materialului	1,28%.

Alimentarea rafinorului s-a făcut cu o cantitate redusă de apă, la care, însumîndu-se condensul din aburul introdus pentru încălzirea materialului în timpul rafinării, a rezultat o consistență finală de 1,23%.

Materialul rafinat, introdus pe circuitul normal, a dat după sortare și tragere pe mașină o celuloză, ale cărei caracteristici chimice, față de fierberea de referință (fără rafinare), sînt prezentate în tabelul 11.

Tabelul 11

Componenţii %	Probă medie difuzor fierberea (301)	Celuloza fierberea (301) (C. M. R.)	Celuloza fierberea (307) (normală)
Celuloză	74,64	77,57	79,04
Lignină	21,54	14,86	10,02
Pentozane	6,84	6,30	6,27
α celuloză	—	76,69	79,08
Umiditate	79,16	3,60	6,33

Caracteristicile fizico-mecanice ale acestor celuloze, de referinţă şi de mare randament, la o măcinare de 32° SR (holendrul Rith), consistenţă 3,3%) sînt date în tabelul 12.

Tabelul 12

Caracteristici	Fierberea (307) normală	Fierberea (301) C. M. R.
Gramaj (g/m^2)	71,7	71,9
R (kg)	8,82	8,68
Lm (m)	8190	8038
Alungirea (mm)	3,2	3,3
Alungirea (%)	2,1	2,3
Nr. duble îndoituri	781	465
Rezistenţă la plesnire (kgf/cm^2)	1,99	1,93
Săgeata la bombare (mm)	6,6	6,5

În tabelul 13 se cuprind cîteva rezultate obţinute în fabrică pentru celuloza de mare randament, măcinată în moara Jokro, la 3, 60 şi 90 min., condiţiile de rafinare fiind 0,25 şi 0,10 mm distanţă între discuri.

Tabelul 13

Caracteristici	Proba Nr. 1 Distanţa între discuri 0,30 mm; consistenţa 0,48%			Proba Nr. 2 Distanţa între discuri 0,25 mm; consistenţa 1,28%		
	Timp de măcinare			Timp de măcinare		
	30′	60′	90′	30′	60′	90′
Grade SR	16	23	28	16	22	30
Lm (m)	5124	6516	7245	5287	6516	6692
Alungirea (%)	2,5	2,0	2,5	2,2	2,2	2,0
Nr. duble îndoituri	700	550	690	865	575	635

III. Concluzii

În afară de observațiile făcute în cazul interpretării rezultatelor de laborator și care se mențin în linii generale, considerăm necesare următoarele completări :

1. Se poate trece, la secția sulfat a fabricii „Reconstrucția" — Piatra Neamț, la un proces de fabricare a celulozelor de mare randament. Această trecere ar urma să se facă treptat, pentru a nu aduce perturbări în procesul tehnologic. Ea s-ar reflecta într-o creștere rațională a randamentului pînă la obținerea unor produse cu caracteristici fizico-mecanice corespunzătoare cerințelor întreprinderilor consumatoare.

Într-o a doua etapă, în care fabricile consumatoare ar reuși să-și facă completări de utilaj, randamentul ar putea fi crescut pînă la 65%.

2. Deși, așa cum s-a arătat în text, nu există diferențe principiale în ceea ce privește consecințele asupra fierberii de mare randament între procedeele sulfat și sodă—sulf, totuși se vede necesitatea efectuării unui studiu de cinetică a dezincrustării prin acest din urmă procedeu. Studiul ar prezenta interes și pentru îmbunătățirea actualului procedeu de la fabrica „Reconstrucția"-Piatra Neamț.

3. În condițiile în care a fost experimentată de noi, în uzină, obținerea celulozelor de mare randament, nu a fost posibilă modificarea tuturor parametrilor capabili să conducă la economii de materiale și creșteri a indicilor de calitate a celulozei. Se vede necesitatea continuării încercărilor industriale pe același circuit tehnologic, dar cu modificări în consumul de alcalii.

4. Caracteristicile fizico-mecanice ale celulozelor de mare randament obținute în mod normal, vor fi îmbunătățite, dacă consistența materialului la rafinare va crește pînă la 4%. Chiar în condițiile defavorabile în care s-a lucrat (consistența foarte scăzută) s-a obținut celuloză cu indici apropiați de cei ai celulozelor normale. Un proces tehnologic îngrijit ar putea să crească și rezistențele la duble îndoituri, care în cazul fierberilor noastre sînt scăzute.

5. Trecerea treptată la fabricarea celulozelor de mare randament, pe circuitul modificat al secției sulfat de la fabrica „Reconstrucția" — Piatra Neamț, va aduce economiei noastre naționale beneficii rezultate din reducerea consumului de material lemnos și chimicale, alături de creșterea indicelui de folosire a utilajului.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Celuloză, Hîrtie și Fibre artificiale

BIBLIOGRAFIE

1. Surewicz W., Przeglad Papierniczy, 1956, *10*, pp 294—295.
2. Kerr W. D. a. Harding S. A., Pulp Pap. Mag. Can., 1955, **56**, *9*, pp. 103—108.
3. Розенберегер Н. А., Бум. пром., 1954, *11*, стр. 8—12.
4. Kleis S., Papier a Celulosa, 1956, *4*, pp. 76—79.
5. Poppel Em., Celuloză și Hîrtie, 1957, *7*, pp. 236—238.
6. Нзерлис Я. И., Бум. пром., 1957, *7*, стр. 14—16.
7. Limerick I. M. K., Paper Tr. J., 1956, *4*, pp. 20—23,
8. Рогачевский Б. И. и Матюшкина А. П., Бум. пром., 1957, *7*, стр. 17-23.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ЦЕЛЛЮЛОЗЫ ВЫСОКОГО ВЫХОДА

(Резюме)

Настоящая работа соответствует современным потребностям народного хозяйства в рациональном использовании древесинного материала в производстве целлюлозы. Одновременно, в работе преследовали цель получения волокнистого материала, характеризующегося большим содержанием гемицеллюлоз и соответственно лучшими механическими показателями, что привело бы к получению бумаги хорошего качества.

В лабораторных условиях изучали влияние отношения щелочи к древесине, максимальной температуры варки и продолжительности варки при максимальной температуре, оставляя нормальным состав варочной щелочи (степень каустизации 0,75, сульфидность 0,25). Гидромодуль поддерживали постоянным (равным 6). Найденные результаты сопоставляли данным, получаемым в обычной варке, производимой в аналогичных условиях (нормальная варка): содержание пентозанов оставалось в обычных пределах, высокий выход получая за счет завышенного процентного содержания лигнина. Физико-механические показатели полученной целлюлозы незначительно отличаются от обычной сульфатной целлюлозы. Продолжительность размола, однако, следует повысить.

В заводских условиях (завод „Реконструкция" из г. Пятра Нямц) варки высокого выхода велись при постоянстве значений обычных технологических параметров, за исключением продолжительности варки, которую уменьшили. Изучались пробы варочных щелоков во время варки, а также выходы и физико-механические показатели целлюлозного материала. Здесь также наблюдалось повышение выхода за счет завышенного содержания лигнина, причем найденные физико-механические показатели оказались не ниже значений, получаемых в обычном производстве.

Испытания, проведенные на заводе, показали, что переход от современного нормального целлюлозного производства к производству целлюлозы высокого выхода можно осуществить на существующей технологической схеме путем введения рафинера с соответствующим предохранительным устройством последнего.

Объяснение рисунков

Рис. 1. Изменения содержание целлюлозы, лигнина и пентозанов.
Рис. 2. Представление в диаграмме Росса волокон большого сульфатного выхода.
Рис. 3. Технологическая схема полуления целлюлозы большого выхода (примененная к существующим условиям секции сульфата фабрики „Реконструкция": г. Пьятра Нямц).

FORSCHUNGEN AUF DEM GEBIETE DER ERHALTUNG VON ZELLSTOFFEN HOHER AUSBEUTE

(Zusammenfassung)

Die Forschung entspricht, was die richtige Anwendung des Holzmaterials in der Zellstoffindustrie, anbelangt, den heutigen Forderungen der nationalen Wirtschaft. Gleichzeitig wird auch die Erhaltung eines Fibermaterials verfolgt, dans einen grösseren Gehalt an Hemizellulosen aufweisst, sowie auch zu entsprechenden mechanischen Eigenschaften für die Erzeugung von Papier bester Qualität, führen soll. Andere Einzelheiten findet man in den oberen Zusammenfassung.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. Variationsinhalt von Zellstoffen Lignin und Pentozan.
Abb. 2. Die Ross'sche Diagramm der Sulphatkochen hoher Ausbeute.
Abb. 3. Die technologische Erhaltungsschema von Zellstoff hoher Ausbeute (zur heutigen Stand der Fabrik „Reconstrucţia"-Piatra Neamţ, Abteilung Sulphat, angewandt).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

676 017.9

ASUPRA UNOR METODE DE DETERMINARE A GRADULUI DE INCLEIERE A HÎRTIEI

DE

CRISTOFOR SIMIONESCU
Membru corespondent al Academiei R. P. R.

şi

EMANUEL POPPEL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Literatura de specialitate prezintă numeroase încercări, rezultat al unor eforturi substanţiale în direcţia găsirii unei metode de determinare a gradului de încleiere a hîrtiei [1] ... [8]. Majoritatea acestor metode folosesc drept indice pentru gradul de încleiere, viteza de pătrundere a lichidelor prin capilarele hîrtiei. Ele diferă prin natura lichidului de încercare (apă, cerneală, soluţii de coloranţi), cît şi prin înregistrarea momentului de pătrundere completă, deci de apariţia acestor lichide pe faţa opusă celei la care s-a executat determinarea.

Cele mai folosite metode de determinare a gradului de încleiere, după G o l d s m i d [9] se pot clasifica astfel :

a) Metode ce utilizează drept lichid de încercare cerneala.
b) Metode ce utilizează drept lichid penetrant apa.
c) Metode ce utilizează soluţii cu acţiune neutră.
d) Metode electrice.
e) Metode de umectare selectivă.

În Nota de faţă se reţin pentru aprecierea gradului de încleiere a hîrtiei trei metode şi anume :

1) Metoda liniilor, care foloseşte drept lichid de încercare o cerneală specială [2].

2) Metoda J a y m e [10] care se bazează pe plutirea unei probe de de hîrtie pe o baie de cerneală, într-un timp definit, folosindu-se fotometrul pentru determinarea gradului de alb al probei plutite în raport cu gradul de alb al hîrtiei originale.

3) Metoda electrică [5], care considerînd hîrtia în stare uscată ca o membrană izolantă, o foloseşte în stare umezită pentru măsurarea trecerii treptate a curentului cu ajutorul aparatului KBB, redat în fig. 1.

Asupra acestei din urmă metode sînt necesare cîteva precizări. Aparatul KBB este format din doi electrozi, unul de zinc şi celălalt de bronz, separaţi prin foaia de hîrtie supusă determinării. Apa, care acţio-

nează ca electrolit, pătrunde prin electrodul superior construit dintr-o sită de bronz, întinsă pe un inel de alamă şi trece treptat prin foaia hîrtie, stabilind între cei doi electrozi, de zinc şi de bronz, o celulă galvanică.

Intensitatea curentului, mărită pe măsură ce apa trece prin hîrtie, este indicată de un microampermetru. Gradul de încleiere se determină prin timpul ce trece din momentul începerii determinării pînă în momentul cînd microampermetrul înregistrează o intensitate de curent de 100 μA.

Determinările comparative au fost efectuate asupra unor hîrtii încleiate în mediu acid şi neutru, cu procente variate de răşină şi la diferite durităţi ale apelor, pregătite în modul următor [11]:

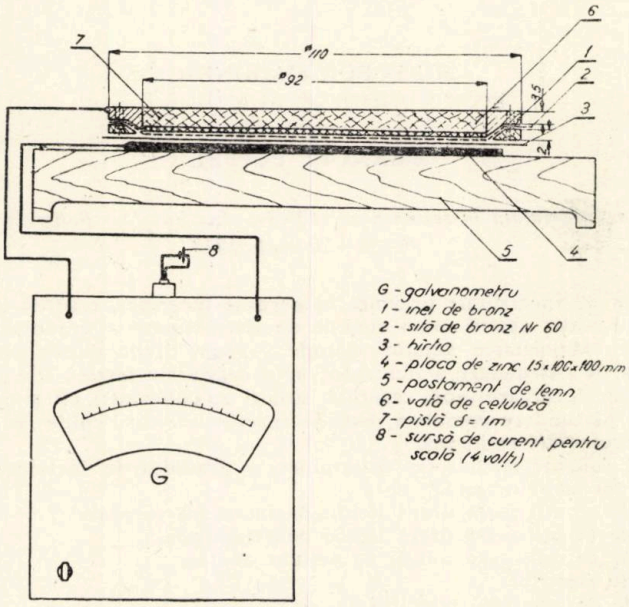


Fig. 1. — Schema instalaţiei.

Celuloza bisulfit IB, a fost măcinată la o consistenţă de 6% într-o moară Jokro cu 170 rot/min., timp de 20 minute. Materiatul rezultat, diluat la o consistenţă de 4%, a fost destrămat timp de 1 minut într-un agitator cu elice cu 2500 rot/min. [12].

Astfel a rezultat o pastă celulozică avînd un grad de măcinare cuprins între 68...70° S.R.

Încleierea acestui material, adus în prealabil la consistenţa de 3%, s-a realizat folosind 2% şi 3% clei Bewoid. Drept coagulanţi în sistemul încleierii neutre, s-au folosit 0,25% $NaAlO_2$ şi 2% $Al_2(SO_4)_3 18H_2O$ (raportat la fibra absolut uscată), pH-ul pastei de hîrtie încleiate fiind $\cong 7$.

În cazul probelor încleiate în mediu acid s-a folosit 4,5...5,5% $Al_2(SO_4)_3\ 18\,H_2O$ (funcţie de procentul de clei utilizat), pH-ul pastei de hîrtie încleiate fiind 4,5..5,0.

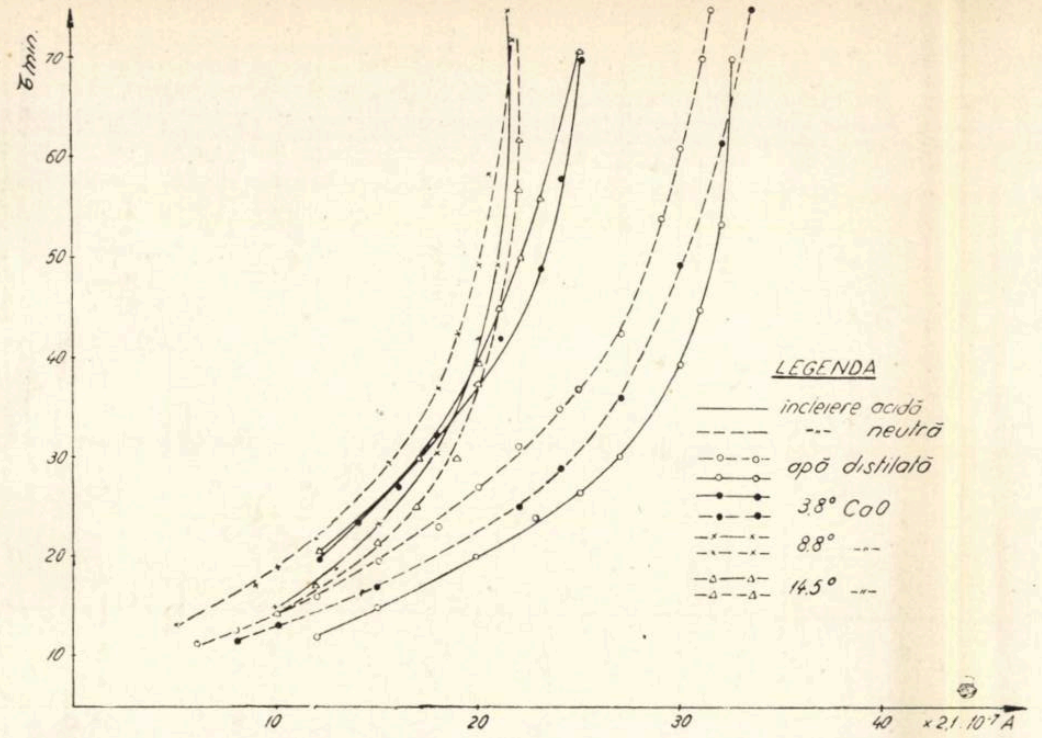


Fig. 2. — Hîrtii încleiate cu 2% clei Bewoid, nepresate (probele *A*)

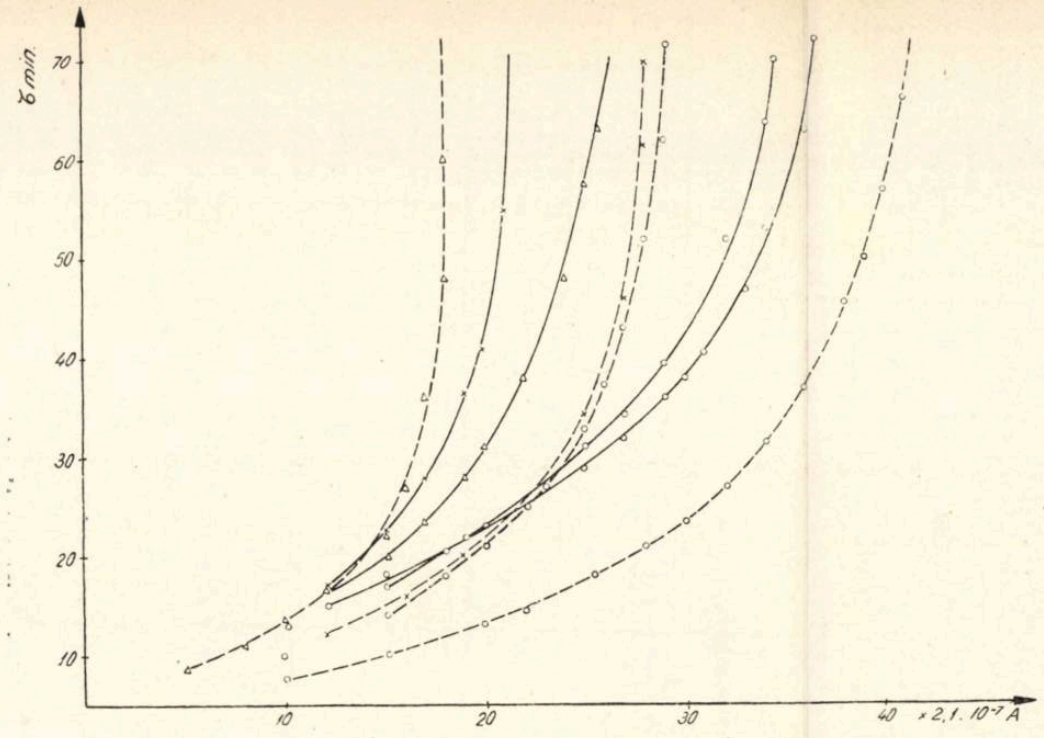


Fig. 3. — Hîrtii încleiate cu 2% clei Bewoid, presate (probele *B*)

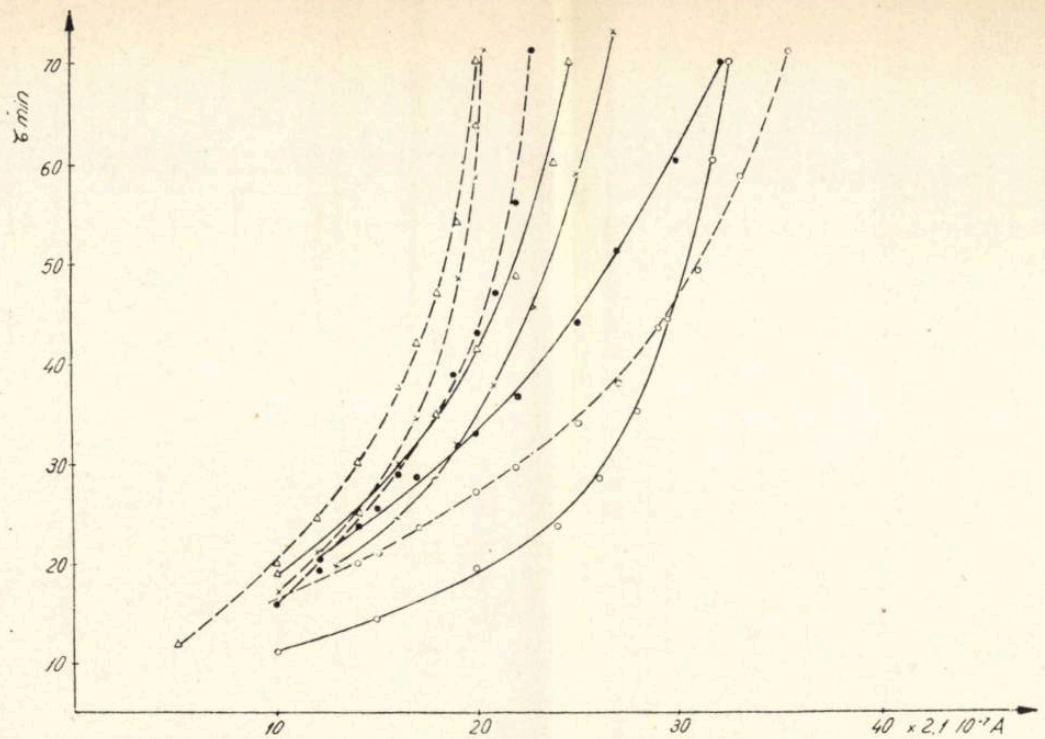


Fig. 4. — Hîrtii încleiate cu 3% clei Bewoid, nepresate (probele *A*)

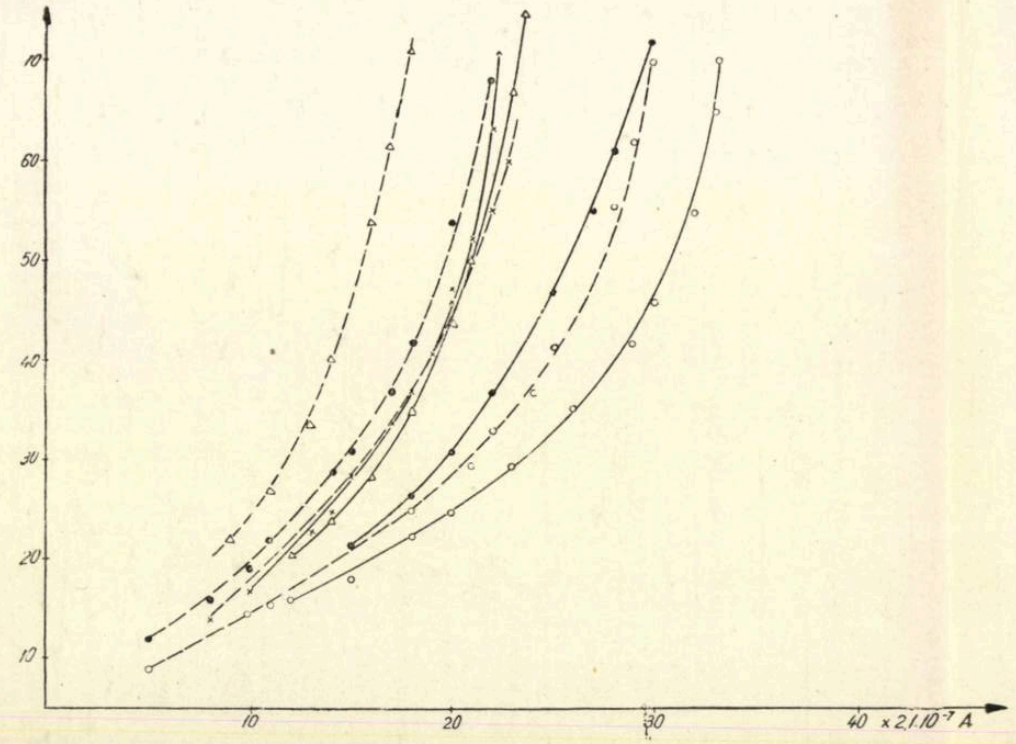


Fig. 5. — Hîrtii încleiate cu 3% clei Bewoid, presate (probele *B*)

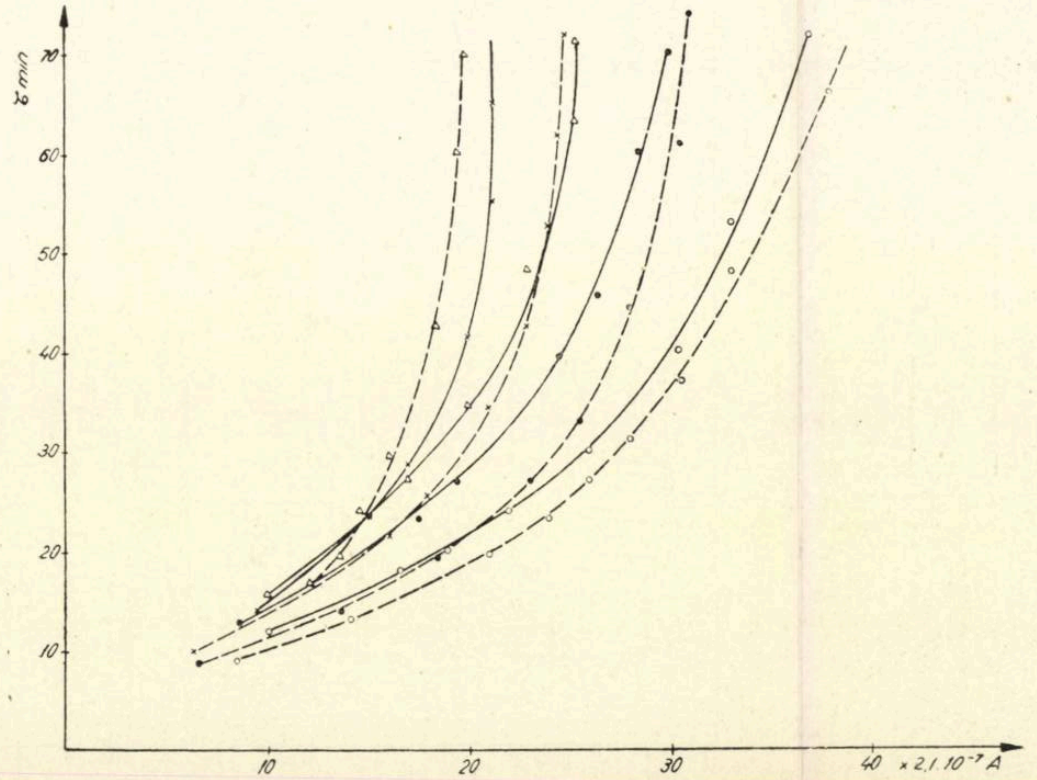


Fig. 6. — Hîrtii încleiate cu 2% clei Bewoid (valori medii între probele *A* şi *B*)

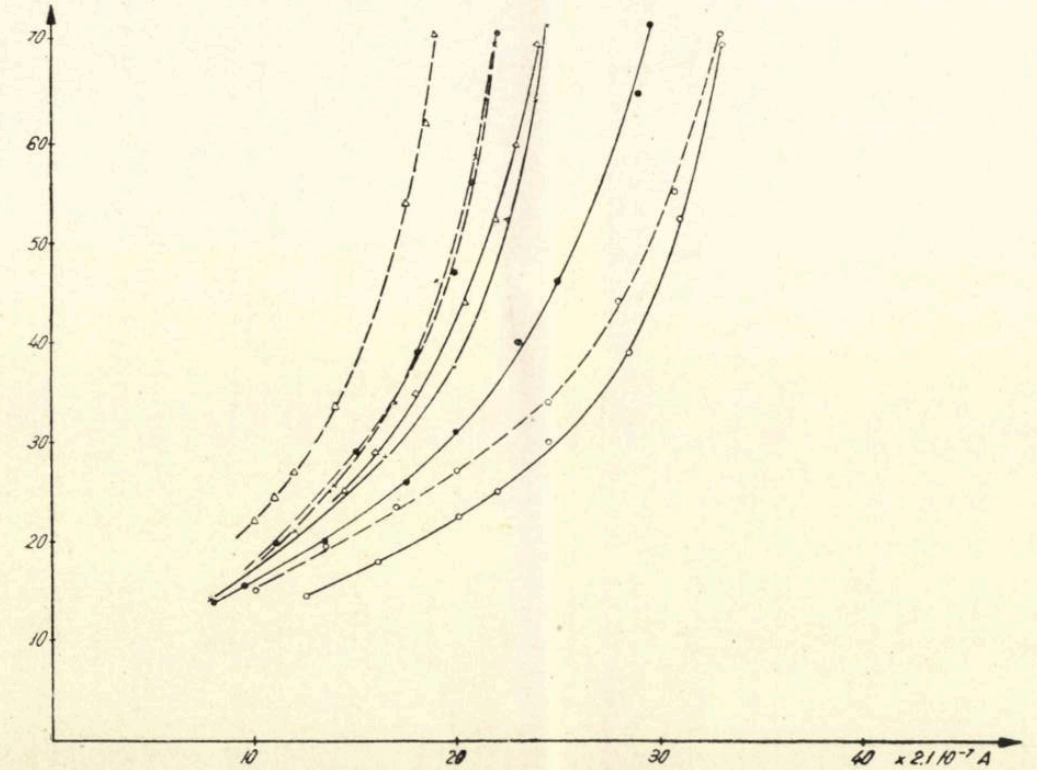


Fig. 7. — Hîrtii încleiate cu 3% clei Bewoid (valori medii între probele *A* şi *B*)

Materialul încleiat, diluat la consistența de 1,0%, s-a trecut pe aparatul Rapid Köthen în vederea obținerii foilor de hîrtie. Cîntărindu-se de fiecare dată cantitățile de pastă trecută pe aparat, s-a reușit să se obțină foi cu un gramaj aproape constant, de 65 g/m².

Începînd de la procesul măcinării pînă la faza de diluție de 1%, apa luată în lucru, pentru o aceeași serie de probe, a fost de aceeași duritate: apă distilată; 3,8°; 8,8° (apa de rețea din Iași); respectiv 14,5° germane.

Pentru uscare s-au utilizat următoarele căi:

a) foi la consistența rezultată de pe aparat, uscate în vacuum de 15...20 mm col. mercur, la temperatura de 97°C, timp de 4 minute (probele *A*).

b) foi deshidratate prin presare pînă la consistență de ≅30% (presare manuală timp de 1,5 minute), după care au fost uscate ca și probele de mai sus (probele *B*).

Aceste foi, condiționate într-un higrotermostat la 20°C și $\varphi = 65\%$, au fost supuse încercărilor de determinare a gradului de încleiere, folosindu-se în paralel metoda liniilor [2], metoda Jayme [10] și metoda electrică [5].

În fig. 2...5 (v. planșa) sînt date rezultatele determinărilor gradului de încleiere prin metoda electrică KBB. În fig. 6 și 7 (v. planșa) sînt reprezentate curbele medii dintre probele *A* și *B* pentru 2%, respectiv 3% clei Bewoid.

Înregistrîndu-se intensitatea curentului ce ia naștere între cei doi electrozi, pe măsura pătrunderii lichidului în foaia de hîrtie, metoda electrică poate fi deci socotită ca o cale indirectă de măsurare a vitezei de pătrundere a lichidelor în capilare, expresia acestei viteze, stabilită de Gaegauf și Müller [7], fiind:

$$v_m = \frac{a_m}{2\sqrt{\tau}} \quad (\mathrm{g/m^2 sec}), \tag{1}$$

în care a_m — constantă parabolică (în $\mathrm{g/m^2 sec^{1/2}}$), τ — timpul (în sec.).

Deoarece mărimea curentului stabilit între cei doi electrozi este o funcție a cantității de lichid pătrunsă prin capilarele hîrtiei, adică:

$$v_A = f(v_m) \tag{2}$$

rezultă că analog cu relația (1) se poate scrie expresia:

$$v_A = \frac{a_A}{2\sqrt{\tau}} \quad (\mathrm{A/m^2 sec}), \tag{3}$$

în care v_A — viteza de creștere a curentului (în $\mathrm{A/m^2 sec}$), a_A — constantă parabolică, în ($\mathrm{A/m^2\ sec^{1/2}}$).

Deci, dacă valoarea v_m indică gradul de încleiere a hîrtiei, atunci în mod normal și mărimea v_A va reflecta același fapt.

Din această ultimă expresie rezultă că, dacă s-ar reprezenta intensitatea curentului funcție de $\sqrt{\tau}$, ar rezulta niște drepte ale căror

pante vor determina viteza de creştere a curentului, deci implicit — gradul de încleiere a hîrtiei.

Procedînd la o astfel de reprezentare se obţin diagrame ca cele din fig. 8. (Curbele din această figură reprezintă creşterile de curent

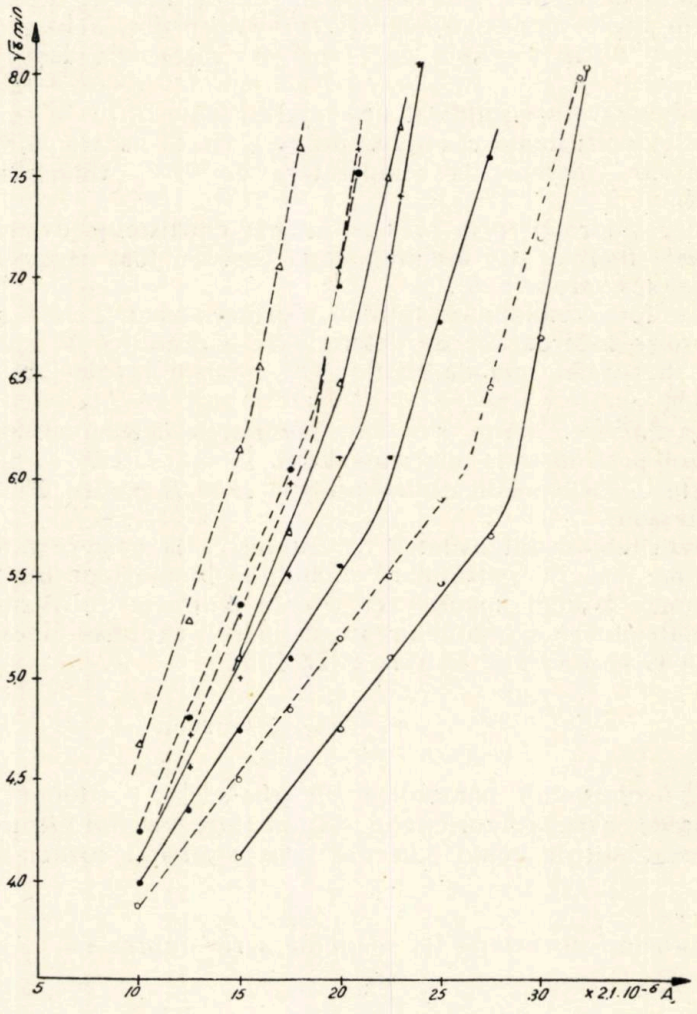


Fig. 8. — Hîrtii încleiate cu 3% clei Bewoid (valori medii între probele *A* şi *B*; creşterile de curent exprimate în funcţie de $\sqrt{\tau}$.

exprimate funcţie de $\sqrt{\tau}$, pentru probele medii dintre *A* şi *B*, încleiate cu 3% clei Bewoid şi reprezentate în fig. 7 funcţie de τ). Din această diagramă se observă că într-adevăr se obţin drepte, însă cu două regiuni distincte, a căror pante au valori deosebite. Cele două pante ale

aceleaşi curbe trebuie interpretate ca reflectînd procese diferite de pătrundere a apei în foaia de hîrtie. În prima regiune, pătrundere apei s-ar datora fenomenelor de curgere în capilare, în timp ce în ceade-a doua, ea s-ar pune pe seama ocluziunii apei în interiorul fibrelor, în spaţiile intermicelare.

De oarece prin încleiere, considerată ca un proces de hidrofobizare, se acţionează numai asupra scăderii vitezei de pătrundere a lichidelor în capilarele hîrtiei, este firesc să ne intereseze în deosebi — drept criteriu al gradului de încleiere—numai prima regiune a curbelor menţionate.

Faptul că cea de-a doua regiune, unde pentru acelaşi material celulozic şi la condiţii variate ale încleierii, valorile pantelor sînt egale sau foarte apropiate între ele (în cazul nostru, cuprinse între 0,37...0,56), ne arată cu atît mai mult că numai prima regiune este cea semnificativă. Aici, valorile distincte ale pantelor, indică gradele deosebite de încleiere ale hîrtiilor.

Deci, dacă urmărim creşterea curentului funcţie de timp, la un moment dat vom înregistra valori din cel de-al doilea domeniu al curbei care, precum am menţionat, nu reflectă gradul de încleiere a hîrtiei. Rezultă de aici că nu este util a considera, ca în metoda KBB, drept indice al gradului de încleiere, timpul pînă cînd se stabileşte un curent de 100 μA.

Pe lîngă faptul că o astfel de determinare cere un timp apreciabil (1 ... 3 ore), ţinem să menţionăm că nu s-a înregistrat în nici unul din cazurile studiate, un curent de o astfel de intensitate, ceea ce nu poate fi în nici un caz explicat drept consecinţă a dimensiunilor ceva mai reduse ale electrozilor utilizaţi de noi.

Bazaţi pe considerentele mai sus enunţate am căutat să plasăm determinările în prima porţiune a curbei, socotind că în acest domeniu — pentru anumite condiţii determinate — legile curgerii lichidelor prin capilarele hîrtiei, sînt reflectate cel mai fidel.

Considerîndu-se valoarea curentului a (în 10^{-6} A) la $\tau_1 = 20$ min. şi b (în 10^{-6} A) la $\tau_2 = 30$ min. rezultă, întrucît $\sqrt{\tau_2} - \sqrt{\tau_1} \cong 1$, că diferenţa $b - a$ este numeric egală cu panta curbei domeniului considerat. Valoarea tangentei $(b - a)$ corespunde unghiului pe care îl face panta acestei curbe cu ordonata $\sqrt{\tau}$.

Folosind valorile a şi b, există posibilitatea a se determina viteza de creştere a curentului — ca indice al gradului de încleiere — cu ajutorul relaţiei:

$$v_A = \frac{10^{-2}(b - a)}{60 F(\tau_2 - \tau_1)} \quad (\text{A/m}^2\,\text{sec}), \tag{4}$$

în care τ_1 şi τ_2 — timpul (min.), F — suprafaţa electrodului superior (cm²), în cazul nostru egală cu 66,5 cm².

Rezultatele acestor determinări efectuate asupra probelor de hîrtii încleiate cu 2% şi 3% clei Bewoid, cu metoda electrică, după noile criterii, sînt înscrise în tabelul 1.

Tabelul 1

Duritatea apei în grade germane	Valori determinate	Încleierea acidă						Încleierea neutră					
		2% clei			3% clei			2% clei			3% clei		
		A	*B*	Media	*A*	*B*	Media	*A*	*B*	Media	*A*	*B*	Media
0°	a (10^{-6} A)	4,20	3,68	3,94	4,31	3,26	3,78	3,15	5,67	4,41	3,05	3,15	3,10
	b (10^{-6} A)	5,67	5,35	5,51	5,46	4,93	5,19	4,72	7,04	5,88	4,62	4,30	4,46
	Panta $b-a$	1,47	1,67	1,57	1,15	1,67	1,41	1,57	1,37	1,47	1,57	1,15	1,36
	v_A (10^{-8} A/m²sec)	3,69	4,18	3,94	2,88	4,18	3,53	3,94	3,44	3,68	3,94	2,88	3,41
3,8°	a (10^{-6} A)	2,63	3,78	3,20	2,62	2,94	2,73	2,78	4,02	3,90	2,52	2,10	2,31
	b (10^{-6} A)	3,57	5,04	4,30	3,67	4,09	3,88	5,04	5,04	5,04	3,47	3,05	3,26
	Panta $b-a$	0,94	1,26	1,10	1,05	1,15	1,10	1,26	1,02	1,14	0,95	0,95	0,95
	v_A (10^{-8} A/m² sec)	2,36	3,16	2,76	2,63	2,89	2,75	3,16	2,55	2,86	2,38	2,38	2,38
8,8°	a (10^{-6} A)	2,73	2,84	2,78	2,73	2,42	2,57	2,31	3,88	3,10	2,52	2,31	2,42
	b (10^{-6} A)	3,78	3,68	3,73	3,74	3,36	3,55	3,32	5,15	4,24	3,36	3,26	3,31
	Panta $b-a$	1,05	0,84	0,95	1,01	0,94	0,98	1,01	1,27	1,14	0,84	0,95	0,90
	v_A (10^{-8} A/m² sec)	2,63	2,10	2,38	2,53	2,36	2,45	2,53	3,18	2,86	2,10	2,38	2,25
14,5°	a (10^{-6} A)	2,52	3,15	2,83	2,31	2,52	2,42	3,05	2,92	2,99	2,10	1,68	1,89
	b (10^{-6} A)	3,57	4,13	3,85	3,42	3,47	3,45	4,02	3,57	3,79	2,94	2,42	2,68
	Panta $b-a$	1,05	0,98	1,02	1,11	0,95	1,03	0,97	0,65	0,81	0,84	0,74	0,79
	v_A (10^{-8} A/m² sec)	2,63	2,46	2,55	2,78	2,38	2,58	2,43	1,63	2,03	2,10	1,85	1,98

Tabelul 2

Duritatea apei în grade germane	Grad de încleiere prin metoda :	Încleierea acidă						Încleierea neutră					
		Procent de răşină						Procent de răşină					
		2%			3%			2%			3%		
		A	*B*	Media	*A*	*B*	Media	*A*	*B*	Media	*A*	*B*	Media
0°	liniilor	2	> 2	2	> 2	> 2	> 2	2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2
	electrică *)	3,68	4,18	2,88	2,88	4,18	3,57	3,94	3,44	3,68	3,94	2,88	3,41
	Jayme	0,540	0,569	0,554	0,658	0,604	0,631	0,518	0,527	0,522	0,632	0,605	0,618
3,8°	liniilor	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2
	electrică	2,36	3,16	2,76	2,63	2,88	2,75	3,16	2,55	2,86	2,38	2,38	2,38
	Jayme	0,590	0,563	0,576	0,678	0,674	0,676	0,556	0,583	0,569	0,645	0,667	0,656
8,8°	liniilor	2	> 2	2	> 2	> 2	> 2	2	> 2	2	> 2	> 2	> 2
	electrică	2,63	2,10	2,38	2,53	2,36	2,45	2,53	3,18	2,86	2,10	2,38	2,25
	Jayme	0,547	0,600	0,573	0,648	0,706	0,677	0,561	0,595	0,578	0,644	0,663	0,653
14,5°	liniilor	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2	> 2
	electrică	2,63	2,46	2,55	2,78	2,38	2,58	2,43	1,63	2,03	2,10	1,85	1,98
	Jayme	0,587	0,557	0,572	0,665	0,706	0,685	0,595	0,668	0,632	0,743	0,766	0,754

*) S-au înscris valorile v_A (în 10^{-8} A/m²sec); gradul de încleiere este invers proporţional cu valoarea v_A).

În tabelul 2 sînt înserate rezultatele gradului de încleiere obţinute prin folosirea în paralel a celor trei metode de determinare.

Pentru o ilustrare mai bună a variaţiei gradului de încleiere a probelor obţinute în condiţii diferite, valorile medii (dintre probele *A* şi *B*) ale gradului relativ de încleiere Jayme sînt trecute în graficul din fig. 9.

Din analiza datelor prezentate rezultă următoarele concluzii:

1. Prin metoda liniilor nu există posibilitatea de a aprecia o diferenţă sensibilă a probelor încleiate la diferite durităţi şi procente de clei.

Metoda Jayme scoate în evidenţă anumite discrepanţe în calitatea probelor de hîrtie încleiate în condiţii variate.

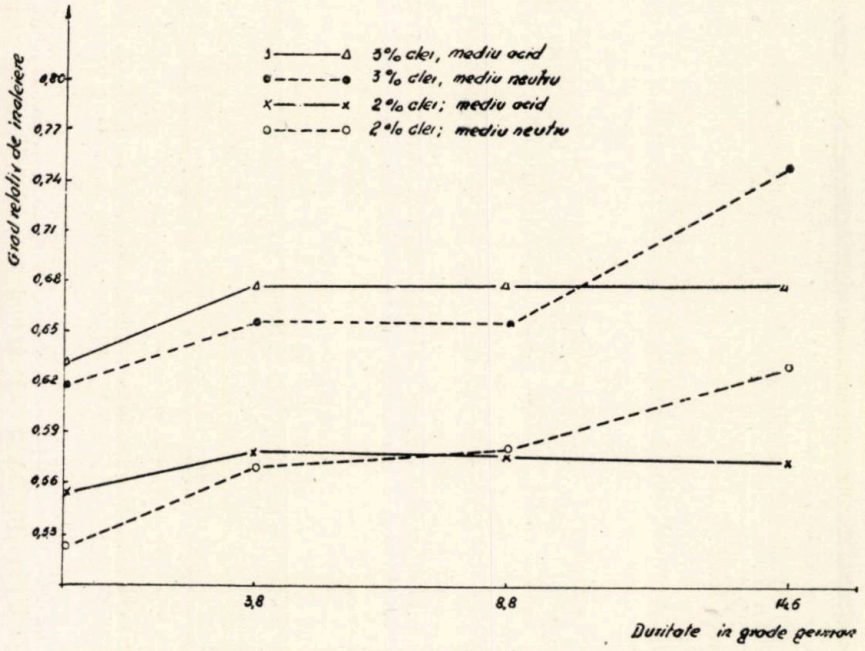


Fig. 9. — Valori medii (pentru probele *A* şi *B*) ale gradului relativ de încleiere Jayme.

2. Metoda electrică KBB, modificată de noi ca principiu de înregistrare a determinărilor şi exprimare a valorilor, dă posibilitatea — ca şi în cazul metodei Jayme—de a se aprecia calităţile hîrtiilor cu grade de încleiere foarte apropiate.

3. Cu toate că metoda electrică este mai rapidă decît metoda Jayme, aceasta din urmă are faţă de prima unele avantaje, ce au importanţă, în special în cazul hîrtiilor de scris, pentru că aceasta foloseşte ca lichid de încercare cerneala, ce corespunde utilizării finale a hîrtiei şi datorită sensibilităţii mai reduse a acestei metode, rezultatele determinărilor au un grad mai mic de dispersiune.

4. S-au dat indicații în lumina legilor generale de pătrundere a lichidelor în capilarele hîrtiei, pentru aplicarea mai simplă a metodei electrice de determinare a gradului de încleiere a hîrtiei. Introducerea termenilor de pantă și de viteză de creștere a curentului (v_A), permit folosirea mai corectă a acestei metode.

5. Se confirmă faptul că în încleierea clasică (în mediu acid), cleiurile de colofoniu cu un conținut ridicat în rășină liberă (în acest caz cleiul Bewoid) sînt foarte puțin sensibile la sărurile prezente în apă. De asemenea, apa fără un conținut minim salifer (apa distilată) nu este indicată a fi folosită pentru fabricarea hîrtiilor încleiate.

6. În sistemul încleierii „neutre" (de altfel ca și în sistemul încleierii acide) se observă o influență nocivă a apelor fără duritate (apa distilată); în rest, pînă la 8,8° duritate germane, nu se observă variații. La o duritate mai mare (14,5°) gradul de încleiere crește în mod sensibil.

Aceasta se explică prin acțiunea aditivă în acest caz, a ionilor bivalenți (Ca^{++}), în sensul unei heterocoagulări a sistemului dispers de încleiere.

7. Folosind metoda Jayme, se remarcă, în special la un procent mai mare de colofoniu (3%), o mică rămînere în urmă a gradului de încleiere la probele obținute în mediu neutru. Acest lucru nu este însă sensibil la determinarea prin metodele TAPPI, a liniilor și electrică. Din contra, rezultatele obținute cu ultima metodă sînt mai favorabile la probele neutre decît la cele acide.

8. Se confirmă, fapt subliniat de noi și în alt loc [13], utilitatea metodei de încleiere în mediu neutru, în special pentru hîrtiile încleiate cu procente mai mici de clei, unde apar avantaje evidente.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Celuloză, Hîrtie și Fibre artificiale

BIBLIOGRAFIE

1. Wütz O., *Papierherstellung nach neuzeitlichen Erkentnissen*, Ed. I, Graz-Wien, Verlag Ulrich Moser, 1947.
2. * * * STAS 4748—55.
3. Herzberg W., *Papierprüfung*, Siebente Auflage, Berlin, Verlag Julius Springer, 1932, S. 85.
4. Дерягин Б. В., Колл. Ж., 1946, **8**, *1—2*, стр. 27—29.
5. Myslinska Z., Palenik K., Prz. Papierniczy, 1956, *5*, pp. 127—133.
6. Sutermeinster E., *Chemistry of pulp and paper making*, New-York, 1946, p. 294.
7. Gaegauf H. u. Müller M., Textil Rundschau, 1951, *3*, S. 122—131; Ibid,. 1951, *4*, S. 176—188.
8. Stephenson I. N., *Pulp and Paper manufacture*, Ed. Mc. Graw-Hill Book Co., New-York-Toronto-London, 1950, vol. II, p. I, pp. 293—344.
9. Goldsmid P., Ind. della Carta, 1949, *1*, pp. 32—34.
10. Jayme G. u. Arledter H., Das Papier, 1955, 7, *9*.
11. Poppel Em., St. Cerc. Șt., Acad. R.P.R., filiala Iași, Chimie, 1957, **8**, *2*, pp. 341—356.
12. * * * STAS 939—50.
13. Симионеску Кр. и Поппел Э., Бум. пром., 1956, *12*, стр. 7—9.

К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ПРОКЛЕЙКИ БУМАГИ

(Резюме)

В работе обсуждают и рассматривают сравнительным путём результаты полученные при определении степени проклеивания тремя методами: штриховым, методом Яйме и электрическим (КББ). Последний метод анализируют в свете законов капилярного течения жидкостей, различая две области наблюдаемые электрически: область капилярного проникновения жидкостей и область проникновения в межмицелнярные пространства.

Первая область отражает степень гидрофобности проклееной бумаги, характеризуемая наклоном кривой увеличения электрического тока в зависимости от $\sqrt{\tau}$. Это обстоятельство привело к модификации электрического метода КББ определения степени проклеивания бумагн и к возможности оценки качества бумаг, имеющих близкие значения степени проклейки, аналогично методом Яйме.

Объяснение рисунков

Рис. 1. Схема прибора.
Рис. 2. Непрессованные бумаги, проклеенные 2%-ым клеем Бевоид (пробы *A*).
Рис. 3. Прессованные бумаги, проклеенные 2%-ым клеем Бевоид (пробы *B*).
Рис. 4. Непрессованные бумаги, проклеенные 3%-ым клеем Бевоид (пробы *A*).
Рис. 5. Прессованные бумаги, проклеенные 8%-ым клеем Бевоид (пробы *B*).
Рис. 6. Бумаги проклеенные 2%-ым клеем Бевоид (среднее значение проб *A* и *B*).
Рис. 7. Бумаги проклеенные 3%-ым клеем Бевоид (среднее значение проб *A* и *B*).
Рис. 8. Бумаги проклеенные 3%-ым клеем Бевоид (среднее значение проб *A* и *B*); увеличение тока *A* выражено в зависимости от $\sqrt{\tau}$.
Рис. 9. Среднее значение проб *A* и *B* относительной степени проклейки Яйме.

ÜBER EINIGE PAPIERLEIMUNGSGRADPRÜFMETHODEN

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden die durch folgende drei Methoden erhaltenen Ergebnisse der Bestimmung des Papierleimungsgrades und zwar: die Linienmethode, die Jayme Methode und die elektrische (K.B.B.) Methode, verglichen.

Die letzte dieser drei Methoden wird im Rahmen der aktuellen Kentnissen über das Eindringen der Flüssigkeiten in die Kappilaren, behandelt; es werden zwei Gebiete die auf elektrischem Wege zu erkennen sind, festgestellt, und zwar: das Eindringungsgebiet der Flüssigkeiten in die Kappilaren des Papiers, und das Eindringungsgebiet in die micelaren Zwischenräume.

Das erste dieser zwei Gebiete ergibt den Hydrophobiegrad des geleimten Papiers wieder, und kann durch die Neigung der Kurve, welche das Anwachsen des elektrischen Strommes als Funktion von $\sqrt{\tau}$ ausdrückt, charakterisiert werden.

Diese Erkentnisse führten zu einer Abänderung der elektrischen K.B.B.—Papierleimungsgradprüfmethode, und auch zur Möglichkeit mit Hilfe dieser Methode sowie auch mit der Jayme-Methode, die Qualität des Papiers mit sehr nahen Leimungsgrad zu beurteilen.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. Schema der Apparatur.
Abb. 2. Geleimte Papiere mit 2%—en Bewoidleim; ungepresst (Proben *A*).
Abb. 3. Geleimte Papiere mit 2%—en Bewoidleim; gepresst (Proben *B*).
Abb. 4. Geleimte Papiere mit 3%—en Bewoidleim; ungepresst (Proben *A*).
Abb. 5. Geleimte Papiere mit 3%—en Bewoidleim; gepresst (Proben *B*).
Abb. 6. Geleimte Papiere mit 2%—en Bewoidleim (Mittelwerte der Proben *A* und *B*).
Abb. 7. Geleimte Papiere mit 3%—en Bewoidleim (Mittelwerte der Proben *A* und *B*).
Abb. 8. Das Anwachsen des elektrischen Strommes als Funktion von $\sqrt{\tau}$ (Mittelwerte der Proben *A* und *B* geleimten Papier mit 3%—en Bewoidleim).
Abb. 9. Mittelwerte der Proben *A* und *B* der relativen Jayme-Leimungsgrad.

BULETINUL INSTITUTULUI POLTEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

676.16

CERCETARI ASUPRA PREHIDROLIZEI STUFULUI

Nota II

DE

DOREL FELDMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Obiectul studiului de faţă îl constituie analiza soluţiilor de prehidroliză cu apă a stufului, din punctul de vedere al randamentelor în furfurol, substanţe reducătoare şi acizi organici, precum şi al determinării unor constante care dau indicaţii asupra vitezei reacţiei de hidroliză. Nota este în directă legătură cu lucrarea *Sur quelques facteurs qui influencent la pré-hydrolyse du roseau* (phragmites communis) *avec de l'eau* [1], reprezentînd o continuare a ei.

Un studiu amănunţit privind utilizarea zaharurilor conţinute în soluţiile rezultate la hidroliză a fost întreprins recent de U. Trobisch [2] care s-a ocupat de prehidroliza cu apă a lemnului de pin. Autorul, pentru a obţine o îmbogăţire a hidrolizatului în monozaharide, a reutilizat acelaşi prehidrolizat, la mai multe operaţii de prehidroliză. El constată că la reutilizarea acestor soluţii, conţinutul în furfurol şi substanţe reducătoare creşte la început simţitor, ca după a patra reluare variaţiile să fie neesenţiale. Dacă în condiţiile prehidrolizelor efectuate conţinutul iniţial de furfurol era de 1,53 g/l şi cel de substanţe reducătoare de 3,47 g/l după a zecea reutilizare conţinutul devine pentru furfurol 3,20 g/l, respectiv 6,35 g/l substanţe reducătoare.

La I. C. A. (Institutul de cercetări alimentare) Bucureşti şi I.C.P.S.H. (Institutul de cercetări şi proiectări pentru stuf, celuloză şi hîrtie) s-au făcut cercetări în direcţia valorificării hidrolizatelor de stuf pe drojdie furajeră. Hidroliza stufului tocat sau măcinat s-a făcut cu acid sulfuric diluat (2%) obţinîndu-se un hidrolizat acid cu 2 ... 4% substanţe reducătoare.

I. Vasilescu [3] arată că hidrolizatul obţinut conţine o serie de substanţe care opresc dezvoltarea drojdiei şi anume : furfurol, alcool metilic, răşini, suspensii ; etc. pentru dezvoltarea drojdiilor, hidrolizatul s-a prelucrat în scopul îndepărtării substanţelor inhibitoare şi îmbogăţirii în substanţe nutritive ; ulterior el a fost neutralizat cu lapte de var (pînă la un pH = 4,5 ... 6), limpezit, răcit şi diluat pînă la concentraţia necesară în zahăr. Înmulţirea drojdiei s-a făcut cu culturi de *Torulopsis utilis*, iar separarea cu un aparat tip alfa-Laval. După separarea, spălarea şi uscarea drojdiei s-a obţinut un randament de 8 kg drojdie uscată din 100 kg stuf.

La soluţiile obţinute de noi la prehidroliza cu apă a stufului s-a determinat: conţinutul în furfurol, conţinutul în substanţe reducătoare şi aciditatea. De asemenea, la unele soluţii s-a studiat cu ajutorul cromatografiei pe hîrtie, natura zaharurilor trecute în soluţie.

Conținutul în furfurol s-a determinat prin distilare după metoda Tollens; determinările au fost făcute la soluțiile nefiltrate. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul 1 și graficul din fig. 1.

Tabelul 1

Materia primă: stuf						Hidromodul 1:4					
Durata 6 ore			Durata 3 ore			Durata 2 ore			Durata 1 oră		
Pres. atu.	Furfurol		Pres. atu.	Furfurol		Pres. atu.	Furfurol		Pres. atu.	Furfurol	
	g/l sol.	kg/t stuf		g/l sol.	kg/t stuf		g/l sol.	kg/t stuf		g/l sol.	kg/t stuf
1,5	3,38	6,76	1,5	0,36	0,73	1,5	0,32	0,64	1,6	0,30	0,60
3,5	7,66	15,32	3,0	5,07	10,14	3,0	1,05	2,11	3,1	0,76	1,52
6,0	0,96	1,93	6,3	2,00	5,60	6,0	7,42	14,84	5,7	8,85	17,70
8,5	—	—	8,0	1,49	2,90	8,5	1,83	3,66	8,7	4,00	8,00
11,5	0,70	1,41	11,5	1,41	2,83	12,0	1,47	2,94	11,5	2,34	4,69

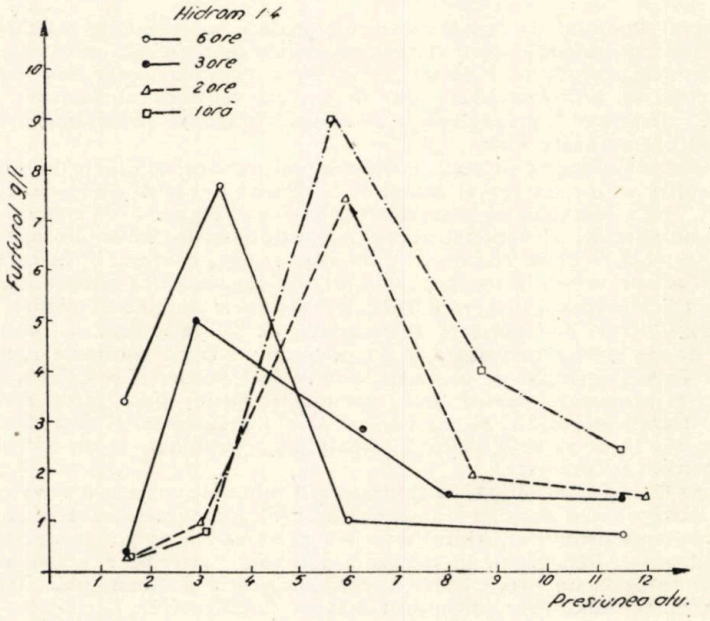


Fig. 1.

Datele experimentale exprimate la tona de stuf, s-au calculat considerîndu-se că la prehidroliza a 1000 kg stuf (uscat la aer) se obțin 2000 l soluție ce corespunde unei jumătăți din cantitatea de apă introdusă inițial (4000 l). În realitate, cantitatea de soluție poate fi mult mai

mare dacă după prehidoliză şi filtrare se recurge la presarea materialului obţinut.

Conţinutul în *substanţe reducătoare* (S.R.) s-a determinat la soluţiile rezultate la prehidroliză, după o prealabilă filtrare pentru îndepărtarea

Tabelul 2

Durata 6 ore ; hidromodulul 1 : 7,5			Durata 6 ore ; hidromodulul 1 : 4		
Presiunea atu.	Substanţe reducătoare (glucoză)		Presiunea atu.	Substanţe reducătoare (glucoză)	
	g/l	kg/t stuf		g/l	kg/t stuf
1,7	—	—	1,5	3,10	6,20
3,0	2,05	4,10	3,5	5,66	11,32
5,8	2,72	5,44	6,0	3,30	6,60
8,0	2,54	5,08	8,5	—	—
11,0	2,30	4,60	11,5	2,10	4,02

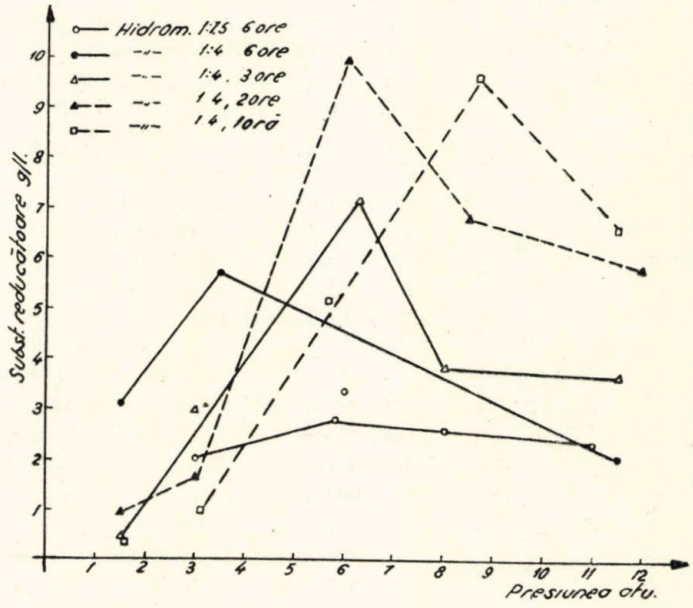


Fig. 2.

suspensiilor. S-a utilizat metoda Fehling-Bertrand. Rezultatele — exprimate în glucoză — sînt prezentate în tabelele 2 şi 3 şi în graficul din fig. 2.

Tabelul 3

Hidromodul 1:4								
Durata 3 ore			Durata 2 ore			Durata 1 oră		
Pres. atu.	S. R. (glucoză)		Pres. atu.	S. R. (glucoză)		Pres. atu.	S. R. (glucoză)	
	g/l	kg/t stuf		g/l	kg/t sfuf		g/l	kg/t stuf
1,5	0,53	1,06	1,5	1,0	2,0	1,6	0,32	0,64
3,0	3,09	6,18	3,0	1,69	3,38	3,1	0,93	1,86
6,3	7,16	14,32	6,0	9,96	19,92	5,7	5,17	10,34
8,0	3,76	7,52	8,5	6,76	13,52	8,7	9,60	19,20
11,5	3,60	7,20	12,0	5,77	11,54	11,5	6,61	13,22

Aciditatea soluţiilor apoase rezultate la prehidroliza stufului a fost determinată de noi titrimetric: ea se datoreşte — după cum am constatat pe cale cromatografică (fig. 3) — acidului acetic.

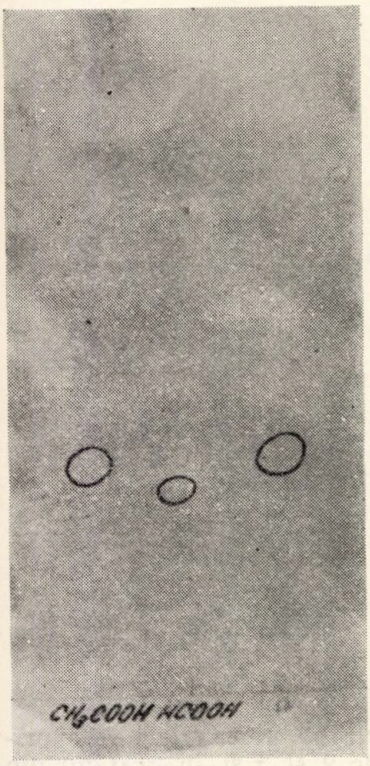


Fig. 3

Tabelele 4 şi 5 precum şi graficul din fig. 4 prezintă rezultatele experimentale privitoare la determinarea acidităţii; calcularea cantităţii de acid acetic produs la tona de stuf s-a făcut pe baza aceloraşi considerente ca la furfurol şi substanţe reducătoare.

Este cunoscut faptul că în literatură nu se găsesc date privitoare la cinetica procesului de hidroliză a stufului. Cîteva din ele pot fi reţinute aplicînd în calcule rezultatele experimentale de mai sus.

Un rol important în procesul de hidroliză a materiilor vegetale îl are difuzia; acest fenomen condiţionează pătrunderea reactivului şi trecerea produselor de reacţie în faza lichidă.

În cazul prehidrolizei cu apă a stufului, trecerea în soluţie a zaharurilor la temperaturi sub 145°C, în funcţie de timp, decurge conform dreptelor din graficul din fig. 5. Acest grafic permite stabilirea cantităţilor de zaharuri ce trec în soluţie la durate de prehidroliză a stufului pînă la 6 ore cînd se foloseşte un hidromodul de 1:4. La temperaturi mai ridicate, pe

grafic nu se mai obţin drepte ci linii frînte datorită accentuării proceselor de descompunere a zaharurilor.

Tabelul 4

Durata 6 ore: hidromodulul 1 : 7,5			Durata 6 ore : hidromodulul 1 : 4		
Pres. atu.	cm^3 NaOH $n/20$ la 1 cm^3 soluţie	kg acid acetic la tona de stuf	Pres. atu.	cm^3 NaOH $n/20$ la 1 cm^3 soluţie	kg acid acetic la tona de stuf
1,7	—	—	1,5	—	—
3,0	1,94	11,64	3,5	3,61	21,66
5,8	3,05	18,30	6,0	6,50	39,00
8,0	3,24	19,44	8,5	—	—
11,0	4,23	25,38	11,5	5,81	34,86

Tabelul 5

Hidromodulul 1:4								
Durata 3 ore			Durata 2 ore			Durata 1 oră		
Pres. atu.	cm^3 NaOH la 1 cm^3 soluţie	kg acid acetic la tona de stuf	Pres. atu.	cm^3 NaOH la 1 cm^3 soluţie	kg acid acetic la tona de stuf	Pres. atu.	cm^3 NaOH la 1 cm^3 soluţie	kg acid acetic la tona de stuf
1,5	0,59	3,54	1,5	0,49	2,94	1,6	0,03	0,18
3,0	1,80	10,80	3,0	0,94	5,64	3,1	0,05	0,30
6,3	6,40	38,40	6,0	4,44	26,64	5,7	1,89	11,34
8,0	6,84	41,04	8,5	6,21	37,26	8,7	5,93	35,58
11,5	5,92	35,52	12,0	6,30	37,80	11,5	6,19	37,14

După V. A. Smirnov [4], viteza de dizolvare se determină prin viteza de difuzie. Aplicînd legea lui Fik pentru viteza de difuzie a substanţei solvite din stratul superficial în faza lichidă, avem:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F\,D}{\delta} \cdot \frac{a-x}{v}, \tag{1}$$

în care F — suprafaţa de separaţie dintre fuze, D — coeficientul de difuzie, δ — grosimea stratului saturat, a — cantitatea de zaharuri solvite într-un volum al fazei lichide, la starea de echilibru, x — cantitatea de zaharuri solvite la momentul t. Deoarece în ecuaţia (1), expresia $\frac{F\,D}{\delta\,v} = K$ = const., această ecuaţie devine:

$$\frac{dx}{dt} = K\,(a-x). \tag{2}$$

Cu ajutorul acestei ecuații (a reacțiilor de ordinul I) se poate determina valoarea lui K.

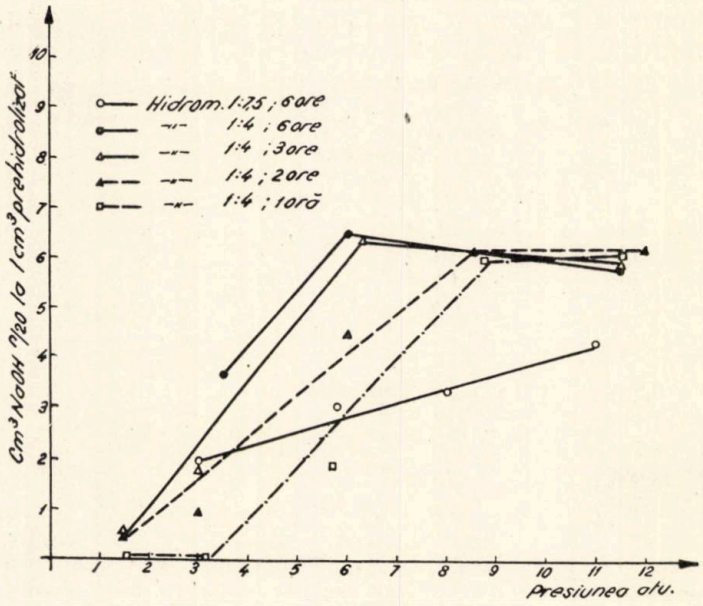


Fig. 4

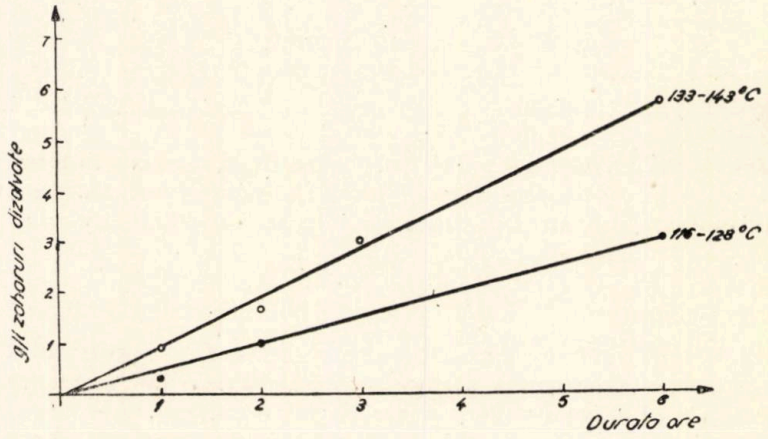


Fig. 5

Integrînd ecuația (2) și ținînd seama că la $t = 0$, $x = 0$, se obține

$$K = \frac{1}{t} \ln \frac{a}{a - x} \tag{3}$$

unde a — cantitatea inițială de hemiceluloze din proba supusă prehidrolizei, x — cantitatea de zaharuri solvite, t — timpul la care se obține în soluție cantitatea x de zaharuri.

Folosind relația (3), s-au determinat valorile lui K pentru prehidroliza stufului cu apă la diferite temperaturi, durate și raporturi stuf : apă. Rezultatele sînt prezentate în tabelele 6 și 7.

Tabelul 6

Hidromodulul 1:4					
Durata prehidrolizei					
1 oră		2 ore		3 ore	
Temp. °C	K min^{-1}	Temp. °C	K min^{-1}	Temp. °C	K min^{-1}
116	$0{,}535.10^{-4}$	124	$0{,}828.10^{-4}$	121	$0{,}277.10^{-4}$
138	$1{,}558.10^{-4}$	133	$1{,}379.10^{-4}$	143	$1{,}714.10^{-4}$
157	$8{,}765.10^{-4}$	160	$8{,}716.10^{-4}$	161	$4{,}068.10^{-4}$
175	$16{,}805.10^{-4}$	170	$5{,}815.10^{-4}$	167	$2{,}072.10^{-4}$
185	$11{,}367.10^{-4}$	184	$4{,}935.10^{-4}$	184	$2{,}018.10^{-4}$

Tabelul 7

Hidromodulul 1 : 4		Hidromodulul 1 : 7,5	
Durata prehidrolizei 6 ore			
Temp. °C	K min^{-1}	Temp. °C	K min^{-1}
116	$0{,}875.10^{-4}$	130	—
141	$1{,}613.10^{-4}$	142	$0{,}574.10^{-4}$
157	$0{,}920.10^{-4}$	160	$0{,}740.10^{-4}$
164	—	173	$0{,}685.10^{-4}$
179	$0{,}560.10^{-4}$	184	$0{,}630.10^{-4}$

Pentru calcularea vitezei reacției de hidroliză a polizaharidelor, Saeman [5] utilizează relația:

$$K = H(C_s)^M e^{-E/RT} \quad (4)$$

în care H — constantă, E - căldura de activare a hidrolizei, C_s — concentrația procentuală a acidului, M — panta dreptei obținute la reprezentarea în plan a variației lg$K$ funcție de logaritmul concentrației acidului, R — constanta gazelor, T - temperatura absolută.

Cunoscînd valorile lui K în condițiile de prehidroliză experimentate de noi, s-a trecut la determinarea valorii constantei M; calculul

s-a făcut în baza valorilor obținute la prehidroliza cu apă a stufului timp de 2 ore la hidromodulul 1 : 4. Valoarea lui C_s s-a calculat din aciditatea prehidrolizatelor, care a fost exprimată în acid sulfuric [6]. Reprezentînd în plan variația lg K funcție de lg C_s, s-a obținut o dreaptă a cărei pantă față de axa absciselor dă valoarea lui M (fig. 6) și anume $M = 0{,}21$.

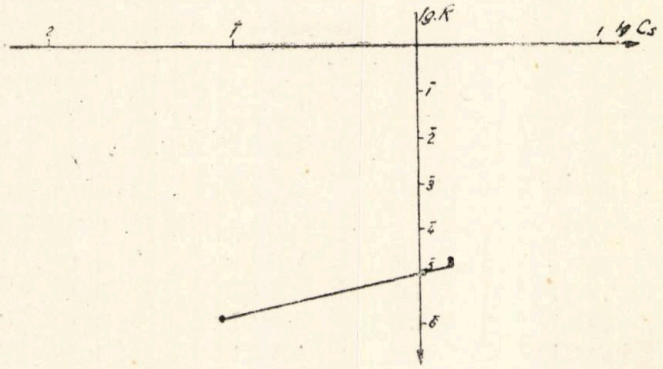


Fig. 6

Introducînd valoarea lui M în relația (4) s-a calculat constata H pentru cazul prehidrolizei efectuate timp de 2 ore la temperatura medie de 133° C, cu un raport stuf : apă = 1 : 4. Pentru acest caz $K = 1{,}379 \cdot 10^{-1}\ min^{-1}$, $M = 0{,}21$, $E = 30000$ cal., [6], [7], $R = 1{,}987$ cal/grad.mol, $T = 411°K$.

În cazul prehidrolizei cu apă a stufului, în condițiile specificate, se obține $H = 5{,}57.10^{12}$.

Concluzii

Din datele tabelelor 1...7 și din graficele din fig. 1...3, se constată următoarele :

a) Conținutul în furfurol al soluțiilor rezultate la seria de prehidrolize efectuate la o durată de 6 ore (hidromodul 1 : 4) atinge valoarea maximă în jurul presiunii de 3,5 atu, după care scade, menținîndu-se între 6...11,5 atu în jurul valorii de 1 g/l. Valorile obținute la seria de probe efectuate la durata de 3 ore, se mențin pînă la o presiune egală cu 5 atu sub cele rezultate la seria de prehidrolize cu durata de 6 ore; la presiuni ce depășesc 5 atu sînt ceva mai ridicate ca acestea. Conținutul maxim în furfurol se obține la seriile de prehidrolize cu durata de 1 și 2 ore la presiunea de 5 atu. Seria de prehidrolize conduse la o durată de 1 oră, dă valorile cele mai mari în ce privește conținutul de furfurol. Rezultatele obținute confirmă faptul că presiunea ridicată și durata mare de prehidroliză provoacă transformarea furfurolului în acizi și substanțe humice.

b) Conținutul în *substanțe reducătoare* crește pe măsura scăderii duratei de prehidroliză și ridicării presiunii. Astfel, în timp ce la soluțiile rezultate la prehidrolizele cu durată de 6 ore valoarea maximă de 5,666 g S.R./l se obține la presiunea de 3,5 atu, la cele rezultate la prehidrolizele de 3 ore maximum de 7,16 g S.R./l se obține la o presiune de 6,3 atu, la prehidrolizele cu durată de 2 ore, maximum de 9,96 g S.R./l se obține la 6 atu, iar la soluțiile obținute la fierberi de numai o oră, valoarea maximă de 9,6 g S.R./l se atinge de abia la presiunea de 8,7 atu.

Scăderea conținutului în substanțe reducătoare pe măsură ce condițiile de prehidroliză sînt mai dure (creșterea duratei și presiunii) se datorește descompunerii și humificării unei însemnate părți din zaharurile trecute în soluție.

c) *Aciditatea* soluțiilor ce rezultă la prehidroliza stufului crește cu mărirea duratei și presiunii și scăderea raportului stuf : apă. Astfel, dintre seriile de prehidrolize conduse cu hidromodulul 1 : 4, cea mai mare aciditate o posedă soluțiile rezultate la fierberi cu durată mai mare (3 și 6 ore).

În general, se constată că la presiuni ce depășesc 8 atu toate soluțiile rezultate la prehidrolizele efectuate la hidromodulul 1 : 4, au o aciditate apropiată (aproximativ 6 cm^3 NaOH $n/20$ pentru 1 cm^3 soluție).

În lucrare s-au prezentat de asemenea valorile calculate ale constantei vitezei de reacție (K) a hidrolizei hemicelulozelor din stuf.

Institutul Politehnic Iași,
Catedra de Celuloză, Hîrtie și Fibre artificiale

BIBLIOGRAFIE

1. Simionescu Cr. et Feldman D., La Papeterie, 1957, *9*, pp. 589—596.
2. Trobisch U., Zellstoff und Papier, 1957, **6**, *5*, S. 139—144.
3. Vasilescu I, Revista Celuloză și Hîrtie, 1957, *4*, pp. 136—145.
4. Смирнов В. А., Технология гидролизного производства, Пищепромиздат, М., 1948.
5. Stamm A. J. a. Harris E. E., *Chemical Processing of Wood*, T. et H., London, 1954, pp. 485—531.
6. Kobayaschi T. a. Sakai Y., Bull. Agr. Chem. Soc. Japan, 1956, **20**, *1—7*, Ref., Chem, Abstr., 1957, **51**, *16*, p. 12485e.
7. Smirnov V. A., Revista AGIR, Chimie, 1948, *6*, pp. 299—311.

ИЗУЧЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ГИДРОЛИЗА ТРОСТНИКА (II)

(Резюме)

В первом сообщении изучался предварительный гидролиз тростника в зависимости от отдельных параметров а именно: гидромодуль, температура (давление) продолжительность, а также влияние этих параметров на выход и химический состав волокнистого материала.

Результаты, полученные при анализе растворов предварительного гидролиза, касаются выхода фурфурола, редуцирующих веществ и органических кислот.

В конце работы приведены значения констант скорости реакции предварительного гидролиза тростника с водой, полученные обобщением кинетики гидролиза гемицеллюлоз.

RECHERCHES SUR LA PRÉHYDROLYSE DU ROSEAU (II)

(Résumé)

On a étudié dans une Note antérieure la préhydrolyse du roseau avec de l'eau en fonction de quelques facteurs, à savoir : l'hydromodule, la température (la pression), la durée et l'influence qu'exercent ces facteurs-ci sur les rendements et la composition chimique du matériel fibreux.

On présente les résultats obtenus à l'analyse des solutions de préhydrolyse; ces résultats se réfèrent aux rendements en furfurol, sucres et acides organiques.

Enfin, on obtient les valeurs de quelques constantes concernant la préhydrolyse du roseau, avec de l'eau, en appliquant une série de considérations quant à la cinétique de l'hydrolyse des hémicelluloses.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

677.31.02

CONTRIBUŢII LA STUDIUL CROMĂRII LÎNII

DE

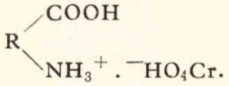
MIŞILIM GRINDEA, LEONIA STOICESCU-CRIVETZ
ŞI SAVEL IFRIM

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Introducere

Problema tratării lînii cu săruri de crom, în special cu bicromat de potasiu sau sodiu, prezintă o deosebită importanţă teoretică şi practică.

Cromarea lînii are un rol important atît în aplicarea unor serii întregi de coloranţi complexabili cît şi sub aspectul modificărilor pe care le suferă lîna în urma tratamentului cu săruri de crom. Dacă problema combinării cromului cu diferiţi coloranţi a fost studiată şi se cunosc date precise referitoare la structura complecşilor crom-colorant [1] nu tot aşa se prezintă lucrurile în problema combinării cromului cu lîna. Acest domeniu a fost mai puţin cercetat şi mecanismul legării cromului la fibră nu este încă clarificat. Teoria mai veche a lui Georgievics [2] privea fenomenul legării cromaţilor la lînă ca un proces de absorbţie Curînd după aceasta au fost elaborate teorii chimice asupra acestui fenomen. Astfel, Ilynski şi Kodner [3] au arătat că în prima fază, acidul cromic se leagă, ca orice acid mineral, la grupele aminice ale lînei, printr-o legătură tip sare



Acidul cromic rezultă din hidroliza bicromatului de potasiu după relaţia :

$$K_2Cr_2O_7 + H_2O \longrightarrow 2\,KOH + 2\,CrO_3\,,$$

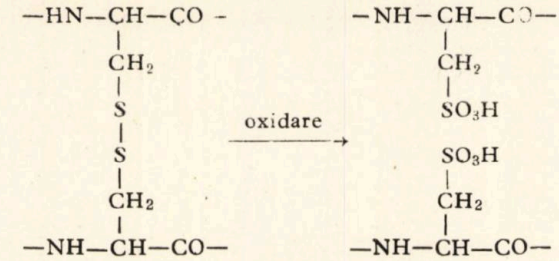
$$CrO_3 + H_2O \longrightarrow CrO_4H_2\,.$$

În faza a doua are loc reducerea cromului hexavalent la crom trivalent [4]

$$2\,CrO_3 \xrightarrow{H_2} Cr_2O_3 + 3\,H_2O\,.$$

S-a constatat că această reducere are loc chiar în absenţa unui reducător în baia de tratare şi este influenţată de temperatură şi lumină [5]. Urmează că reducerea se face de către puntea cistinică din proteina fibrei, sensibilă la oxidare.

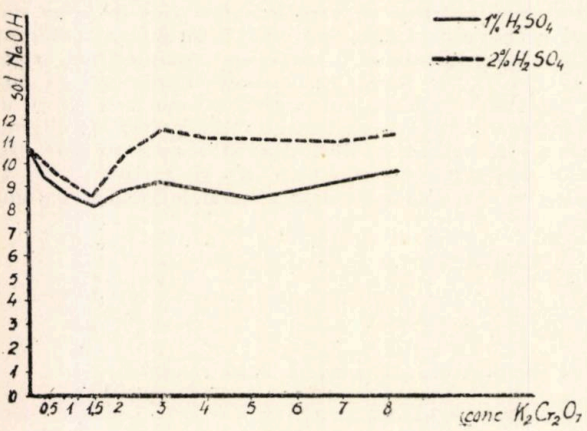
Haller şi Hove [6] au arătat că prin ridicarea temperaturii şi sub acţiunea luminii, viteza de oxidare a lînei creşte. Acest fapt are ca urmare, într-o anumită măsură, o acţiune de degradare a fibrei, cauzată de formarea acidului cisteinic din cistină:



Introducerea cromului în structura fibrei determină modificări în însuşirile acesteia, în special creşte stabilitatea la acţiunile fotochimice [7] şi la acţiunea microorganismelor [8]. Se modifică şi proprietăţile fizico-mecanice ale fibrei; scăderea elasticităţii găsită de diverşi cercetători [9] constituie un factor negativ pentru filabilitatea fibrelor, în cazul cînd vopsirea se face înainte de filare, caz destul de frecvent în industria lînei. În condiţii anumite de cromare, creşte şi rezistenţa la uzură a materialului [10] determinată prin rezistenţa la frecare (abraziune).

Efectul tratării lînii cu săruri de crom se pare că constă în formarea de legături transversale între lanţurile macromoleculare ale proteinei [11]. Desigur că aceste legături transversale, mai stabile decît puntea cistinică, explică îmbunătăţirea însuşirilor fibrei. Totuşi, rezultatul final al unui tratament cu bicromat în mediu acid, trebuie să fie rezultanta acţiunilor pozitive asupra fibrei, prin crearea de legături transversale, dar şi a celor negative, de oxidare şi micşorare a elasticităţii ei.

În lucrarea de faţă ne-am propus studierea unor condiţii în procesul cromării lînii, în care rezultanta acţiunilor pozitive şi negative este optimă. S-au efectuat cromări în condiţii defavorabile lînei, prin tratarea ei cu soluţii acide de bicromat, fără prezenţa unui reducător, urmînd ca procesul de reducere al cromului să se facă numai pe socoteala punţii cistinice.



Fig; 1.

S-a tratat lîna cu cantităţi crescînde de bicromat de potasiu, depăşind cantităţile folosite în industrie, pînă la aproape de trei ori. S-a variat şi concentrarea acidului sulfuric în jurul proporţiilor utilizate industrial, iar cromarea s-a făcut la temperatura de fierbere. Dintre metodele propuse pentru stabilirea efectului rezultat prin cromare asupra lînii, s-au utilizat: solubilitatea în alcali, solubilitatea în acizi, determinarea azotului labil şi rezistenţa la rupere şi alungire. Rezultatele obţinute experimental sînt redate în tabelele 1, 2, 3 şi 4, după care s-au trasat diagramele reprezentate în fig. 1, 2 şi 3.

Diagrama sintetizînd variaţia solubilităţii în alcali (fig. 1) prezintă un minim corespunzînd la cantitatea de 1,5% bicromat de potasiu. Cu creşterea cantităţii de crom se observă şi o creştere a solubilităţii în

alcali. Există deci o proporție optimă de crom (1,5%) pentru care efectul de îmbunătățire a fibrei depășește pe cel de degradare, La cantități mai mari de crom, solubilitatea în alcali devine inferioară celei a lînii necromate numai la aciditați reduse (1% H_2SO_4). La aciditați mai mari (2% H_2SO_4), la care probabil se adaugă efectul hidrolitic al acidului, solubilitatea în alcali la cantități mai mari de 3% bicromat, depășește pe aceea a lînii inițiale. La cantitatea optimă de 1,5% ca și la cantități mai mici de bicromat, se vede că aciditatea soluției de crom nu influențează sensibil solubilitatea în alcali.

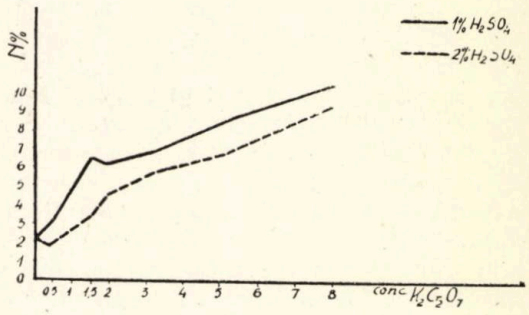


Fig. 2.

Curbele din fig. 2, reprezentînd variația azotului labil, indică o creștere continuă a acestuia o dată cu creșterea cantității de bicromat. Această metodă indică deci o degradare crescîndă a fibrei. Considerînd datele din fig. 1 trebuie să conchidem că acțiunea cromării se face după un mecanism care micșorează stabilitatea fibrei la acțiuni oxidative, de tipul celor folosite în determinarea azotului labil și mărește stabilitatea la acțiuni alcaline.

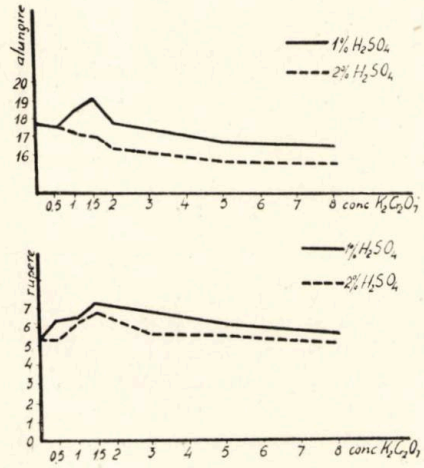


Fig. 3.

Se vede că în privința efectului de micșorare a stabilității la acțiuni oxidative, influența aciditații este deosebită de aceea asupra solubilității în alcali, la aciditați mai mici corespunzînd cantități mai mari de azot labil.

La seria de cromări cu 1% H_2SO_4 s-a determinat și solubilitatea în acid clorhidric 4 *N*. Rezultatele arată o influență relativ mică a cromării asupra solubilității în acid.

Determinările făcute asupra indicilor mecanici sintetizate în tabelul 4 și fig. 3 arată că rezistența la rupere variază în același mod în care variază și solubilitatea în alcali.

Rezistența maximă corespunde tot unei cantități de 1,5% bicromat de potasiu. Menționăm în acest sens lucrarea lui M e c h e e l s [10] care a găsit, lucrînd pe fire, o concentrație optimă de 0,8 g/l bicromat de potasiu pentru rezistența optimă la frecare. Recalculînd la raportul de flotă folosit în lucrarea citată, concentrația găsită de noi ar fi 0,6 g/l, deci în concordanță cu datele autorului citat.

2. Partea experimentală

1. *Purificarea lînii.* S-a lucrat cu lînă merinos din regiunea Satu-Mare. Fibrele utilizate în cercetările noastre, au fost purificate prin extracţie cu tetraclorură de carbon în Soxhlet, spălări repetate cu apă distilată la 30°, uscare în aer, eventualele impurităţi fiind îndepărtate mecanic şi degresare finală cu tetraclorură de carbon.

2. *Cromarea.* S-a executat cromarea cu soluţii apoase de bicromat de potasiu, cantităţile raportate la lînă variind de la 0,5% la 8%, raportul de flotă 1/50. S-a adus soluţia la fierbere, s-a introdus lîna, s-a adăugat acidul sulfuric (1 şi 2%) şi s-a continuat fierberea 30 minute, menţinînd volumul soluţiei constant. S-a spălat cu apă, s-a uscat la aer.

3. *Solubilitatea în alcali.* S-a aplicat metoda lui Harris şi Smith [12], [13]: proba de 400 mg lînă, s-a introdus într-o eprubetă conţinînd o soluţie de NaOH *n*/10, raport de flotă 1/100. S-a ţinut în termostatul Höppler reglat la 65°C timp de 60 minute, agitînd la fiecare 10 minute. S-a trecut într-un filtru *G*, cîntărit, s-a spălat pînă la reacţie neutră, controlat cu fenolftaleină. S-a filtrat, uscat în etuvă la 105° timp de 8 ore pînă la greutate constantă. Pierderea în greutate reprezintă solubilitatea în alcali. Determinări similare s-au făcut şi pe lînă necromată. Rezultatele sînt consemnate în tabelul 1, cifrele reprezentînd media a cîte 10 determinări pentru fiecare concentraţie.

Tabelul 1

$K_2Cr_2O_7$ %	H_2SO_4 1%	H_2SO_4 2%
0	11,29	—
0,5	9,65	9,56
1	8,75	9,25
1,5	8,35	8,85
2	8,93	10,25
3	9,08	11,70
5	8,49	11,02
8	9,42	11,30

Tabelul 2

$K_2Cr_2O_7+H_2SO_4$	Pierderi g
0	11,29
0,5	10,64
1	10,59
1,5	10,74
2	10,35
3	10,05
5	10,40

4. *Solubilitatea în acizi.* S-a utilizat metoda lui Zahn şi Würtz [14]: 400 mg fibre uscate în aer au fost ţinute în etuvă la 105° timp de 8 ore, şi după o oră s-a ceterminat greutatea la balanţa analitică. În rezervorul termostatului Höppler, reglat la 65°, s-au montat 10 eprubete cu cîte 40 ml HCl în care s-au introdus probele de lînă. S-a ţinut 60 minute, agitînd la 10 minute. S-au scos eprubetele, s-a decantat acidul, s-au spălat probele cu apă distilată. S-a filtrat pe filtre G_1 sau G_2. Pentru eliminarea urmelor de acid s-a spălat cu hidroxid de amoniu pH = 8. S-a filtrat din nou, s-a spălat cu apă distilată, uscat 8 ore la 105° în vas tarat. Pierderea de greutate raportată la materialul uscat reprezintă solubilitatea în acid. Rezultatele sînt consemnate în tabelul 2.

5. *Determinarea azotului.* Cantitatea de azot total din fibră a fost determinată prin metoda Kyeldahl.

Pentru determinarea azotului labil s-a utilizat metoda propusă de Krais şi Schleber [15]: 100 mg lînă uscată în aer, a fost introdusă într-un Erlenmeyer conţinînd 8 ml apă distilată, 10 ml H_2O_2 1% şi 2 ml KOH 1/2 *n*. S-a închis balonul şi s-a lăsat la temperatura camerei (20°C) trei zile, agitînd din cînd în cînd. S-a filtrat într-un Kyeldhal.

Pentru kyeldahlizare se adaugă 10 ml H_2SO_4 conc., 2 ml $CuSO_4$ 10%, 5000 mg K_2SO_4 şi 10 ml H_2O_2, se încălzeşte 3...4 ore pe baie de nisip pînă ce masa devine verde-clar. Se lasă să se răcească, se adaugă 180 ml NaOH 10% şi piatră ponce şi se distilă 30 minute amoniacul rezultat într-un recipient conţinînd 15 ml H_2SO_4 1/10 *n*. Prin retitrarea acidului nefolosit la neutralizarea amoniacului cu o soluţie de NaOH *n*/10 se calculează cantitatea de azot. Se repartizează la sută. Rezultatele sînt redate în tabelul 3, cifrele reprezentînd media a cîte 10 determinări.

Tabelul 3

$K_2Cr_2O_7$ %	N total	N labil	
		H_2SO_4 1%	H_2SO_4 2%
0	15,38	2,00	2,00
0,5	15,23	3,04	1,80
1	15,25	4,75	2,60
1,5	15,01	6,16	3,45
2	14,84	6,09	4,40
3	14,83	6,60	5,40
5	15,06	8,30	6,40
8	15,25	10,45	9,80

Tabelul 4

Rezistenţa la rupere			Alungire	
$K_2Cr_2O_7$ %	H_2SO_4 1%	H_2SO_4 2%	H_2SO_4 1%	H_2SO_4 2%
0	5,32	5,32	17,63	17,66
0,5	6,35	5,52	17,50	17,43
1	6,68	6,42	17,05	18,83
1,5	7,27	6,74	17,00	19,1
2	7,07	6,31	16,4	17,83
3	6,81	5,61	16,00	17,40
5	6	5,5	15,66	16,80
8	5,28	5,15	15,46	16,30

6. *Determinarea rezistenţei la rupere şi alungire a fibrei.* Măsurătorile au fost făcute utilizînd un dinamometru Schoper. Fibre selecţionate de lînă au fost montate în aparat între două cleme. S-a deschis aparatul, care se opreşte automat în momentul ruperii fibrei şi s-a făcut citirea. Pentru fiecare probă s-au făcut cîte 20 determinări, calculîndu-se media după relaţia $F = 0{,}5 + X_m G/100$, reprezentînd rezistenţa la rupere şi $I = 100\,X/L$—alungirea fibrei, X—media, G—greutatea pendulului, L-lungimea fibrei. Rezultatele sînt date în tabelul 4.

3. Concluzii

1. Considerînd solubilitatea în alcali ca măsură a degradării oxidative a fibrei, rezultă posibilitatea stabilirii, pentru condiţii concrete de cromare, a concentraţiilor optime de bicromat de potasiu folosit.

2. Se constată concordanţa dintre solubilitatea în alcali şi rezistenţa la rupere şi alungire a fibrei.

3. La acţiuni ulterioare oxidative, ca acele folosite în determinarea azotului labil, degradarea fibrei nu prezintă un minim, ci creşte proporţional cu cantitatea de crom folosită.

4. Solubilitatea în acid clorhidric, s-a dovedit şi în acest caz de tratament acid, neconcludentă.

5. În condiţiile lucrării noastre, rezultatele optime au fost obţinute la o cantitate de 1,5% bicromat de potasiu, raportat la materialul fibros.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Tehnologie Chimică Textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Ender u. Müller, Mel. Ber., **19,** pp. 19-65, 823.
1a. Drew a Fairbain, J. C. S., 1939, p. 823.
2. Ulrich G. u. Krüger O., *Technologie der Wolle,* Springer-Verlag, 1938, p. 91.
3. Ilynski M. A. u. Kodner D. I., Angew. Chemie, 1928, **41,** S. 283.
4. Carèbe P. W., Rowe F. M. a. Speakman J. B., J. Soc. Dyers. Col., 1946, **62,** p. 329.
5. Stevens C. B., Rowe F. M. a. Speakman J. B., J. Soc Dyers. Col., 1943, **59,** p. 165.
6. Haller R. u. Hove H. V., Helv. Chim. Acta, 1932, **15,** S. 357.
7. Kertesz A., Text. Forschg., 1919, S. 63.
8. Bichsel N. F., Text. Rund., 1955, **10,** S. 471, 603.
9. Fink D., Text. Rund., 1953, **8,** S. 281.
10. Mecheels O., Mell. Ber., 1957, **38,** S. 645.
11. Gaunt J. F., J. Soc. Dyers. Col., 1949, **65,** p. 429.
12. Harris M. a. Smith A. L., Am. Dyestuff Reptr., 1936, **25,** p. 542.
13. Smith A. L. a. Harris M., J. Research NBS, 1936, **16,** p. 309; Ibid. 1937, **17,** pp. 97, 577.
14. Zahn H. et Würtz A., Bull. Inst. Text. France, 1955, p. 75.
15. Krais u. Schleber, Lpz. Msch. Textilind, 1928, **9,** S. 165, 211.

ИЗУЧЕНИЕ ХРОМИРОВАНИЕ ШЕРСТИ

(Резюме)

В работе изучают отдельные условия хромирования шерсти, в которых равнодействующая положительного и отрицательного влияний бихромата калия на шерсть оказалась оптимальной.

Возможность установления оптимальных концентраций бихромата калия для данных конкретных условий вытекает из оценки растворимости в щелочах, и физико-механическими показателями волокна (сопротивлению к разрыву и удлинению).

Определением лабильного (несвязного) азота не нашли минимальных значений деструкции волокна, что указывает на различное поведение хромированной шерстн при последующей окислительной обработке.

В условиях настоящей работы оптимальная концентрация двухромокислого калия является 1,5%-ной, расчитанной на волокнистый материал.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DU CHROMAGE DE LA LAINE

(Résumé)

Les Auteurs étudient les conditions optimes concernant l'obtention de la résultante la plus favorable des actions (positives et négatives) du bichromate de potassium sur la laine.

L'établisssment des meilleures concentrations du bichromate de potassium a résulté, dans des conditions concrètes de chromage, de la considération de la solubilité dans les alcalis comme mesure de la dégradation oxydative de la fibre. On a constaté la concordance entre la solubilité dans les alcalis et les indices physico-mécaniques (résistance à la rupture et allongement de la fibre).

Le comportement différent de la laine chromée à des traitements oxydatifs ultérieurs est le résultat de la détermination de l'azote instable.

La meilleure concentration de bichromate de potassium établie est de 1,5% par rapport au matériel fibreux.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

537.531

CONSIDERAŢII ASUPRA EFICACITĂŢII ANSAMBLULUI FILTRU-ECRAN FLUORESCENT, UTILIZATE ÎN TEHNICA RAZELOR X

DE

EMIL LUCA, V. PETRESCU şi GH. ILIESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Consideraţii generale

În două lucrări anterioare [1] şi [2], studiindu-se influenţa filtrelor asupra ecranelor fluorescente utilizate în tehnica razelor X, s-a arătat că eficacitatea ϱ a unui ecran fluorescent, dată de raportul dintre iluminarea β a ecranului fluorescent şi intensitatea ionometrică I a fasciculului de raze X incident la ecran, însă în prealabil filtrat, prezintă un maxim, cînd lungimea de undă a fasciculului de raze X variază, că acest maxim se deplasează spre lungimi de undă mai scurte (potenţiale mai mari), cînd grosimea filtrului creşte şi că valoarea acestor maxime creşte cînd grosimea filtrului creşte. Rezultate asemănătoare, în ceea ce priveşte eficacitatea ecranelor fluorescente, au fost obţinute şi de Destriau [3, pp. 190...193].

Într-o altă lucrare [4] studiindu-se eficacitatea ε a filtrelor utilizate în tehnica razelor X, definită ca raportul dintre variaţia relativă dU/U a tensiunii de alimentare şi variaţia relativă dI/I a intensităţii ionometrice a fasciculului de raze X, s-a arătat că coeficientul de eficacitate a filtrului prezintă un maxim, corespunzător unei anumite grosimi de filtru, că aceste maxime se deplasează spre grosimi de filtru mai mari, atunci cînd tensiunea de alimentare a tubului de raze X, creşte şi că însăşi valoarea acestor maxime variază cu tensiunea de alimentare a tubului de raze X, prezentînd de asemenea un maxim. Rezultate asemănătoare în ceea ce priveşte eficacitatea unui filtru, definită însă prin alt raport, au fost obţinute şi de G. Destriau şi Mathey Cornat [3, pp 195...203].

De oarece atît eficacitatea unui ecran fluorescent pe care cade un fascicul de raze X, în prealabil filtrat, cît şi eficacitatea filtrului prin care se filtrează fasciculul de raze X prezintă cîte un maxim şi de oarece aceste maxime variază şi într-un caz şi în altul funcţie de aceleaşi mărimi: tensiunea de alimentare a tubului de raze X şi grosimea filtrului, ne propunem a studia legătura dintre eficacitatea filtrului şi eficacitatea ecranului fluorescent, utilizate în tehnica razelor X.

2. Eficacitatea ansamblului filtru-ecran fluorescent

Filtrul şi ecranul fluorescent constituind în tehnica razelor X un ansamblu, se poate defini un coeficient de eficacitate al ansamblului filtru-ecran fluorescent, care ţinînd seama de faptul că filtrele si ecra-

nele fluorescente acţionează asupra intensităţii ionometrice a fasciculului de raze X în mod succesiv, deci ca şi cum ar fi puse în serie, va fi dat de produsul dintre eficacitatea filtrului şi eficacitatea ecranului fluorescent.

Această eficacitate a ansamblului filtru-ecran fluorescent, notată cu γ, va fi dată de relaţia:

$$\gamma = \varrho\,\varepsilon\,. \tag{1}$$

Să considerăm realizat ansamblul filtru-ecran fluorescent, ca în fig. 1.

Eficacitatea ecranului fluorescent, conform celor arătate într-o lucrare anterioară [1], este dată de relaţia lui Destriau [3, p. 190]:

$$\varrho = e^{-\tau_1 b}\,(1 - e^{-\mu c})\,, \tag{2}$$

unde b — grosimea suportului ecranului fluorescent, τ_1 — coeficientul de slăbire a fasciculului de raze X, c — grosimea substanţei fluorescente,

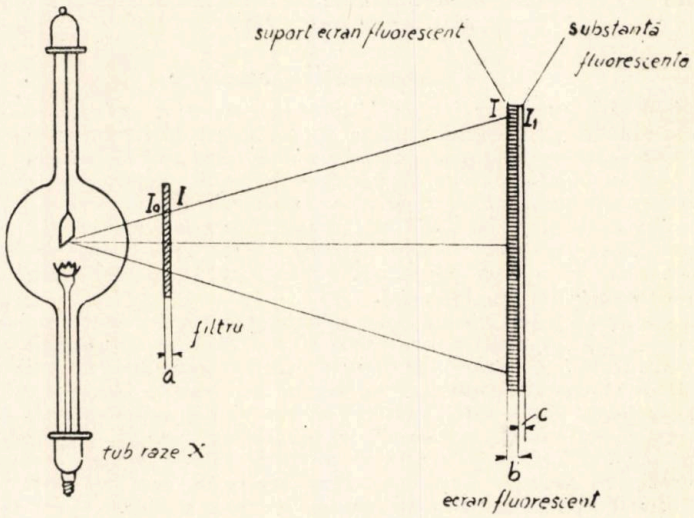


Fig. 1

μ — coeficientul de absorţie al substanţei fluorescente. Eficacitatea filtrului este dată, conform celor arătate în lucrarea anterioară [4], de relaţia:

$$\varepsilon = \frac{dU}{U} : \frac{dI}{U} = \frac{U - U_1}{U} : \frac{I_0 - I}{I_0}\,, \tag{3}$$

unde U — tensiunea efectivă de alimentare a tubului de raze X pentru a produce un fascicul de raze X cu o intensitate ionometrică egală cu I_0 (prin tensiune efectivă de alimentare înţelegîndu-se tensiunea la bornele tubului de raze X la funcţionarea acestuia în sarcină, adică diferenţa dintre tensiunea la gol aplicată tubului de raze X şi căderea de pe trans-

formator produsă la mersul în sarcină); U_1 — tensiunea efectivă cu care ar trebui să fie alimentat tubul de raze X pentru a produce un fascicul de raze X cu o intensitate ionometrică egală cu I; I_0 și I reprezintă intensitățile ionometrice ale fasciculului de raze X, conform fig. 1.

Considerînd ca neglijabil efectul de absorbție al stratului de aer dintre filtru și ecranul fluorescent, de oarece fasciculul de raze X de intensitate ionometrică I_0 traversează întîi filtrul de grosime a și deci devine sărac în raze de lungimi de undă mari, putem admite că la ecranul fluorescent ajunge fasciculul de intensitate ionometrică I, căpătat la ieșirea din filtru.

Valoarea intensității ionometrice I poate fi exprimată în funcție de valoarea intensității ionometrice I_0 prin relația

$$I = I_0 e^{-\tau_2 a}, \tag{4}$$

unde a — grosimea filtrului, τ_2 — coeficientul de slăbire al fasciculului de raze X, datorită filtrului de grosimea a.

Datorită relației (4), termenul $(I_0 - I)/I$ poate fi pus sub forma:

$$\frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{I_0 (1 - e^{-\tau_2 a})}{I_0} = 1 - e^{\tau_2 a}. \tag{5}$$

Ținînd seama de relațiile (2), (3) și (5), relația (1), ce exprimă eficacitatea ansamblului filtru-ecran fluorescent, devine:

$$\gamma = \varrho\, \varepsilon = \frac{e^{-\tau_1 b}(1 - e^{-\mu c})}{1 - e^{-\tau_2 a}} \cdot \frac{U - U_1}{U}. \tag{6}$$

În cadrul relației ce definește noua eficacitate a ansamblului filtru-ecran fluorescent, menținînd constantă tensiunea de alimentare a tubului de raze X, raportul $(U - U_1)/U$ rămîne constant și deci eficacitatea γ este influențată numai de grosimea a a filtrului.

Ținînd seama că în cazul unei valori constante a tensiunii de alimentare a tubului de raze X, compoziția spectrală a fasciculului de raze X rămîne aceeași, putem admite că rămîne constant și τ_2 ca și în cazul fasciculelor monocromatice. În acest caz, pentru o grosime a filtrului $a_2 > a_1$, vom avea $1 - e^{-\tau_2 a_1} < 1 - e^{-\tau_2 a_2}$ adică numitorul relației (6) crește o dată cu grosimea filtrului.

Crescînd grosimea filtrului, sînt absorbite din fasciculul de raze X un număr din ce în ce mai mare de raze X cu lungimi de undă mari, ceea ce face ca la ecranul fluorescent să ajungă un fascicul de raze X cu o compoziție spectrală ce depinde de grosimea filtrului. În acest caz coeficientul τ_1 nu mai poate fi considerat constant ci va scădea cînd grosimea filtrului crește, din cauză că prin creșterea grosimii filtrului, la ecranul fluorescent ajunge un fascicul de raze X cu lungimi de undă mai mici. Notînd cu τ_1' și τ_1'', coeficienții de slăbire ai fasciculului de raze X datorită suportului ecranului, ce corespund grosimilor de filtru a_1 și a_2 pentru cazul $a_2 > a_1$ vom avea $e^{-\tau_1' b} < e^{-\tau_1'' b}$.

Dacă admitem că termenul $(1 - e^{-\mu c})$ rămîne aproximativ constant, conform celor arătate în lucrările anterioare ([1], [2] şi [5]), rezultă că numărătorul relaţiei (6) creşte o dată cu grosimea filtrului. Aşadar în urma creşterii grosimii filtrului, creşte atît numărătorul cît şi numitorul relaţiei (6).

Deoarece valoarea lui τ_1 scade exponenţial cu lungimea de undă, pentru o variaţie oarecare a grosimii filtrului, variaţia relaţiei (6) prin creşterea numărătorului, va fi mai mare ca cea produsă de creşterea numitorului, ceea ce are ca rezultat faptul că în cazul unei grosimi a filtrului $a_2 > a_1$ vom avea pentru eficacitatea ansamblului filtru-ecran fluorescent o valoare $\gamma_2 > \gamma_1$. Acest lucru arată, că pentru o tensiune constantă, eficacitatea ansamblului filtru-ecran fluorescent creşte o dată cu grosimea filtrului.

Pentru o altă tensiune de alimentare a tubului de raze X şi anume $U' > U$ raportul $(U' - U'_1) / U' > (U - U_1) / U$, fasciculul de raze X va fi mai bogat în raze de lungimi de undă mai scurte.

În acest caz prin variaţia grosimii filtrului, creşterea numărătorului relaţiei (6) va fi şi mai accentuată faţă de cea a numitorului şi deci eficacitatea ansamblului filtru-ecran fluorescent variază puţin pentru tensiuni de alimentare înalte atunci cînd se variază grosimea filtrului.

3. Rezultate experimentale şi interpretarea lor

În vederea verificării experimentale a consideraţiilor teoretice am utilizat parte din rezultatele experimentale obţinute în lucrările anterioare ([1], [4]) efectuînd şi o serie de măsurări experimentale noi, adoptînd modul de măsurare şi aparatura indicată în lucrările anterioare ([1], [2], [4], [5], [6]).

Lucrîndu-se cu tensiuni la gol de 66 kV, 73 kV, 79 kV, 84 kV şi 92 kV, menţinînd în permanenţă acelaşi curent electronic (de 82 mA) şi utilizînd filtre de aluminiu de diverse grosimi (de 0,5 mm; 1 mm; 1,5 mm şi 2,5 mm), s-au obţinut rezultatele experimentale din tabelele 1...5.

Tabelul 1

Filtru de aluminiu de 0,5 mm

Tens. la gol V kV.	Crt. ioniz. $\mathfrak{J}$ div.	Crt. fotoel. β div.	Coef. efic. ecran ϱ	Coef. efic. filtru ε	Coef. efic. instal. γ
66	23	14	0,61	0,410	0,250
73	28,5	17,5	0,65	0,407	0,265
79	32,5	20,5	0,63	0,394	0,248
84	35	21	0,60	0,386	0,232
92	42	24	0,57	0,372	0,212

Tabelul 2

Filtru de aluminiu de 1 mm

Tens. la gol V kV.	Crt. ioniz. $\mathfrak{J}$ div.	Crt. fotoel. β div.	Coef. efic. ecran ϱ	Coef. efic. filtru ε	Coef. efic. instal. γ
66	20	12,5	0,62	0,400	0,248
73	25.5	17	0,66	0,420	0,270
79	28,5	20	0,70	0,416	0,290
84	31	20,5	0,65	0,415	0,270
92	36	22,5	0,63	0,390	0,248

Tabelul 3

Filtru de aluminiu de 1,5 mm

Tens. la gol V kV.	Crt. ioniz. $\mathcal{J}$ div.	Crt. fotoel. β div.	Coef. efic. ecran ϱ	Coef. efic. filtru ε	Coef. efic. instal. γ
66	17	11	0,64	0,390	0,250
73	22,5	15,5	0,69	0,403	0,278
79	25,5	18,5	0,73	0,443	0,324
84	28	20	0,71	0,435	0,310
92	31	21,5	0,69	0,432	0,298

Tabelul 4

Filtru de aluminiu de 2 mm

Tens. la gol V kV.	Crt. ioniz. $\mathcal{J}$ div.	Crt. fotoel. β div.	Coef. efic. ecran ϱ	Coef. efic. filtru ε	Coef efic. instal. γ
66	15	10	0,68	0,370	0,250
73	20	15	0,76	0,382	0,294
79	23	17,5	0,77	0,433	0,333
84	25	19,5	0,75	0,456	0,346
92	27	20	0,74	0,443	0,300

Tabelul 5

Filtru de aluminiu de 2,5 mm

Tens. la gol V kV.	Crt. ioniz. $\mathcal{J}$ div.	Crt. fotoel. β div.	Coef. efic. ecran ϱ	Coef. efic. filtru ε	Coef. efic. instal. γ
66	13	9,5	0,73	0,350	0,255
73	17,5	13,5	0,77	0,397	0,305
79	21	17	0,81	0,410	0,330
84	23	19,5	0,85	0,448	0,380
92	24,5	20	0,82	0,445	0,364

Reprezentînd grafic variația coeficientului de eficacitate al ansamblului filtru-ecran fluorescent, funcție de tensiunea la gol a tubului de raze X, pentru diverse grosimi ale filtrului de aluminiu, se obțin curbele din fig. 2.

Analiza acestor curbe arată:

a) Coeficientul de eficacitate al ansamblului filtru-ecran fluorescent, pentru o aceeași grosime a filtrului, variază cu tensiunea de alimentare a tubului, prezentînd un maxim pentru o anumită tensiune de alimentare.

b) Aceste maxime se deplasează spre tensiuni de alimentare mari, atunci cînd grosimea filtrului crește.

c) Coeficientul de eficacitate al ansamblului filtru-ecran fluorescent crește cînd grosimea filtrului crește.

Ultimele două considerente, ce rezultă din analiza curbei experimentale de variație a coeficientului de eficacitate al ansamblului filtru-ecran fluorescent cu grosimea filtrului și tensiunea de alimentare a tubului, confirmă interpretările teoretice ce rezultau din analiza relației (6).

Unind toate maximele curbelor de eficacitate filtru-ecran fluorescent, ce corespund diverselor grosimi de filtru, se capătă curba $M_1-M_2-M_3-M_4-M_5$, care arată că valoarea maximelor de eficacitate ale ansamblului filtru-ecran fluorescent creşte cînd tensiunea de alimentare creşte. În cazul eficacităţii filtrelor, curba de variaţie a maximelor de eficacitate funcţie de tensiunea de alimentare [4], prezintă un maxim pentru o anumită tensiune de alimentare, în timp ce în cazul ecranelor fluorescente [1], curba de variaţie a maximelor de eficacitate creşte exponenţial cu tensiunea aplicată tubului.

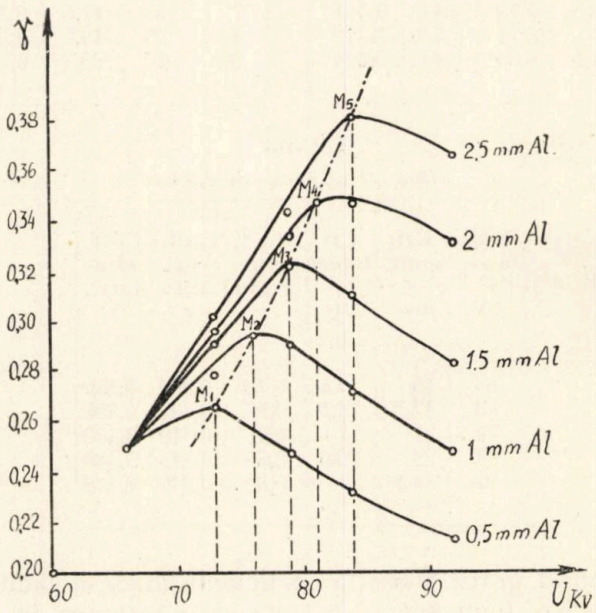


Fig. 2.

Rezultă deci că din asocierea efectelor produse de filtru şi de ecranul fluorescent, curba maximelor de eficacitate ale ansamblului filtru-ecran-fluorescent prezintă, cel puţin pentru domeniul nostru de lucru, o variaţie crescătoare, aproape liniară, atunci cînd tensiunea de alimentare a tubului de raze X creşte. Tendinţa de liniaritate este cu atît mai pronunţată cu cît tensiunile de alimentare sînt mai mari.

4. Concluzii

1. Se poate defini un coeficient de eficacitate al ansamblului filtru-ecran fluorescent care reprezintă eficacitatea totală a unei instalaţii de raze X. Valoarea acestui coeficient de eficacitate, al ansamblului filtru-ecran fluoroscent, se capătă din produsul coeficienţilor de eficacitate al filtrului şi al ecranului fluorescent, expresia sa fiind dată de (6).

2. În cazul unui filtru de grosime definită, coeficientul de eficacitate al ansamblului filtru-ecran florescent variază cu tensiunea de alimentare, prezentînd un maxim pentru o anumită tensiune.

3. Maximele curbelor de eficacitate ale ansamblului filtru-ecran fluorescent se deplasează, pentru grosimi variabile de filtre, spre tensiuni din ce în ce mai mari, atunci cînd grosimea filtrului creşte.

4. Pentru o aceeaşi tensiune de alimentare, valoarea coeficientului de eficacitate filtru-ecran fluorescent creşte cînd grosimea filtrului creşte. Această creştere este mai puţin accentuată pentru tensiuni de alimentare mari.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Petrescu V. et Luca E., Bull. de l'Ec. Polyt. Jassy, 1947, **2**, *1*, p. 193.
2. Luca E., Iliescu Gh. şi Reus P., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1955, **1** (**5**), *1-2*, p. 33.
3. Destriau G., *Physique appliquée des instalations à rayons X*, Dunod, Paris, 1945.
4. Luca E., Petrescu V., Iliescu Gh. şi Reus N., Bul. Inst. Polit. din Iaşi 1955, **2** (**6**), *3-4*, p. 165.
5. Luca E. şi colab., Bul. Inst. Polit. din Iaşi, 1957, **3**, (**7**), *3-4*, p. 77.
6. Luca E., Bull. de l'Ec. Polyt. Jassy, 1948, **3**, *2*, p. 285.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГРУППЫ ФИЛЬТР-ФЛУОРЕСЦИРУЮЩИЙ ЭКРАН В ТЕХНИКЕ Х-ЛУЧЕЙ

(Резюме)

В технике Х-лучей часто приходится определять как эффективность фильтров, так и эффективность флуоресцирующих экранов. В настоящей заметке определяется новый коэффициент эффективности, а именно, эффективность группы фильтр-флуоресцирующий экран. Этот коэффициент эффективности, представляющий общую эффективность установки Х-лучей, получается из произведения коэффициента эффективности фильтра и флуоресцирующего экрана (6).

При использовании фильтров разной толщины, коэффициент эффективности группы фильтр-флуоресцирующий экран, вариирует в зависимости от напряжения питания, достигая максимума при определенном напряжении для каждой толщины фильтра. При увеличении толщины фильтра эти максимумы перемещаются в сторону возрастающих напряжений.

При постоянном напряжении питания трубки Х-лучей. коэффициент эффективности группы растет при увеличении толщины фильтра. Это возрастание слабее при малых напряжениях питания и силнее при больших.

Экспериментальное измерения производились на аллюминиевых фильтрах различней толщины.

CONSIDÉRATIONS SUR L'EFFICACITÉ DE L'ENSEMBLE FILTRE-ÉCRAN FLUORESCENT UTILISÉ DANS LA TECHNIQUE DES RAYONS X

(Résumé)

Dans la technique des rayons X on utilise fréquemment les notions d'efficacité des filtres et des écrans fluorescents. Dans cette Note on définit un nouveau coefficient d'efficacité, à savoir, l'efficacité de l'ensemble filtre-écran fluorescent. Ce coefficient,

qui caractérise l'efficacité totale d'une installation de rayons X, défini par le produit des coefficients d'efficacité du filtre et de l'écran, est donné par (6).

En utilisant des filtres de diverses épaisseurs, le coefficient d'efficacité de l'ensemble filtre-écran fluorescent, varie en fonction de la tension d'alimentation, ayant une valeur maxima pour une certaine tension et une certaine épaisseur du filtre.

La valeur maxima de la tension augmente lorsque l'épaisseur du filtre s'accroit.

Si la tension d'alimentation du tube de rayons X est maintenue constante, la valeur du coefficient d'efficacité de l'ensemble filtre-écran fluorescent augmente lorsque l'épaisseur du filtre s'accroit. Cette augmentation est d'autant plus marquée que les valeurs de la tension d'alimentation sont plus grandes.

Dans les mesures expérimentales on a utilisé des filtres d'aluminium de diverses épaisseurs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

621.313.333

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ В СВЯЗИ С РАБОТОЙ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ОДНОЯКОРНЫМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ ПРИ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

И. ВЕЖАН, Л. СЕБАСТИАН и Н. В. БОЦАН

1. Известно, что между методами регулирования скорости асинхронного двигателя, существует и метод регулирования путём введения дополнительной э.д.с. в ротор двигателя. На этом принципе основано и каскадное соединение асинхронного двигателя с одноякорным преобразователем, при постоянной мощности (рис. 1), именуемый „каскад Кремера", к которому относимся в настоящей статье.

Техническая литература по специальности [1]...[7] дает, в связи с этим каскадом уравнения его работы в более или менее сокращенном виде, из которых, однако не возможно выявить действие всех параметров, входящих в состав электрической схемы, на условия работы каскады.

В настоящей статье мы даем более точный метод исследования механических и электрических характеристик каскада, стараясь выявить действие разных параметров на условия работы каскада. Для этого, пользуясь указаниями технической литературы [4], установили выражение механической характеристики каскада, содержащее все параметры схемы, которые могут изменяться. Имея ввиду, что наша цель обхватить все параметры схемы ведёт к большим усложнениям, в данной статье мы остановились только на влиянии изменения реакртанса ротор ной цепи асинхронного двигателя, при разных возбуждениях регулирующего двигателя, на характеристики каскада.

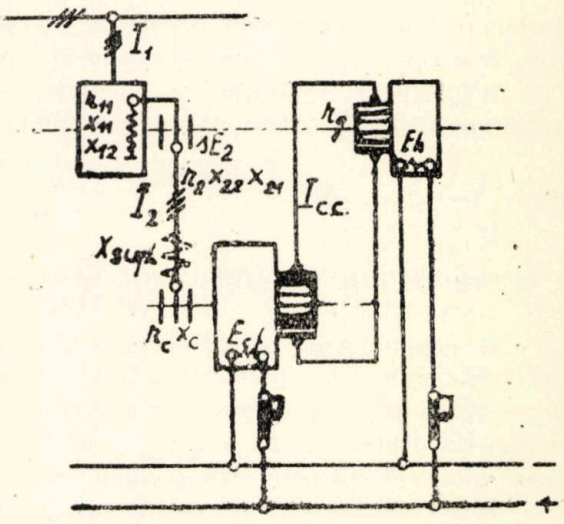


Рис. 1.

2. Для того чтобы установить уравнение механической характеристики каскада, следует иметь в виду, что момент на валу каскада состоит из момента асинхронного двигателя M_A и момента регулирующего двигателя M_R, то есть:

$$M_C = M_A + M_R. \tag{1}$$

А) МОМЕНТ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Выражение момента асинхронного двигателя в нашем случае:

$$M_A = k_m \Phi I'_2, \tag{2}$$

а в случае нормальной схемы:

$$M_{AN} = k_m \Phi I'_{2N} = \frac{2M_k}{s/s_k + s_k/s}, \tag{3}$$

где I'_2 и I'_{2N} — активные составляющие роторного тока в случае работы асинхронного двигателя в каскадном соединении и в нормальной схеме; M_k и s_k — критический момент и критическое скольжение в нормальной схеме.

Поток двигателя остается постоянным, т.к. в обоих случаях питающее напряжение двигателя не изменяется и соответствует номинальному напряжению.

Из выражений (2) и (3) следует $M_A = \frac{2M_k}{s/s_k + s_k/s} \cdot \frac{I'_2}{I'_{2N}}$. Зная, что роторный ток в нормальной схеме выражается $\bar{I}_{2N} = s\bar{E}_2/(r_2 + j\,s\,x_{2s})$ находим активную составляющую $I'_{2N} = s\,E_2\,r_2/(r_2^2 + s^2 x_{2s}^2)$.

Также известно, что в случае каскада, активная составляющая роторного тока составляет реальную часть вектора роторного тока, взятого относительно вектора собственной э.д.с. sE_2, $I'_2 = \mathrm{Re}\,\bar{I}_2$.

Выражение механической характеристики асинхронного двигателя в случае каскада, таким образом, станет:

$$M_A = \frac{2M_k}{s/s_k + s_k/s} \cdot \frac{r_2^2 + s^2 x_{2s}^2}{sE_2 r_2} \cdot \mathrm{Re}\,\bar{I}_2. \tag{4}$$

Б) ВЫРАЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕГУЛИРУЮЩЕГО ДВИГАТЕЛЯ

В нашем случае регулирующий двигатель питается от одноякорного преобразователя, и таким образом его момент будет $M_R = k_1 \Phi_R I_{cc}$, где Φ_R — поток регулирующего двигателя, I_{cc} — ток якоря двигателя. Также можно написать, что $\Phi_R = k_2 E_{h0}$, где E_{h0} — э.д.с. регулирующего двигателя соответствующая синхронной скорости асинхронного двигателя.

Известно также, что между постоянным током одноякорного трёхфазного преобразователя и активной составляющей линейного тока I'_2 существует выражение

$$I_{cc} = m\,n\,I'_2/\sqrt{3} = 1{,}06\,I'_2,$$

где $m = 3$ — число фаз одноякорного преобразователя, $n = 0{,}612$ — соотношение между напряжениями переменного и постоянного токов преобразователя.

Таким образом, момент регулирующего двигателя станет:

$$M_R = 1{,}06 k_1 k_2 E_{h0} I'_2 = k_3 E_{h0} \operatorname{Re} \bar{I}'_2. \tag{5}$$

в) МОМЕНТ КАСКАДА

Принимая во внимание выражения (1), (4) и (5) находим для момента каскада, выражение:

$$M_c = \left[\frac{2M_k}{s/s_k + s_k/s} \cdot \frac{r_2^2 + s^2 x_{2s}^2}{sE_2 r_2} + k_3 E_{h0} \right] \operatorname{Re} \bar{I}_2. \tag{6}$$

Чтобы получить выражение механической характеристики в процентах от номинального момента асинхронного двигателя — форма более подходящая с точки зрения анализа работы каскада — нужно иметь в виду выражения $M_A{}^0/_0 = 100 M_A / M_{An}$ и $M_R{}^0/_0 = 100 M_R / M_{Rn}$, и в этом случае выражение (1) принимает вид:

$$M_c = (M_A{}^0/_0 \cdot M_{An} + M_R{}^0/_0 \cdot M_{Rn}) / 100$$

или же в процентах:

$$M_c{}^0/_0 = 100 M_c / M_{An} = M_A{}^0/_0 + M_R{}^0/_0 \cdot M_{Rn} / M_{An},$$

где M_{An} и M_{Rn} — номинальные моменты асинхронного и регулирующего двигателя, а $M_A{}^0/_0 = 100 I'_2 / I'_{2n} = k_4 I'_2 = k_4 \operatorname{Re} \bar{I}_2$.

Так как $M_R = k_1 k_2 E_{h0} I_{cc}$ и $M_{Rn} = k_1 k_2 E_{h0n} I_{ccn}$ следует

$$M_R{}^0/_0 = 100 E_{h0} I_{cc} / E_{h0n} I_{ccn}.$$

В этих выражениях E_{h0n} — э.д.с., соответствующая номинальному току возбуждения при синхронном вращении асинхронного двигателя, I_{ccn} — номинальный ток якоря регулирующего двигателя.

Выражая момент регулирующего двигателя относительно активной составляющей линейного тока, момент регулирующего двигателя станет:

$$M_R{}^0/_0 = \frac{100 \cdot 1{,}06}{E_{h0n} I_{ccn}} E_{h0} \operatorname{Re} \bar{I}_2$$

и следовательно момент каскада:

$$M_c{}^0/_0 = (k_4 + k_5 E_{h0}) \operatorname{Re} \bar{I}_2 \tag{7}$$

где $k_4 = \dfrac{100}{I'_{2n}}$ и $k_5 = \dfrac{100 \cdot 1{,}06}{E_{h0n} I_{ccn}} \cdot \dfrac{M_{Rn}}{M_{An}}$.

Из выражений (6) и (7) следует, что для нахождения значения момента каскада, нужно найти выражение роторного тока асинхронного двигателя, который в общем виде можно написать:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2. \tag{8}$$

Так как уже указывалось, активная составляющая роторного тока связана с постоянным током выражением:

$$I'_2 = \sqrt{3}\, I_{cc}/mn. \tag{9}$$

Также можно написать, что постоянный ток требуемый регулирующим двигателем, равен:

$$I_{cc} = (U_{cc} - E_h)/r_g. \tag{10}$$

В этих выражениях $U_{cc} = U_{ca}/n$.

В нашем случае ротор асинхронного двигателя соеденен звездой, по этому в нижеследующих расчётах обмотки одноякорного преобразователя были приведены к эквивалентной звезде. В этом случае:

$$U_{cc} = U_{caf}/n. \tag{11}$$

Так же

$$E_h = E_{h0}(1 - s). \tag{12}$$

В вышеуказанных выражениях U_{cc} — напряжение на зажимах регулирующего двигателя, U_{ca} и U_{caf} — полное напряжение и соответственно, напряжение фазы эквивалентного одноякорного преобразователя, E_h — э.д.с. регулирующего двигателя при скольжении s, r_g — сопротивление якоря регулирующего двигателя.

На основании выражений (9)...(12) можно написать:

$$I'_2 = [3U_{caf} - \sqrt{3}\, n E_{h0}(1 - s)]/m n^2 r_g. \tag{13}$$

Пренебрегая падениями напряжения в якоре асинхронного двигателя, можно считать началом фаз фазовое напряжение асинхронного двигателя U_{2f}, которое совпадает по величине и фазе с фазовым напряжением одноякорного преобразователя. В таких условиях собственная э.д.с. sE_2 совпадает с напряжениями U_{2f} и U_{caf}.

В этом случае, активная составляющая тока одноякорного преобразователя станет $\bar{I}'_2 = I'_2$.

Реактивная составляющая тока одноякорного преобразователя является мнимой частью тока преобразователя, работающего в качестве синхронного двигателя при частоте равной частоте ротора асинхронного двигателя.

Имея в виду взаимную компенсацию поперечных реакций одноякорного преобразователя [6] и пренебрегая падениями напряжений, обусловленных потоком рассеивания и активным сопротивлением, можно считать, что вектор $\bar{U}_{caf}$ будет совпадать с вектором э.д.с., обусловленной главным потоком одноякорного преобразователя E_{cf}. В этом случае реактивная составляющая роторного тока будет дана уравнением:

$$\bar{I}''_2 = -\mathrm{j}\, s\, x_c (U_{caf} - sE_{c0f})/(r_c^2 + s\, x_c^2), \tag{14}$$

где E_{c0f} — э.д.с. эквивалентного одноякорного преобразователя при сколь-

жении $s=1$, r_c и x_c — активное сопротивление и соответственно синхронный реактанс преобразователя.

Вводя значения составляющих тока из выражений (13) и (14) в выражение (8), получаем выражение тока одноякорного преобразователя и, следовательно, и роторный ток асинхронного двигателя:

$$(15)\quad \bar{I}_2 = [3U_{caf} - \sqrt{3}n E_{h0}(1-s)] / mn^2 r_g - j[sx_c(U_{caf} - sE_{c0f})] / (r_c^2 + s^2 x_c^2).$$

Для того чтобы выявить и параметры асинхронного двигателя, пользуемся классическими уравнениями двигателя:

$$(16)\quad \bar{U}_{1f} = (r_1 + j x_{11})\bar{I}_1 + j x_{21}\bar{I}_2, \qquad (17)\quad \bar{U}_{2f} = (r_2 + j s x_{22})\bar{I}_2 + j s x_{12}\bar{I}_1$$

где r_1 и r_2 — сопротивление фаз статора и, соответственно, ротора асинхронного двигателя, x_{11} и x_{22} — полный реактанс фазы статора и, соответственно, ротора асинхронного двигателя, x_{12} и x_{21} — взаимные реактансы, равные между собой, U_{1f} — напряжение фазы статора, I_1 — ток фазы статора.

При помощи выражений (15), (16) и (17) установили конечное выражение роторного тока в зависимости от всех электрических параметров схемы:

$$(18)\quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{M}s^3 + \bar{N}s^2 + \bar{O}s + \bar{P}}{\bar{E}s^3 + \bar{F}s^2 + \bar{G}s + \bar{H}},$$

где

$$\bar{M} = \sqrt{3}n E_{h0} r_1 x_c^2 + j x_c^2 (\sqrt{3}n E_{h0} x_{11} + 3U_{1f} x_{12}),$$

$$\bar{N} = mn^2 r_g (U_{1f} x_{12} - E_{c0f} x_{11}) x_c - \sqrt{3}n E_{h0} r_1 x_c^2 + j(mn^2 E_{c0f} r_g r_1 x_c - \sqrt{3}n E_{h0} x_{11} x_c^2),$$

$$\bar{O} = \sqrt{3}n E_{h0} r_1 r_c^2 + j r_c^2 (\sqrt{3}n E_{h0} x_{11} + 3U_{1f} x_{12}),$$

$$\bar{P} = -\sqrt{3}n E_{h0} r_1 r_c^2 - j\sqrt{3}n E_{h0} r_c^2 x_{11},$$

$$\bar{E} = 3x_c^2 (x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}) - j 3r_1 x_{22} x_c^2,$$

$$\bar{F} = r_1 x_c^2 (mn^2 r_g - 3r_2) - mn^2 r_g r_1 x_{22} x_c + j[x_c^2 x_{11} (mn^2 r_g - 3r_2) +$$

$$+ mn^2 r_g x_c (x_{12} x_{21} - x_{11} x_{22})],$$

$$\bar{G} = 3r_c^2 (x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21}) - mn^2 r_g r_2 x_{11} x_c + j(mn^2 r_g r_1 r_2 x_c - 3r_1 r_c^2 x_{22}),$$

$$\bar{H} = r_1 r_c^2 (mn^2 r_g - 3r_2) + j r_c^2 x_{11} (mn^2 r_g - 3r_2).$$

Зная значения параметров входящих в выражение (18), можно найти роторный ток $\bar{I}_2$ и затем, замещая реальную часть этого тока в выражениях (6) и (7), можно найти значение момента каскада при разных скольжениях.

Аналогично, для статорного тока выводится выражение:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{A}s^3 + \bar{B}s^2 + \bar{C}s + \bar{D}}{\bar{E}s^3 + \bar{F}s^2 + \bar{G}s + \bar{H}} \tag{19}$$

где

$$\bar{A} = -\,\mathrm{j}\, x_c^2 (3U_{1f}\, x_{22} + \sqrt{3}\, n\, E_{h0}\, x_{21}),$$

$$\bar{B} = mn^2\, r_g\, x_c (E_{c0f}\, x_{21} - U_{1f}\, x_{22}) + U_{1f}\, x_c^2 (mn^2\, r_g - 3r_2) + \mathrm{j}\sqrt{3}\, n\, E_{h0}\, x_c^2\, x_{21},$$

$$\bar{C} = -\,\mathrm{j}\, [r_c^2 (\sqrt{3}\, n\, E_{h0}\, x_{21} + 3U_{1f}\, x_{22}) - mn^2\, U_{1f}\, r_g\, r_2\, x_c],$$

$$\bar{D} = U_{1f}\, r_c^2 (mn^2\, r_g - 3r_2) + \mathrm{j}\sqrt{3}\, n\, E_{h0}\, r_c^2\, x_{21}.$$

При помощи этого выражения можно изобразить электрические характеристики каскада.

3. Для вывсдения заключений из приведенных выше выражений о работе каскада, найденные уравнения были применены к, существующему в Лаборатории по электрооборудованию ЯПИ, каскаду.

Характеристики машин, составляющих этот каскад, следующие:

а) Для асинхронного двигателя: P_{An}=6 kw, U_n=380/220 V, I_{1n}=12 A, cos φ=0,76, в роторе: $E_2 = 320$ V, $I'_{2n} = 10$ A. Также, испытанием в холостую с питанием через статор и ротор, были найдены значения сопротивлений: $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 0{,}8\ \Omega$ и реактансов $x_{11} = 50\ \Omega$, $x_{22} = 37\ \Omega$, а также реактансы $x_{12} = x_{21} = 41\ \Omega$, расчитанные по данным технической литературы [4]. Было расчитано также значение номинального момента асинхронного двигателя: $M_{An} = 4$ кгм.

б) для одноякорного преобразователя: $P_n = 2{,}2$ kw, $U_n = 120_\Delta / 192$ V, $I_n = 10{,}5$ A $n = 1200/1800$ об./мин. (мощность и номинальный ток даны для переменной части преобразователя). Также для эквивалентного одноякорного преобразователя были найдены $R_c = 0{,}4\ \Omega$, а из кривых $x_c = f(i_c)$ и $E_{cf} = \varphi(i_c)$ — установленные экспериментально, нашли: $x_c = 0{,}57\ \Omega$ и $E_{c0f} = 122$ V, соответствующие тому же току возбуждения $i_c = 5$ A.

в) для регулирующего двигателя: $P_{Rn} = 2{,}5$ kw, $U_n = 110$ V, $I_{ccn} = 27$ A, $n_n = 1\,500$ об./мин., а также $r_g = 1\ \Omega$ и $M_{Rn} = 1{,}6$ кгм.

При помощи выведенной, экспериментально, кривой $E_{h0} = \varphi_1 (i_R)$, установили
$E_{h0n} = 100$ V (соответствующие номинальному току возбуждения $i_{Rn} = 1{,}05$ A),
$E_{h0} = 110$ V (соответствующее току возбуждения $i_R = 1{,}4$ A),
$E_{h0} = 80$ V (соответствующее току возбуждения $i_R = 0{,}6$ A),
$E_{h0} = 55$ V (соответствующее току возбуждения $i_R = 0{,}3$ A) и
$E_{h0} = 0$ V (при остаточном токе равном нулю).

Для данного каскада, значения постоянных в выражение момента, будут: $k_4 \cong 10$ и $k_5 \cong 0{,}016$.

На основание вышеуказанных значений были составлены таблицы на подобие нижеследующей $x_c = 0{,}57\ \Omega$, $E_{ho} = 110$ V, $E_{cof} = 122$ V.

Такие же таблицы были составлены и для следующих значений э. д. с. $E_{h0} = 0$; 55; 80 и 110 V, а также для дополнительных значений реактанса введенного в цепь переменного тока одноякорного преобразователя: $x_{supl} = 0$; 0,43; 2; 4,43 и 9,43 Ω. Во всех случаях э.д.с. E_{c0f} оставалась постоянной (122 V).

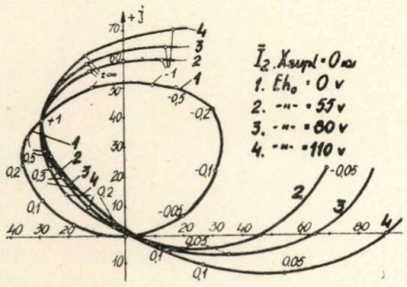


Рис. 2

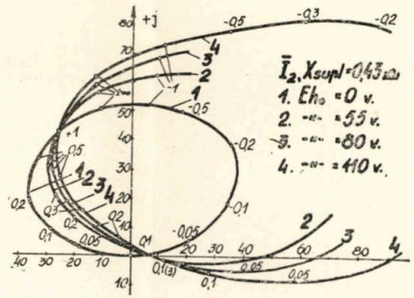
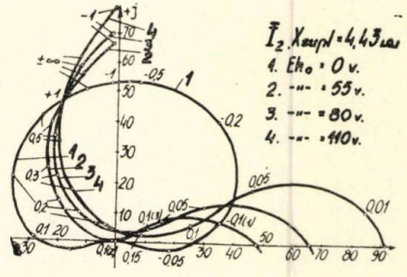


Рис. 3



Рис, 4

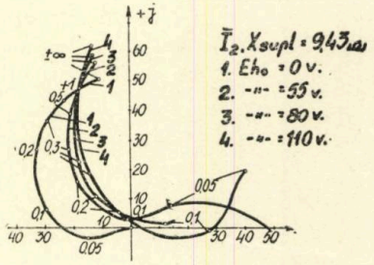


Рис. 5

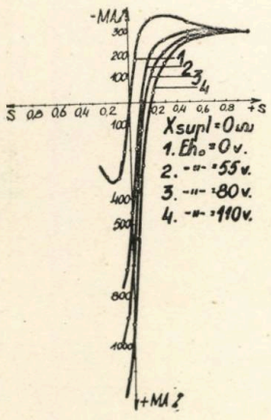


Рис. 6

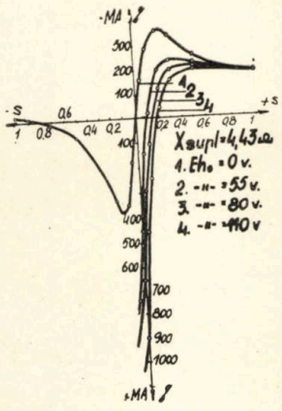


Рис. 7

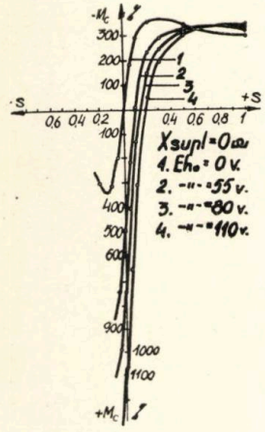


Рис. 8

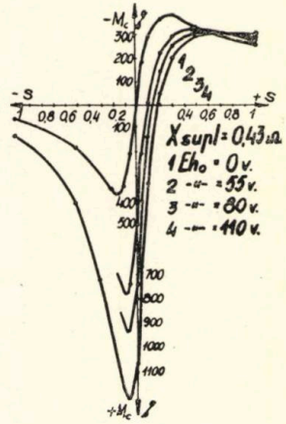


Рис. 9

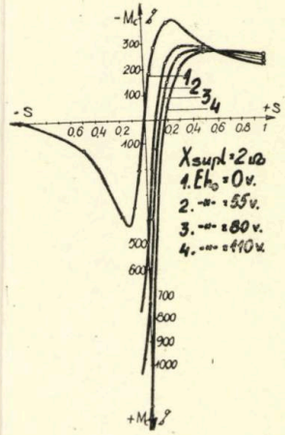


Рис. 10

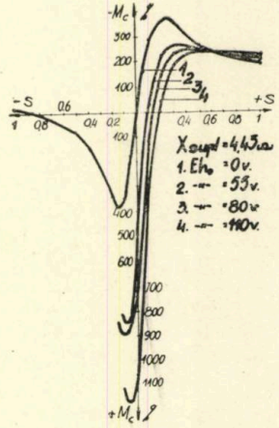


Рис. 11

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

ТАБЛИЦА I

Таблица 1

s	$\bar{I}_1$	I_1	$\cos\varphi$	$\bar{I}_2$	M_A %	M_R %	M_c %
—0,05	—92,05—j 34,35	98	0,937	113 +j 34,3	1130	497	1329
0	—74,5 —j 5,88	74,9	0,995	91 +j 0	910	400	1070
0,05	—45,5 +j 5,9	45,8	0,991	55,4 —j 13,7	554	244	651,6
0,1	—22,2 +j 4,0	22,6	0,983	26,9 —j 10,7	269	118	316,2
0 2	3,52—j 8,73	9,4	0,374	—4,08+j 5,35	—40,8	—18	—48
0,3	13.74—j 17,9	22,6	0,610	—16,3 +j 16,75	—163	—71,6	—191,7
0,5	21,4 —j 26,8	34,3	0,620	—25,5 +j 27,8	—255	—112	—299,8
1	24,2 —j 35,9	43,3	0,559	—28,6 +j 39	—289	—127	—340
$\pm\infty$	11,9 —j 54,5	55,7	0,210	—13,2 +j 61,4	—132	—58	—155

Необходимо отметить, что отрицательные значения активной составляющей роторного тока асинхронного двигателя, соответствуют двигательному режиму работы, а положительные значения — генераторному. Те же замечания действительны и по отношению к моментам. Что касается реактивной составляющей статорного тока, нужно отметить, что её отрицательные значения соответствуют реактивной мощности, потребляемой двигателем, а положительные — реактивной мощности, отданной в сеть.

На основании данных таблиц были построены, для разных значений э.д.с. E_{h0} и дополнительного реактанса, указанных на рисунках, кривые $\bar{I}_2 = f_1(s)$ (рис. 2...5).

При помощи этих кривых были построены механические характеристики асинхронного двигателя, $M_A\,\% = f_2(s)$, (рис. 6 и 7), а также механические характеристики каскада $M_c\,\% = f_3(s)$ (рис. 8...11). По кривым (рис. 6 и 7) можно заключить что скорость идеального холостого хода асинхронного двигателя, независимо от величины дополнительного реактанса, понижается по мере возрастания э.д.с. E_{h0} — эта скорость, практически, остаётся постоянной при изменении дополнительного реактанса, при одной и той же э. д. с. E_{h0}.

Величина критического момента при двигательном режиме уменьшается по мере возрастания э.д.с. E_{h0}, а при генераторном режиме — возрастает. Критическое скольжение при двигательном режиме возрастает совместно с E_{h0}. При двигательном режиме, для скольжения $s=1$ и при том же значении дополнительного реактанса, момент асинхронного двигателя имеет то же значение, так как э.д.с. регулирующего двигателя, независимо от возбуждения, равняется нулю. С повышением дополнительного реактанса значение момента снижается.

Момент, развиваемый асинхронным двигателем при синхронной скорости ($s = 0$) и при одной и той же э.д.с. E_{h0}, не зависит от дополнительного реактанса. Что касается влияния дополнительного реактанса, следует отметить следующее: при двигательном режиме, для малых значений э.д.с. E_{h0}, критический момент вначале возрастает — с возрастанием дополнительного реактанса—а затем уменьшается. Это возрастание будет тем меньше, чем E_{h0} больше. Начиная с определен-

ного значения э.д.с. E_{h0}, критический момент непрерывно уменьшается с увеличением дополнительного реактанса. В нашем случае, уменьшение критического момента с возрастанием дополнительного реактанса до 9.43 Ω, происходит, приблизительно, между 12% (для $E_{h0}=0$) и 30% (для $E_{h0}=110$ V). С практической точки зрения это не выгодно. При $E_{h0}=0$, возрастание критического момента с дополнительным реактансом не превосходит 5...6%.

Что касается критического скольжения, то оно, при любом значении э. д. с. E_{h0}, уменьшается при возрастании дополнительного реактанса. В области критических моментов форма характеристик указывает на небольшие изменения момента в зависимости от скольжения тем резче, чем E_{h0} больше — что, с точки зрения возможности принятия толчков нагрузки, невыгодно. Вышеуказанные недостатки тем больше, чем больше реактанс, но только начиная с определенного значения э. д. с. E_{h0}.

Механические характеристики каскада были построены для четырех значений э. д. с. E_{h0} регулирующего двигателя и для разных значений дополнительного реактанса, указанных на рис. 8...11.

Из анализа этих кривых можно заключить, что э. д. с. E_{h0} имеет такое же действие на скорость холостого хода, как и на механические характеристики асинхронного двигателя, работающего в том же каскаде. При скольжении $s=1$, величина момента каскада, для того же значения дополнительного реактанса, возрастает одновременно с э. д. с. E_{h0}. Что касается изменения критического момента каскада при изменении X_{supl} и E_{h0}, действительны те же выводы как и для момента асинхронного двигателя в каскадном соединении.

Критическое скольжение каскада при малых значениях э. д. с. E_{h0}, уменьшается по мере возрастания дополнительного реактанса; при сравнительно высоких значениях э. д. с. E_{h0} (в нашем случае, 80V) критическое значение в начале уменьшается, по мере возрастания дополнительного реактанса, а затем растет. В нашем случае, его минимальное значение получается при $X_{supl}=2$ Ω.

Для исследования изменения момента каскада в зависимости от э. д. с. E_{h0}, необходимое при регулировании скорости каскада, учитывая данные полученные указанными выражениями, были построены кривые, приведенные на рис. 12 и 13, изображающие изменение момента каскада относительно э. д. с. E_{h0}, при постоянных скольжениях, соответствующих трём значениям дополнительного реактанса $X_{supl}=0$ и 4,43 Ω (рис. 12) и $X_{supl}=0$ и 9,43 Ω (рис. 13).

Из исследования этих кривых следует, что при одном и том же скольжений наклон кривой тем меньше, чем больше дополнительный реактанс. Иначе говоря, при одном и том же изменении э. д. с. E_{h0}, изменение момента тем меньше, чем больше дополнительный реактанс, что уменьшает стабильность каскада во время регулирования.

На рисунках 14...17 даны кривые вектора статорного тока в комплексной площади имеющие, в качестве переменной, скольжение s. Эти кривые были построены при тех же условиях, что и кривые $\bar{I}_2=f(s)$.

На основании этих кривых на рис. 18 и 19 были построены кривые изменения полного значения статорного тока I_1, в зависимости от сколь-

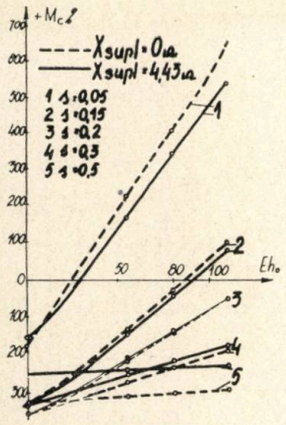


Рис. 12

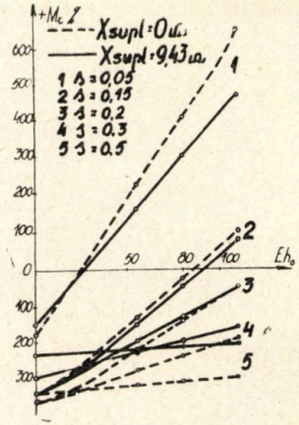


Рис. 13

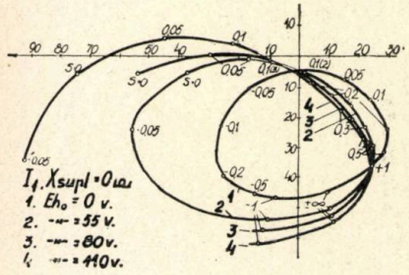


Рис. 14

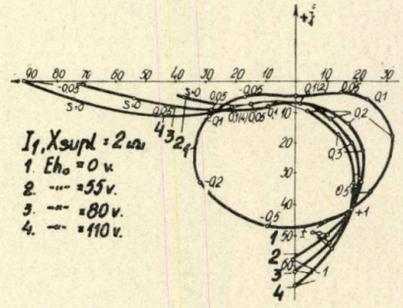


Рис. 15

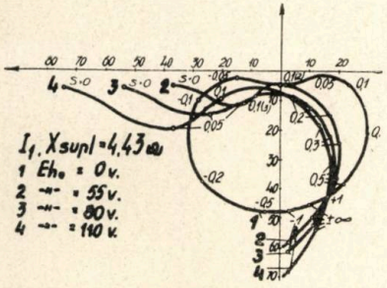


Рис. 16

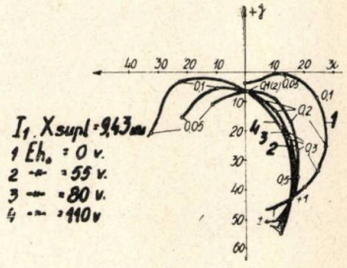


Рис. 17

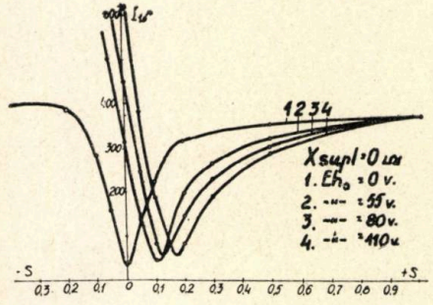


Рис. 18

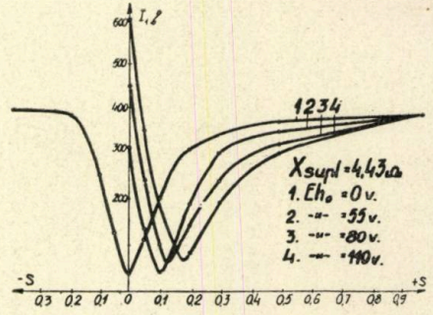


Рис. 19

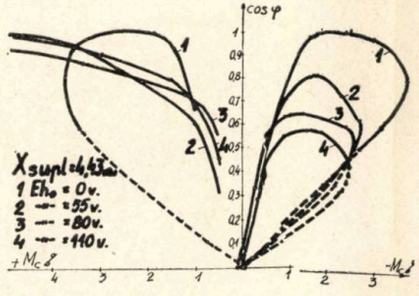


Рис. 20

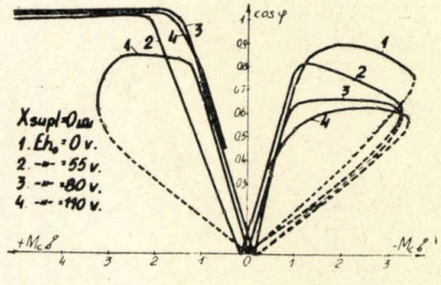


Рис. 21

ТАБЛИЦА II

жения, для разных значений э.д.с. E_{h0} и $X_{supl} = 0$ и 4,43 Ω. На рис. 20 и 21 были построены кривые изменения коэффициента мощности в зависимости от момента каскада, при изменении тех же параметров. Анализируя рис. 14...19, заключаем, что характер изменения статорного тока I_1, остается тем же, что и в случае обыкновенного асинхронного двигателя. Разница состоит в том, что минимальный ток получается при различных скольжениях, соответствующих скоростям холостого хода, значение которых зависит от э.д.с. E_{h0}. Минимальный ток возрастает с E_{h0}, тем больше, чем больше дополнительный реактанс. При скольжении $s = 1$, при том же значении дополнительного реактанса, статорный ток не изменяется, независимо от значения э. д. с. E_{h0}. Это значение растет вместе с дополнительным реактансом.

Что касается коэффициента мощности, из анализа рис. 14..17 и 20 и 21, можно вывести что при том же значении э.д.с. E_{c0f}, коэффициент мощности тем больше, чем меньше э.д. с. E_{h0}. При генераторном режиме, начиная с определенных значений момента нагрузки (примерно 100%), коэффициент мощности изменяется в малых пределах при разных нагрузках. При постоянном моменте коэффициент мощности имеет максимальное значение при определенном значении дополнительного реактанса. Значение этого максимума уменьшается и перемещается к меньшим значениям дополнительного реактанса по мере возрастания э.д.с. E_{h0}. Эти перемещения тем больше, чем больше значение момента.

4. ВЫВОДЫ

А) В настоящей работе были выведены выражения в полном виде, содержащие все параметры схемы каскада и этим позволяющие подробное изучение механических и электрических характеристик асинхронного двигателя, работающего в каскадном соединении, а также и каскада.

Б) Было установленно, что изменение э.д.с. E_{h0} регулирующего двигателя подтвержает выводы известные в технической литературе.

В) Второй параметр, принятый во внимание, а именно дополнительный реактанс, который можно ввести в ротор асинхронного двигателя, имеет следующие влияния на работу каскада:

а) Скорость холостого хода каскада, практически, не зависит от дополнительного реактанса.

б) В двигательном режиме, критический момент как асинхронного двигателя, так и каскада, при малых значениях э. д. с. E_{h0} в начале растёт с дополнительным реактансом, а затем уменьшается. Этот рост тем меньше, чем больше э.д.с. E_{h0}. Начиная с определенного значения этой э.д.с. критический момент уменьшается постепенно с возрастанием дополнительного реактанса.

в) Критическое скольжение асинхронного двигателя, работающего в каскадном соединении, уменьшается по мере возрастания дополнительного реактанса. Критическое скольжение каскада, при малых значениях э.д.с. E_{h0}, уменьшается по мере возрастания дополнительного реактанса. Начиная с определенных значений этой э.д.с., критическое скольжение каскада в начале уменьшается, а затем растет с возрастанием дополнительного реактанса.

г) При одном и том же изменении э.д.с. регулирующего двигателя, изменение момента каскада тем меньше, чем больше дополнительный реактанс, что благоприятствует стабильности каскада.

д) Статорный ток при холостом ходе каскада, при одном и том же значении э.д.с. E_{h0}, возрастает одновременно с ростом дополнительного реактанса.

е) При постоянном моменте, коэффициент мощности имеет максимальное значение при определенном значении дополнительного реактанса. Возрастание э.д.с E_{h0} снижает значение этого максимума и перемещает его в сторону меньших значений дополнительного реактанса, тем очевиднее, чем момент каскада больше.

Ясский Политехнический Институт,
Лаборатория электропривода и электрооборудования

ЛИТЕРАТУРА

1. Костенко М. П., Электрические машины, специальная часть, ГЭИ, М.—Л., 1949
2. Damscher D., *Acţionarea electrică*, vol. I, EES, Buc., 1955.
3. Голован А. Т., Электропривод, ГЭИ, М.—Л., 1948.
4. Michael W., *Theorie der Wechselstrommaschinen in vectorieller Darstellung*, Leipzig. und Berlin, B. G. Teubner, 1937.
5. Kovacs K. Pal, *Villamosgépek uzemtana, aszinkron gepek*, Tancönvykiado, Budapest, 1955.
6. Piotrovski L. M., *Maşini electrice*, EES, Buc. 1955, (trad. din l. rusă).
7. Попов В. К., Основы электропривода, ГЭИ, М.—Л., 1951.

CONSIDERATIONS THÉORIQUES CONCERNANT LE FONCTIONNEMENT À PUISSANCE CONSTANTE D'UN MOTEUR ASYNCHRONE COUPLÉ EN CASCADE AVEC UNE COMMUTATRICE

(Résumé)

On établit les équations de fonctionnement d'un moteur asynchrone couplé en cascade avec une commutatrice (fig. 1), fonctionnant à puissance constante (cascade Krämmer) lorsqu'on tient compte de tous les paramètres des éléments qui y interviennent. On obtient, par voie expérimentale, les caractéristiques mécaniques du moteur asynchrone (fig. 6,7) et puis celles du couplage en cascade (fig. 8 ...13) en considérant que les paramètres variables sont la f. e. m. E_{h0} du moteur de réglage, à vitesse synchrone et la réactance supplémentaire introduite dans le circuit du roteur du moteur asynchrone. Toutefois on donne les courbes de variation du facteur de puissance, en fonction du couple de la cascade (fig. 20, 21).

CONSIDERAŢIUNI TEORETICE ASUPRA FUNCŢIONĂRII LA PUTERE CONSTANTĂ A UNUI MOTOR ASINCRON CUPLAT ÎN CASCADĂ CU O COMUTATRICE

(Rezumat)

Se stabilesc ecuaţiile de funcţionare ale unei cascade formate dintr-un motor asincron, cuplat cu o comutatrice (fig. 1), funcţionînd la o putere constantă (cascadă Krämmer), atunci cînd se ţine seamă de toţi parametrii elementelor care intră în schemă. Se trasează, luînd ca parametri variabili f. e. m. E_{h0} a motorului de reglaj la viteza sincronă a motorului asincron şi reactanţa suplimentară introdusă în circuitul rotoric al motorului asincron, caracteristicile mecanice ale motorului asincron (fig. 6,7) şi apoi ale cascadei (fig. 8...13). De asemenea se trasează curbele de variaţie ale factorului de putere în funcţie de cuplul cascadei (fig. 20, 21).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621.313.333

STABILIREA UNUI PARAMETRU DE REFERINŢĂ LA MAŞINA CU DUBLĂ ALIMENTARE ŞI METODA DE MĂSURARE A ACESTUIA

DE

GH. ŞERBAN, I. FILIPIUC şi V. CORLĂŢEANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 23—29 iunie 1958

1. Maşina cu dublă alimentare, constructiv similară cu o maşină asincronă cu rotor cu inele, se deosebeşte principial de maşinile asincrone, prin aceea că nu numai înfăşurarea statorului ci şi a rotorului este alimentată cu curent alternativ. Alimentarea se face în unele cazuri de la surse independente (fig. 1) şi astfel, dacă frecvenţa unei surse este constantă, iar a celeilalte poate fi variată în mod continuu, se obţine o maşină cu dublă alimentare, a cărei viteză poate fi reglată; alteori alimentarea se face de la o sursă unică, legînd cele două înfăşurări în serie sau în paralel. Schemele menţionate se găsesc tratate în literatura de specialitate [2], [3], [5], [6] şi le vom include sub numele comun de *maşini clasice cu dublă alimentare.*

O schemă mai generală, care se deosebeşte de schemele clasice, este dată într-o lucrare recentă [1] ce tratează o maşină cu montaj serie, la legăturile dintre statorul şi rotorul căreia este branşat un circuit din care poate primi sau în care poate furniza curent alternativ (fig. 2). Acest tip de maşină a fost denumit *maşină cu dublă alimentare generalizată.* De oarece ambele înfăşurări sînt alimentate cu curenţi de frecvenţe date, maşina cu dublă alimentare—clasică sau generalizată—are o comportare de maşină sincronă. Astfel, în cazul unei maşini polifazate cu $2p$ poli, a cărei înfăşurare statorică este alimentată la frecvenţa f_1, iar înfăşurarea rotorică la frecvenţa f_2, viteza cîmpului învîrtitor în raport cu statorul va fi $n_1 = 60 f_1/p$, iar faţă de rotor cîmpul trebuie să aibă viteza $n_2 = 60 f_2/p$.

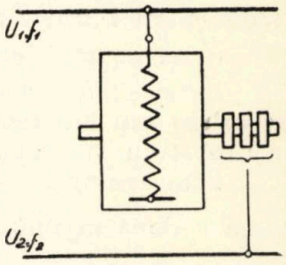


Fig. 1.

Pentru a se obţine această viteză a cîmpului învîrtitor faţă de rotor, este necesar ca rotorul să aibă viteza $n = n_1 \pm n_2$; semnul — corespune schemei în care cîmpul se roteşte în acelaşi sens faţă de rotor şi stator, iar semnul + montajului în care sensurile sînt diferite. Evident, semnul — corespunde schemei în care succesiunea fazelor la stator şi rotor este aceeaşi iar semnul + schemei cu secvenţe diferite ale fazelor. În cazul particular al maşinilor serie sau paralel, $f_2 = f_1$ şi de aceea viteza n a rotorului maşinii are valoarea $n_1 \pm n_1$, adică viteza nulă sau $120 f_1/p$, adică dublul vitezei cîmpului învîrtitor.

F. m. m. rezultantă, care produce fluxul învîrtitor al maşinii cu dublă alimentare, este produsă în comun de cele două înfăşurări. De oarece f. m. m. statorică se compune geometric cu f. m. m. rotorică, valoarea f. m. m. rezultante depinde de valorile

componentelor şi de poziţia acestora în spaţiu; această poziţie, pentru fiecare înfăşurare în parte, depinde de poziţia în spaţiu a înfăşurării respective şi de faza curentului în înfăşurare. Pe de altă parte, valoarea f. m. m. rezultante este impusă de valoarea fluxului rezultant, care la rîndul lui depinde de valoarea tensiunii aplicate maşinii.

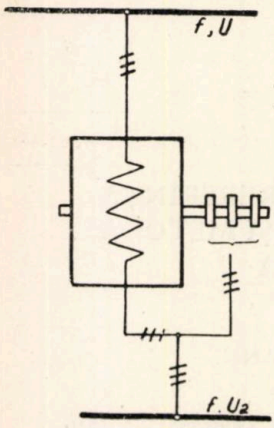


Fig. 2.

În cazul maşinii cu înfăşurările legate în paralel, fluxul este determinat numai de tensiune şi de numărul de spire pe fază, aproximativ aceleaşi la stator şi rotor; la maşina cu înfăşurările legate în serie fluxul variază şi în funcţie de diferenţa de fază între f. e. m. statorică şi f. e. m. rotorică, în fazele corespunzătoare; ceea ce rămîne invariabil este tensiunea rezultantă, aproximativ egală cu suma geometrică a f. e. m. F. e. m. statorică şi rotorică au valori minime cînd sînt în fază (funcţionare la gol) şi cresc pe măsură ce defazajul între ele creşte. Acest defazaj poate fi mai mare sau mai mic, după cum maşina este clasică sau generalizată, precum şi în funcţie de raportul de transformare w_{stator}/w_{rotor}, care la maşina serie poate diferi mai mult de unitate.

Ambele înfăşurări pot funcţiona în regim de receptor sau generator, sau una ca receptor iar cealaltă ca generator. Prin urmare, maşina cu dublă alimentare poate fi considerată drept rezultatul compunerii a două maşini sincrone ai căror parametri constructivi şi de funcţionare sînt în genere, diferiţi. M. G El. Magrabi [5] numeşte maşina cu dublă alimentare clasică, avînd parametrii identici la rotor şi stator, *maşină cu dublă alimentare simetrică*. O astfel de maşină poate fi considerată ca suprapunerea a două maşini sincrone identice.

2. Abordarea unor studii teoretice sau experimentale asupra funcţionării maşinii cu dublă alimentare, necesită să se aleagă un parametru de referinţă, în funcţie de care să putem reprezenta ceilalţi parametri de funcţionare ai maşinii. Acest parametru trebuie să satisfacă următoarele condiţii:

a) să fie clar definit;

b) să poată fi utilizat în analiza tuturor schemelor de maşini cu dublă alimentare şi astfel să permită studiul comparativ al caracteristicilor acestor maşini;

c) să poată fi măsurat experimental.

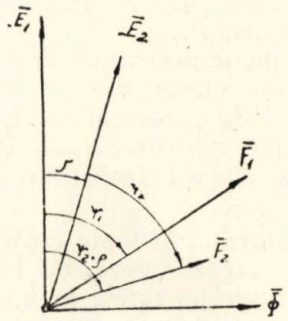
La maşinile sincrone, un parametru similar este unghiul electric de avans sau întîrziere a axei f. m. m. inductoare (avansul roţii polare) în raport cu axa f. m. m. rezultante a indusului.

Prin analogie, la maşina cu dublă alimentare considerată ca reunirea a două maşini, f. m. m. rezultantă $\vec{F}$ formează în spaţiu unghiurile electrice ϑ_1 şi ϑ_2, respectiv cu f. m. m. $\vec{F}_1$ a înfăşurării statorului şi $\vec{F}_2$ a înfăşurării rotorului (fig. 5). În cazul funcţionării la gol ideale $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}$ au, în spaţiu, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. Curenţii fiind pur magnetizanţi sînt defazaţi cu 90° înaintea f. e. m., atît în înfăşurările statorului cît şi în cele ale rotorului. Pentru ca raţionamentul să poată fi urmărit mai uşor, ne vom referi la o singură fază a statorului şi la faza corespunzătoare a rotorului. În spaţiu, fazele de referinţă a stato-

rului și rotorului sînt dispuse coaxial cînd fluxul care le parcurge are valoarea maximă. La montajul clasic, cu viteza zero (selsin), această poziție este valabilă tot timpul funcționării la gol, pentru toate fazele. La montajul clasic, cu dublă alimentare și viteză dublă, are loc pe rînd, pentru fiecare fază, în momentul în care f.e.m. în faza respectivă trece prin zero.

Dacă se aplică rotorului un cuplu, el este scos din poziția de funcționare la gol, iar f.m.m. $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ se decalează; unghiul $\varrho' = \vartheta_1 + \vartheta_2$ cuprins între ele crește atunci cînd crește cuplul electromagnetic, iar sensul acestui decalaj depinde de sensul cuplului (generator sau motor).

3. Considerăm o mașină polifazată cu dublă alimentare. Pentru a reprezenta vectorii chronici ai curenților, respectiv ai f.m.m. $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$



Pig. 3.

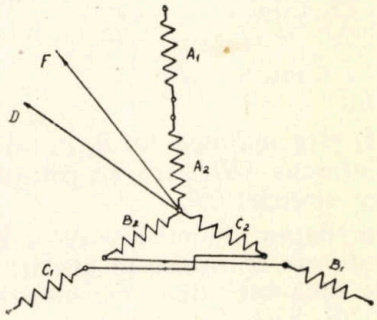


Fig. 4.

din stator și rotor, precum și forțele contraelectromotoare $-\bar{E}_1$ și $-\bar{E}_2$, vom lua ca origine de fază $-\bar{E}_1$ (fig. 3). Considerăm $-\bar{E}_2$ defazat cu unghiul ϱ în urma lui $-\bar{E}_1$; curentul I_1 și f.m.m. $\bar{F}_1$ sînt în urmă cu unghiul ψ_1 iar $\bar{I}_2$ și $\bar{F}_2$ sînt cu ψ_2 în urma lui $-\bar{E}_2$, adică cu argumentul $\varrho + \psi_2$ în urmă. Proiecția fluxului învîrtitor pe axa fazei de referință a statorului apare tot ca o mărime chronică, defazată în diagramă cu 90^0 în urma originii de fază.

Cu ajutorul defazajelor, să determinăm, decalajele în spațiu ale diverselor mărimi și în particular a f.m.m. $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ și a rezultantei lor $\vec{F}_0$, care produce fluxul $\vec{\Phi}_0$.

Sensul decalajelor îl definim astfel:

a) Un element A al unei înfășurări este înaintea altui element B în raport cu un flux care are față de înfășurare o mișcare relativă de rotație, cînd elementul A este întîlnit de flux, în timp, înaintea lui B.

b) Dintr-un grup de mărimi magnetice învîrtitoare în raport cu o înfăşurare, se sonsideră înainte aceea care întîlneşte înfăşurarea mai întîi. Pe figura în spaţiu, sensul „înainte" al înfăşurării apare întotdeauna în sens opus decît sensul „înainte" al mărimii magnetice învîrtitoare cu ajutorul căreia s-a făcut definirea acestor sensuri.

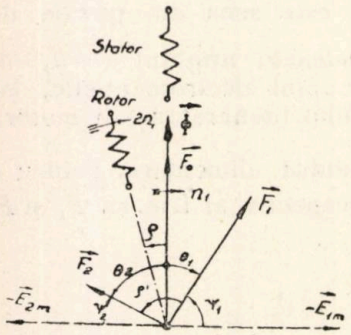


Fig. 5.

În maşina cu dublă alimentare serie clasică, avînd $n = 2n_1$, conexiunile rotorului cu statorul sînt ca acelea reprezentate în fig. 4, adică ordinea fazelor la rotor este inversă ordinii fazelor la stator. Dacă maşina este alimentată cu un sistem direct de curenţi, cîmpul se va învîrti în spaţiu în sensul $A_1B_1C_1$ cu viteza n_1. Faţă de cîmpul învîrtitor, faza A_1 este înaintea fazei B_1 însă direcţia OD a unei mărimi magnetice solidare cu cîmpul învîrtitor este în urma direcţiei OF, în raport cu înfăşurarea statorului.

Cîmpul magnetic învîrtitor al rotorului se învîrteşte cu viteza $n_2 = n_1$ faţă de rotor în sensul $A_2B_2C_2$, contrar lui $A_1B_1C_1$; deci A_2 este înaintea lui B_2 în raport cu cîmpul învîrtitor, însă, faţă de rotor, direcţia OD, care se roteşte solidar cu cîmpul învîrtitor, apare înaintea direcţiei OF.

În spaţiu, cîmpul rotorului şi cel al statorului şi toate elementele legate de ele se rotesc în acelaşi sens şi cu aceeaşi viteză, n_1. În condiţii de încărcare date ele constituie o configuraţie rigidă în mişcarea de rotaţie. Este deci suficient să cunoaştem poziţia lor reciprocă la un moment dat.

Pentru ca sensul decalajului în spaţiu să fie acelaşi ca şi defazajul în timp şi exprimînd decalajele în grade electrice, unghiurile de decalaj ale mărimilor referitoare la o aceeaşi parte a maşinii, apar egale cu cele de defazaj, abstracţie făcînd de semn.

Astfel, dacă reprezentăm în spaţiu situaţia corespunzătoare fig. 3, în momentul cînd fluxul coincide cu axa înfăşurării de referinţă a statorului, f. e. m. a acestei înfăşurări trece prin zero spre valori pozitive. F. c. e. m. maximă a statorului ar putea fi obţinută într-o înfăşurare ce ar fi situată cu 90^0 în urma fazei de referinţă (fig. 5). F. e. m. $\vec{E}_2$ avînd defazajul ϱ în urma lui $\vec{E}_1$, rezultă că, în momentul în care s-a reprezentat poziţia înfăşurărilor pe diagramă, axa fazei de referinţă a rotorului încă nu a ajuns să coincidă cu direcţia fluxului, ci este în urma acestei direcţii cu unghiul ϱ.

F. m. m. a statorului apare cu unghiul ψ_1 în urma direcţiei rotitoare a lui $-\vec{E}_{1m}$ Sensul de rotaţie al cîmpului învîrtitor fiind invers faţă de rotor decît faţă de stator, f. c. e. m. maximă apare în rotor în sens diametral opus sensului f. c. e. m. a statorului. Din cauza defaza-

jului ψ_2 al curentului $\bar{I}_2$, f. m. m. $\vec{F}_2$ apare decalată cu ψ_2 în urma lui $-\vec{E}_{2m}$. Deci, unghiul între $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este

$$\varrho' = 180^0 - \psi_1 - \psi_2 , \tag{1}$$

independent de poziția unei faze a rotorului în raport cu faza corespunzătoare a statorului sau față de fluxul rezultant. Prin modificarea poziției lor relative, datorită unei încărcări, se modifică faza f. e. m. $\bar{E}_2$ față de $\bar{E}_1$, deci unghiul ϱ și totodată defazajele ψ_1 și ψ_2, precum și valorile curenților $\bar{I}_1$ și $\bar{I}_2$. O dată cu variația lui ϱ puterile electromagnetice: $P_{em\,1} = mE_1 I_1 \cos \psi_1$ — din stator, $P_{em\,2} = mE_2 I_2 \cos \psi_2$ — din rotor și $P_{emt} = P_{em1} \pm P_{em2}$ — rezultantă, variază și ele, ducînd la o variație a cuplului motor de la arborele mașinii, exprimat prin relația: $C_{em} = (P_{em1} + P_{em2})/4\pi n_1$.

Semnul + din relația puterii P_{em} se referă la mașina care funcționează cu viteza $2n_1$ iar semnul — la mașina cu rotorul în repaos.

Valoarea lui $\vec{F}_0$ depinde de tensiunea aplicată mașinii și de defazajul ϱ dintre $\bar{E}_1$ și $\bar{E}_2$, pentru că o dată cu creșterea acestuia, cele două f. e. m. trebue să crească și deci este necesară o creștere a fluxului rezultant.

Dacă dorim să exprimăm relația $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ printr-o relație de vectori chronici, vom căuta să stabilim relația ce există între fig. 3 și 5. Modulii lui $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_0$ sînt egali cu modulii lui $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ $\bar{F}_0$ înmulțiți cu cu $\sqrt{2}$. Pentru ca fluxul și f. m. m. rezultantă $\bar{F}_0$ să fie în fază, iar $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ să ocupe față de $\bar{F}_0$ aceleași poziții ca în diagrama spațială, este necesar să adunăm simetricul lui $\bar{F}_1$, adică $\bar{F}_1^*$, cu $\bar{F}_2$ rotit în sens direct cu unghiul ϱ, adică

$$\bar{F}_0 = \bar{F}_1^* + \bar{F}_2 e^{j\varrho}. \tag{2}$$

Cum însă sensul de rotație al mărimilor din diagrama spațială este opus sensului trigonometric pozitiv, unanim folosit în diagramele de vectori chronici, este mai corect să inversăm sensul argumentelor din relația (2) și să scriem

$$\bar{F}_0 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2^* e^{-j\varrho}. \tag{2a}$$

4. Prin urmare, unghiul ϱ reprezintă, în grade electrice, unghiul format de înfășurările fazei de referință a rotorului cu cea a statorului, în momentul cînd axa fluxului învîrtitor coincide cu axa fazei de re-

ferinţă a statorului. El mai poate fi definit şi ca defazajul în timp între $\bar{E}_1$ şi $\bar{E}_2$ (fig. 3), această ultimă definiţie fiind valabilă în orice moment, în cursul funcţionării.

Cum nu s-a impus nici o relaţie între modulii şi fazele lui $\bar{I}_1$ şi $\bar{I}_2$ cu ocazia definirii lui ϱ, diagramele vectoriale în spaţiu şi în timp, cît şi relaţiile (1) şi (2a), stabilite pentru maşina cu dublă alimentare serie, sînt valabile pentru orice maşină cu dublă alimentare derivaţie sau serie, generalizată sau clasică, funcţionînd la $n = 2n_1$. Evident, ecuaţiile de tensiuni ale maşinii depind de schema de conexiuni a înfăşurărilor statorului şi rotorului.

Din consideraţii similare, pentru maşina cu $n = 0$ se ajunge la relaţiile cunoscute [2]:

$$\bar{F}_0 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 e^{-j\varrho} \quad \text{şi} \quad \varrho' = \psi_2 - \psi_1, \tag{3, 4}$$

analoage relaţiilor (1) şi (2a).

Noi considerăm că unghiul ϱ este indicat a fi folosit ca parametru de referinţă, deoarece, după cum rezultă din expunere, el îndeplineşte primele două condiţii impuse la pct. 2 al acestei lucrări; vom arăta în cele ce urmează şi posibilităţile practice de măsurare a lui ϱ, demonstrînd astfel şi îndeplinirea celei de a treia condiţii.

Folosirea lui ϱ ca parametru de referinţă, apare necesară, mai ales, pentru că definirea fără echivoc a unei puteri utile este mai dificilă la această maşină, la care primirea şi furnizarea de putere este posibilă pe trei canale independente: reţea-stator, reţea-rotor şi puterea la arbore (fig. 2). În felul acesta, considerarea puterii utile sau a vreuneia din cele trei puteri, ca parametru de referinţă, apare lipsită de interes [1]).

5. Definirea unghiului ϱ, ca defazaj între $\bar{E}_1$ şi $\bar{E}_2$ şi posibilitatea de a-l reprezenta şi pe o diagramă spaţială de vectori, sugerează o metodă de măsurare stroboscopică a acestui unghi.

O măsură mai riguroasă necesită montarea, pe axul rotorului, a unui disc cu reper fin. Pe stator se fixează un cadran gradat pe $1/p$ din periferie, de la 0° la 360°, încît să se poată citi în faţa cărei graduaţii a cadranului va apare imaginea reperului de pe discul rotitor. Iluminarea ansamblului se face cu un dispozitiv stroboscopic, a cărui lampă cu neon emite impulsuri luminoase cu o durată de 5...10 μ sec., cînd primeşte pe grilă un impuls pozitiv de tensiune. Acest impuls este dat de o înfăşurare suplimentară de putere mică, montată în acelaşi mod ca una din fazele statorului.

---

1) Un alt parametru de referinţă care s-ar putea alege este decalajul ϱ' dintre f.m.m. din înfăşurările statorului şi rotorului. Acest parametru este folosit de R. Richter [6] în tratarea teoretică a maşinii clasice cu dublă alimentare. Menţionăm că ϱ' s-ar putea determina experimental din rezultatele a două măsurări mai speciale de defazaj, aşa cum rezultă din relaţiile (1) sau (4).

La o rotație a rotorului, lampa va da p impulsuri luminoase și de aceea, pe disc vor apare p imagini ale reperului. În funcționarea la gol ideală, rotorul este surprins de impulsul luminos într-o poziție $\varrho = 0$; la încărcare, ϱ se modifică, impulsurile luminoase date de stroboscop surprind imaginea reperului într-o altă poziție și astfel putem citi valoarea lui ϱ.

Poziția de funcționare la gol, corespunzătoare unei valori nule a puterii electromagnetice rezultante se poate determina astfel: se măsoară puterea P_0 absorbită de mașină în schema clasică funcționînd la $n = 0$, rotorul fiind lăsat în poziția pe care o ocupă de la sine. Această poziție corespunde puterii electromagnetice rezultante $P_{emt} = 0$. Puterea P_0 reprezintă pierderile în fierul statorului și rotorului la frecvența nominală și pierderile în cupru în mersul la gol. Se inversează conexiunile între stator și rotor pentru două faze și se antrenează mașina la $n = 2n_1$, păstrînd schema clasică [1, fig. 1]. Se cuplează în paralel la rețea și se reglează cuplul motor astfel ca și în această situație wattmetrul să indice aceeași putere absorbită P_0. Pierderile mecanice ale mașinii cu dublă alimentare care, în noua situație intervin în plus față de încercarea anterioară, sînt suportate de mașina de antrenare. Poziția în care apare de astă dată imaginea reperului de pe discul stroboscopic, corespunde la $\varrho = 0$.

Montarea înfășurării suplimentare poate constitui un impediment în realizarea unei încercări puțin laborioase. Se poate recurge la o variantă a acestei metode folosind în locul f. e. m. date de înfășurarea suplimentară, tensiunea furnizată de o fază a statorului. Metoda este mai puțin exactă, pentru că între tensiune și f. e. m. dintr-o fază a statorului apar defazaje care cresc cu încărcarea.

Evident, s-ar putea imagina aparate de tipul fazmetrului care să măsoare parametrul ϱ, însă pentru aceasta, bobina de curent a aparatului trebuie modificată în bobina de tensiune. Vechiului circuit de tensiune i se va aplica f. e. m. statorică, iar bobinei modificate, f. e. m. rotorică. Deci o măsurare exactă ar necesita culegerea f. e. m. rotorice, de asemenea de la o înfășurare suplimentară, prin inele de contact prevăzute special în acest sens. Renunțarea la folosirea acestor înfășurări suplimentare reduce dificultățile experimentale, dar mărește eroarea de măsurare, de oarece se adăugă și erorile unghiulare cauzate de căderea de tensiune din rotor.

6. Încercările experimentale s-au făcut conectînd ca mașină clasică cu dublă alimentare un motor asincron cu inele Clement Gottwald de 3 kW, DA 40%, stator Δ/Y, 220/380 V, 14/8,1 A, $\cos \varphi = 0{,}72$; rotor Y, 100 V, 19,3 A, 940 rot/min.

Schema montajului experimental este dată în fig. 6. Mașina cu dublă alimentare *MDA* a fost antrenată cu o mașină de curent continuu *MA* care permite obținerea oricărei situații de funcționare în regim de motor sau de generator, prin reglarea adecvată a tensiunii ei de alimentare. Un comutator *C* permite comutarea dispozitivului potențiometric al stroboscopului la bornele suplimentare *B*, sau la bornele unei faze a statorului.

Pe axul rotorului maşinii *MDA* a fost fixat discul *D* purtînd reperul, iar pe statorul maşinii, sectorul gradat *SG* pe care s-au citit valorile unghiului ϱ. Aparatele de măsură au permis să măsurăm tensiunea U_c şi curentul I_c de alimentare a maşinii *MA*, tensiunea de alimentare pe pe fază U şi tensiunea la bornele unei faze a statorului U_1, curentul pe fază I şi transferul de putere P între reţea şi maşina cu dublă alimentare. Pentru alimentarea stroboscopului, în şanţurile statorului s-a instalat o înfăşurare *B* (fig. 6) compusă din 600 spire de 0,2 mm diametru, instalate identic şt în aceleaşi şanţuri ca una din fazele statorului. Această înfăşurare, în condiţiile normale de lucru ale maşinii cu dublă alimentare, poate furniza o tensiune cuprinsă între 360 şi 440 V. Pentru ca

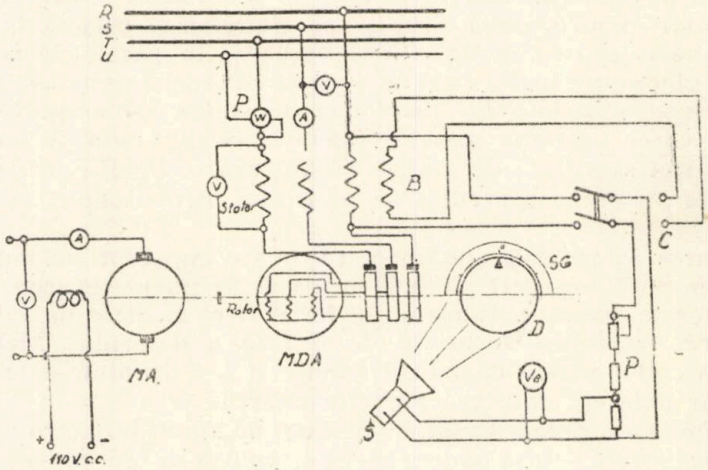


Fig. 6.

consumul aparatului să nu modifice faza tensiunii aplicate la grila de comandă a tubului stroboscopic (fig. 7) se urmăreşte să preluăm de la această înfăşurare un consum constant, minim, încît căderile de tensiune să fie constante şi neglijabile.

În acest scop s-a făcut uz de un potenţiometru avînd numai rezistenţă activă, de valoare foarte mare (în total 1,2 MΩ); de pe acest potenţiometru s-a legat la grila de comandă priza de la rezistenţa de 0,2 MΩ.

S-a constatat experimental că pentru funcţionarea corectă a tubului stroboscopic este necesară o tensiune alternativă de 30...45 V, valoare eficace. Totodată s-a observat că momentul aprinderii, în cursul unei perioade, depinde mult de valoarea acestei tensiuni. Acest lucru se explică în fig. 8, unde U_{ap} este tensiunea limită de aprindere a tubului stroboscopic, iar *1* şi *2* alternanţele pozitive a două curbe de tensiune, avînd amplitudini diferite.

În timp ce pentru curba *1*, cu amplitudine mare, aprinderea se produce în momentul t_1 corespunzător punctului de funcționare *a*, pentru curba *2*, aprinderea are loc mai tîrziu, în momentul t_2, corespunzător punctului *b*. Aceasta ne-a determinat să supraveghiem cu voltmetrul electronic V_e tensiunea grilei de comandă a tubului cu neon și să o menținem constantă la valoarea $U_g = 40$ V, cu ajutorul uneia din rezistențele variabile care constitue potențiometrul. Dacă nu s-ar

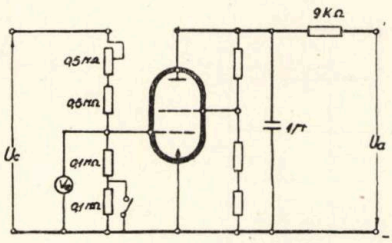


Fig. 7.

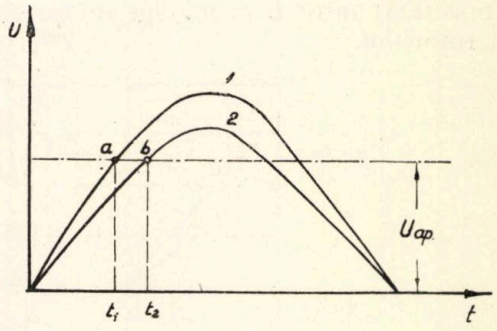


Fig. 8.

fi menținut tensiunea la o valoare constantă, atunci această întîrziere la aprindere ar fi avut drept consecință modificarea valorii citite pe sectorul gradat, deci o eroare de măsurare.

Principalele rezultate experimentale sînt date în tabelul 1. S-a notat cu ϱ_1 unghiul măsurat, folosind tensiune de la bobina *B*, iar cu ϱ_2 unghiul măsurat, comandînd aprinderea stroboscopului cu tensiune de la o fază a statorului.

Tabelul 1

Generator					Receptor					
P w	−4590	−3150	−2070	− 990	+270	+810	+1830	+2610	+3330	+4050
ϱ_1 °el	+ 90	+ 77	+ 60	+ 30	0	− 4,5	− 30	− 54	− 90	− 114
ϱ_2 °el	+ 117	+ 88,5	+ 58,5	+31,5	0	− 4,5	− 27	− 43,5	− 61,5	− 69

Datele măsurate au fost reprezentate în fig. 9.

Din această figură rezultă că la încărcări mici ale mașinii cu dublă alimentare, atît în regim de generator, cît și în regim de motor, valorile obținute pentru parametrul ϱ, prin cele două procedee, sînt suficient de apropiate; la încărcări mari, cele două valori diferă mult, din cauza căderilor de tensiune variabile și mari, din înfășurarea statorului. La aceste încărcări nu este acceptabilă comanda dispozitivului stroboscopic cu tensiune luată direct de la stator. Metoda preconizată de noi — cu alimentarea dintr-o bobină instalată special în acest scop — evită

erorile ce provin din căderile de tensiune, consumul dispozitivului potențiometric fiind foarte redus. În cazul dispozitivului folosit de noi, curentul care străbate potențiometrul a fost de 0,2 mA iar impedanța înfășurării auxiliare a fost de 191 Ω. Căderea de tensiune care rezultă în înfășurare fiind astfel de 0,038 V, este neglijabilă.

a) Se pune în evidență necesitatea alegerii unui parametru de referință în vederea trasării caracteristicilor de funcționare a mașinii cu dublă alimentare. Se arată că cel mai adecvat parametru este unghiul ϱ de defazaj între f. e. m. din înfășurările corespunzătoare ale statorului și rotorului.

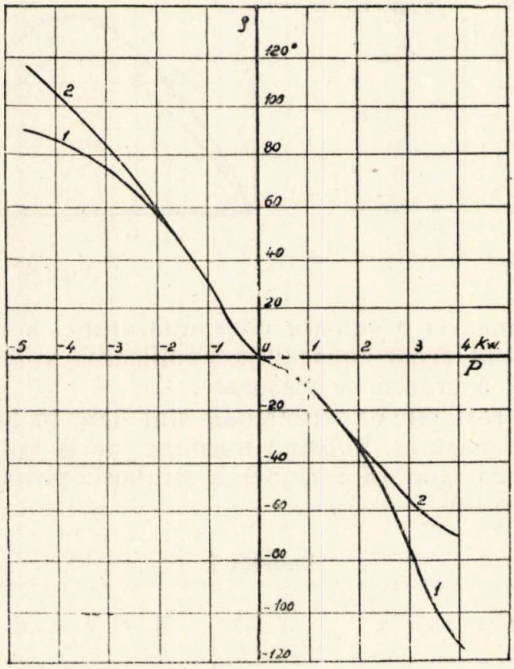


Fig. 9.

Concluzii

b) Se preconizează o metodă stroboscopică de măsurare a acestui parametru, folosind o bobină auxiliară, instalată în aceleași șanțuri cu înfășurarea unei faze a statorului și se prezintă dispozitivul experimental conceput în acest scop.

c) Se dau și rezultatele obținute în cazul racordării dispozitivului stroboscopic direct la bornele unei faze a statorului, renunțînd la folosirea bobinei auxiliare. Valorile astfel obținute pentru unghiul ϱ se compară cu cele obținute prin metoda de la punctul *b*) și se arată că eroarea măsurărilor prin varianta de la punctul *c*) devine inadmisibilă la încărcările mai mari.

d) Reducerea la minim a erorilor de măsură necesită, în cazul ambelor variante, un reglaj pentru menținerea tensiunii de grilă exact la aceeași valoare în tot timpul încercării, independent de condițiile de încărcare. Folosirea unui stabilizator de tensiune, care modifică și faza tensiunii reglate, nu poate fi recomandată.

Institutul Politehnic Iași,
Catedra de Electrotehnică și Mașini Electrice,
Laboratorul de Mașini Electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Filipiuc I., Șerban Gh., Bejan I., Corlățeanu, Bulet. Inst. Polit. Iași 1956, **2** (6), *3-4*, pp. 231-249.
2. Костенко М. П., Электрические машины, специальная часть, ГЭИ, М. — Л., 1949, стр. 52-53, 269-279.
3. Magrabi M. G. El., *Allgeimeine Theorie der doppelt gespeisten Synchronmaschine*, 1949, Ed. Leemann, Zürich.
4. Michael W, *Theorie der Wechselstrommaschinen vectorieller Darstellung*, 1937, Leipzig-Berlin, Verlag B. G. Teubner, S. 1-18.
5. Piotrovski L. M., *Mașini Elecrice*, EES, Buc., 1953, pp. 705-710, (trad. din l. rusă).
6. Richter R., *Elektrische Maschinen*, Bd. IV, 2-te Aufl., Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1954, S. 343-348.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА СРАВНЕНИЯ МАШИНЫ ДВОЙНОГО ПИТАНИЯ И МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЭТОГО ПАРАМЕТРА

(Резюме)

Подчеркивается необходимость выбирать параметр сравнения, позволяющий снимать рабочие характеристики машины двойного питания.

Указывается, что сдвиг фаз ϱ между э. д. с. соответствующих фаз статора и ротора машины двойного питания имеет необходимые качества для такового параметра.

Для измерения этого параметра авторы рекомендуют стробоскопический метод, требующий установления добавочной обмотки в тех же фазах, как и обмотка одной фазы статора. Экспериментальное устройство, выполненное с этой целью, представленно на рис. 6 и 7.

Даются также результаты полученные при управлении сетки неоновой лампы напряжением статорной фазы, что позволяет отказаться от добавочной обмотки.

Сравнивая величины сдвига ϱ, полученные опытным путем при помощи двух вариант метода, заключается, что ошибки измерений, произведенных без добавочной обмотки, становятся недопустимы при больших нагрузках машины двойного питания.

ÉTABLISSEMENT D'UN PARAMÈTRE DE RÉFÉRENCE POUR LA MACHINE À DOUBLE ALIMENTATION ET LA MÉTHODE DE MESURE DE CE PARAMÈTRE

(Résumé)

On relève la nécessité de choisir un paramètre de référence permettant de tracer les caractéristiques de fonctionnement de la machine à double alimentation. On montre que le déphasage ϱ entre les f.e.m. des phases correspodantes du stator et du rotor, présente les qualités qu'un tel paramètre doit posséder.

Pour la mesure de ce paramètre, les Auteurs préconisent une méthode stroboscopique, qui nécessite l'instalation d'un enroulement auxiliaire dans les mêmes encoches que l'enroulement d'une phase du stator. Le dispositif expérimental conçu dans ce but est présenté dans les fig. 6 et 7.

On présente aussi les résultats obtenus en commandant la grille du tube à néon, qui illumine le disque stroboscopique, avec la tension d'une phase du stator, en vue de renoncer à l'enroulement auxiliaire.

En comparant les valeurs obtenues expérimentalement pour l'angle ϱ à l'aide de ces deux variantes, on conclut que l'erreur des mesures faites sans l'enroulement auxiliaire deviennent inadmissibles lorsque les charges de la machine à double alimentation sont grandes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621.392 5

RANDAMENTUL TRANSMISIEI ENERGIEI ELECTRICE PRIN CUADRIPOLI

NOTA VII

REGIMUL ENERGETIC OPTIM AL CUADRIPOLILOR RECIPROCI

DE

HUGO ROSMAN şi ALFRED BRAIER

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 19—21 mai 1956

1. Într-o lucrare recentă [1] prof. M. Marinescu studiind anumite regimuri de funcţionare ale maşinilor electrice cu inductanţă variabilă, ajunge la concluzia că produsul dintre randamentul şi factorul de putere al unei astfel de maşini trebuie să aibă o valoare cît mai apropiată de unitate pentru ca, la o putere dată, greutatea maşinii să fie minimă. Aşadar, expresia

$$k = \eta \cos \varphi \tag{1}$$

constituie, în terminologia adoptată de autorul citat, un „indice" tehnico-economic al maşinii.

Este uşor de observat că expresia (1) se poate pune şi sub forma echivalentă:

$$k_{12} = \eta_{12} \cos \varphi_1 = \frac{P_2}{U_1 I_1} \tag{2}$$

valabilă pentru un sistem pasiv, arbitrar, de transfer al energiei electromagnetice, notaţiile fiind cele uzuale. Analizînd relaţia (2) rezultă că indicele k_{12} are o valoare maximă atunci cînd sistemul de transfer al energiei, absorbind un curent de intensitate dată, furnizează o putere maximă, tensiunea de alimentare a sistemului avînd o valoare efi-cace constantă. Vom denumi *regim energetic optim al sistemului de transfer al energiei electromagnetice*, acel regim particular de funcţionare pentru care valoarea indicelui k_{12} este maximă.

În cele ce urmează vom stabili condiţiile în care un cuadripol reciproc (pasiv) funcţionează în regim energetic optim. Studiul poate fi extins şi la alte tipuri de sisteme pasive de transfer a energiei electromagnetice.

2. Într-o lucrare anterioară [3] am arătat că fiind dat cuadripolul reciproc de ecuaţii

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2, \end{cases} \qquad (AD - BC = 1),$$

randamentul transmisiei energiei active este dat de relaţia

$$(3)\qquad \eta_{12} = -\operatorname{Re}(\overset{*}{C}D)\frac{|Z_1|}{\cos\varphi_1} - \frac{\operatorname{Re}(\overset{*}{A}B)}{|Z_1|\cos\varphi_1} + \operatorname{Re}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C) + \\ + \operatorname{Im}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)\operatorname{tg}\varphi_1,$$

notaţiile fiind cele din [2].

Rezultă că expresia indicelui k_{12} poate fi scrisă sub forma:

$$(4)\quad k_{12} = -\operatorname{Re}(\overset{*}{C}D)|Z_1| - \frac{\operatorname{Re}(\overset{*}{A}B)}{|Z_1|} + \operatorname{Re}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)\cos\varphi_1 + \operatorname{Im}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)\sin\varphi_1,$$

deci o funcţie de variabilele $|Z_1|$ şi φ_1.

Pentru ca indicele k_{12} să admită un maxim este necesar şi suficient ca pentru $|Z_1| = |\tilde{Z}_1|$ şi $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1$ ($|\tilde{Z}_1|$ şi $\tilde{\varphi}_1$ fiind zerourile sistemului $\frac{\partial k_{12}}{\partial |Z_1|} = \frac{\partial k_{12}}{\partial \varphi_1} = 0$) să avem $\frac{\partial^2 k_{12}}{\partial |Z_1|^2}\cdot\frac{\partial^2 k_{12}}{\partial \varphi_1^2} - \left(\frac{\partial^2 k_{12}}{\partial |Z_1| \partial \varphi_1}\right)^2 > 0$ şi $\frac{\partial^2 k_{12}}{\partial \varphi_1^2} < 0$.

Se obţine

$$(5)\qquad |\tilde{Z}_1^{(12)}| = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(\overset{*}{A}B)}{\operatorname{Re}(\overset{*}{C}D)}}\quad ;\quad \tilde{\varphi}_1^{(12)} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)}{\operatorname{Re}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)}$$

şi deci

$$(6)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^2 k_{12}}{\partial |Z_1|^2}\cdot\dfrac{\partial^2 k_{12}}{\partial \varphi_1^2} - \left(\dfrac{\partial^2 k_{12}}{\partial |Z_1| \partial \varphi_1}\right)^2\right]_{|Z_1| = |\tilde{Z}_1^{(12)}|;\ \varphi_1 = \tilde{\varphi}_1^{(12)}} = \\ \qquad = 2\sqrt{\dfrac{[\operatorname{Re}(\overset{*}{C}D)]^3}{\operatorname{Re}(\overset{*}{A}B)}}\,|\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C|, \\ \left[\dfrac{\partial^2 k_{12}}{\partial \varphi_1^2}\right]_{|Z_1| = |\tilde{Z}_1^{(12)}|;\ \varphi_1 = \tilde{\varphi}_1^{(12)}} = -|\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C|. \end{cases}$$

Or, $\operatorname{Re}(\overset{*}{A}B) = P_{2sc}/I_1^2$ şi $\operatorname{Re}(\overset{*}{C}D) = P_{20}/U_1^2$ şi cum pentru orice cuadripol reciproc [1]) $P_{2sc} > 0$, $P_{20} > 0$, rezultă că indicele k_{12} admite efectiv un maxim. Pentru a realiza această situaţie este necesar ca expresiile funcţiilor trigonometrice $\sin\tilde{\varphi}_1^{(12)}$ şi $\cos\tilde{\varphi}_1^{(12)}$ să aibă semnele specificate mai jos şi anume:

$$(7)\qquad \sin\tilde{\varphi}_1^{(12)} = \frac{\operatorname{Im}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)}{|\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C|}\quad ;\quad \cos\tilde{\varphi}_1^{(12)} = \frac{\operatorname{Re}(\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C)}{|\overset{*}{A}D + \overset{*}{B}C|}.$$

1) abstracţie făcînd de cazul, banal pentru preocupările din această Notă, al unui cuadripol pur reactiv.

Observație. Este ușor de constatat că [4]

$$|\tilde{Z}_1^{(12)}| = |Z_{1\eta}^{(12)}| \; ; \; \tilde{\varphi}_1^{(12)} = \varphi_{1P_2}^{(12)}, \tag{8}$$

cu alte cuvinte *condițiile necesare și suficiente ca regimul energetic al unui cuadripol reciproc să fie optim sînt ca modulul impedanței de intrare să fie egal cu cel corespunzător transmisiei energiei active cu randament maxim iar argumentul impedanței de intrare să fie egal cu cel corespunzător transmisiei puterii active maxime.*

Ținînd seama de relațiile (5) și (7), se obține

$$\begin{cases} \tilde{R}_1^{(12)} = |\tilde{Z}_1^{(12)}| \cos \tilde{\varphi}_1^{(12)} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Re}(\overset{*}{A}B)}{\mathrm{Re}(\overset{*}{C}D)}} \cdot \dfrac{\mathrm{Re}(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})}{|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}|}, \\ \tilde{X}_1^{(12)} = |\tilde{Z}_1^{(12)}| \sin \tilde{\varphi}_1^{(12)} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Re}(\overset{*}{A}B)}{\mathrm{Re}(\overset{*}{C}D)}} \cdot \dfrac{\mathrm{Im}(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})}{|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}|}. \end{cases} \tag{9}$$

Pentru a calcula rezistența $\tilde{R}_1^{(12)}$ și reactanța $\tilde{X}_1^{(12)}$ de la bornele de de ieșire ale cuadripolului, în cazul regimului optim, se scriu ecuațiile (A) sub forma

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 - B\dot{I}_1, \\ \dot{I}_2 = -C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1, \end{cases} \tag{B}$$

de unde rezultă $Z_2 = \dfrac{DZ_1 - B}{-CZ_1 + A}$ și în consecință

$$\begin{cases} R_2 = \dfrac{-\mathrm{Re}(\overset{*}{C}D)(R_1^2 + X_1^2) + \mathrm{Re}(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})R_1 + \mathrm{Im}(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})X_1 - \mathrm{Re}(\overset{*}{A}B)}{|C|^2(R_1^2 + X_1^2) - 2\mathrm{Re}(A\overset{*}{C})R_1 - 2\mathrm{Im}(A\overset{*}{C})X_1 + |A|^2}, \\ X_2 = \dfrac{-\mathrm{Im}(\overset{*}{C}D)(R_1^2 + X_1^2) + \mathrm{Im}(\overset{*}{A}D + B\overset{*}{C})R_1 + \mathrm{Re}(\overset{*}{A}D - B\overset{*}{C})X_1 - \mathrm{Im}(\overset{*}{A}B)}{|C|^2(R_1^2 + X_1^2) - 2\mathrm{Re}(A\overset{*}{C})R_1 - 2\mathrm{Im}(A\overset{*}{C})X_1 + |A|^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Introducînd în ecuațiile (10) valorile lui R_1 și X_1 date de (9) se obține

$$\begin{cases} \tilde{R}_2^{(12)} = \dfrac{|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}| \sqrt{\mathrm{Re}(\overset{*}{A}B)\,\mathrm{Re}(\overset{*}{C}D)}}{|A|^2 \mathrm{Re}(\overset{*}{C}D) + |C|^2 \mathrm{Re}(\overset{*}{A}B)}, \\ \tilde{X}_2^{(12)} = \dfrac{\mathrm{Im}(\overset{*}{A}B\overset{*}{C}D)}{|A|^2 \mathrm{Re}(\overset{*}{C}D) + |C|^2 \mathrm{Re}(\overset{*}{A}B)}. \end{cases} \tag{11}$$

3. În acest paragraf vom stabili formulele necesare pentru evaluarea randamentului $\tilde{\eta}_{12}$ şi a puterii active transmise $\tilde{P}_2$ în cazul regimului energetic optim. Substituind în (3) valorile lui $|Z_1|$ şi φ_1 date de (5), se obţine

$$\tilde{\eta}_{12} = \frac{|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}|^2 - \sqrt{|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}|^2 (|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}|^2 - 1)}}{\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})}. \tag{12}$$

De asemenea, introducînd în formula puterii active [4] valorile lui R_1 şi X_1 date de (9), se obţine

$$\tilde{P}_2 = \frac{U_1^2}{\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{B})} \left\{ \sqrt{\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{B})\,\mathrm{Re}\,(C\overset{*}{D})\,[1 + 4\,\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{B})\,\mathrm{Re}\,(C\overset{*}{D})]} - 2\,\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{B})\,\mathrm{Re}\,(C\overset{*}{D}) \right\}. \tag{13}$$

În sfîrşit, valoarea maximă a indicelui k_{12} se obţine într-un mod asemănător, rezultînd a fi dată de expresia

$$k_{12\,\max} = -2\sqrt{\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{B})\,\mathrm{Re}\,(C\overset{*}{D})} + \sqrt{1 + 4\,\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{B})\,\mathrm{Re}\,(C\overset{*}{D})} < 1. \tag{14}$$

4. Pentru ca regimul energetic optim să coincidă cu regimul de transmisie a energiei active cu randament maxim, estă necesar şi suficient ca

$$\tilde{\varphi}_1^{(12)} = \varphi_{1\eta}^{(12)}. \tag{15}$$

Or [3]

$$\varphi_{1\eta}^{(12)} = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})}{\sqrt{[\mathrm{Re}\,(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C})]^2 - 1}} \tag{16}$$

şi ţinînd seama acum de expresiile (5_2) şi (16) rezultă că

$$\varphi_{1\eta}^{(12)} \geqslant \tilde{\varphi}_1^{(12)}, \tag{17}$$

egalitatea avînd loc numai în cazul cuadripolilor reciproci ai căror coeficienţi satisfac relaţia

$$\mathrm{Im}\,(A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}) = 0. \tag{18}$$

În această situaţie $\varphi_{1\eta}^{(12)} = \tilde{\varphi}_1^{(12)} = 0$ iar factorul de putere la intrarea în cuadripol, în cazul transmisiei energiei active cu randament maxim, devine egal cu unitatea. Este evident că atunci regimul energetic al transmisiei este optim.

Aşadar, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca regimul energetic optim al unui cuadripol reciproc să coincidă cu regimul de transmisie a energiei active cu randament maxim este ca coeficienţii cuadripolului să satisfacă relaţia (18).*

Inegalitatea (17) antrenează după sine şi inegalităţile

$$\tilde{R}_1^{(12)} \geqslant R_{1\eta}^{(12)} \quad ; \quad \tilde{X}_1^{(12)} \leqslant X_{1\eta}^{(12)} . \tag{19}$$

Menţionăm faptul că liniile omogene lipsite de distorsiuni satisfac relaţia (18). Într-adevăr, pentru o astfel de linie [2]

$$A = D = \operatorname{ch}\gamma l \quad ; \quad B = Z_c \operatorname{sh}\gamma l \quad ; \quad C = \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z_c},$$

cu

$$\gamma = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{LC} \quad ; \quad Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

notaţiile fiind cele uzuale (Z_c — impedanţa caracteristică, γ — constanta de propagare r, g, L, C — parametrii pe unitatea de lungime a liniei, l — lungimea liniei). Se constată cu uşurinţă că $\operatorname{Im}(A\overset{*}{D}) = \operatorname{Im}(B\overset{*}{C}) = 0$; aşadar relaţia (18) este satisfăcută şi prin urmare *în cazul unor linii omogene lipsite de distorsiuni, transmisia energiei active cu randament maxim coincide cu regimul energetic optim al liniei.*

5. Pentru ca regimul energetic optim să coincidă cu regimul de transmisie a puterii active maxime este necesar şi suficient ca

$$|\tilde{Z}_1^{(12)}| = |Z_{1P_2}^{(12)}| . \tag{19}$$

Însă [4]

$$|Z_{1P_2}| = \frac{2\operatorname{Re}(A\overset{*}{B})}{|A\overset{*}{D} + B\overset{*}{C}|} . \tag{20}$$

Ţinînd seama de (5_1) şi de (20), egalitatea (19) poate subsista numai dacă $\operatorname{Re}(A\overset{*}{B}) = P_{2sc}/I_1^2 = 0$, ceea ce nu este posibil [2]). Rezultă de aici că *în cazul cuadripolilor reciproci regimul energetic optim nu poate coincide cu regimul de transmisie a puterii active maxime.*

În sfîrşit, este uşor de arătat că

$$\tilde{R}_1^{(12)} > R_{1P_2}^{(12)} \quad ; \quad \tilde{X}_1^{(12)} \geqslant X_{1P_2}^{(12)} . \tag{21}$$

6. În cazul cînd cuadripolul este alimentat în sens invers, problema determinării regimului energetic optim al transmisiei energiei active se soluţionează în mod analog.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Bazele Electrotehnicii

2) v. nota 1.

BIBLIOGRAFIE

1. Marinescu M., Comunicările Acad. R. P. R., 1956, **6**, *1*, pp. 97—104.
2. Neiman L. R. şi Kalantarov P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, t. II, EES, Buc. 1955, p. 349, (trad. din l. rusă)
3. Rosman H. şi Braier A., St. şi Cerc. Şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1952, **3**, *1—4*, pp. 57—70.
4. — Bulet. Inst. Polit. Iaşi, 1955, **1** (**5**), *1—2*, pp. 158—172.

КПД ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

(Резюме)

Учитывая, по примеру проф. М. Мариеску [1], что выражение $k = \eta \cos \varphi$ служит технико-экономическим „показателем" передачи электромагнетической энергии через арбитрарную пассивную систему, исследуются условия для оптимального режима работы взаимного четырехполюсника, соответствующего максимальной величине k. Находятся необходимое и достаточные условия для оптимального энергетического режима взаимного четырехполюсника а именно: а) модуль импеданса входа должен быть равен модулю импеданса входа к передаче актйвной энергии максимального к п д; б) аргумент импеданса входа должен быть равен аргументу импеданса входа к передаче максимальной активной мощности.

Установливается также, что оптимальной энергетический режим взаимного четырехполюсника совпадает с режимом передачи активной энергии максимального к и д, в случае, если коэффициенты четырехполюсника удовлетворяют отношению (18). И наконец доказывается, что оптимальной энергетический режим не может совпадать с режимом передачи активной максимальной мощности.

LE RENDEMENT DE LA TRANSMISSION DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE PAR LES QUADRIPÔLES

Note VII

Le régime énergétique optimum des quadripôles réciproques

(Résumé)

En considérant à l'instar de M. le prof. M. Marinescu [1], que l'expression $k = \eta \cos \varphi$ constitue un „indice" technico-économique du transfer de l'énergie électromagnétique par un système passif arbitraire, on étudie les conditions dans lesquelles le régime de fonctionnement d'un quadripôle réciproque est optimum, c'est-à-dire le régime qui correspond à une valeur maxima de l'indice k. On trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que le régime énergétique d'un quadripôle réciproque soit optimum, à savoir : a) que le module de l'impédance d'entrée soit égal à celui correspondant au transfer de l'énergie active avec un rendement maximum et b) que l'argument de cette même impédance soit égal à celui correspondant au transfer de la puissance active maxima. On déduit ensuite que le régime énergétique optimum d'un quadripôle réciproque coïncide avec le régime de la transmission de l'énergie active avec un rendement maximum si les coefficients du quadripôle satisfont la relation (18). Enfin, on montre que le régime énergétique optimum d'un quadripôle réciproque ne peut pas coïncider avec le régime de la transmission de la puissance active maxima.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621.317.7

CAPACIMETRU DE SENSIBILITATE RIDICATĂ UTILIZÎND ÎN MĂSURARE CICLUL DE RELAXARE

DE

EMIL LUCA, V. PETRESCU şi N. REUS

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26 — 29 iunie 1958

1. Consideraţii generale

Într-o lucrare anterioară [1], bazîndu-ne pe posibilitatea utilizării cu succes a oscilaţiilor de relaxare la construirea capacimetrilor simpli, capabili de a măsura capacităţi mici — cum este capacimetrul fonic construit de Casa Chauvin şi Arnoux din Paris [2], ce permite măsurări de capacităţi în domeniul 0,05 mμF...10 mμF — am arătat că există posibilitatea, ca utilizînd fenomenul de bătăi, obţinut între oscilaţiile de relaxare produse de un tub cu neon sau un tiratron şi oscilaţiile date de un diapazon sau generator de ton adecvat, să se realizeze capacimetri simpli ce permit măsurări de capacităţi în domeniul 1 pF...1 μF. În cazul acestor capacimetri se obţineau fie bătăi în aer, în care caz se utiliza un amplificator şi un difuzor, sau se aplicau oscilaţiile de relaxare cît şi oscilaţiile date de generatorul de ton la cele două perechi de plăci ale unui oscilograf catodic, condiţia de zero obţinîndu-se cu ajutorul figurilor Lissajou. În ambele cazuri, capacitatea de măsurat se plasa în paralel cu capacitatea circuitului oscilant, introducerea ei schimbînd condiţia de zero. Prin micşorarea capacităţii de pe circuitul oscilant, care era o capacitate etalon, se recăpăta condiţia de zero iniţială, variaţia capacităţii etalon reprezentînd însăşi valoarea capacităţii necunoscute.

Metoda indicată, deşi foarte simplă, impunea totuşi obligaţia de a utiliza diapazoane etalonate sau un generator de ton de frecvenţă variabilă şi cît mai stabilă, precum şi un amplificator cu difuzor sau oscilograf catodic.

Urmărind simplificarea aparaturii necesare, obţinînd totuşi un capacimetru de o aceeaşi sensibilitate, sau eventual chiar mai ridicată, ne-am propus a utiliza ciclurile de relaxare obţinute la un oscilograf catodic în cazul oscilaţiilor de relaxare, utilizînd în acest scop numai oscilaţiile produse de lămpi cu neon.

2. Principiul metodei

În vederea obţinerii ciclului de relaxare la un oscilograf catodic, prin descărcarea intermitentă a unui condensator printr-un tub cu neon, am utilizat un montaj obişnuit, utilizat şi de alţi autori [3]...[7], redat în fig. 1.

Schema conţine o rezistenţă R, variabilă, şi un grup de capacităţi variabile, etalon, C, în paralel cu care, prin intermediul întrerupătorului I, se poate introduce capacitatea necunoscută C_x.

Capacităţile, încărcate prin intermediul rezistenţei R, la tensiunea continuă U, se descarcă producînd oscilaţii de relaxare, prin tubul cu neon LN, pus în serie cu rezistenţa variabilă r.

Tensiunea dintre punctele AB, se aplică la plăcile verticale ale unui osciloscop catodic OsC. La plăcile orizontale ale aceluiaşi osciloscop catodic se aplică căderea de tensiune de pe rezistenţa r, adică între punctele OB (la o anumită scară aceasta redă valoarea curentului de descărcare i).

Notînd cu v tensiunea dintre punctele AB şi cu u pe cea dintre punctele OB, la osciloscopul catodic se va obţine în planul (v, u) sau în planul (v, i) caracteristica dinamică a oscilaţiei de relaxare, deci ciclul de relaxare respectiv.

Măsurări experimentale făcute de diverşi cercetători [7]... [9], privind ciclurile de relaxare, în sensul de a stabili condiţiile de variaţie ale intensităţii maxime a curentului din circuitul de descărcare, pe durata unui ciclu, sau de a determina variaţia de energie consumată pe ciclu [10], au arătat că în cazul cînd se menţin constante valorile parametrilor U, R şi r, intensitatea maximă a curentului de descărcare şi energia consumată pe ciclu depind de valoarea capacităţii circuitului oscilant. Valoarea energiei consumate pe ciclu determinîndu-se funcţie de valoarea suprafeţei ciclului de relaxare, în vederea determinării ei s-au trasat curbele de variaţie a suprafeţei ciclului de relaxare, funcţie de capacitatea circuitului oscilant [10], arătîndu-se că şi suprafaţa ciclurilor de relaxare depinde de capacitatea circuitului oscilant.

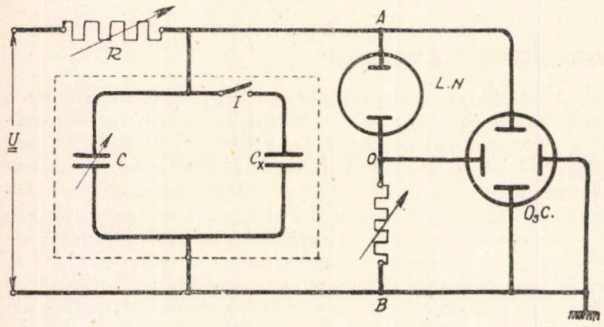


Fig. 1.

Faptul că atît intensitatea maximă a curentului de descărcare din durata unui ciclu, cît şi valoarea suprafeţei ciclului de relaxare urmăresc variaţiile capacităţii circuitului oscilant, a fost utilizat de noi în vederea realizării unui nou tip de capacimetru de sensibilitate ridicată.

În acest scop am utilizat două procedee:

a) executînd o etalonare empirică (instrument cu lectură directă) prin aprecierea intensităţii maxime ori a suprafeţei ciclului de relaxare, punînd diferite capacităţi etalon, cunoscute, respectiv, în locul capacităţii circuitului oscilant;

b) executînd o metodă de substituţie, adică introducînd capacitatea C_x în paralel cu o anume capacitate etalon, totală, C. Această operaţie

modifică valorile intensității maxime sau ale suprafeței ciclului de relaxare, indicate anterior de oscilograful catodic. Prin micșorarea adecvată a capacității etalon C se cade peste valorile inițiale ale acestora. Variația ΔC reprezintă valoarea capacității C_x.

3. Rezultate experimentale

A. ETALONAREA EMPIRICĂ

Capacități etalon cunoscute utilizate drept capacitate a circuitului oscilant

Este necesar a se trasa curbele de etalonare a capacimetrului funcție fie de intensitatea maximă a curentului fie de suprafața ciclului de relaxare. Se utilizează montajul din fig. 1 în care sistemul capacitate se înlocuiește cu o cutie etalon Ulrich, variabilă în domeniul 120 pF...1 μF.

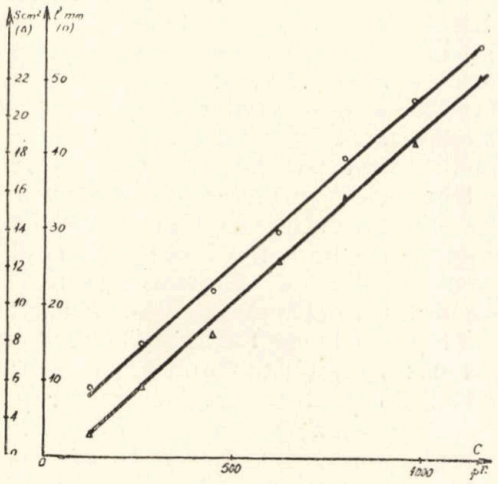


Fig. 2a
$R=1$ MΩ, $r=100$ Ω, $U=110$ V.

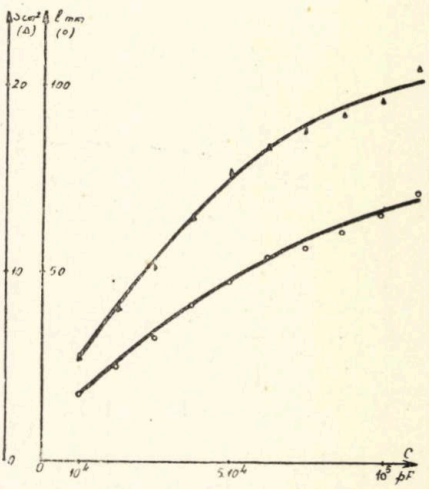


Fig. 2b
$R=1$ MΩ, $r=300$ Ω, $U=110$ V.

S-au utilizat tuburi cu neon, cu electrozii de diverse forme geometrice (cilindri, spirală, ciupercă). Cele mai bune rezultate din punct de vedere al stabilității ciclului de relaxare obținut cît și al întinderii domeniului de obținere a oscilațiilor de relaxare, au fost căpătate cu o lampă cu neon Osram, cu electrozi cilindrici coaxiali făcuți din foițe metalice compacte. Tensiunea de alimentare a tubului cu neon, $U=110$ V;

ca oscilograf catodic a n utilizat un oscilograf KŘIŽIK, cu posibilități de amplificare atît pe orizontală cît și pe verticală. Întregul sistem a fost pus la pămînt. Dînd valori optime parametrilor U, R și r, și fixînd la osciograf o anumită amplificare pe verticală și orizontală, mărimi ce se mențin constante în timpul determinărilor, se trasează curba de variație a intensității maxime a curentului de descărcare sau a suprafeței ciclului de relaxare, funcție de valoarea capacității circuitului oscilant.

Măsurarea intensităţii maxime a curentului de descărcare sau a suprafeţei ciclului de relaxare, s-a făcut fie direct de pe ecranul osciloscopului catodic, sau în cele mai multe cazuri, prin fotografierea ciclului de relaxare respectiv. Măsurarea suprafeţei ciclului de relaxare a fost făcută prin planimetrare.

În general, pentru fiecare valoare a curentului maxim de descărcare, sau a suprafeţei ciclului de relaxare, s-au făcut mai multe măsurări, luîndu-se de fiecare dată valoarea lor medie.

Utilizînd pentru parametrii R, U şi r valori extreme, în sensul de a cuprinde întregul domeniu de producere a oscilaţiilor de relaxare, cu lampa cu neon indicată, s-au obţinut curbele de etalonare ale capacimetrului, redate în fig. 2a, 2b, 2c.

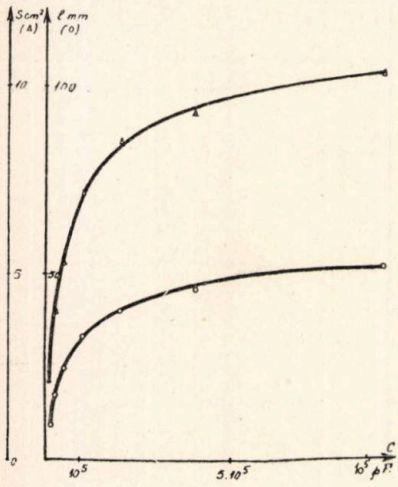


Fig. 2c
$R=200\ k\Omega$, $r=200\ \Omega$, $U=110V$

Avînd trasate curbele de etalonare se poate măsura orice capacitate necunoscută, cuprinsă în domeniul de etalonare, ce se introduce în locul capacităţii circuitului oscilant. Menţinîndu-se constante valorile parametrilor R, r şi U precum şi amplificarea la osciloscop, se determină în acest caz fie valoarea maximă a intensităţii curentului de descărcare pe ciclu, fie suprafaţa ciclului de relaxare obţinut. Cu ajutorul acestor valori, de pe curbele din fig. 2, deja trasate, se poate determina capacitatea necunoscută.

Metoda este limitativă, în sensul că se pot măsura capacităţi numai în domeniul capacităţilor pentru care lampa întreţine oscilaţii de relaxare şi nu decroşează.

Utilizînd în mod judicios valorile parametrilor R, r şi U, am obţinut pentru lampa cu neon întrebuinţată, oscilaţii de relaxare pînă la o valoare minimă a capacităţii circuitului oscilant $C=120$ pF cu $R=1\ M\Omega$ şi $r=100\ \Omega$ şi o valoare maximă $C=1\ \mu F$ cu $R=200\ k\Omega$ şi $r=200\ \Omega$.

Din forma curbelor trasate se observă că sensibilitatea maximă corespunde capacităţilor mici, unde variaţia intensităţii maxime a curentului de descărcare pe ciclu sau a suprafeţei ciclului de relaxare, cu capacitatea, se face liniar.

B. METODA DE SUBSTITUŢIE

Capacitatea necunoscută se leagă în paralel cu capacitatea etalon a circuitului oscilant

În scopul de a extinde domeniul de măsurare la capacităţi de valoare şi mai mică, putînd atinge valori de ordinul 1 pF, se poate utiliza tot în cazul ciclurilor de relaxare, o metodă de substituţie. De această dată capacitatea necunoscută se introduce în paralel cu capacitatea

etalon, variabilă, a circuitului oscilant, prin intermediul întrerupătorului I (fig. 1). Inițial, printr-o alegere judicioasă a parametrilor R, U și r, pentru cazul cînd în circuitul oscilant este intercalată numai capacitatea etalon, variabilă, C, se urmărește a se obține oscilații de relaxare în lampa cu neon pentru valoarea minimă a capacității circuitului oscilant. Utilizînd montajul din fig. 1, se obține la oscilograful catodic ciclul de relaxare respectiv, care, prin utilizarea unei amplificări potrivite la oscilograf, este extins la maxim în domeniul limitat de ecranul fluorescent al oscilografului. În această situație, prin intermediul întrerupătorului I se pune capacitatea necunoscută C, în paralel cu capacitatea etalon variabilă. O dată cu creșterea valorii capacității totale a circuitului oscilant, se modifică forma suprafeței ciclului de relaxare. Valoarea C cu care se micșorează capacitatea etalon, variabilă, în sensul de a readuce ciclul de relaxare la forma inițială, dă însăși valoarea capacității necunoscute C_x.

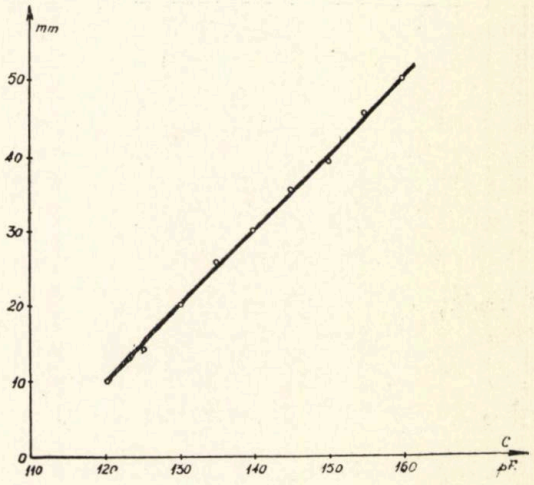


Fig. 3.

Și în în acest caz poziția de zero, prin readucerea ciclului de relaxare la forma inițială, se poate face în două moduri:

a) Urmărind ca prin variația capacității etalon să se recapete un ciclu de relaxare de aceeași formă și deci de aceeași suprafață cu ciclul de relaxare inițial, ceea ce este mai dificil de observat cu ochiul liber.

b) Fixînd un punct pe ciclul de relaxare astfel obținut, adică fixînd o poziție de zero, și urmărind ca prin variația capacității etalon să se readucă pe ecranul oscilografului catodic, punctul de pe ciclul de relaxare astfel fixat, la poziția inițială. În acest caz posibilitatea de apreciere a celor mai mici variații este mult mai ușoară.

Ca punct de reper, s-a ales punctul de pe ciclul de relaxare, corespunzător intensității maxime a curentului. Din oscilograme (fig. 4) se vede că maximele intensităților de curent se mențin pe aceeași linie, atunci cînd prin variația capacității circuitului oscilant se variază însăși valoarea curentului de descărcare, adică așa cum a arătat și J. Moussiegt [7], maximele intensității curentului de descărcare corespund totdeauna aceleași tensiuni.

În vederea aprecierii cît mai mai corecte a punctului de pe ciclul de relaxare, corespunzător intensității maxime a curentului de descăr-

care, se impune ca ciclul de relaxare astfel obţinut să fie cît mai puţin aplatisat, adică să prezinte o formă cît mai ascuţită.

Acest lucru se realizează alegînd pentru r o valoare cît mai convenabilă şi utilizînd cît mai avantajos posibilitatea de amplificare a osciloscopului catodic pe orizontală, adică amplificînd în mod convenabil căderea de tensiune de pe rezistenţa r, care la o anumită scară ne dă la osciloscopul catodic însăşi valoarea curentului i.

În cazul lămpii cu neon amintite, condiţiile optime pentru măsurări de capacităţi mici au fost obţinute cu următoarele valori: $R = 1\text{M}\Omega$, $r = 2000\,\Omega$ şi $U = 110\,\text{V}$.

În acest caz descărcările intermitente se menţin în lampa cu neon pînă la o valoare limită a capacităţii circuitului oscilant $C = 120\,\text{pF}$.

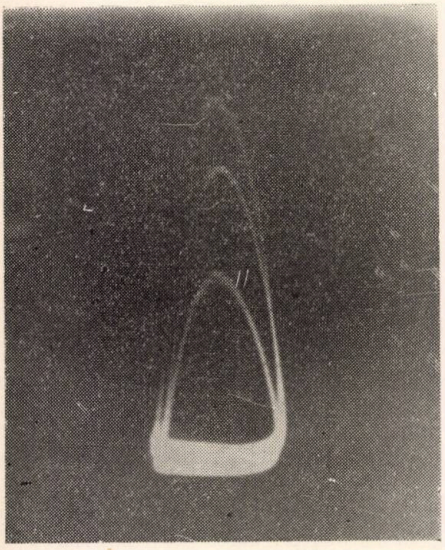


Fig. 4.

Trasînd curba de variaţie a intensităţii maxime a curentului de descărcare funcţie de valoarea capacităţii, se obţine curba din fig. 3, care arată că variaţia intensităţii maxime a curentului se face liniar cu capacitatea, sensibilitatea în măsurare fiind suficient de mare, întrucît unei variaţii a capacităţii de 1pF, îi corespunde o variaţie, în valoarea intensităţii maxime a curentului, egală cu 1 mm, care poate fi uşor de de apreciat chiar cu ochiul liber.

Rezultă că în aceste condiţii se pot aprecia capacităţi de ordinul 1 pF.

Considerînd că ciclul de relaxare este supus la fluctuaţii de ordinul 1/10 mm, după cum afirmă Moussiegt [7], cu ajutorul unei lupe se poate aprecia deci 1/10 mm, ceea ce permite coborîrea limitei inferioare de apreciere a capacităţilor, pînă la capacităţi de ordinul 0,1 pF.

În sensul de a arăta influenţa produsă asupra formei şi suprafeţei ciclului de relaxare la limita inferioară a domeniului de măsurare prin introducerea unor capacităţi de ordinul pF, redăm oscilogramele din fig. 4 unde:

a) curba 1 corespunde cazului cînd $C = 120$ pF;

b) curba 2 corespunde introducerii pe circuit a unei capacităţi necunoscute $C_x = 6$ pF iar

c) curba 3 corespunde introducerii în paralel pe circuit a unei capacităţi $C_x = 10$ pF.

Limita superioară de măsurare s-a căpătat cu următoarele valori: $R = 200\,\text{k}\Omega$, $r = 200\,\Omega$, $U = 110\,\text{V}$, cînd s-au putut măsura capacităţi de ordinul $1\mu\text{F}$ cu o aproximaţie de $0{,}5\%$.

4. Concluzii

1. Prin utilizarea ciclului de relaxare la un osciloscraf catodic, în cazul oscilațiilor de relaxare obținute la o lampă cu neon Osram, cu electrozi cilindrici, coaxiali, compacți, se pot măsura capacități în domeniul 1 pF ... 1μF.

2. Măsurarea se poate face în două moduri:

a) Printr-o etalonare empirică prin lectură directă, trasînd o curbă de etalonare cu capacități etalon variabile, funcție de suprafața ciclului de relaxare sau a intensității curentului de descărcare. Metoda devine în special expeditivă cînd se utilizează intensitatea maximă.

Această metodă este limitativă, în sensul că se pot măsura capacități de ordinul capacităților pentru care lampa produce oscilații de relaxare. Pentru lampa cu neon indicată, domeniul de măsurare este cuprins între 120 pF ... 1μ F.

b) Montînd capacitatea necunoscută în paralel cu capacitatea circuitului, care în acest caz este o capacitate etalon. Va rezulta o modificare în forma și suprafața ciclului de relaxare, iar valoarea ΔC cu care se variază capacitatea etalon, în sensul de a readuce ciclul de relaxare la forma și suprafața inițială, dă însăși valoarea capacității necunoscute. În acest caz, domeniul de măsurare, în ceea ce privește valorile mici ale capacității, este extins, putîndu-se măsura capacități de ordinul 1 pF.

3. Metodele indicate sînt expeditive, necesitînd aparatura obișnuită de laborator și prezentînd o suficientă precizie în măsurare, erorile posibile fiind inferioare lui 1%.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Petrescu V., Luca E. și Savin Gh., Bul. Inst. Polit. Iași, 1955, **1** (5), *1-2*, p. 178
2. Durepaire M., RGE, 1933, **34**, p. 39.
3. Leyshon W. A., Proc. Roy. Soc., 1929, 1930, **42**, p. 157.
4. Gawehn H., Ann. der Phys., 1934, **20**, S. 601.
5. Sloane R. W., Phyl. Mag., 1937, **23**, p. 554.
6. Walle G., Phys. Zeit., 1942, **43**, S. 473.
7. Moussiegt J., Ann. de Phys., 1949, **4**, p. 593.
8. Laporte M., Journ. de Phys., 1937, **8**, p. 332.
9. Blum E., Ann. der Phys., 1938, **31**, S. 585.
10. Luca E., Petrescu V., Reus N. și Mihul-Budăi Ileana, Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Inst. Polit. Iași, din 26-29 VI 1958.

КАПАЦИМЕТР ВЫСОКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ТРЕБУЮЩИЙ В ИЗМЕРЕНИИ РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ЦИКЛ

(Резюме)

При наблюдении релаксационного цикла на экране катодного осциллографа пользуя релаксационные колебания неоновой лампы, можно измерять ёмкость в пределах 1 pF ... 1 μF.

Измерения можно производить двояко :

а) Эмпирическим эталонированием (непосредственного чтения), проводя кривую эталонирования с переменными величинами эталона, в зависимости от поверхности релаксационного цикла, или напряжением тока разрядки через неоновую лампу. При максимальном напряжении этот метод даёт быстрые результаты, но он ограничен возможностью измерения ёмкостей для которых лампа дает релаксационные колебания. Предел измерения для рекомендуемой лампы находится между 120 pF...1 μF.

б) Включая параллельно неизвестную ёмкость и ёмкость цепи, в данном случае эталонной, создается изменение, по форме и поверхности, а релаксационного цикла, а величинн ΔC изменяющая эталонную ёмкость т.е. приводящая релаксационный цикл к начальным форме и поверхности, дает величину неизвестной ёмкости. В данном случае область измерения малых величин увеличивается, позволяя измерять ёмкости 1 pF.

Предлагаемые методы быстры, не требуют специальной лабораторной аппаратуры, достаточно точны, возможные погрешности ниже 1 %.

Были исползованы неоновые трубки различных геометрических форм (цилиндрические, спиральные, грибковидные) с различными электродами. Лучшие результаты по стабильности цикла и размеров области колебаний получены неоновой лампой Osram, с цилиндрическими, коаксиальными, с компактыми металическими листами — электродами.

SUR LA RÉALISATION D'UN CAPACIMÈTRE DE GRANDE SENSIBILITÉ, EN UTILISANT DANS LA MESURE LE CYCLE DE RÉLAXATION

(Résumé)

Par l'observation du cycle de rélaxation sur l'écran d'un oscillographe cathodique, en utilisant des oscillations de rélaxation obtenues à l'aide d'un tube à néon, on peut mesurer des capacités, dans le domaine 1pF — 1μF.

La mesure peut être réalisée dans deux manières différentes, à savoir :

a) En étalonnant par voie empirique (par lecture directe), en traçant une courbe d'étalonnage à l'aide des capacités étalon variables, fonction de la surface du cycle de rélaxation ou de l'intensité du courant de décharge par le tube à néon. La méthode est expéditive lorsqu'on utilise l'intensité maxima. Cette méthode ne permet que la mesure des capacités, dont les valeurs ne dépassent celles qui limitent la production, par le tube à néon, des oscillations de rélaxation. Dans ce cas le domaine de mesure s'étend de 120 pF jusqu'à 1 μF.

b) En montant la capacité inconnue en parallèle avec la capacité du circuit, qui, dans ce cas c'est une capacité étalon. Il en résulte une modification de la forme et de la surface du cycle de rélaxation. Pour rétablir la forme et la surface initiale du cycle on varie la valeur de la capacité étalon, d'une quantité ΔC, qui représente dans ce cas la valeur même de la capacité inconnue. De cette manière on réalise l'extension de la limite inférieure du domaine de mesure, jusqu'à 1 pF.

Les méthodes préconisées sont expéditives, faisant appel aux appareils usuels et en présentant une précision suffisante, les erreurs restant toujours au-dessous de 1%.

Dans la mesure on a utilisé des tubes à néon ayant des électrodes de diverses formes géométriques (cylindres, spirales, etc.).

Quant à la stabilité du cycle de rélaxation et l'étendue du domaine d'obtention des oscillations de rélaxation, les meilleurs résultats ont été obtenus à l'aide d'un tube à néon Osram à électrodes cylindriques coaxiaux.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

537.311.1

UN FENOMEN NOU OBSERVAT LA CONTACTUL ELECTRIC MERCUR-CROM (ÎN PĂTURA SUBŢIRE)

NOTĂ PRELIMINARĂ

DE

GÉRARD D'ALBON, DAN URSESCU şi MARCEL GUTMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Prezentăm rezultatele experienţelor făcute pentru a determina valoarea rezistenţei de contact dintre mercur şi o pătură subţire de crom, depusă electrolitic pe fier sau cupru.

Contactele electrice cu mercurul sau cu aliaje lichide au fost studiate de diverşi autori în ultima vreme, de oarece prezintă multiple avantaje cînd sînt folosite drept contacte glisante.

Astfel, Peter Klaudy a studiat rezistenţele de contact cu mercurul [1]. Din acest studiu reiese că rezistenţa de contact se datoreşte unei pături superficiale a metalului solid ce face contactul cu mercurul. Această pătură, datorită gazelor incluse, are o rezistivitate crescută. Din articolul publicat reiese că autorul a studiat şi contactul crom-mercur (este vorba de crom masiv sau în pătură groasă, probabil), dar nu prezintă valori ale acestei rezistenţe de contact. În experienţele făcute de Peter Klaudy rezistenţele respectă legea lui Ohm în sensul că sînt independente de densitatea de curent şi nu variază în timp. Am făcut o serie de experienţe pentru a cunoaşte comportarea pieselor de cupru şi oţel acoperite cu crom în strat subţire, la contactul cu mercurul precum şi pentru a determina valoarea rezistenţelor de contact în aceste cazuri.

În experienţele noastre am constatat că rezistenţa acestor contacte nu respectă legea lui Ohm, ea variază cu densitatea de curent şi la densitate de curent constantă variază în timp. Variaţia se produce cu salturi ce se repetă periodic. Cromarea pieselor s-a făcut electrolitic.

Primele experienţe s-au făcut pe nişte electrozi de OL — 38 acoperiţi cu un strat subţire de crom (cca. 30 μ) folosind schema din fig. 1.

Electrozii *1* au fost fixaţi prin înşurubare în tijele *2* din oţel, fixate în capacul cuvei de viniplast. Electrozii au fost izolaţi pe suprafaţa

laterală cu clei nitro şi în unele experienţe cu parafină. Sondele pentru măsurarea căderii de tensiune au fost cositorite pe cei doi electrozi în apropierea suprafeţelor de contact. Curentul necesar experimentării a fost furnizat de un acumulator fero-nichel 4. În circuit s-a montat un reostat pentru a varia curentul precum şi un ampermetru.

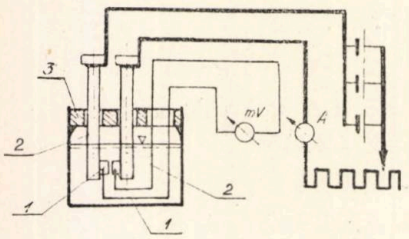


Fig. 1.

În timpul experimentării s-a constatat că rezistenţa de contact variază în mod continuu astfel: porneşte de la o anumită valoare iniţială, creşte, atinge o valoare maximă şi apoi scade brusc la o valoare mult mai mică decît cea iniţială. Fenomenul se repetă.

Aspectul variaţiei rezistenţei de contact în timp, se poate urmări pe curba reprezentată în fig. 2. Variaţii de acest tip se obţineau ori de cîte ori se menţinea densitatea de curent constantă şi salturile pe cele două suprafeţe de contact erau simultane.

Evoluţia rezistenţei de contact între două salturi, cînd se menţine densitatea de curent constantă, se poate urmări în fig. 3, unde valorile au fost citite la intervale mici de timp. S-au făcut nenumărate expe-

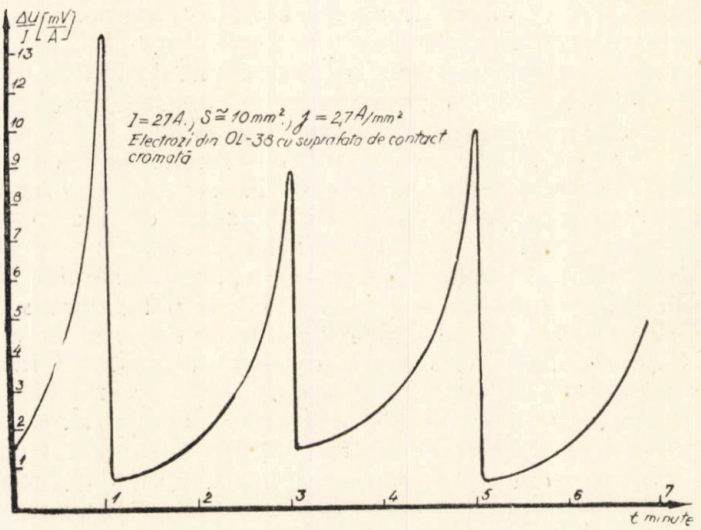


Fig. 2.

rienţe, în condiţii diferite de lucru, care toate au dus, sub aspect calitativ, la aceleaşi rezultate.

Astfel s-a lucrat cu mercur impur şi apoi s-a lucrat cu mercur purificat prin distilare. S-a lucrat cu mercur aflat la temperatura mediului ambiant şi cu mercur încălzit la temperatura de 180°C. Expe-

rienţele au fost făcute folosind OL—38, OL—50, sîrmă de fier şi sîrmă de cupru, acoperite cu straturi subţiri de crom (avînd grosimea cuprinsă între 30 şi 50 μ).

De asemenea s-a lucrat în diverse condiţii de tratare a suprafeţei după cromare şi anume:

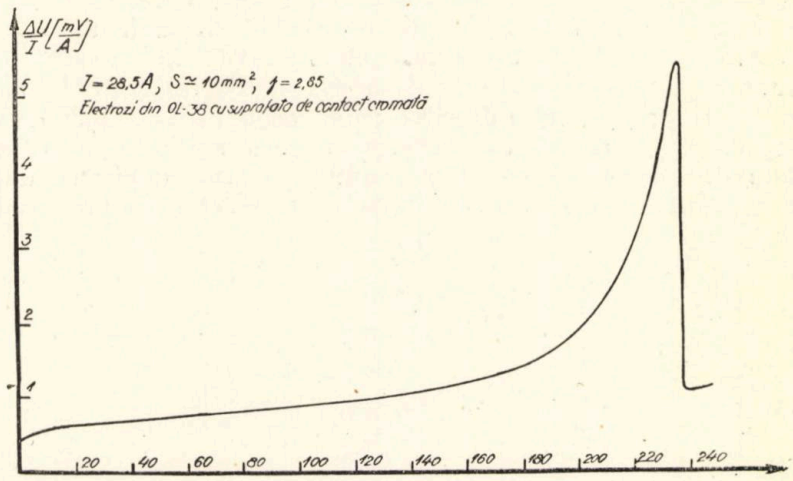


Fig. 3.

a) simpla spălare a suprafeţelor după cromare. cu apă distilată şi uscarea lor cu hîrtie de filtru,

b) spălarea suprafeţelor cu apă distilată şi apoi uşoara lor curăţire cu hîrtie fină de şmirghel,

c) spălarea suprafeţelor cu apă distilată, uscarea lor cu hîrtie de filtru, spălarea rapidă cu acid sulfuric şi apoi neutralizarea suprafeţei prin spălare rapidă cu hidrat de potasiu după care urma iarăşi spălarea cu apă distilată şi uscarea cu hîrtie de filtru.

Pentru a se vedea dacă fenomenul nu este datorit polarizării, în timpul experienţelor s-au făcut inversări ale sensului curentului fără a se obţine vreo modificare. De altfel la întreruperea curentului tensiunile cad la zero.

S-au studiat la microscop suprafeţele cromate atît înainte de începerea experienţelor cît şi după începerea lor fără să se observe însă schimbări în structura superficială.

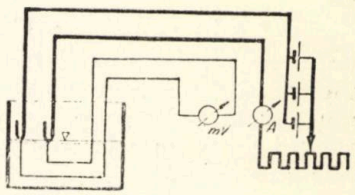


Fig. 4.

Relativ la izolaţia care limita suprafaţa de contact la valorile necesare, după cum am mai arătat, aceasta s-a făcut fie cu clei nitro, fie cu parafină. În cazul experienţelor cu sîrme de fier şi cupru cromate s-a putut lucra şi cu suprafeţe neizolate, pentru a se înlătura eventuala

influenţă a prezenţei izolamentului. În acest scop sîrmele erau îndoite, după cum se vede în fig. 4.

A fost astfel posibil ca prin ridicarea sau coborîrea sîrmelor cromate să se mărească sau să se micşoreze densitatea de curent. Evident că aproximarea corectă a mărimii suprafeţei de contact a fost dificilă, însă, această experienţă a avut mai mult caracterul unei experienţe cantitative spre a evita o eventuală influenţă a izolamentului.

În cazul cînd contactul sîrmei cu suprafaţa mercurului se făcea pe o suprafaţă redus[3], bucla fiind aproximativ tangentă la meniscul mercurului, la producerea salturilor se auzea o uşoară pocnitură şi se putea observa în dreptul contactului dintre sîrmă şi lichid o scînteie. Aceasta indica faptul că saltul se produce în urma unei străpungeri. În acest mod s-ar putea explica şi faptul că la creşterea densităţii de curent,

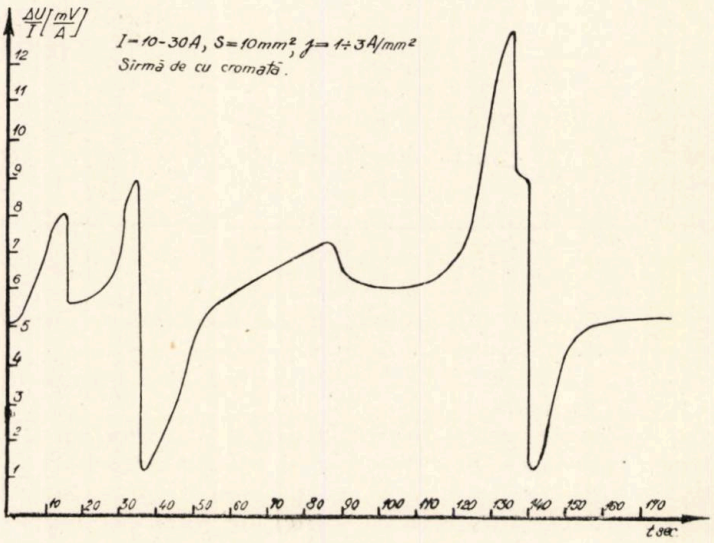


Fig. 5.

saltul se produce mai rapid, adică străpungerea se face mai uşor cînd căderea de tensiune creşte. În experienţele făcute cu sîrmele cromate scufundate în mercur am observat cu toată atenţia meniscul în momentul străpungerii. Meniscul nu variază şi deci nu avem variaţii ale tensiunii capilare. În alte cazuri fenomenul apare destul de neregulat, după cum se vede în fig. 5.

Dacă după producerea unui salt se scot în aer elemente solide acoperite cu crom şi se menţin timp de cca. 15 pînă la 25 secunde, se obţin, la introducerea în montaj, salturi regulate, cu o perioadă de cîteva secunde. În acest caz durata de expunere la aer are cu siguranţă importanţă fără a se putea stabili o lege care leagă frecvenţa salturilor de durata expunerii, căci fenomenul nu se reproduce riguros de la o

expunere la alta. Sînt probabil alţi factori care influenţează fenomenul, care scapă controlului în experienţele făcute. Trebuie de asemenea să remarcăm că atunci cînd fenomenul se repetă cu regularitate, evoluţia este sincronă pentru ambele suprafeţe şi aspectul neregulat al fenomenului, în alte experienţe (fig. 5) se datoreşte în mare parte faptului că evoluţia în timp a rezistenţei de contact pentru cele două suprafeţe nu este sincronă şi mai ales faptului că densitatea de curent nu s-a menţinut constantă, exercitînd o influenţă asupra rezistenţei.

Pentru a preciza fenomenul în experienţele ce se fac în continuare, vom măsura şi căderea de tensiune pe fiecare suprafaţă în parte.

Cercetările vor continua pentru a determina natura intimă a fenomenului şi eventual pentru a găsi o metodă care să permită menţinerea rezistenţei de contact la valoarea minimă ce o are imediat după salt.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Maşini Termice

BIBLIOGRAFIE

1. Klaudy P, E. T. Z., (A), 1957, *15*, S. 525—532.

НОВОЕ ЯВЛЕНИЕ НАБЛЮДАЕМОЕ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТАКТЕ РТУТЬ-ХРОМ (В ТОНКОМ СЛОЕ)

Предварительная заметка

(Резюме)

Измеряя сопротивления контакта : слой хрома на стальной подкладке → ртуть → → слой хрома на стали, наблюдается быстрый рост сопротивления во времени при постоянной напряженности, а затем резкое, намного меньше начального, падение по величинам.

Явление повторяется периодически.

Были проведены многочисленные опыты, изменяя толщину слоя, атакование его различными химическими агентами, чистоту ртути, температуру, время выдержки на воздухе, подкладку слоя (замена стали медью и различными сталями) и вариирование напряженности тока, но до настоящего времени не установлена натура явления.

Не производился контакт : массивный хром-ртуть.

Экспериментальные работы продолжаются.

UN PHÉNOMÈNE NOUVEAU OBSERVÉ AU CONTACT ÉLECTRIQUE MERCURE-CHROME (EN COUCHE MINCE)

Note préliminaire

(Résumé)

Les mesures des résistences de contact entre une couche mince de chrome sur support en acier → mercure → couche de chrome sur acier, ont fait observer à intensité constante, un accroissement rapide de la résistence avec le temps, suivi d'une chute

brusque à des valeurs beaucoup plus petites (de l'ordre du 1/100) que la valeur initiale. Le phénomène est périodique.

Il a été fait de nombreuses expériences dans des conditions très variées quant à l'épaisseur de la couche, le traitement de cette couche par divers agents chimiques, la pureté du mercure, la température, la durée de l'exposition à l'air des électrodes chromés, le support de la couche (cuivre et divers aciers) et bien entendu — l'intensité du courant ; il n'a pas été néanmoins, posible de déterminer jusqu'ici la nature du phénomène.

Le contact chrome masif-mercure n'a pas encore été expérimenté. Les expériences se poursuivent.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomnl IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

531.133

CINEMATICA MIŞCĂRILOR DE ROSTOGOLIRE CU ALUNECARE A SISTEMELOR MATERIALE

DE

GH. CIOBANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Într-o lucrare anterioară [1] ne-am ocupat de mişcarea de rostogolire cu alunecare, ce se încadra teoretic în studiul mişcărilor rigide planparalele. În lucrarea de faţă ne propunem să studiem mişcarea de rostogolire cu alunecare a unui con mobil pe altul fix, cele două conuri avînd vîrful comun.

Fie C_m şi C_f, respectiv, curbele de intersecţie ale conului mobil şi conului fix, cu sfera de rază unitate, centrul sferei fiind O, vîrful comun al celor două conuri.

Vom presupune că relaţia ce leagă lungimile arcelor curbelor considerate, dacă se notează prin s lungimea arcului de pe curba C_f şi prin σ lungimea arcului de pe curba C_m este:

$$\sigma = \lambda s; \quad \lambda = \text{const.} \tag{1}$$

Problema revine la a determina axoidele mişcării, ale căror ecuaţii, dacă $Oxyz$ şi $O\xi\eta\zeta$ sînt respectiv triedrul fix şi triedrul solidar legat de conul mobil, sînt:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}; \quad \frac{\xi}{a_1} = \frac{\eta}{b_1} = \frac{\zeta}{c_1}, \tag{2}$$

unde

$$\left\{\begin{aligned} a &= \dot{\beta}_1\gamma_1 + \dot{\beta}_2\gamma_2 + \dot{\beta}_3\gamma_3, \\ b &= \dot{\gamma}_1\alpha_1 + \dot{\gamma}_2\alpha_2 + \dot{\gamma}_3\alpha_3, \\ c &= \dot{\alpha}_1\beta_1 + \dot{\alpha}_2\beta_2 + \dot{\alpha}_3\beta_3, \\ a_1 &= \dot{\alpha}_2\alpha_3 + \dot{\beta}_2\beta_3 + \dot{\gamma}_2\gamma_3, \\ b_1 &= \dot{\alpha}_3\alpha_1 + \dot{\beta}_3\beta_1 + \dot{\gamma}_3\gamma_1, \\ c_1 &= \dot{\alpha}_1\alpha_2 + \dot{\beta}_1\beta_2 + \dot{\gamma}_1\gamma_2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Pornind de la relaţiile:

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{cases}$$

obţinem:

$$(5)\qquad \begin{cases} x' \dot{s}(1-\lambda) = cy - bz, \\ y' \dot{s}(1-\lambda) = az - cx, \\ z' \dot{s}(1-\lambda) = bx - az \end{cases} \qquad \left(x' = \frac{dx}{ds}, \ldots\right),$$

şi

$$(6)\qquad a^2 + b^2 + c^2 - 2\dot{s}K_f(au_x + bu_y + cu_z) = \dot{s}^2(\lambda^2 K_m^2 - K_f^2),$$

unde K_f şi K_m sînt curburile curbelor C_m şi C_f, iar u_x, u_y, u_z, sînt cosinusurile directoare ale binormalei la curba fixă C_f.

Din relaţiile (5) şi (6) se obţin valorile lui a, b, c. Un calcul similar ne conduce la determinarea axoidei mobile.

Catedra de Mecanică şi Organe de Maşini
Institutul Politehnic, Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Ciobanu Gh., Bulet. Instit. Polit. Iaşi, 1956, **2 (6)**, 3—4, pp. 39—41.

КИНЕМАТИКА КАЧЕНИЯ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Резюме)

Изучается качение со скольжением подвижного конуса по другому неподвижному, причём оба конуса имеют общую вершину.

CINÉMATIQUE DES MOUVEMENTS DE ROULEMENT AVEC GLISSEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS

(Résumé)

On étudie le mouvement de roulement avec glissement d'un cône mobile sur un autre fixe, les deux cônes ayant le même sommet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621-231

НАХОЖДЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ ПЯТИЗВЕННИКА С ПОЛЗУНОМ

Д. С. ТАВХЕЛИДЗЕ

В данной работе рассматривается построение положений звеньев пятизвенной кинематической цепи $ABCD$ с ползуном C, представленной на рис. 1.

Ведущее звено цепи AB вращается против часовой стрелки, а ведомое звено CD может качаться или вращаться вокруг точки D.

Допустим, что к ведомому звену цепи CD приложено технологическое сопротивление движению R_{cd}, направленное против возможного перемещения звена.

Рассмотрим промежуточное положение цепи AB_1C_1D. При малом значении угла γ ведомое звено DC будет неподвижно и ползун C перемещается вдоль него. В процессе движения звеньев, угол γ непрерывно растет до некоторого предельного значения γ_0 в положении AB_2C_2D, в котором ползун C остановится в точке C_2 и включается в движение ведомое звено CD.

Выясним связь между предельным значением угла — γ_0 и другими, влияющими на него параметрами. Для этого, выделим отдельно ползун со связанными с ним звеньями (рис. 2). Допустим, что звено CD покоится на опоре E под действием груза

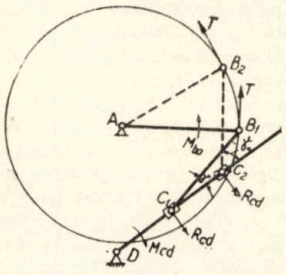


Рис. 1.

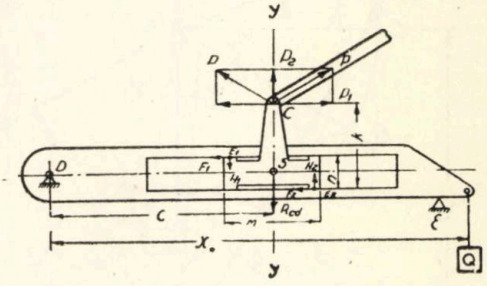


Рис. 2.

Q. К ползуну C, (размеры которого приведены, на чертеже) приложена движущая сила P, направление которой составляет угол Δ с перпендикуляром yy к оси звена CD ($\gamma = 90^0 - \Delta$).

Очевидно, что движение ползуна возможно только при γ меньше предельного γ_0 и когда сила P действует в пределах угла $2\,\Delta_0$ ползун прекращает свое продольное передвижение — заклинивается и может в дальнейшем двигаться только вместе со звеном CD.

Определим указанное предельное значение угла Δ_0, для чего напишем уравнение моментов относительно точки E_2 и E_1:

$$(1) \qquad P\left[\frac{m}{2}\cos\Delta - (k-n)\sin\Delta\right] + N_2(m - fn) - R_{cd}\frac{m}{2} = 0,$$

(2) $$P\left(\frac{m}{2}\cos\Delta + K\sin\Delta\right) - N_1(m + fn) - R_{cd}\frac{m}{2} = 0,$$

(3) $$F_1 + F_2 - P\sin\Delta = 0,$$

где R_{cd} — сила полезного сопротивления, приложенная в центре тяжести ползуна и направленная перпендикулярно к оси звена CD. Величина ее определяется из формулы: $R_{cd} = M_{пс}/C = Qx_0/C$ (влияние масс звеньев не учитываем).

При совместном решении приведенных уравнений получаем:

(4) $$P = R_{cd}\, fm^2/(fm^2\cos\Delta + 2Kf^2\sin\Delta + fmn\sin\Delta - m^2\sin\Delta).$$

Очевидно, что заклиниванию ползуна соответствует равенство:

$$fm^2\cos\Delta + 2Kf^2\sin\Delta_0 + fmn\sin\Delta_0 - m^2\sin\Delta_0 = 0.$$

Из этого уравнения находим угол Δ_0 соответствующий моменту начала заклинивания ползуна

(5) $$\operatorname{tg}\Delta_0 = fm/(m - fn - 2Kf^2/m).$$

При угле $\Delta = \pm\Delta_0$ или $\gamma_0 = 90° - \Delta_0$, передвижение ползуна прекращается и остается единственно возможное движение звена CD — вращения его вокруг точки D.

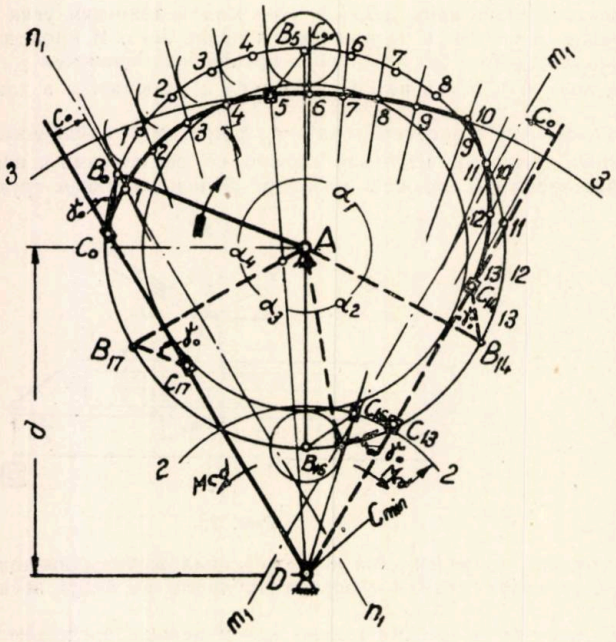


Рис. 3.

Следовательно, независимо от величин нагрузки на звено (момент $M_{пс}$) движение последнего вокруг точки D начнется при вполне определенном угле γ_0 между звеньями CD и CB (рис. 3).

Закон изменения угла γ зависит от соотношения между длинами звеньев механизма a, b, c и d. При некотором выбранном соотношении длин звеньев (рис. 3) вращение ведомого звена CD вокруг точки D начнется в положении AB_1C_1D. В процессе движения звена CD до положения механизма AB_2CD_2, точка B будет находиться постоянно на расстоянии $C_0 = b\sin\gamma_0$ от звена CD. Между положениями AB_2C_2D и AB_3C_3D коромысло C_2D неподвижно и ползун перемещается вдоль него, так как угол γ меняя свое направление принимает значение $\gamma < \gamma_0$. От положения AB_3C_3D коромысло при постоянном угле $\gamma = \gamma_0$ начинает двигаться и переходит в положение AB_4C_4D, после чего оно снова останавливается, угол γ меняет свое направление и в положении AB_1C_1D достигает своего предельного значения $\gamma = \gamma_0$ после чего цикл повторяется сначала.

Для нахождения крайних положений коромысла DC_1 и DC_2 проводим из точки D касательные к окружности 4 4, построенной из точки A радиусом $a - C_0$. Пересечение траекторий точки B окружности 1 1, с прямыми n_1n_1 и m_1m_1, проведенными на рас-

стоянии C_0 от прямых DC_1 и DC_2 дают точки B_1 и B_3, соответствующие моментам начала движения коромысла, слева направо и справа налево. Пересечение траектории точки B с перпендикулярами AB_2 и AB_4 опущенными на крайние положения коромысла AC_2 и AC_4 дают точки B_2 и B_4, соответствующие началам остановки коромысла.

Движение коромысла в зависимости от угла поворота ведущего звена AB можно разделить на следующие этапы: повороту звена AB на угол α_1, соответствует движение коромысла слева направо, повороту на угол α_2 соответствует остановка коромысла в правом крайнем положении, на угол α_3 — движение коромысла справа налево и на угол α_4 остановки коромысла в левом крайнем положении.

Траекторию ползуна на участке C_1CC_2 и $C_3C'C_4$ строим следующим образом. Откладываем на траектории точки B равные отрезки. Из полученных точек описываем окружности радиусом C_0 и из точки D проводим касательные к этим окружностям, которые дают нам соответствующие положения коромысла. Из последних радиусом равным b отсекаем соответствующие положения коромысла и находим положение точки C, которым строим траекторию точки.

Ход ползуна по направляющим равняется $C_{max} - C_{min}$, где C_{max} и C_{min} определяются исходя из максимального и минимального расстояния траекторий точки B от точки качания коромысла D.

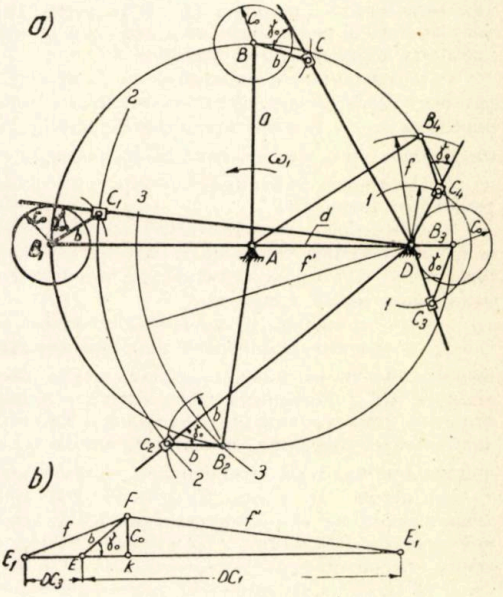


Рис. 4.

Данная схема пятизвенного механизма, при несколько отличных от рис. 1 размерах звеньев, была использована для проектирования нового боевого механизма шелкоткацкого станка.

В настоящее время, проводится его полупроизводственное испытание (соткано ткани более 300 метров). Испытанием установлен ряд преимуществ нового боевого механизма сравнительно с существующим — упрощенной конструкции и облегчению ухода за станком, постоянство силы боя, уменьшение шума станка и при прочих одинаковых условиях, снижение расхода энергии примерно на 20%.

Механизмы рассматриваемого типа (рис. 3) могут быть с успехом использованы для замена существующих кулисных механизмов у которых требуются длительные остановки ведомого звена в крайних положениях. Замена обыкновенных механизмов механизмами с изменяемыми звеньями способствует уменьшению расхода мощности, так как движение звеньев в механизмах с измененными звеньями происходит по линии наименьшего сопротивления.

Так например, рассматриваемому в работе пятизвеннику в кинематическом отношении соответствует кулисный механизм с кривошипом равным $a - C_0$. Из графика изменения угла поворота коромысла в зависимости от угла поворота кривошипа видно, что в обыкновенных кулисных механизмах, угол качания коромысла изменяется неравномерно и в широких пределах, в то время как угол качания коромысла для механизма с изменяемыми звеньями изменяется по прямой линии. Кроме этого обыкновенный кулисный механизм при горизонтальных нагрузках (например, в поперечном строгальном станке) работает в невыгодных условиях. Необходим определенный разгон в крайних положениях, который вызывает в строгальных станках удары при встрече резца с обрабатываемой деталью, так как резец с определенной скоростью входит в соприкосновение с неподвижным изделием.

Использованием данного механизма с изменяемыми звеньями исключается из рабочего процесса зона с невыгодными условиями передачи силы при сохранении угла качания коромысла. Рабочий процесс начинается с опозданием на угол α_4 от положения кривошипа AB_1. Помимо улучшения условий передачи сил в этом механизме если он будет использован в строгальном станке возможно ликвидировать удары при встрече резца с изделием.

Механизмы, в которых точка D находится внутри траектории точки B (рис 4) по своей кинематике совершенно отличаются от рассмотренных выше механизмов.

Рассмотрим вопрос построения положений звеньев таких механизмов при заданной величине угла передачи γ_0. Для каждого данного механизма можно γ_0, ввиду изменения его в незначительных пределах, считать за величину постоянную.

Чтобы для данного положения точки B (рис. 4) найти положение точки C будет в дальнейшем применять вышеприведенные следующие построения: из точки B проводим окружность радиуса C_0, а из точки D проводим прямую касательную к данной окружности, в результате чего получим положение звена CD. Далее, из точки B засекаем эту прямую дугой радиуса b.

В зависимости от взаимного расположения звеньев, данная пятизвенная кинематическая цепь может обратиться либо в кривошипно шатунный механизм (при угле передачи $\gamma < \gamma_0$), либо в кулисный, либо в четырехзвенный механизм с вращательными парами (ползун останавливается при $\gamma > \gamma_0$).

Построим указанные положения цепи, рассматривая их как отдельные циклы движения звена CD.

Ближайшее к точке D положение ползуна, т. е. точки C соответствует ближайшему положению точки B от точки D. Последнее находится на пересечении траектории точки B с продолжением неподвижного звена AD в точке C_3. Точку C_3 строим указанным выше приемом.

При движении точки B от положения механизма AB_3C_3D против часовой стрелки угол γ в течении некоторого времени начинает увеличиваться от значения γ_0 и выше, почему ползун не может приблизиться к точке D и точка C_3 будет двигаться по дуге радиуса DC_3. Механизм превратится в четырехзвенник AB_3C_3D (без ползуна) до того момента пока угол между звеньями DC и BC постепенно уменьшаясь от некоторого наибольшего значения, не станет равным γ_0. Расстояние от точки B до точки D в этом положении находим графическим путем следующим образом:

Сперва от точки E прямой EK (рис. 4) проводим линию EF под углом γ_0 и откладываем на ней длину шатуна b. Продолжаем прямую KE влево, откладываем на ней отрезок $EE_1 = DC_3$. Расстояние между точками E_1 и F ($E_1F = f$) и будет равно искомому расстоянию между точкой D и B_4.

Далее, из D засекаем траекторию точки B дугой радиуса f и получаем точку B_4 которая соответствует началу движения ползуна по звену DC, а само положение ползуна находим засекая из B_4 дугой радиуса b окружность 1-1 радиуса DC_3.

От положения AB_4C_4D начинает двигаться по направляющим ползун C, отдаляясь от точки D. Наиболее отдаленную точку C_1 на траектории ползуна найдем если построим механизм, соответствующий положению кривошипа AB_1, при котором точка B будет наиболее удалена от точки D.

При дальнейшем движении, угол $\gamma > \gamma_0$, ползун прекращает ход вдоль направляющих и механизм превращается в четырехзвенный шарнирный с вращательными парами вплоть до положения AB_2C_2D, при котором, угол между звеньями CD и BC постепенно уменьшаясь от наибольшего значения становится равным γ_0. Расстояние от точки D до B_2 находим также графическим путем (рис. 4b). Откладываем вправо от точки E отрезок DC_1. соединяем точку E_1, с точкой F. Засекая из точки D дугой радиуса $E_1'F = f'$ траекторию точки B находим точку B_2, из точки B_2 дугой радиуса b засекаем дугу 2-2 и находим положение точки C_2.

Таким образом, движение механизма состоит из четырех циклов. Из них в течении двух соответствующих перемещению B по участкам B_3B_4 и B_1B механизм обращается в четырехзвенный шарнирный, а в течении двух других, когда точка B перемещается по B_1B_1 и B_2B_3 механизм превращается в четырехзвенный кулисный, при этом полному обороту кривошипа AB с постоянной угловой скоростью соответствует полный оборот ведомого звена DC, но с переменной угловой скоростью.

Размеры механизма, изображенного на рис. 4 соответствует модели, имеющейся

на кафедре „Теории механизмов и машин", Грузинского политехнического института им. С. М. Кирова. Угол передачи на модели $\gamma_0 \cong 45^0$, положение точек перехода от одного цикла к другому на модели соответствует теоретическим найденным положениям и механизм в пределах отдельных циклов вполне устойчив для передачи нагрузки.

Для установления зависимости между углами поворота α и β ведущего звена AB и ведомого звена CD строим промежуточные положения механизма для 12 положений точки B (рис. 5). Измеряем соответствующие углы поворота ведомого звена и строим зависимость (рис. 5с) между α и β. Как видно из графика, наибольшая угловая скорость ведомого звена имеет место между 7 и 8 делением оси абсцисс.

Изучаемый пятизвенный механизм $ABCD$ чрезвычайно чувствителен к изменению размеров звеньев. Так например, если при данном соотношении размеров: $a = 55$ мм, $b = 15$ мм, $d = 44$ мм, увеличить длину шатуна b на 4...6 мм закон движения ведомого звена в корне изменится.

Действительно, если при постоянных других параметрах увеличивать постоянно длину b, то в положении механизма AB_3C_3D (рис. 4а) звено DC_3 будет постоянно приближаться к перпендикуляру AD. Когда звено DC_3 займет положение перпен-

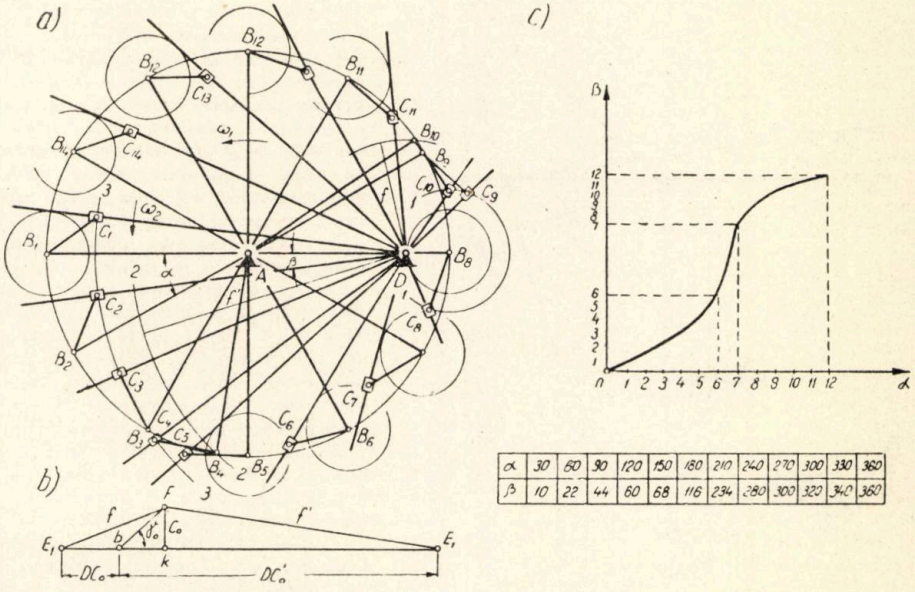


Рис. 5

дикулярное к AD и точка B_3 окажется наиболее отдаленной от D (вправо) и если при этом угол между шатуном BC и DC равен $\gamma \leqslant \gamma_0$, то при дальнейшем перемещении точки B против часовой стрелки, угол γ будет уменьшаться, а следовательно ползун C будет двигаться по неподвижным направляющим CD, т. е. в этом положение звено DC остановится и характер движения звена DC изменится.

Исходя из вышесказанного, геометрическим условием существования механизма, представленного на рис. 4а, является соотношение $C_0 = b \sin\gamma_0 < a - d$ или $b < (a-d)/\sin\gamma_0$. При этом, как уже выяснили ранее, механизм обращается в двухкривошипный механизм устойчивого движения.

В том случае, когда размер b взят таким образом, что $C_0 = b \sin\gamma_0 = a - d$ механизм не будет обладать устойчивостью в положении AB_3C_3D.

Если же при тех же a и d взять $b > (a-d)/\sin\gamma_0$, хотя бы на несколько мм (т. е. например, вместо $b = 16$ мм для схемы на рис. 4а взять $b = 20$ мм), то получим механизм с совершенно иной кинематикой ведомого звена.

Построим для такого механизма положение звеньев и разберем их закон движения (рис. 6).

Также, как и в предыдущем случае, при известном значении максимального угла передачи γ_0 будет известно и максимальное расстояние точки B от звена DC. Зная это максимальное расстояние C_0 (рис. 6а), находим начальное положение механизма $A\,B\,C\,D$ следующим образом. Из ближайшей к D точки траектории B (именно т. B_5) дугой радиуса C_0 засекаем отрезок AB_5 и радиусом AH проводим из точки A дугу $3-3$ ($AH = a - C_0$). Очевидно, что при движении точки B звено CD будет отстоять от траектории точки на максимальном расстоянии C_0. Для нахождения начального положения звеньев из точки D проводим прямую касательную к окружности $3-3$, соединим точку касания H_1 с центром кривошипа A и на продолжении AH_1, находим начальное положение точки кривошипа AB_1 засекая из точка B_1 дугой радиуса b отрезок DC_1 находим положение механизма $A\,B_1\,C_1\,D$. Начиная от этого положения, при дальнейшем движении точки B, угол передачи уменьшается, звено DC останавливается и по нему начинает перемещаться ползун C. Для того, чтобы найти положение точки B соответствующее концу остановки звена DC из точки G отрезка AH_1 ($H_1G = C_0$) проводим линию параллельно DC_1 и в пересечении ее с окружностью $1-1$ получим искомую точку B_2. Зная длину шатуна b, находим положение механизма AB_2C_2D. При дальнейшем движении кривошипа AB против часовой стрелки, ведомое звено также движется против часовой стрелки, причем угол γ остается постоянным и точка C удаляется от точки D. Наибольшему расстоянию точки C от D соответствует наибольшее расстояние точки B от точки D на ее траектории, т.е. точка B_3. Для положения кривошипа AB_3 механизм строится аналогично предыдущему. Из точки B_3 описываем окружность радиуса C_0, проводим касательную к этой окружности из точки D и засекая ее из B_3 дугой радиуса b находим положение механизма AB_3C_3D.

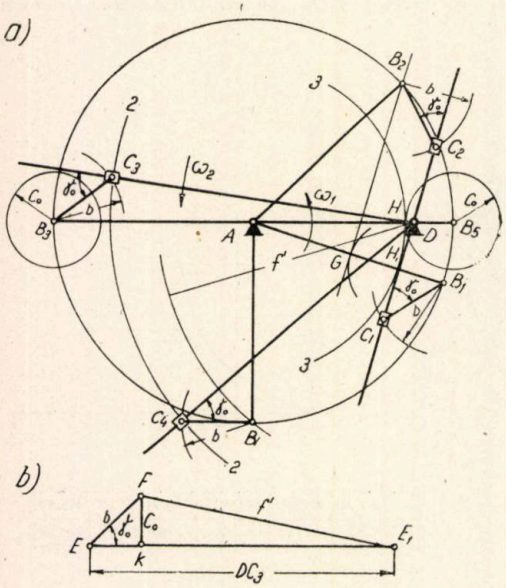


Рис. 7.

При дальнейшем передвижении точки B угол γ сперва растет, а потом уменьшается; ползун C остается неподвижным на звене DC до значения $\gamma = \gamma_0$. Таким образом, для нахождения точки B_4 необходимо построить такое положение механизма, при котором ползун находится от точки D на расстоянии DC_3 и угол между звеньями CB и DC равняется γ_0. Расстояние $DB_4 = f'$ находим графически (рис. 6 в). Откладываем на отрезке $EE_1 = DC_3$, строим угол γ_0, отсекаем $EF = b$ и соединяем точку F с E_1. Получаем $FE_1 = f' = DB_4$. Из точки B_4 засекаем дугу $2-2$ радиуса DC_3 дугой радиуса b и находим точку C_4, а следовательно и положение механизма AB_4C_4D. На участке B_4B_1 угол γ остается постоянным и ползун C будет скользить по DC, приближаясь к точке D до положения механизма AB_1C_1D.

Таким образом, при движении точки B по участку B_1B_2 ведомое звено находится в положении C_1DC_2; на участке B_2B_3 механизм превращается в кулисный механизм в котором ведомое звено DC вращается с переменной угловой скоростью, на участке B_3B_4 механизм превращается в четырехзвенник AB_3C_3D (без ползуна), на участке B_4B_1 механизм опять превращается в кулисный с постоянным углом γ_0. Полному обороту ведущего звена AB вокруг своей оси A соответствует поворот ведомого звена вокруг точки D на полуобороте, причем он осуществляется при повороте ведущего

звена на тупой угол $\alpha = B_1AB_2$, а повороту на острый угол $\alpha = B_1AB_2$ соответствует стоянка звена DC. Таким образом, при выбранном соотношении между размерами звеньев, получается передача вращения с передаточным числом $i = 2:1$ и механизм с остановками ведомого звена.

Для установления зависимости между углами поворота ведущего и ведомого звеньев делим траекторию точки B (рис. 7а) на 12 равных частей и для каждого последовательного положения точки B находим соответствующее положение точки C и звена DC. Измерив соответствующие углы поворота β звена DC строим график его изменения (рис. 7с), согласно которому делению 5...7 абсциссы соответствует стоянка ведомого звена. Очевидно, изменением длины ведомого звена можно соответственно изменять и время его стоянки.

Рассмотрим сейчас случай , когда рис. 8а в заданном механизме при всех предыдущих параметрах увеличено значение длины шатуна b, таким образом, что она взята больше $B_1D\,(b > B_1D)$ т.е. больше того значения, при котором между звеньями DC_1 и B_1C_1 образовывается угол γ_0 (это происходит до тех пор, пока точка C дойдет до точки D).

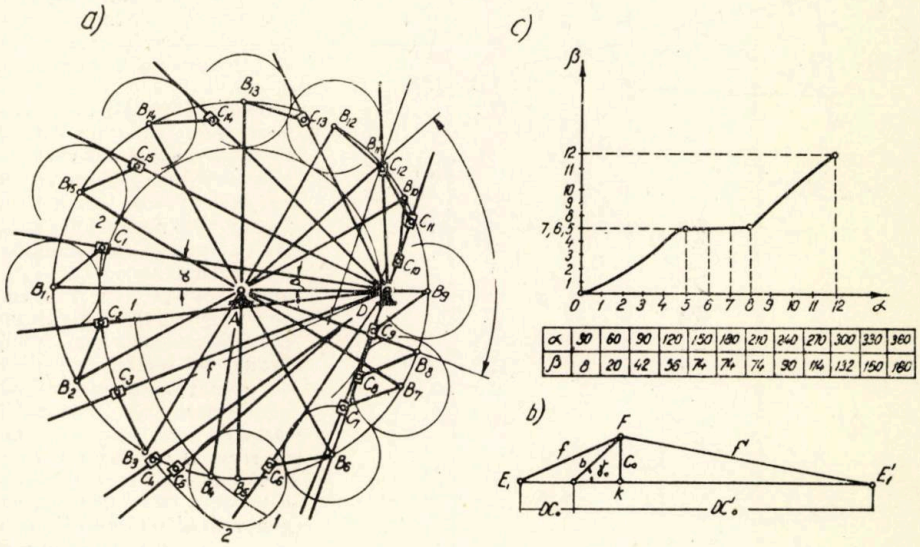


Рис. 7

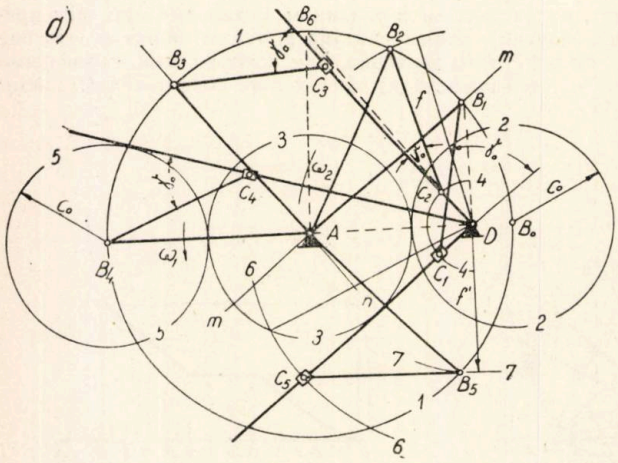
Для нахождения положения ведомого звена DC_1 графическим путем аналогично предыдущему (рис. 6), находим отрезок C_0 и из точки B_0 проводим окружность 2—2 радиусом C_0. Далее проводим из точки A касательную к ней окружность $3-3$ и из точки D прямую касательную к окружности 3—3, на которой будет расположено начальное положение ведомого звена DC_1C_5. На расстоянии C_0 от прямой DC_1C_5 проводим параллельную к ней прямую mm, из точки B_1 пересечения ее с окружностью $1-1$, засекаем радиусом b начальное положение звена DC_1. Получим положение механизма AB_1C_1D.

При дальнейшем перемещении точки B по окружности $1-1$, угол γ увеличивается, вследствие чего, точка C не может передвигаться в направлении от C_1 по направлению к D, почему звено DC начинает поворачиваться вокруг D по часовой стрелке до положения DC_2, которое находим следующим образом: первоначально определяем графическим путем величину отрезка $B_2D = f$ (рис. 8в) и, найдя положение точки B_2 из него радиусом b засекаем дугу окружности $4-4$ (радиус $(DC_1 = DC_2)$). Получаем точку C_2, а следовательно и положение механизма AB_2C_2D.

При дальнейшем движений точки B, угол γ уменьшается, ползун начнет скользить вдоль неподвижного звена DC до положения C_3. Концу стоянки звена DC будет

соответствовать точка B_3, расположенная на пересечении дуги окружности $1-1$ с прямой nn параллельной DC_2C_3 и отстоящей от нее на расстоянии C_0. После этого, ползун начнет перемещаться по звену DC отдаляясь от точки D. Максимальное отдаление ползуна C_4 от точки D находим следующим образом. Из точки B_4 пересечения продолжения AD с окружностью $1-1$, проводим окружность $5-5$ радиуса C_0, проводим из D касательную к окружности $5-5$ прямую и из B_4 засекаем ее дугой радиуса b. Получаем положение механизма AB_4C_4D.

При дальнейшем движении, угол γ становится больше γ_0 и механизм обращается в шарнирный четырехзвенник (без ползуна), в котором звено DC_4 будет перемещаться как коромысло по дуге $6-6$ до своей остановки в положении DC_5. Для его нахождения графическим путем определяем величину $f'=E_1'F$ (рис. 8 в), находим положение B_5 на пересечении окружности $1-1$ с дугой $7-7$, проведенной из точки D радиусом f' и из B_5 радиусом b засекаем дугу $6-6$.



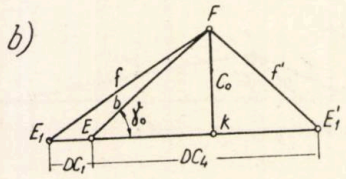


Рис. 8.

Таким образом, строим положение механизма AB_5C_5D. Если точка B_5 окажется расположенной до точки B_6, находящейся на пересечении дуги $1-1$ с перпендикуляром AD к прямой DC_5 касательной к окружности $3-3$, в этом случае при движении точки B от B_5 к B_6 ползун C будет двигаться по направлению DC и в точке B_6 звено остановится, так как от этого положения до положения AB_1C_1D угол γ будет уменьшаться. В нашем механизме точка B_5 оказывается расположенной за точкой B_6, следовательно ведомое звено механизма остановится в положении DC_5 и будет находиться в покое до тех пор пока точка B не прийдет в B_1.

Таким образом, проанализировав движение звеньев механизма, приходим к следующим выводам.

При движении точки B по участку B_5B_1 ведомое звено DC неподвижно, при движении B на участке B_1B_2 ведомое звено вращается вокруг D по часовой стрелке, и переходит из положения DC_1 в положение DC_2.

Движению точки B по траектории B_2B_3 соответствует покой ведомого звена, а при движении B по участку B_3B_5 ведомое звено вращается против часовой стрелки, и переходит из положения DC_3 в положение DC_5.

Следовательно, при непрерывном вращении ведущего звена, ведомое качается с двигательными остановками в крайних положениях, причем движение ведомого звена против часовой стрелки происходит плавно, а по часовой стрелке резко с большой угловой скоростью. Отношение угловых скоростей прямого и обратного хода равно отношению длин дуг B_2B_5 к B_1B_2. Очевидно, геометрическим условием существования такого механизма является возможность существования треугольников AB_1D и AB_6D

(рис. 8а). Минимальная длина шатуна в мм должна быть больше отрезка DB_1, а максимальная длина шатуна b должна быть меньше отрезка B_6D, и шатун должен при этом составлять с неподвижным звеном AD угол $\measuredangle B_6DA \geqslant \gamma_0$. Учитывая, что в треугольниках при предельных значениях длины шатуна b угол $\measuredangle AB_1D = \measuredangle B_6DA = \gamma_0$, составляем геометрические условия существования данного механизма:

(6) $$b_{\min} > d \operatorname{ctg} \gamma_0,$$ (7) $$b_{\max} \leqslant d / \cos \gamma_0,$$

В этих условиях равенство не допускается, так как при наличии равенства в (6) условии ползун совпадает с точкой D и механизм перестает существовать, а в случае равенства в (7) условии ведомое звено DC совпадает с неподвижным звеном и механизм превратится в кривошипно-ползунный механизм.

Общий вывод по всей проделанной работе можно сделать следующий:

Исследование пятизвенника с ползуном в том случае, когда точка закрепления ведомого звена D находится внутри траектории точки конца кривошипа B показало, что в зависимости от длины шатуна BC при тождестве величин остальных параметров можно получить три, в корне отличающихся по кинематике, механизма, а именно:

1) Двухкривошипный механизм с передаточным числом $i = 1:1$ (рис. 4 и 5) с постоянной угловой скоростью ведущего и переменной угловой скоростью ведомого звена.

2) Двухкривошипный механизм с передаточным числом $i = 2:1$ с одной длительной остановкой ведомого звена (рис. 6 и 7).

3) Кривошипно-коромысловый механизм с двумя длительными остановками ведомого звена и с резко отличающимися угловыми скоростями прямого и обратного хода ведомого звена при постоянной угловой скорости ведущего звена (рис. 8).

Поступило 10 III 1958

Академия Наук Груз. ССР,
Тбилиси, СССР

DETERMINAREA POZIŢIILOR ORGANELOR UNUI MECANISM PENTALATER CU GLISOR

(Rezumat)

Autorul studiază construcţia poziţiilor organelor unui lanţ cinematic compus din cinci elemente, prevăzut cu glisor (fig. 1).

În ipoteza că punctul D ce fixează organul condus se găseşte în interiorul traiectoriei extremităţii B a manivelei, se arată că se pot obţine, în funcţie de lungimea BC a pielei, *trei* mecanisme ce diferă esenţial din punct de vedere cinematic, ceilalţi parametri fiind consideraţi invariabili.

Aceste trei tipuri de mecanisme sînt caracterizate după cum urmează:

1. Mecanism cu două manivele, cu raportul de transmisie $i=1:1$ (fig. 4 şi 5), cu viteza unghiulară constantă a organului conducător şi viteza unghiulară variabilă a organului condus;

2. Mecanism cu două manivelă, cu raportul de transmisie $i=2:1$, cu oprire de lungă durată a organului condus (fig. 6 şi 7);

3. Mecanism cu manivelă şi levier oscilant, cu două opriri de durată şi cu vitezele unghiulare esenţial deosebite pentru mersul direct şi invers al organului condus, corespunzător cu viteza unghiulară constantă a organului conducător (fig. 8).

ÉTUDE POSITIONNELLE DES ORGANES D'UN MÉCANISME PENTALATÈRE A GLISSEUR

(Résumé)

L'Auteur étudie la construction des positions des organes d'une chaîne cinématique à cinq élements munie d'un glisseur (fig. 1).

On obtient, en fonction de la longueur BC de la bielle, trois mécanismes, différents de point de vue cinématique, dans l'hypothèse que le point D qui fixe l'organe conduit, se trouve à l'intérieur de la trajectoire décrite par l'extrémité B de la manivelle, tous les autres paramètres étant considérés invariables.

Les mécanismes déterminés comme résultat de cet analyse ont les caractéristiques à savoir:

1. Mécanisme à deux manivelles ayant le rapport de transmission $i=1:1$ (fig. 4 et 5), à vitesse angulaire constante de l'organe moteur et variable pour l'organe conduit;

2. Mécanisme à deux manivelles ayant le rapport de transmission $i=2:1$, donc l'organe conduit execute un arrêt prolongé (fig. 6 et 7);

3 Mécanisme à manivelle et levier oscillant à deux arrêts prolongés et ayant les vitesses angulaires essentiellement différentes pour le mouvement direct et inverse de l'organe conduit, tandis que l'organe moteur a la vitesse angulaire constante (fig 8).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621-231

STUDY ON THE MECHANICAL TRANSDUCERS FOR THE DETERMINATION OF PATHS IN PLANE MECHANISMS, IN CARTESIAN OR POLAR COORDINATE SYSTEMS [1])

BY

R. BOGDAN, CR. PELECUDI and L. CALMACIUC

1. Within the theory of mechanisms, the theoretical, graphical and analytical methods for determining the paths of various points in a mechanism have been much discussed and in this respect exact and approximate methods are well known.

Concerning the experimental study, however, only qualitative indications for simple motions may be found throughout the up-to-date speciality literature. In order to enlarge the measuring possibilities, we have deviced mechanic-electrical transducers which convert the positional parameters of the moving point into corresponding electrical parameters; such parameters are amplified and then measured or they are directly introduced into an oscilloscope.

In this way continuous paths of a mechanism in motion are directly obtained, enabling one to investigate rapidly the paths of several points.

The photographing of the diagrams obtained on the oscilloscope screen or the recording of the respective electrical parameters on a magnetic tape, renders the method much more advantageous.

2. Two systems are presented for the mechanical transducers which indicate positional parameters of a point, in a plane mechanism, by means of which the path is investigated either in cartesian rectangular coordinates or in polar coordinates.

In the first case (fig. 1), the transducer consists of two connecting rods joined at the point M of a mechanism, whose motion is to be examined. The M_x and M_y sliders, which are displacing upon two rectangular cartesian coordinate axes, describe approximately, due to the finite lengths of the connecting rods, the coordinates of point M. In comparison with a sinus mechanism (fig. 2), this transducer system presents a systematic error, but enjoys a simplified construction. The errors are substantially reduced through the utilisation of a compensation system in the electrical device.

In the second case (fig. 3), the transducer is a mechanism provided with a swinging slider, and connected to the point M of the mechanism under consideration. In this way the ϱ and φ polar coordinates

1) Presented at the 2nd USSR Conference on Machines and Mechanisms, Moscow, March 1958.

of point M may be obtained, which in the case of the utilized oscilloscope ought to be transformed into cartesian coordinates by means of the known relations: $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$.

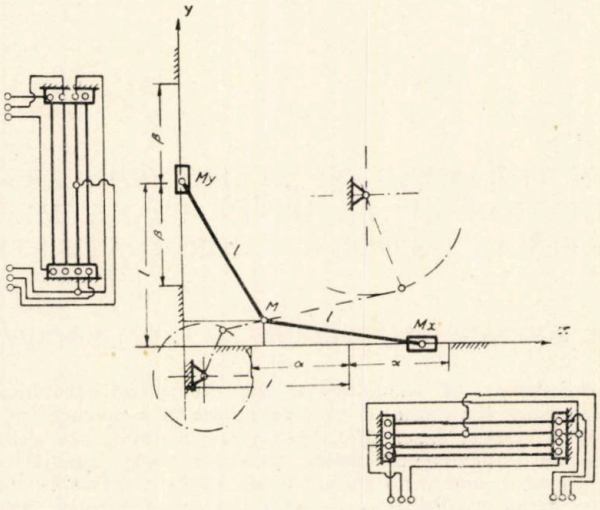


Fig. 1.

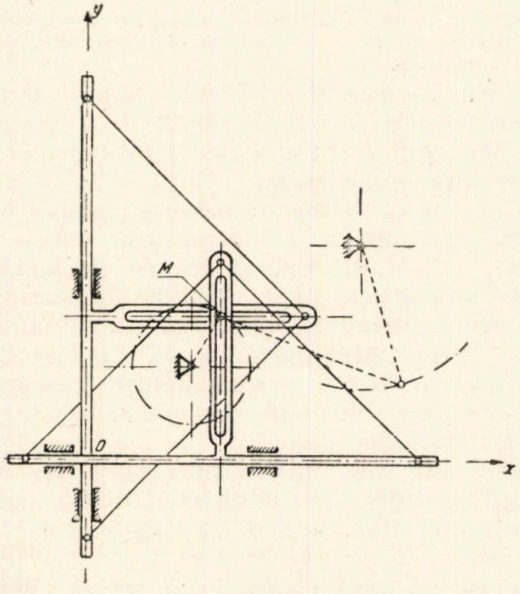


Fig. 2.

The transformation of the φ parameter into $\sin\varphi$ and $\cos\varphi$ is performed through a mechanism as that shown in fig. 4 and the necessary multiplication were made my means of the electric device.

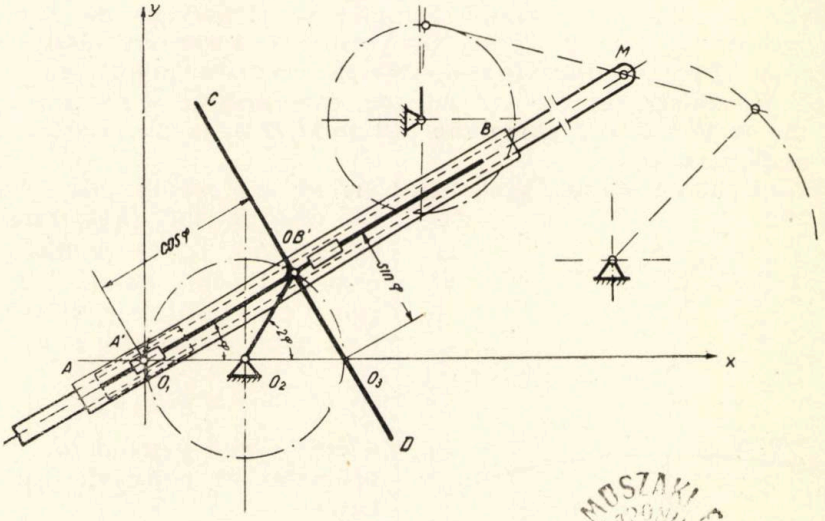


Fig. 3.

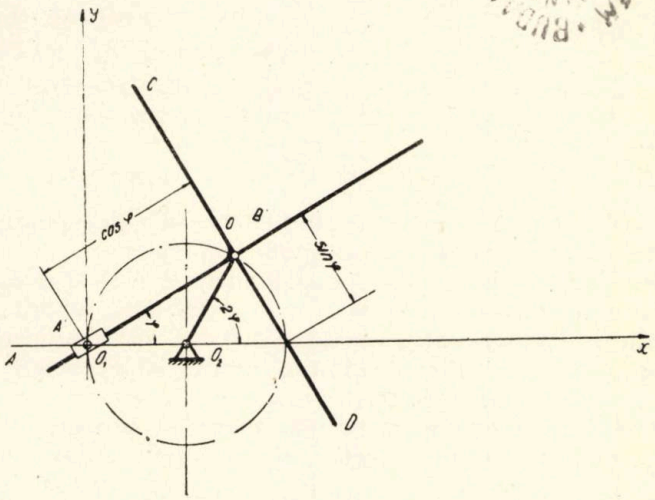


Fig. 4.

The mechanism consists of the *ABCD* rigid element, the *AB* side of which, due to the *A'* and *B'* sliding pairs, should remain parallel to the O_1M vector radius, and the *CD* side due to the crank $O_2\overline{O} = r$,

should always pass through point O_3, where $O_1O_2 = O_2O_3 = r$. Thus, according to fig. 4, $O_1\bar{O} = 2r\cos\varphi$ and $O_3\bar{O} = 2r\sin\varphi$, that is the segments are proportional to $\cos\varphi$ and $\sin\varphi$ functions.

In both systems, resistive transducers mounted in electric bridges are used, the tensions obtained being proportional to the necessary displacements. In the first case, the resistive wires are placed along the Ox and Oy coordinate axes, and the contact points are on the M_x and M_y sliders. In the second one, the resistive wires are placed along the O_1M rod and along the AB and CD sides, the contact points being at O_1 and O_3.

3. As shown above, systematic errors are taking place only in the case of the first transducer system (fig. 1), where the $\bar{x}$ abscissa of the M_x point, with respect to a coordinate system displaced by a quantity l, is

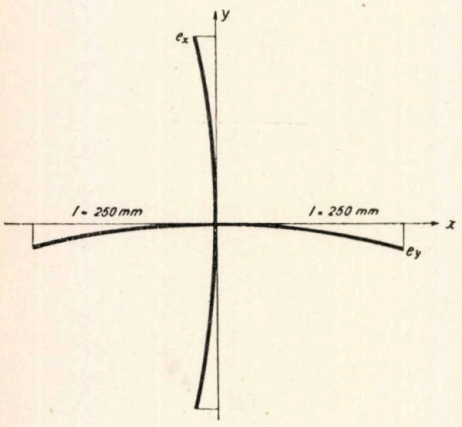


Fig. 5.

$$(1) \qquad \bar{x} = x + \sqrt{\overline{l^2 - y^2}} - l,$$

where x and y stand for the coordinates of point M. The ordinate is

$$(1') \qquad \bar{y} = y + \sqrt{\overline{l^2 - x^2}} - l.$$

By measuring the x and y coordinates by means of the $\bar{x}$ and $\bar{y}$ displacements, the systematic errors are obtained

$$(2) \qquad e_x = \sqrt{\overline{l^2 - y^2}} - l \cong -y^2/2l, \qquad e_y = \sqrt{\overline{l^2 - x^2}} - l \cong -x^2/2l.$$

Their main characteristic is that they are permanently negative and function of the opposite coordinate (fig. 5).

Considering the connecting rod lengths $l = 1500$ mm and the permissable maximum displacements $\alpha = \beta = 250$ mm, which corresponds to paths within a square of $2\alpha = 2\beta = 500$ mm sides, having the center at the origin of axes, the maximum error is obtained: Max e_x = = Max $e_y = -20{,}8$ mm, $(-4{,}2\%)$.

The points in mechanism whose error of position is lover than $e \leqslant e_0$ may be found in the interior of the curve shown in fig. 6:

$$(3) \qquad x^4 + y^4 = 4e_0^2 l^2.$$

Due to the characteristics of the errors upon the two coordinate axes, their diminishing was obtained in the electric device by adding to the $\bar{V}$ tension on one of the axis the corresponding $\bar{V}$ tension of the other one,

(4) $$V = \bar{V} + \bar{\bar{V}} = kx,$$

so that the total tension should be proportional to one of the coordinates of point M. The electric device is shown in fig. 7.

To solve equation (4) taking ϱ, i, s, as resistivity, current intensity and resistive wire cross section, respectively, using the sign (—) for transducer and the sign (=) for compensator and denoting by

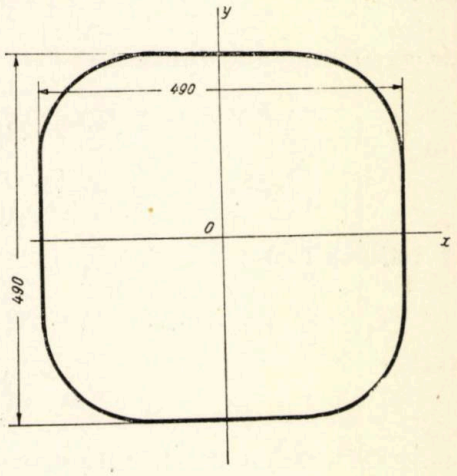


Fig. 6.

(5) $$\bar{f}(u) = \bar{\varrho}\,\bar{i}/\bar{s}, \quad \bar{\bar{f}}(v) = \bar{\bar{\varrho}}\,\bar{\bar{i}}/\bar{\bar{s}},$$

functions of the u or v variables along the Ox or Oy coordinate axes, then

(6) $$V = \int_0^{\bar{x}} \bar{f}(u)\,du + \int_0^{\bar{y}} \bar{\bar{f}}(v)\,dv = kx.$$

Considering the functions $\bar{F}(u)$ and $\bar{\bar{F}}(v)$

(7) $$\bar{F}(\bar{x}) + \bar{\bar{F}}(\bar{y}) = kx + C,$$

where $C = \bar{F}(0) + \bar{\bar{F}}(0)$, or $\bar{F}(a + e_x) + \bar{\bar{F}}(y + e_y) = kx + C$.

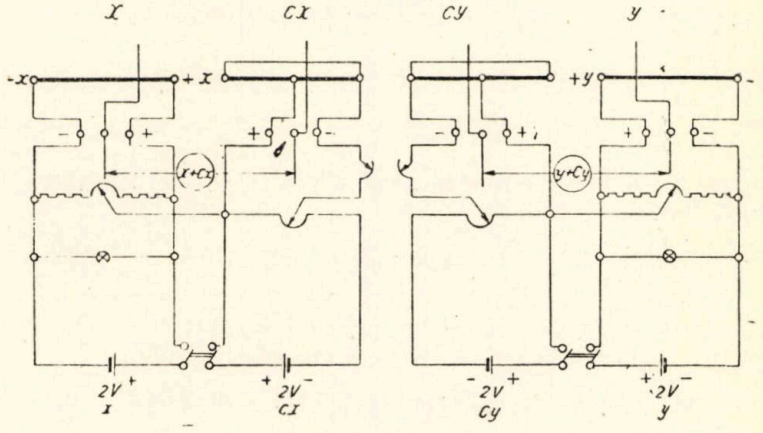


Fig. 7.

The problem is now to construct two functions $\bar{F}(u)$ and $\bar{\bar{F}}(v)$ which should repeat the previous relation, in which the k and C coeffi-

cients are constant or almost constant within the variation ranges of the variables $x \in (-\alpha, +\alpha)$, $y \in (0, +\beta)$.

When relation (7) is not satisfied at all points, the error would be

$$\varepsilon_x = [\bar{F}(x + e_x) + \bar{\bar{F}}(y + e_y) - kx - C]/k, \tag{8}$$

or expending the functions $\bar{F}(x + e_x)$ and $\bar{\bar{F}}(y + e_y)$ into Taylor series

$$\begin{cases} \bar{F}(x + e_x) = \bar{F}(e_x) + \frac{1}{1!} x \bar{F}'(e_x) + \frac{1}{2!} x^2 \bar{F}''(e_x) + \cdots, \\ \bar{\bar{F}}(y + e_y) = \bar{\bar{F}}(y) + \frac{1}{1!} e_y \bar{\bar{F}}'(y) + \frac{1}{2!} e_y^2 \bar{\bar{F}}''(y) + \cdots, \end{cases} \tag{9}$$

it follows that

$$\varepsilon_x = \left[\bar{F}(e_x) + \bar{\bar{F}}(y) - C + x \bar{F}'(e_x) - kx + \frac{1}{2!} \bar{F}''(e_x) + e_y \bar{\bar{F}}'(y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} e_y^2 \bar{\bar{F}}''(y) + \ldots\right]/k. \tag{10}$$

Performing the transformations

$$\bar{F}(e_x) = \bar{\varphi}(e_x) + ke_x + C_1, \bar{\bar{F}}(y) = \bar{\bar{\varphi}}(y) - ke_x(y) + C_2, C = C_1 + C_2, \tag{11}$$

then

$$\varepsilon_x = \left\{\bar{\varphi}(e_x) + \bar{\bar{\varphi}}(y) + x \bar{\varphi}'(e_x) + \frac{1}{2!} x^2 \bar{\varphi}''(e_x) + \ldots + e_y [\bar{\bar{\varphi}}'(y) - ke'_x(y)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} e_y^2 [\bar{\bar{\varphi}}''(y) - ke''_x(y)]\right\}/k, \tag{12}$$

or

$$\varepsilon_x = [\bar{\varphi}(\bar{x}) + \bar{\bar{\varphi}}(\bar{y})]/k + e_x(y) - e_x(\bar{y}). \tag{13}$$

To have the error equal to zero, when $e_y = -x^2/2l$ and $e_x = -y^2/2l$ we should have

$$\bar{\varphi}(e_x) + \bar{\bar{\varphi}}(y) = 0, \tag{14}$$

$$\bar{\varphi}'(e_x) = 0, \ \frac{1}{2!} \bar{\varphi}''(e_x) - [\bar{\bar{\varphi}}'(y) + k y / l] / 2l = 0,$$

$$\bar{\varphi}'''(e_x) = 0, \ \frac{1}{4!} \bar{\varphi}^{(4)}(e_x) + \frac{1}{2!} [\bar{\bar{\varphi}}''(y) + k/l] / 4 l^2 = 0,$$

and generally

$$\bar{\varphi}^{(2n-1)}(e_x) = 0, \ \frac{1}{(2n)!} \bar{\varphi}^{(2n)}(e_x) + \frac{(-1)^n}{n!} \bar{\bar{\varphi}}^{(n)}(y) / (2l)^n = 0, \text{ for } n \geqslant 3.$$

If we choose $\bar{\varphi}^{(5)}(e_x) = 0$ and hence generally $\bar{\varphi}^{(p)}(e_x) = 0$ for $p \geqslant 5$, then $\bar{\bar{\varphi}}^{(3)}(y) = 0$ or generally $\bar{\bar{\varphi}}^{(n)}(y) = 0$ for $n \geqslant 3$. Under such circumstances,

$$(15)\quad \bar{\varphi}(e_x) = E_0 + E_1 e_x + E_2 e_x^2 + E_3 e_x^3 + E_4 e_x^4\,,\quad \bar{\bar{\varphi}}(y) = k(B_0 + B_1 y + B_2 y^2)$$

and the error would be given by the formula

$$(16)\quad \varepsilon_x = \left(\bar{\varphi}(e_x) + \bar{\bar{\varphi}}(y) + x\,\bar{\varphi}'(e_x) + x^2\left\{\frac{1}{2!}\bar{\varphi}''(e_x) - [\bar{\bar{\varphi}}'(y) + k y / l]/2l\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!}x^3\bar{\varphi}'''(e_x) + x^4\left\{\frac{1}{4!}\bar{\varphi}^{(4)} e_x + [\bar{\varphi}''(y) + k/l]/8l^2\right\}\right)/k\,.$$

Since the error is given by a 4th order polynomial which is symmetrical with respect to the x variable, there results $\bar{\varphi}'(e_x) = 0$ and $\bar{\varphi}'''(e_x) = 0$. Accordingly $\bar{\varphi}(e_x) = \text{const} = 0$ and hence:

$$\varepsilon_x = \{\bar{\bar{\varphi}}(y) - x^2[\bar{\bar{\varphi}}'(y) + k y / l]/2l + x^4[\bar{\bar{\varphi}}''(y) + k/l]/8l^2\}/k$$

that is

$$(17)\quad \varepsilon_x = (B_0 + B_1 y + B_2 y^2 - x^2(B_1 + 2B_2 y + y/l)/2l + x^4(2B_2 + 1/l)/8l^2,$$

which may be decomposed into separate functions of x and y:

$$\varepsilon_x = (B_2 y^2 + B_1 y + A_1) + [x^4(2B_2 + 1/l)8l^2 - x^2 B_1/2l + A_2] +$$
$$+ [-y x^2(2B_2 + 1/l)/2l + A_3]$$

with $A_1 + A_2 + A_3 = B_0$, where the polynomials

$$(18)\quad \begin{cases} u(x) = x^4(2B_2 + 1/l)/8l^2 - x^2 B_1/2l + A_2 \cong 0,\ v(y) = B_2 y^2 + B_1 y + A_1 \cong 0, \\ w(x^2 y) = -y x^2(2B_2 + 1/l)/2l + A_3 \cong 0. \end{cases}$$

schould be as close as possible to zero within the interval of variation of the variables $x \in (-\alpha, +\alpha)$, $y \in (0, +\beta)$.

The 2nd and 4th order Chebyshev's polynomials, which are as close as possible to zero within the interval $z \in (-1, +1)$ are $T_2(z) = z^2 - 1/2$, $T_4(z) = z^4 - z^2 + 1/8$.

Performing the transformation $z = (2y - \beta)/\beta$ for the polynomial $v(y)$ and the transformation $z = x/\alpha$ for the polynomial $u(x)$, we obtain

$$(19)\quad T_2(y) = 4y^2/\beta^2 - 4y/\beta + 1/2\,,\ T_4(x) = x^4/\alpha^4 - x^2/\alpha^2 + 1/8\,.$$

Approximating the polynomials T_2 and T_4 to $v(y)$ and $u(x)$

$$B_1 = -\beta B_2, \quad B_2 = -[2l(1 + 2l\beta/\alpha^2)]^{-1}.$$

By considering, as the formula of our problem indicates, $B_2 = 0$, $B_1 = 0$, for the sake of simplicity, and $B_0 = 0$ that is $\bar{\bar{\varphi}}(y) \equiv 0$, then

$$\varepsilon_x \cong e_x(y) - e_x(\bar{y}) \cong -yx^2/2l^2 + x^4/8l^3. \tag{20}$$

For $y = 0$ and $x = 250$ mm, it results $\varepsilon_x = 0{,}145$ mm and for $x = y = 250$ mm, $\varepsilon_x = -3{,}5$ mm $(-0{,}7\%)$ and hence the error varies between 0% and $-0{,}7\%$.

From equation (11), (15) $\bar{f}(u) = k$, $f(v) = kv/\sqrt{l^2 - v^2}$ whence $k = \bar{\varrho}\,\bar{i}/\bar{s}$, $\bar{\bar{\varrho}}\,\bar{\bar{i}}/\bar{\bar{s}} = \bar{\varrho}\,\bar{i}\,v/(\bar{s}\sqrt{l^2 - v^2})$. If we choose $\bar{\varrho} = \bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{i} = \bar{\bar{i}}$ then

$$\bar{\bar{s}} = \bar{s}\sqrt{l^2 - v^2}/v, \tag{21}$$

that is, if the transducer resistive wire cross-section is constant, the compensator resistive wire cross-section is variable along the wire. Relation $\bar{\bar{i}} = \bar{i}$ is important for the compensation control.

If we choose $\bar{\varrho} = \bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{\bar{s}} = \bar{s}$, then

$$\bar{\bar{i}} = \bar{i}\,v/\sqrt{l^2 - v^2} \cong \bar{i}\,v/l, \tag{22}$$

that is, if the current intensity in the transducer is constant, the current intensity in the compensator is variable.

4. Another important practical case for constant $\bar{\varrho}$, $\bar{i}$, $\bar{s}$ and $\bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{\bar{i}}$, $\bar{\bar{s}}$ is obtained for $B_2 = -1/2l$ when the formula of error reduces to

$$\varepsilon_x = -y^2/2l + B_1 y + A_1 + (-B_1 x^2/2l + A_{23}) \tag{23}$$

in which $A_1 + A_{23} = B_0$, where the polynomials

$$u(x) = -B_1 x^2/2l + A_{23} \cong 0, \quad v(y) = -y^2/2l + B_1 y + A_1 \cong 0 \tag{24}$$

should be as close as possible to zero within the intervals $x \in (-\alpha, +\alpha)$, $y \in (0, +\beta)$. By considering again Chebyshev's polynomials $T_2(x) = x^2/\alpha^2 - 1/2$, $T_2(y) = 4y^2/\beta^2 - 4y/\beta + 1/2$ gives $B_1 = \beta/2l$, $A_1 = -\beta^2/16l$, $A_{23} = \beta\alpha^2/8l^2$ and hence

$$\varepsilon_x = -y^2/2l + \beta y/2l - \beta x^2/4l^2 + \beta\alpha^2/8l^2 - \beta^2/16l. \tag{25}$$

For known variations, the maximum error is

$$\operatorname{Max} e_x = \operatorname{Max}(-y^2/2l + \beta y/2l) - \operatorname{Min}(\beta x^2/4l^2) + \beta\alpha^2/8l^2 - \beta^2/16l = \beta^2/16l + \beta\alpha^2/8l^2 = 3{,}5 \text{ mm}, \ (+0{,}7\%),$$

$$\operatorname{Min} e_x = \operatorname{Min}(-y^2/2l + \beta y/2l) - \operatorname{Max}(\beta x^2/4l^2) + \beta\alpha^2/8l^2 - \beta^2/16l = -(\beta^2/16l + \beta\alpha^2/8l^2) = -3{,}5 \text{ mm}, \ (-0{,}7\%),$$

hence the error varies between $-0{,}7\%$ and $+0{,}7\%$.

In this case, from equations (11), (15) we have $\bar{f}(u) = k, \bar{\bar{f}}(v) = k\beta/2l$. Therefore

$$k = \bar{\varrho}\,\bar{i}/\bar{s} \text{ and } \bar{\varrho}\,\bar{i}/\bar{s} = \bar{\varrho}\,\bar{i}\,\beta/2\bar{\bar{s}}l. \tag{26}$$

If we choose $\bar{\varrho} = \bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{i} = \bar{\bar{i}}$, it is necessary that $\bar{\bar{s}} = 2l\,\bar{s}/\beta$ and when $\bar{\varrho} = \bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{s} = \bar{\bar{s}}$, then $\bar{i} = \bar{i}\,\beta/2l$. The last relation is necessary for the compensation control.

The effect of the electric compensation is worth noticeable in both cases, the systematic error diminishing from $-4{,}2\%$ to $0{,}7\%$ for variable cross-section and to $\pm\ 0{,}7\%$ for a constant one.

5. Casual positional or displacement errors of the mechanism links are taking place in both transducer systems and depend upon the initial casual errors The latter are due to deviations from length, from form of the kinematic pair contact areas and from relative position of the contact areas of the same link. Since the mechanism is a plane one, the rotations about the axes situated on the plane of motion, due to kinematic pair clearances or to link deviations, result in negligible deviations. Thus:

$$\Delta a = l - l\cos(\Delta\varphi) \cong \frac{1}{2} l(\Delta\varphi)^2 \cong 0, \tag{27}$$

where l — examined length, $\Delta\varphi$ — angle of rotation, Δa-length deviation.

By eliminating also the displacement along the normal to the plane, fact which does not introduce errors, only the errors due to the rotations about the axis normal to the plane and those due to displacements along the axes situated in the plane of motion are predominant.

The dependence of the casual errors upon the initial ones is given by the geometry and dimension of the respective mechanism and as these errors are small, i. e. they are within permissible deviations and much smaller than the link dimensions, the principle of superimposing the effects and the principle of the independence of causes may be applied, considering that in a good approximation the dependence is linear.

Calculating these errors we found about $\pm\ 0{,}2\%$ for the cartesian transducer and $\pm\ 0{,}4\%$ for the polar transducer. The great influence exercised by the initial errors caused by the auxiliary mechanism of the polar transducer is worthy of remark, these ones generally multiplyng by the ratio $\varrho/2r > 1$.

6. In the electric device, the casual errors are due to the resistive wire non-homogeneity, to deviations from wire and supply points position and so on. Their influence causes errors of $\pm\ 0{,}1\%$ and $\pm\ 0{,}5\%$ in the cartesian and polar transducer respectively. Here, the influence of the auxiliary mechanism is also to be noticed.

The systematic errors in the electric device which consists of electric bridges, oscillators, amplifiers, detectors and so on, are those permissible for usual electric equipments, that is $2\ldots 4\%$. The scheme of

the electric compensation device is shown in fig. 7 and that of the whole device is shown in fig. 8.

The elect ic multiplication scheme of the polar transducer is show in fig. 9 and that of the electronic multiplication in fig. 10.

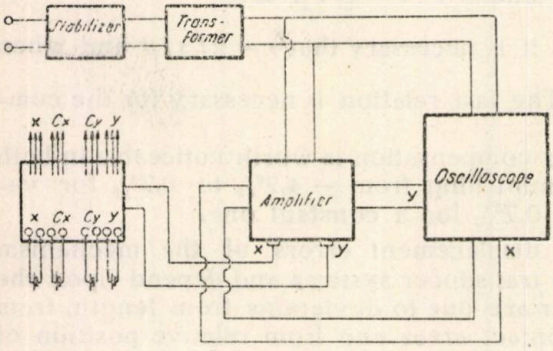


Fig. 8

For electric multiplication, the V_0 tension is approximately proportional to the r_0 resistance and the V_1 tension is approximately proportional to the r_0 and r_1 resistances. These ones being proportional to ϱ and $\cos\varphi$ or $\sin\varphi$, the products determining the x and y coordinates are obtained

$$V_0 \cong Er_0 / R_0 \,,\; V_1 \cong V_0 r_1 / R_1 = Er_0 r_1 / R_0 R_1 = k r_0 r_1.$$

The exactness of the results given by this device is better when $R_1 \gg R_0$, $R_2 \gg R_0$, $R_3 \gg R_1$ and R_2, where R_3 is the resistance of the measuring apparatus.

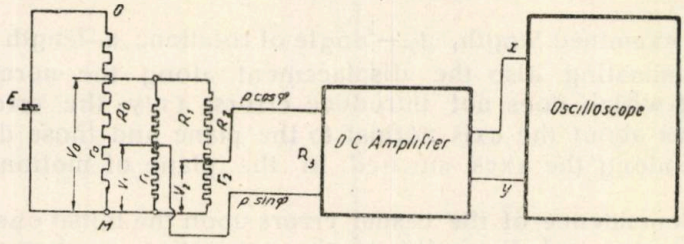


Fig. 9

For electronic multiplication in A. C. current, the device is somehow more complicated, consisting of an oscillator, a separator, amplifiers and detectors. It eliminates the errors of the electric scheme,

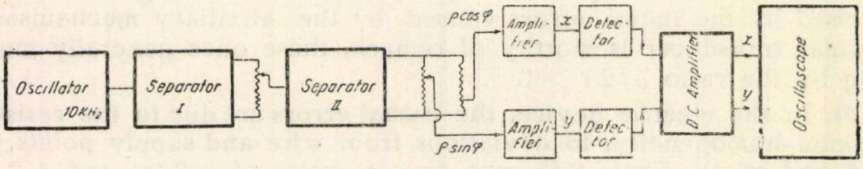


Fig 10

presenting in addition the advantage of variable amplification with A. C. current, i. e. the avoiding of an accumulator and the possibility to record directly the variation of parameters on a magnetic tape.

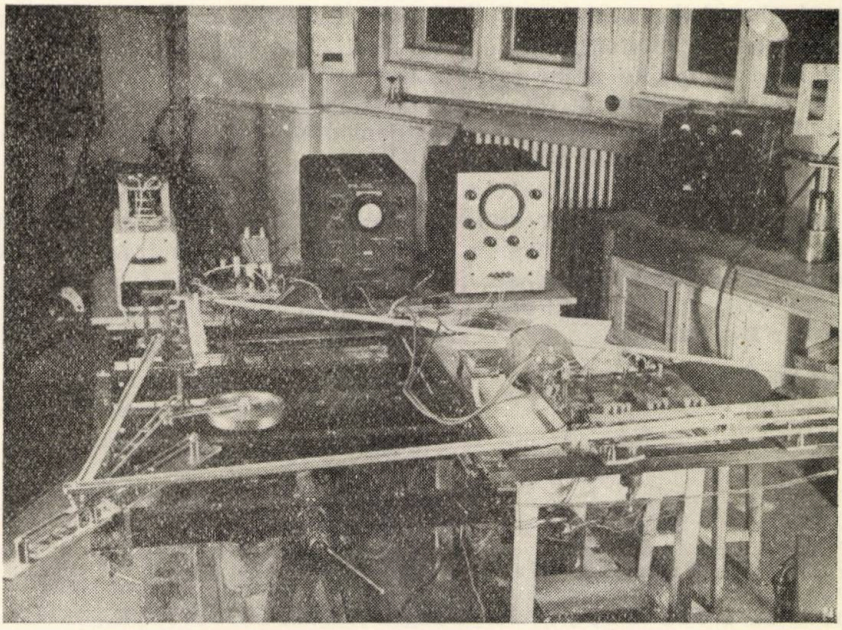


Fig. 11.

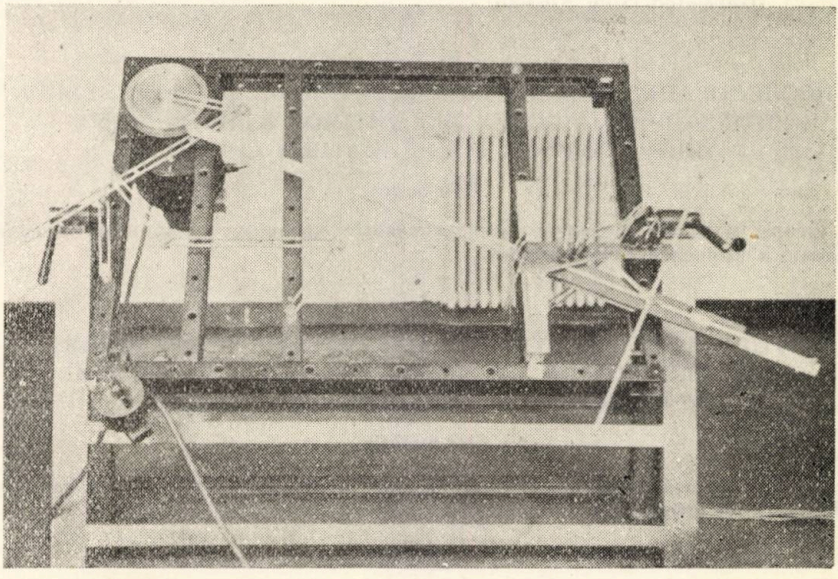


Fig. 12.

Summing up, it is to be noticed that the two transducers systems present almost the same overall errors, that is about 5%, the systematic error, being more important in the first case and the casual error in the second one. The polar transducer is advantageous in that in addition to its versatility, it gives the possibility of investigating a path situated within a surface of larger dimensions (1200 × 1200 mm in comparison with 500 × 500 mm).

The two transducer systems are shown in figs. 11 and 12. The path of a point in circular motion when $D = 400$ mm, is given in fig. 13 for uncompensated cartesian transducer, cartesian transducer compensated by constant cross-section wire and for polar transducer.

The connecting rod curves of a four-link mechanism are also shown in fig. 14.

Received the 4 III 1958

R. P. R. Academy,
Institute for Applied Mechanics,
Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. Bogdan R., Pelecudi Cr., Rev. Méc. Appl., 1957, **2**, 2.
2. Бруевич Н. Г., Точность механизм, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
3. Korn G., Korn Th., *Electronic Analog Computers*, Mc. Graw Hill Co., N. Y. 1952.
4. Pavelescu D., Pantelimon T., Rev. Méc. Appl., 1957, **2**, 2.
5. Раевский Е. П., Методы экспериментальных исследований механических параметров машин, Изд. АН СССР, Москва, 1952.
6. Turicin A. M., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*, Ed. Tehn., Buc., 1957, (translated from Russian).

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ТРАЕКТОРИИ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ В ДЕКАРТОВЫХ ИЛИ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ

(Резюме)

Авторы изучают детально вышеуказанные датчики, сравнивают полученные результатю и вычисляют их точность.

STUDIUL TRADUCTORILOR MECANICI DE DETERMINARE A TRAIECTORIILOR MECANISMELOR PLANE ÎN SISTEME DE COORDONATE CARTEZIENE SAU POLARE

(Rezumat)

Autorii studiază în detaliu traductorii indicaţi mai sus, compară rezultatele obţinute şi calculează erorile corespunzătoare.

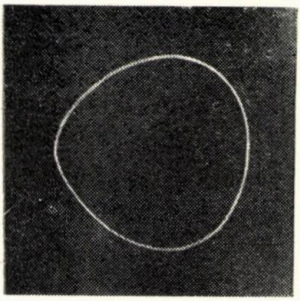


Fig. 13 a

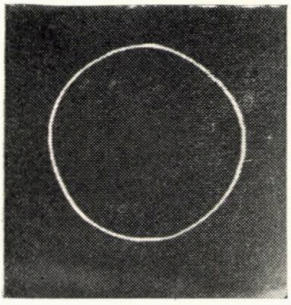


Fig. 13 b

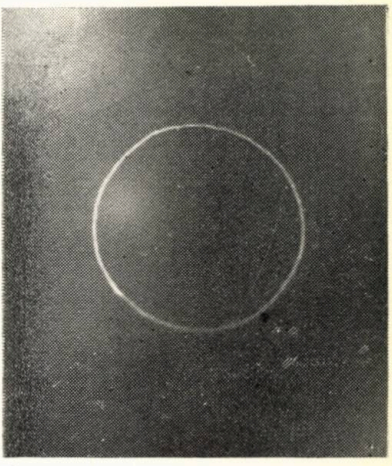


Fig. 13 c

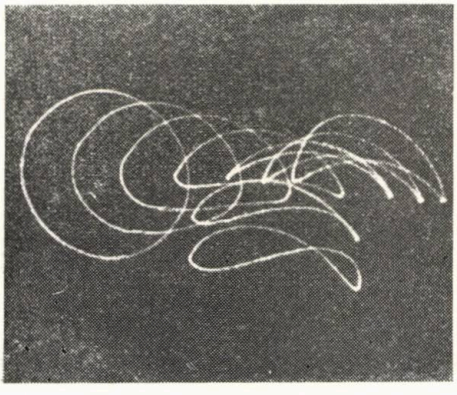


Fig. 14 a

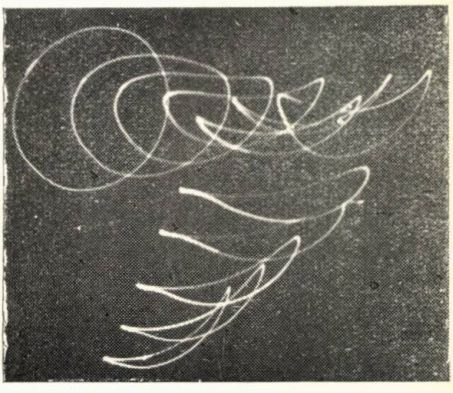


Fig. 14 b

PLANŞA I

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621-231

APLICAREA UNEI NOI METODE TENSORIALE LA STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ SPAŢIALĂ

DE

D. MANGERON şi CORNELIU DRĂGAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

În ramura fundamentală a Teoriei Mecanismelor şi Maşinilor — Analiza şi Sinteza mecanismelor — au fost elaborate în ultima vreme o serie de metode, legate de aplicarea unui aparat matematic din ce în ce mai complicat, însă dotat cu o capacitate de investigaţie puternică. În particular s-a folosit calculul elicoidal sau virial la analiza mecanismelor spaţiale, atît cu cuple cinematice inferioare cît şi cu cele superioare (Dimentberg şi Kisliţîn [1a]), metoda matricială (Moroşkin, Riftin, Zlatopolski, Kaliţin [1b]...[1e]). În aceeaşi ordine de idei au apărut şi o serie de articole consacrate unei specii de calcul simbolic, datorite lui Denavit şi Hartenberg [5], bazate pe studii recente ale unor cercetători din marea şcoală de teoria mecanismelor şi maşinilor de sub conducerea acad. I. I. Artobolevski [4],[9]. Se elaborează acum metoda cvaternionilor, folosită de W. Blaschke în tratarea unor probleme de cinematică [2] şi s-a elaborat o nouă metodă tensorială [3] precum şi metoda de reprezentare a traiectoriilor prin traductori [13] [14] ş. a..

Într-o altă şcoală, cu veche tradiţie de cercetări în teoria mecanismelor, s-a procedat sistematic la cimentarea punţilor de legătură între teorie şi practică (W. Lichtenheldt [1f], J. Volmer [1g], K. Hain [7], R. Bayer [6], [12] E. Schörner [6] ş. a.).

Metoda tensorială elaborată îşi are la bază punerea în evidenţă a unui tensor ortogonal afin de ordinul al doilea dintr-un spaţiu euclidian cu patru dimensiuni

$$(1)\qquad T^{(\nu,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^{\nu} & a_{11}^{(\nu,\nu-1)} & a_{21}^{(\nu,\nu-1)} & a_{31}^{(\nu,\nu-1)} \\ x_2^{\nu} & a_{12}^{(\nu,\nu-1)} & a_{22}^{(\nu,\nu-1)} & a_{32}^{(\nu,\nu-1)} \\ x_3^{\nu} & a_{13}^{(\nu,\nu-1)} & a_{23}^{(\nu,\nu-1)} & a_{33}^{(\nu,\nu-1)} \end{Vmatrix},$$

ţinîndu-se seamă de relaţiile

$$\text{(a)} \qquad O_{\nu-1}\, x_{\nu-1,1}\, x_{\nu-1,2}\, x_{\nu-1,3} \in I_{\nu 1} \quad \text{şi} \quad O_\nu\, x_{\nu 1}\, x_{\nu 2}\, x_{\nu 3} \in I_\nu ,$$

$$\text{(b)} \qquad a_{ij}^{(\nu,\nu-1)} = \cos(\bar{i}_i^{\nu}, \bar{i}_j^{\nu-1}), \ (i,j=1,2,3); \ O_\nu (x_1^\nu\, x_2^\nu\, x_3^\nu) \in O_{\nu-1}\, x_{\nu-1,1}\, x_{\nu-1,2} x_{\nu-1,3},$$

$$\text{(c)} \qquad x_{\nu-1,j} = x_j^\nu + \sum_{i=1}^{3} a_{ij}^{(\nu,\nu-1)}\, x_{\nu i} \quad , \quad (j=1,2,3),$$

care stabilesc o corespondenţă biunivocă între punctele domeniilor tridimensionale D_ν şi $D_{\nu-1}$, legate respectiv de două organe consecutive I_ν şi $I_{\nu-1}$ ale unui lanţ cinematic ce constituie o cuplă cinematică.

Tensorul $T^{(\nu,\nu-1)}$, numit tensor de poziţie al organului I_ν faţă de organul $I_{\nu-1}$ este caracteristic cuplei cinematice considerate. El se găseşte, introducîndu-se în prealabil noile variabile definite prin

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &X_{\nu-1,2} = x_{\nu-1,1} X_{\nu-1,1}, \ X_{\nu-1,3} = x_{\nu-1,2} X_{\nu-1,1}, \ X_{\nu-1,4} = x_{\nu-1,3} X_{\nu-1,1}; \\ &X_{\nu 2} = x_{\nu 1} X_{\nu 1}, \ X_{\nu 3} = x_{\nu 2} X_{\nu 1}, \ X_{\nu 4} = x_{\nu 3} X_{\nu 1}, \ X_{\nu-1,1} = X_{\nu 1}. \end{aligned}$$

Introducerea ulterioară a tensorului specific unui lanţ cinematic

$$\text{(3)} \qquad T^{(\nu,0)} = T^{(1,0)} . T^{(2,1)} \ldots T^{(n-1)(n-2)} . T^{(n,n-1)},$$

a ecuaţiei de închidere

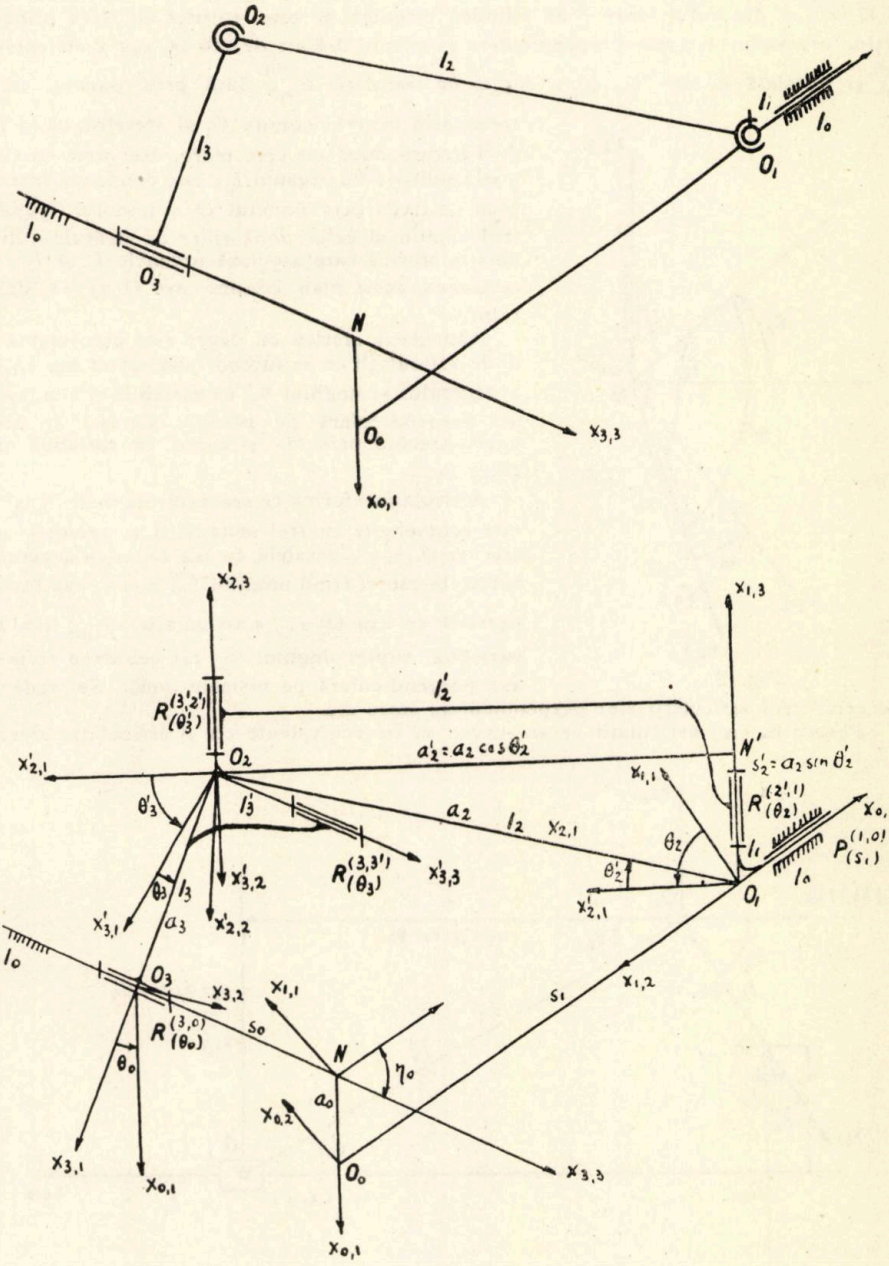
$$\text{(4)} \qquad T^{(0,0)} = E,$$

precum şi a tensorului viteză

$$\text{(5)} \qquad \frac{dT^{(\nu,\nu-1)}}{dt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{x}_1^\nu & \dot{a}_{11}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{a}_{21}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{a}_{31}^{(\nu,\nu-1)} \\ \dot{x}_2^\nu & \dot{a}_{12}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{a}_{22}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{a}_{32}^{(\nu,\nu-1)} \\ \dot{x}_3^\nu & \dot{a}_{13}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{a}_{23}^{(\nu,\nu-1)} & \dot{a}_{33}^{(\nu,\nu-1)} \end{Vmatrix},$$

permit caracterizarea succintă prin elemente matematice univoc determinate a poziţiei unui organ, în mişcare relativă faţă de cel precedent din lanţ sau unui circuit separat dintr-un lanţ cinematic compus, caracterizînd complet mişcările organelor şi constituind premiza fundamentală pentru tratarea problemelor de dinamica maşinilor.

1. *Problema configuraţiilor.* Fie mecanismul bielă-manivelă spaţial reprezentat în fig. 1 (fig. 3 reprezintă particularizarea sa plană). El constă dintr-un lanţ cinematic spaţial simplu închis, avînd un singur grad de mobilitate şi organul I_0 constituind batiul mecanismului. Un singur circuit simplu închis cuprinde deci toate organele lanţului şi toate cuplele cinematice care le asociază între ele. Se consideră cazul cel mai general cînd axa cuplei de translaţie $P_{(s_1)}^{(1,0)}$ şi a articulaţiei $R_{(\theta_0)}^{(3,0)}$ sînt două drepte oarecare în spaţiu, adică neparalele şi neconcurente.



O_2
l_2
l_1
l_0
O_1
l_3
l_0
O_3
N
O_0
$x_{3,3}$
$x_{0,1}$
$x'_{2,3}$
$x_{1,3}$
l'_2
$R^{(3',2')}_{(\theta'_3)}$
$a'_2 = a_2 \cos\theta'_2$
N'
$s'_2 = a_2 \sin\theta'_2$
$x'_{2,1}$
O_2
$x_{1,1}$
$R^{(2',1)}_{(\theta_2)}$
$x_{0,3}$
θ'_3
l'_3
a_2
l_2
$x_{2,1}$
θ_2
l_1
$P^{(1,0)}_{(s_1)}$
θ'_2
l_0
θ_3
l_3
$x'_{3,2}$
$R^{(3,3')}_{(\theta_3)}$
$x'_{3,3}$
$x'_{2,1}$
O_1
$x'_{3,1}$
a_3
$x'_{2,2}$
l_0
O_3
$x_{3,2}$
$x_{1,1}$
s_1
$x_{1,2}$
$R^{(3,0)}_{(\theta_0)}$
s_0
N
η_0
θ_0
a_0
$x_{0,2}$
$x_{3,1}$
$x_{0,1}$
O_0
$x_{3,3}$
$x_{0,1}$

Fig. 1

Sensul ales pentru parcurgerea circuitului se deduce din numerotarea organelor. Asocierea dintre organul I_1 şi organul I_2 se face printr-o articulaţie sferică cu deget. Axa $O_1 x_{1,3}$ a degetului, care e un cilindru circular şi este solidar cu sfera plină ce aparţine organului I_1, este perpendiculară pe planul definit de axa $O_3 x_{3,3}$ a articulaţiei $R^{(3,0)}_{(\theta_0)}$ şi paralelă la axa $O_0 x_{0,3}$ a cuplei de translaţie $P^{(10)}_{(s_1)}$ dusă prin punctul N, şi trece prin centrul comun O_1 al sferelor, ca în fig. 2. Tăietura după un cerc mare, executată în sfera goală solidară cu organul I_2, este conţinută într-un plan ce trece prin punctul O_1 şi punctul O_2, centrul comun al celor două sfere ce alcătuiesc articulaţia sferică care asociază organele I_2 şi I_3. De asemenea, acest plan conţine axa $O_1 x_{1,3}$ a degetului.

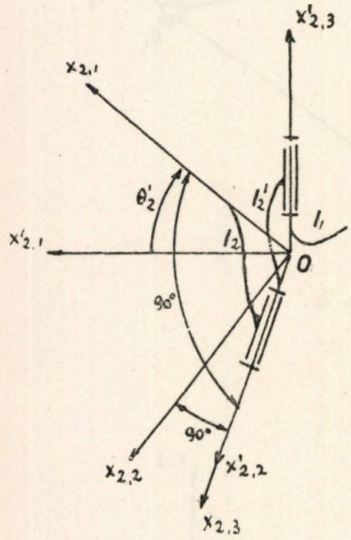


Fig. 2

Articulaţia sferică cu deget este echivalentă cu două articulaţii ce se succed, una având axa $O_1 x_{1,3}$ a degetului şi unghiul θ_2 ca variabilă şi alta, având axa perpendiculară pe planul tăieturii în sfera goală, trecînd prin O_1 şi având ca variabilă unghiul θ'_2.

Articulaţia sferică ce asociază organele I_2 şi I_3 este echivalentă cu trei articulaţii şi anume: una are axa $O_2 x'_{2,3}$, paralelă cu axa $O_1 x_{1,3}$ a degetului, variabila cuplei fiind unghiul θ'_3, alta — axa $O_2 x'_{3,3}$ paralelă cu axa $O_3 x_{3,3}$ a articulaţiei $R^{(3,0)}_{(\theta_0)}$ şi având variabila cuplei unghiul θ_3, iar cea de a treia cu axa perpendiculară pe primele două. Se vede că axele celor trei articulaţii sînt perpendiculare între ele.

Pentru ca trei articulaţii ce se succed să fie echivalente cu o articulaţie sferică,

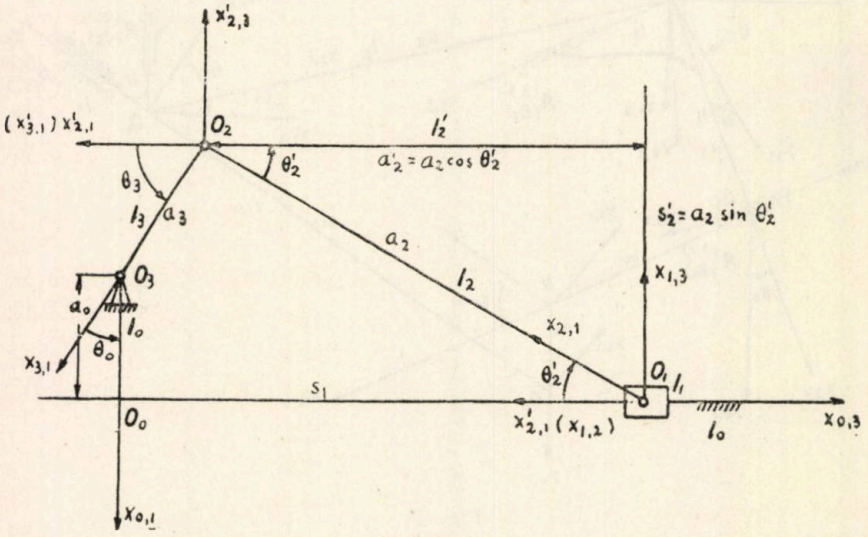


Fig. 3

nu e suficient numai ca axa celei de a doua articulații să fie perpendiculară pe axa primei și a celei de a treia pe axa celei de a doua, ci este impusă, din însăși construcția articulației aferice, condiția suplimentară ca axa celei de a treia articulații să fie perpendiculară pe axa primei articulații. Existența acestei *condiții suplimentare* produce modificarea orientării axei a cel puțin unei articulații în organul fictiv limitat de două articulații succesive.

Pentru a evita această modificare a orientării, se procedează astfel :

Se consideră organul fictiv I_2', de lungime variabilă și egală cu aceea a perpendicularei comune între axele $O_1 x_{1,3}$ și $O_2 x'_{2,3}$, asociat la organul I_1 prin articulația $R^{(2',1)}_{(\theta_2)}$ și la organul fictiv I_3' prin articulația $R^{(3',2)}_{(\theta'_3)}$ axele acestor articulații nemodificîndu-și orientarea în organ (fig. 2). Poziția organului I_2 față de organul fictiv I_2' este dată de unghiul θ'_2.

Axele solidare cu organul I_2' sînt : axa $O_2 x'_{2,1}$, după direcția perpendicularei comune, axa $O_2 x'_{2,3}$, definită așa cum s-a arătat anterior, și axa $O_2 x'_{2,2}$, luată astfel încît cu primele două să formeze un triedru drept. Axele solidare cu organul I_2 sînt : $O_1 x_{2,1}$, după dreapta orientată $O_1 O_2$, $O_1 x_{2,3}$, perpendiculară pe planul tăieturii și axa $O_1 x_{2,2}$, perpendiculară pe primele două și astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept. Axele articulațiilor $R^{(3',2')}_{(\theta'_3)}$ și $R^{(3,3')}_{(\theta_3)}$ nu-și schimbă orientarea în organul fictiv I_3', situat între organele I_2' și I_3' în lanțul cinematic echivalent.

Axele solidare cu organul fictiv I_3' sînt : $O_2 x'_{3,1}$, perpendiculară pe axele $O_2 x'_{2,3}$ și $O_2 x'_{3,3}$, axa $O_2 x'_{3,3}$, paralelă cu $O_3 x_{3,3}$, cunoscută și axa $O_2 x'_{3,2}$, aleasă astfel încît împreună cu primele două să formeze un triedru drept. Axele solidare cu organul I_3 sînt : $O_3 x_{3,1}$, $O_3 x_{3,2}$, $O_3 x_{3,3}$ (fig. 2). Unghiul dintre axa $O_3 x_{0,3}$ și paralela la axa $O_0 x_{0,3}$ dusă prin punctul N se notează cu η_0, care este unul dintre parametrii constanți și cunoscuți ai mecanismului. Dînd diferite valori lui η_0, a_0 și s_0 (fig. 2), se obțin cazurile particulare ale mecanismului bielă-manivelă spațial sau plan.

Lanțul cinematic fictiv format din organele I_0, I_1, I_2', I_3', I_3, I_0 este astfel încît axele a două cuple cinematice inferioare fundamentale (articulații sau cuple de translație), care asociază un organ al lanțului la organul precedent și la cel următor în lanț, nu-și schimbă orientarea în organul respectiv.

Tensorii de poziție caracteristici organelor lanțului cinematic închis I_0, I_1, I_2', I_3', I_3, I_0 sînt :

$$T_P^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_R^{(2',1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \cos\theta'_2 \cos\theta_2 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ a_2 \cos\theta'_2 \sin\theta_2 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ a_2 \sin\theta'_2 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T_R^{(3',2')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta'_3 & 0 & -\sin\theta'_3 \\ 0 & \sin\theta'_3 & 0 & \cos\theta'_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_R^{(3,3')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 \cos\theta_3 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ a_3 \sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T_R^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0\cos\theta_0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0\cos\eta_0 & -\sin\theta_0\sin\eta_0 \\ a_0\sin\theta_0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0\cos\eta_0 & \cos\theta_0\sin\eta_0 \\ s_0 & 0 & -\sin\eta_0 & \cos\eta_0 \end{Vmatrix}.$$

Tensorul $T^{(0,0)}$, ce caracterizează configuraţia aceluiaşi lanţ cinematic închis fictiv,

$$T^{0,0)} = T^{(1,0)} \cdot T^{(2',1)} \cdot T^{(3',2')} \cdot T^{3,3')} \cdot T^{'0,3)} = \| a_{ij} \|, \quad (i,j = 1,2,3,4)$$

are elementele celor patru coloane date respectiv prin

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = -a_2\sin\theta_2' + a_3\sin\theta_3 + a_0\sin(\theta_0 + \theta_3), \quad a_{31} = a_2\cos\theta_2'\cos\theta_2 +$$
$$+ a_3\cos\theta_3\cos(\theta_2 + \theta_3') + a_0\cos(\theta_0 + \theta_3)\cos(\theta_2 + \theta_3') - s_0\sin(\theta_2 + \theta_3'),$$
$$a_{41} = s_1 - a_2\cos\theta_2'\sin\theta_2 - a_3\cos\theta_3\sin(\theta_2 + \theta_3') - a_0\cos(\theta_0 + \theta_3)\sin(\theta_2 + \theta_3') -$$
$$- s_0\cos(\theta_2 + \theta_3');$$

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = \sin(\theta_0 + \theta_3), \quad a_{32} = \cos(\theta_0 + \theta_3)\cos(\theta_2 + \theta_3'), \quad a_{42} = -\cos(\theta_0 + \theta_3)\sin(\theta_2 + \theta_3');$$
$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = \cos(\theta_0 + \theta_3)\cos\eta_0, \quad a_{33} = -\sin(\theta_0 + \theta_3)\cos(\theta_2 + \theta_3')\cos\eta_0 +$$
$$+ \sin(\theta_2 + \theta_3')\sin\eta_0, \quad a_{43} = \sin(\theta_0 + \theta_3)\sin(\theta_2 + \theta_3')\cos\eta_0 + \cos(\theta_2 + \theta_3')\sin\eta_0;$$
$$a_{14} = 0, \quad a_{24} = \cos(\theta_0 + \theta_3)\sin\eta_0, \quad a_{34} = -\sin(\theta_0 + \theta_3)\cos(\theta_2 + \theta_3')\sin\eta_0 -$$
$$- \sin(\theta_2 + \theta_3')\cos\eta_0, \quad a_{44} = \sin(\theta_0 + \theta_3)\sin(\theta_2 + \theta_3')\sin\eta_0 - \cos(\theta_2 + \theta_3')\cos\eta_0.$$

Scriind ecuaţia tensorială

$$T^{(0,0)} = E, \tag{6}$$

în care E este tensorul unitar şi egalînd elementele corespunzătoare ale tensorilor din ambii membri ai ecuaţiei (6), se obţin, rezolvînd ecuaţiile scalare respective variabilele cuplelor cinematice în funcţie de unica coordonată lagrangiană θ_0, care este unghiul de rotire al manivelei I_3 faţă de batiul I_0, astfel:

$$s_1 = a_3\sin\eta_0\sin\theta_0 - s_0\cos\eta_0 + \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2} - (a_3\cos\eta_0\sin\theta_0 + s_0\sin\eta_0)^2,$$
$$\theta_2 = \arccos\left\{[a_3\cos\eta_0\sin\theta_0 + s_0\sin\eta_0]\,[a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2]^{-1/2}\right\}, \tag{7}$$
$$\theta_2' = \arcsin\left[(a_3\cos\theta_0 + a_0)\,a_2^{-1}\right], \quad \theta_3' = 180^0 - \eta_0 - \theta_2, \quad \theta_3 = 90^0 - \theta_0.$$

Pentru a scrie expresia tensorului de poziţie al organului I_2 faţă de organul fictiv I_2', se consideră că asocierea dintre aceste organe se face printr-o articulaţie avînd axa perpendiculară pe planul tăieturii în sfera goală a articulaţiei sferice cu deget şi trecînd prin O_1. Variabila acestei articulaţii este θ_2'. De asemenea, axele de coordonate solidare cu organul I_2' se deplasează paralel cu ele însăşi astfel încît originea lor să fie în punctul O_1.

Rezultă:

$$T^{(2,2')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2' & \sin\theta_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sin\theta_2' & -\cos\theta_2' & 0 \end{Vmatrix},$$

în care θ_2' se poate exprima în funcție de θ_0 cu ajutorul celei de a treia relații din (7). În adevăr, așa cum se vede din fig. 2

$$T^{(2,2')} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x_{2,1}, x'_{2,1}) & \cos(x_{2,2}, x'_{2,1}) & \cos(x_{2,3}, x'_{2,1}) \\ 0 & \cos(x_{2,1}, x'_{2,2}) & \cos(x_{2,2}, x'_{2,2}) & \cos(x_{2,3}, x'_{2,2}) \\ 0 & \cos(x_{2,1}, x'_{2,3}) & \cos(x_{2,2}, x'_{2,3}) & \cos(x_{2,3}, x'_{2,3}) \end{matrix} \right\|,$$

în care

$$\cos(x_{2,1}, x'_{2,1}) = \cos\theta'_2, \quad \cos(x_{2,1}, x'_{2,2}) = \cos 90^0 = 0;$$

$$\cos(x_{2,1}, x'_{2,3}) = \cos(90^0 - \theta'_2) = \sin\theta'_2, \quad \cos(x_{2,2}, x'_{2,1}) = \cos(90^0 - \theta'_2) = \sin\theta'_2,$$

$$\cos(x_{2,2}, x'_{2,2}) = \cos 90^0 = 0, \quad \cos(x_{2,2}, x'_{2,3}) = \cos(180^0 - \theta'_2) = -\cos\theta'_2,$$

$$\cos(x_{2,3}, x'_{2,1}) = \cos 90^0 = 0, \quad \cos(x_{2,3}, x'_{2,2}) = \cos 0 = 1, \quad \cos(x_{2,3}, x'_{2,3}) = \cos 90^0 = 0.$$

Tensorul de poziție ce definește poziția organului I_2 față de organul fix I_0 este

$$T^{(2,0)} = T^{(1,0)} \cdot T^{(2',1)} \cdot T^{(2,2')} = \| b_{ij} \|, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \text{ deci}$$

$$T^{(2,0)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta'_2 & \sin\theta'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sin\theta'_2 & -\cos\theta'_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta'_2 & \cos\theta'_2 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2\cos\theta'_2 & \cos\theta_2\sin\theta'_2 & -\sin\theta_2 \\ s_1 & -\sin\theta_2\cos\theta'_2 & -\sin\theta_2\sin\theta'_2 & -\cos\theta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Exprimînd parametrii s_1, θ_2 și θ'_2 în funcție de unica coordonată lagrangiană θ_0, poziția organului I_2 (biela mecanismului) față de batiul I_0, este complet determinată pentru fiecare valoare a lui θ_0 cu ajutorul tensorului $T^{(2,0)}$, în care elementele sale sînt funcții de θ_0. Elementele tensorului $T^{(2,0)}$ sînt respectiv:

$$b_{11} = 1, \quad b_{21} = 0, \quad b_{31} = 0, \quad b_{41} = a_3 \sin\eta_0 \sin\theta_0 - s_0 \cos\eta_0 + \\ + \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2 - (a_3\cos\eta_0 \sin\theta_0 + s_0 \sin\eta_0)^2},$$

$$b_{12} = 0, \quad b_{22} = -(a_3\cos\theta_0 + a_0)/a_2, \quad b_{32} = (a_3\cos\eta_0 \sin\theta_0 + s_0 \sin\eta_0)/a_2,$$

$$b_{42} = -\sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2 - (a_3\cos\eta_0 \sin\theta_0 + s_0 \sin\eta_0)^2}/a_2,$$

$$b_{13} = 0, \quad b_{23} = \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2}/a_2, \quad b_{33} = (a_3\cos\theta_0 + a_0)(a_3\cos\eta_0 \sin\theta_0 + s_0 \sin\eta_0)/a_2 r,$$

$$b_{43} = -(a_3\cos\theta_0 + a_0) R/a_2 r,$$

$$b_{14} = 0, \quad b_{24} = 0, \quad b_{34} = -R/r, \quad b_{44} = -(a_3\cos\eta_0 \sin\theta_0 + s_0 \sin\eta_0)/r,$$

în care s-a notat

$r = \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2}$ şi $R = \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2 - (a_3\cos\eta_0\sin\theta_0 + s_0\sin\eta_0)^2}$.

Pentru organele I_1 şi I_3 tensorii de poziţie ce definesc poziţiile acestor organe faţă de batiul I_0, avînd elementele lor funcţii de θ_0, sînt:

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3\sin\eta_0\sin\theta_0 - s_0\cos\eta_0 + R & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

şi

$$T^{(3,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & \cos\theta_0 & \sin\eta_0 & 0 \\ s_0\sin\eta_0 & -\sin\theta_0\cos\eta_0 & \cos\theta_0\cos\eta_0 & -\sin\eta_0 \\ -s_0\cos\eta_0 & -\sin\theta_0\sin\eta_0 & \cos\theta_0\sin\eta_0 & \cos\eta_0 \end{Vmatrix}.$$

2. *Problema vitezelor.* Tensorul viteză în mişcarea relativă a organului I_1 faţă de organul I_0 şi care este totodată şi mişcarea absolută a organului I_1, deoarece organul I_0 este fix, este $dT_P^{(1,0)}/dt = \| a_{ij}^{(1,0)} \|$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, $a_{ij}^{(1,0)} = 0$, în afară de $a_{41}^{(1,0)} = \dot{s}_1$, în care $\dot{s}_1$ este dat prin

$$\dot{R}\dot{s}_1 = Ra_3\sin\eta_0\cos\theta_0\,\dot{\theta}_0 + a_3\dot{\theta}_0\,(a_0\sin\theta_0 + a_3\sin^2\eta_0\sin\theta_0\cos\theta_0 - s_0\sin\eta_0\cos\eta_0\cos\theta_0).$$

Se vede imediat că $\omega_P^{(1,0)} = 0$ şi că mişcarea absolută a organului I_1 (capul de cruce) faţă de batiul I_1 este o mişcare de translaţie rectilinie, o dată cu punctul O_1. Componentele vitezei $\vec{V}_{0_1}^{(1,0)}$ pe axele solidare cu organul I_0 sînt:

$$V_{0_1 x_0}^{(1,0)} = 0, \quad V_{0_1 x_{0,2}}^{(1,0)} = 0, \quad V_{0_1 x_{0,3}}^{(1,0)} = \dot{s}_1.$$

Folosind o parte din componentele tensorului $T_P^{(1,0)}$, se formează matricea:

$$A^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Tensorul de poziţie al organului I_2 faţă de organul I_1 este

$$T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2\cos\theta_2' & \cos\theta_2\sin\theta_2' & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2\cos\theta_2' & \sin\theta_2\sin\theta_2' & \cos\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2' & -\cos\theta_2' & 0 \end{Vmatrix}.$$

Tensorul viteză al organului I_2 în mişcarea relativă faţă de organul I_1 este

$$\frac{dT^{(2,1)}}{dt}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2-\cos\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2+\cos\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \\ 0 & \cos\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2-\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & \cos\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2+\sin\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \\ 0 & \cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & \sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & 0 \end{Vmatrix}.$$

Pentru cele ce urmează, urmînd teoria expusă în [3], se formează matricele:

$$M^{(2,1)}=\begin{Vmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_2' & \cos\theta_3\sin\theta_2' & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2\cos\theta_2' & \sin\theta_2\sin\theta_2' & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2' & -\cos\theta_2' & 0 \end{Vmatrix}$$

și

$$M^{*(2,1)}=\begin{Vmatrix} -\sin\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2-\cos\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2+\cos\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \cos\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2-\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & \cos\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2+\sin\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & \sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & 0 \end{Vmatrix}.$$

Viteza unghiulară instantanee în mișcarea relativă a organului I_2 față de organul I_1, definită ca un tensor antisimetric de ordinul doi în spațiul euclidian cu trei dimensiuni este:

$$\omega^{(2,1)}=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega^{(2,1)}_{x_{13}} & \omega^{(2,1)}_{x_{12}} \\ \omega^{(2,1)}_{x_{13}} & 0 & -\omega^{(2,1)}_{x_{11}} \\ -\omega^{(2,1)}_{x_{12}} & \omega^{(2,1)}_{x_{11}} & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & -\cos\theta_2\dot{\theta}_2' \\ \dot{\theta}_2 & 0 & -\sin\theta_2\dot{\theta}_2' \\ \cos\theta_2\dot{\theta}_2' & \sin\theta_2\dot{\theta}_2' & 0 \end{Vmatrix}.$$

Exprimînd pe θ_2, $\dot{\theta}_2$ și $\dot{\theta}_2'$ în funcție de θ_0 și $\dot{\theta}_0$, se obține expresia lui $\omega^{(2,1)}$ avînd componentele, funcții de coordonata lagrangiană θ_0 și derivata ei în raport cu timpul $\dot{\theta}_0$, adică viteza unghiulară a manivelei motoare I_3.

Tensorul viteză în mișcarea absolută a organului I_2 față de organul fix I_0 este

$$\frac{dT^{(2,0)}}{dt}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2-\cos\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2+\cos\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{s}_1 & -\cos\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2+\sin\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2' & -\cos\theta_2\sin\theta_2'\dot{\theta}_2-\sin\theta_2\cos\theta_2'\dot{\theta}_2' & \sin\theta_2\dot{\theta}_2 \end{Vmatrix}.$$

Formînd matricele $M^{(2,0)}$ și $M^{*(2,0)}$, se obține analog

$$\omega^{(2,0)}=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega^{(2,0)}_{x_{03}} & \omega^{(2,0)}_{x_{02}} \\ \omega^{(2,0)}_{x_{03}} & 0 & -\omega^{(2,0)}_{x_{01}} \\ -\omega^{(2,0)}_{x_{02}} & \omega^{(2,0)}_{x_{01}} & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & -\cos\theta_2\dot{\theta}_2' & \sin\theta_2\dot{\theta}_2' \\ \cos\theta_2\dot{\theta}_2' & 0 & \dot{\theta}_2 \\ -\sin\theta_2\dot{\theta}_2' & -\dot{\theta}_2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Mișcarea absolută a bielei I_2 poate fi deci considerată ca fiind compusă dintr-o mișcare de translație rectilinie o dată cu punctul O_1 și trei mișcări de rotație în jurul axelor $O_0x_{0,1}$, $O_0x_{0,2}$, $O_0x_{0,3}$ cu vitezele unghiulare respectiv $\omega^{(2,0)}_{x_{01}}$, $\omega^{(2,0)}_{x_{02}}$, $\omega^{(2,0)}_{x_{03}}$.

Tensorul viteză pentru organul I_3 în mişcarea sa faţă de I_0 este

$$\frac{dT^{(3,0)}}{dt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_0\dot{\theta}_0 & \cos\theta_0\dot{\theta}_0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_0\dot{\theta}_0\cos\eta_0 & -\sin\theta_0\dot{\theta}_0\cos\eta_0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_0\dot{\theta}_0\sin\eta_0 & -\sin\theta_0\dot{\theta}_0\sin\eta_0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Folosind matricele $M^{(3,0)}$ şi $M^{\star(3,0)}$, se obţine

$$\omega^{(3,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega^{(3,0)}_{x_{0,3}} & \omega^{(3,0)}_{x_{0,2}} \\ \omega^{(3,0)}_{x_{0,3}} & 0 & -\omega^{(3,0)}_{x_{0,1}} \\ -\omega^{(3,0)}_{x_{0,2}} & \omega^{(3,0)}_{x_{0,1}} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \cos\eta_0\dot{\theta}_0 & \sin\eta_0\dot{\theta}_0 \\ -\cos\eta_0\dot{\theta}_0 & 0 & 0 \\ -\sin\eta_0\dot{\theta}_0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Mişcarea de rotaţie a manivelei I_3 în jurul axei $O_3x_{3,3}$ poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o mişcare de rotaţie în jurul axei $O_3x_{0,2}$ de viteză unghiulară $\omega^{(3,0)}_{x_{0,2}}$ şi una în jurul axei $O_0x_{0,3}$ de viteză unghiulară $\omega^{(3,0)}_{x_{0,3}}$.

Verificarea rezultatelor obţinute se poate face uşor scriind condiţiile diferenţiale de închidere, adică

$$\omega^{(0,0)} = 0, \quad \vec{V}^{(0,0)}_{0_0} = 0.$$

3. *Particularizări.* Dînd diferite valori parametrilor caracteristici ai mecanismului, adică lui a_0, s_0 şi η_0, se obţin mecanismele particulare folosite în construcţia de maşini.

În special se obţine mecanismul bielă-manivelă plan (fig. 3), dacă $s_0 = 0$ şi $\eta_0 = 90^0$. În acest caz

$$\theta_2 = 90^0, \quad \theta_3' = 0, \quad \theta_2' = \arcsin\left[(a_3\cos\theta_0 + a_0)\,a_2^{-1}\right], \quad \theta_3 = 90^0 - \theta_0,$$

$$s_1 = a_3\sin\theta_0 + \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2}, \quad V_{0_1 x_{0,1}} = 0, \quad V_{0_1 x_{0,2}} = 0, \quad V_{0 x_{0,3}} = 0,$$

$$\omega^{(2,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2' \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_2' & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \omega^{(3,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1a. Диментберг М. Ф., Кислицын С. Е., Труды II-го Всесоюзного Съезда по основным проблемам Теории Машин и Механизмов, Москва, АН СССР, 1958 (в печати).
1b. Морошкин Ю. Ф., Ibidem.
1c. Рифтин Л П., Ibidem.
1d. Златопольский И., Ibidem.
1e. Калицин Г., Ibidem.
1f. Лихтенхельдт В., Ibidem.
1g. Фольмер И., Ibidem.
1h. Манжерон Д., Дрэган К., Ibidem.
2. Blaschke W., Rend. Acad. Lincei, (8), **24**, *3*, 1958, pp. 291–293.
3. Mangeron D., Drăgan C., Bul. Inst. Polit. Iaşi, **3**, (7), *1–2*, 1957, pp. 151-164.

4. Артоболевский И. И., Развитие Теории Механизмов и Машин за период между первым и вторым Всесоюзным Совещанием по ТММ, În volumul Итоги Второго Всесоюзного совещания по основным проблемам ТММ, Институт Машиноведения АН СССР, М., 1958, (в печати).
5. Denavit J, Hartenberg R. S., J. Appl. Mech., 1955, **22**, *2*, pp. 215–222.
6. Bayer R., VDL-Berichte, 1956, **12**, pp. 21–28.
7. Wörle H., Ibidem, pp. 21—28.
8. Hain K, *Transactions of the Fourth Conference on Mechanisms*, Purdue University, 1958, pp. 81–104.
9. Denavit J., *Transactions of the Fifth Conference on Mechanisms*, Purdue University, 1958, p. 140.
10. Mangeron D., Drăgan C., *Revue de Mécanique appliquée*, 1957. **2**,*1*, pp. 145–156.
11. Drăgan C., Bul. Inst. Polit. Iași, **3** (**7**), *3—4*, 1958, pp. 175–184.
12. Bayer R., *Transactions of the Fifth Conference on Mechanisms*, Purdue University, 1958, pp. 141–163.
13. Mangeron D., Bogdan R, Studii și Cercetări de Mec. aplicată, 1958, (sub tipar).
14. Bogdan R., Pelecudi C., Calmaciuc L., Acest Buletin, pp. 313—324.

ПРИМЕНЕНИЕ НОВОГО ТЕНЗОРНОГО МЕТОДА К КИНЕМАТИКЕ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА

(Резюме)

Академик И. И. Артоболевский в предисловии к работе Ф. М. Диментберга [1a], [4], посвященной применению метода „винтов" к исследованию перемещений пространственных механизмов, подчёркивая, по праву, роль советской науки представленной Г. Г. Барановым, В. В. Добровольским, В. В. Егоровым, С. Н. Кожевниковым, Н. И. Мерцаловым, Д. С. Тавхелидзе и др. в развитии теории машин и механизмов, обращает внимание на факт того, что „одной из наиболее трудных задач теории пространственных механизмов является задача об определении положения звеньев" [1b], [1h], а, значит, и конфигурации кинематических цепей и механизмов.

В решении этой задачи было использовано, в основном, несколько методов, среди которых наиболее развитыми оказываются метод геометрических мест и метод сферических отображений [1a], изложение которых нашло место в наиболее распространённых учебных пособиях, переведенных и на некоторые иностранные языки, а также метод аффиноров, символический метод [5] и прямой аналитический метод [12].

В настоящем исследовании, представляющем собою приложение результатов установленных в [3], исходя из необходимости углубления теории рабочих процессов машин, механизмов и машин-автоматов, теснейшим образом связанных с изучением геометрии рабочего органа и кинематики и динамики исполнительных механизмов, устанавливаются новые тензорные формы основных уравнений конфигураций и скоростей кинематических цепей кривошипно-шатунного пространственного механизма.

Рис. 1 и 2 относятся к схеме кривошипно-шатунного пространственного механизма, а рис. 3 — к его плоскому вырождению.

Тензоры положения, характерные звеньям кинематической цепи I_0, I_1, I_2', I_3', I_3 I_0, даны на стр. 329 и 330.

Тензоры скорости звена I_2, в относительном движении к звену I_1, или же в абсолютном движении к звену I_0 даны, соответственно, на стр. 333, а тензор скорости звена I_3 по отношению к звену I_0— на стр. 334. Проверка полученных результатов указывается в конце №2 выписывая дифференциальные условия замкнутости. В №3 указывается сжато на вывод как частный случай кинематики кривошипно-шатунного плоского механизма.

THE STUDY BY A NEW TENSOR METHOD OF THE CINEMATIC BEHAVIOUR OF SPACIAL SLIDER-CRANK LINKAGES

(Summary)

Whilst analysis and synthesis of plane mechanisms has reached a high standard of deve'opment, research on important space mechanisms, has not made such rapid progress. This is valid as well for systematics of space mechanisms as for their synthesis and dynamics.

In the last years it has always been tried from various angles to bridge the gap between science and practice by using a very extensive introduction of various scientific precedures in the science of mechanisms [1a]...[1g], [4]...[10], [12]...[14].

The authors have introduced in teaching and research concerning mechanism engineering a new method of reduced accelerations [10], [1h]. In this paper they applied a new tensor method developped in somme previous papers [3], [11] to study the special Slider-Crank space linkages.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

621–231

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ДЕТАЛЕЙ И УЗЛОВ РАБОЧИХ МАШИН

Б. И. ТУРБИН

При изучении динамики рабочих машин необходимо знание для движущихся деталей и узлов не только их весов, но и моментов инерции относительно различных осей. В настоящее время известно около двадцати способов определения моментов инерции опытным путем преимущественно отдельных деталей.

Однако некоторые из применяющихся способов чрезмерно громоздки, другие же, хотя и не требуют сложного оборудования, являются недостаточно точными. Часто большие затруднения встречаются при определении моментов инерции массивных деталей, имеющих круглое очертание (шкивы, колеса), а также при определении моментов инерции деталей, узлов и приведенных моментов инерции движущихся частей рабочих машин, не производя демонтажа самих машин.

Предлагаемые ниже некоторые новые методы и приборы, служащие для экспериментального определения моментов системы, на ряду с их простотой, позволяют получить результаты с достаточной для целей практики точностью.

1. Первый так называемый способ качения состоит в том, что шкив радиуса R и веса Q спускают без начальной скорости по наклонной плоскости с высоты h (рис. 1). Продолжительность качения шкива t на заданном расстоянии S измеряется с помощью электросекундомера с точностью до 0,01 сек. С этой целью вдоль наклонной плоскости укладываются провода. При качении шкив автоматически замыкает и прерывает ток в цепи. Применяя к катящемуся без скольжения шкиву теорему об изменении кинетической энергии на пути S можем написать:

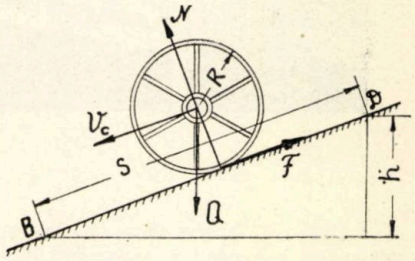


Рис. 1

$$I_c\,\omega^2/2+Qv_c^2/2g=Qh. \qquad \text{(a)}$$

В правую часть уравнения (а) вошла работа веса шкива; работа же двух остальных сил — нормальной реакции N и силы трения F равна нулю, так как реакция N перпендикулярна к плоскости BD, а сила F приложена в полюсе мгновенного вращения.

Считая, что движение шкива центра равноускоренно, получим

$$v_c = 2s/t, \quad \omega = v_c/R = 2s/Rt. \qquad \text{(b)}$$

Подставляя значения v_c и ω в уравнение (а), найдем центральный момент инерции шкива

$$I_c=QR^2(hgt^2-2s^2)/(s^2g). \qquad (1)$$

Чистое качение шкива возможно при условии, когда $f>k/R$, где f и k соответственно коэффициенты трения, скольжения и качения.

Здесь мы пренебрегли сопротивлениями. Получаемая при этом погрешность невелика и не превосходит 1%.

2. Видоизменением изложенного способа является прибор, показанный на рис. 2. Через шкив или специальный обод перекидывают тонкую проволоку или нить, один конец которой закреплен неподвижно на плоскости качения, а к другому концу, перекинутому через малый ролик, прикрепляют падающий груз.

Горизонтальное положение нитей падающего груза может быть отрегулировано с помощью подвижной рамки, которая может быть установлена в любом положении по вертикали при помощи специальных зажимов.

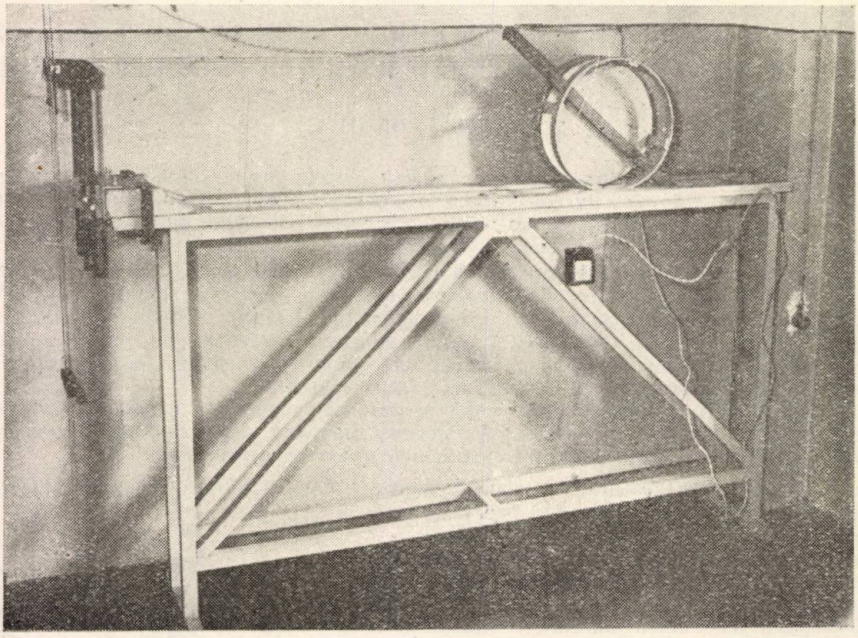


Рис. 2

Отпустив затем груз без начальной скорости, последний будет падать, заставляя шкив или обод с прикрепленной к нему деталью, момент инерции которой хотят определить, катиться по горизонтальным направляющим. Пренебрегая сопротивлениями, и считая падение груза равноускоренным, на основании теоремы кинетической энергии, будем иметь

(c) $$I_c\,\omega^2/2 + (Q + 4P)\,v^2/(2g) = Ph$$

где

(d) $$v = h/t \quad , \quad \omega = h/(Rt)\,.$$

Величинами, полученными из опыта, являются — вес груза P, высота его падения h, время падения t, вес шкива Q и его радиус R.

Из уравнений (c) и (d) находим, что центральный момент инерции шкива равен

(2) $$I_c = [2P(gt^2 - 2h) - Qh]\,R^2/h.$$

Для оценки влияния сил трения и сопротивления воздуха шкив или обод заставляют катиться два раза при падении двух различных грузов P_1 и P_2. Величинами, полученными из опыта, являются веса грузов P_1 и P_2, высота их падения h, время падения грузов t_1 и t_2, вес шкива Q и его радиус R.

Считая работу сил сопротивления A_c в обоих случаях одинаковой, по теореме кинетической энергии имеем:

$$\text{(e)} \qquad (Q+4P_1)\,v_1^2/(2g)+I_c\,\omega_1^2/2 = P_1 h - A_c \ , \quad (Q+4P_2)\,v_2^2/(2g)+I_c\,\omega_2^2/2 = P_2 h - A_c \ .$$

Исключая из уравнений (e) работу A_c, и принимая во внимание равенства (d), определим момент шкива

$$\text{(3)} \qquad I_c = R^2\,[2g\,t_1^2\,t_2^2\,(P_1-P_2) - Ph\,(t_2^2-t_1^2) - 4h\,(P_1\,t_2^2 - P_2\,t_1^2)]/\,gh\,[(t_2^2-t_1^2)] \ .$$

Качение шкива будет происходить без скольжения при условии $f > k/(2R)$.

Если указанным способом требуется определить момент инерции какой-либо детали, пользуясь вспомогательным ободом, то из правой части равенства (3) следует вычесть момент инерции обода I_0. Как и в предыдущем случае время падения грузов регистрируется электросекундомером. С этой целью с двух сторон к падающему грузу прикрепляются скользящие контакты, которые, имея хорошее соприкасание с, изоли-

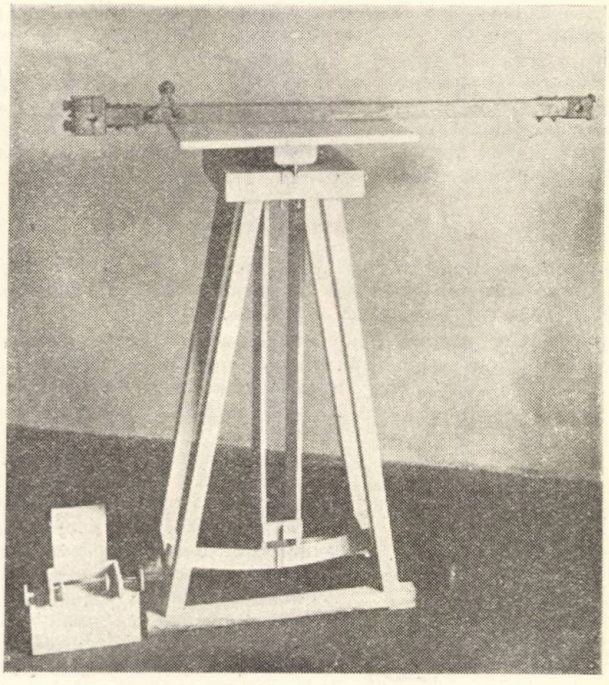


Рис. 3

рованными по концам, гладкими вертикальными медными проволоками, при падении груза автоматически замыкают и прерывают ток в цепи.

В большинстве случаев можно пользоваться равенством (2), которое позволяет определять моменты инерции деталей с точностью до 2%.

3. Моменты инерции отдельных частей машин, имеющих любую форму, могут быть определены с помощью маятникового прибора, общий вид которого, с шатуном, момент инерции которого хотят определить, показан на рис. 3. Маятник отклоняют от вертикали на малый угол φ (до 30°) и предоставляют ему свободно колебаться с прикрепленной к нему деталью. Пренебрегая затуханием и считая колебания гармоническими по формуле периода колебаний физического маятника, найдём, что центральный момент инерции детали будет

$$I_c = \tau^2 [P\xi_s - Q(a+b)] / \pi^2 - Q(a+b)^2/g - I_{\text{М}} \tag{4}$$

где P и Q — соответственно веса маятника и детали, ξ_s — расстояние от оси вращения до центра тяжести маятника, a и b — соответственно расстояния от поверхности платформы до оси вращения и центра тяжести детали, τ — период колебаний.

С увеличением веса деталей величина ξ_s уменьшается, что увеличивает погрешность. Поэтому при определении моментов инерции массивных деталей, к концу маятника следует прикреплять дополнительные противовесы, или платформу с деталью помещать ниже оси вращения маятника. В этом случае целесообразно также опорную призму заменить полой стальной трубой, с двумя опорными шариковыми подшипниками на концах.

В зависимости от величины сопротивлений и ξ_s данный прибор дает возможность определить момент инерции деталей с точностью от 1 до 4%.

4. В тех случаях, когда требуется определить момент инерции детали, совершающей вращательное движение (молотильный барабан, ротор и пр.), не снимая этой детали с подшипников, удобно на ось вращения такой детали насадить жестко дополнительный маятник, в виде, например, стержня с грузом на конце. Тогда такая система будет представлять физический маятник. Зная период его колебаний τ, вес дополнительного маятника Q, расстояние от оси вращения до центра тяжести дополнительного маятника h, момент инерции дополнительного маятника относительно оси вращения I_0 и, пренебрегая трением, найдем, что момент инерции детали по формуле периода качаний физического маятника будет

$$I = \tau^2 Qh / 4\pi^2 - I_0. \tag{5}$$

Изложенный способ применяется лабораторией кафедры теории механизмов и машин МАИ. Здесь момент сил трения в подшипниках не учитывается, что увеличивает погрешность до 7%, а в отдельных случаях до 12%.

5. Поэтому при определении, например, моментов инерции барабанов зерновых комбайнов С—6 или РСМ—8 лучше применять иной способ, при котором момент сил трения, оставаясь постоянным для двух различных экспериментов, исключается из рассмотрения.

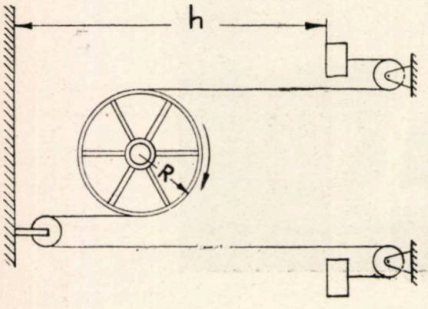


Рис. 4.

При проведении эксперимента на шкив барабана радиуса R (рис. 4), наматывается тонкая проволока, которая перекидывается через три малых ролика. К свободным концам, расположенным на одной горизонтали, подвешивают два одинаковых груза весом P_1 каждый и предоставляют им свободно падать с высоты h. Для исключения постоянного момента сил трения тот же опыт проделывают с грузами другого веса P_2. Момент сил трения в обоих случаях можно считать одинаковым, так как на шкив передается пара сил.

Из опыта находят продолжительность t_1 и t_2 падения грузов в обоих случаях.

Применяя к системе два раза теорему кинетической энергии, будем иметь

$$I\omega_1^2/2 + P_1 v_1^2/g = 2P_1 h - A_{\text{тр}},\quad I\omega_2^2/2 + P_2 v_2^2/g = 2P_2 h - A_{\text{тр}}. \tag{6}$$

Откуда, принимая во внимание равенства (b) и пренебрегая моментом инерции роликов, найдем, что момент инерции барабана со шкивом будет

$$I = R^2 [2h (P_2 / t_2^2 - P_1 / t_1^2) + g (P_1 + P_2)] / [gh (1/t_1^2 - 1/t_2^2)]. \quad (7)$$

Пользуясь равенством (6) можно получить величину момента инерции с точностью до 2%, при условии если соотношение между грузами находится в пределах $P_2 = (1{,}5...2)\ P_1$.

6. Весьма удобным способом определения моментов инерции, получившим большое распространение, является метод двухниточного подвеса (бифиляра). Однако этот метод применяется преимущественно для определения моментов инерции относительно оси симметрии деталей, имеющих форму тел вращения.

При помощи простого прибора этим способом можно также определять моменты инерции относительно центральных осей деталей, имеющих любую форму. Пусть требуется, например, определить момент инерции барабана сепаратора относительно главной центральной оси, перпендикулярной к его оси симметрии.

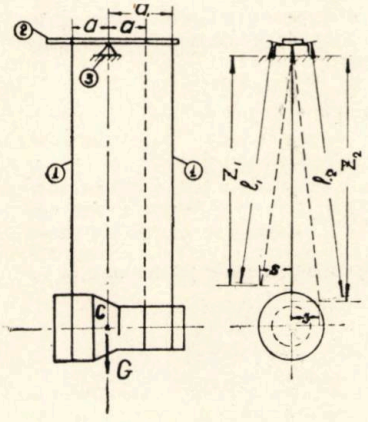


Рис. 5.

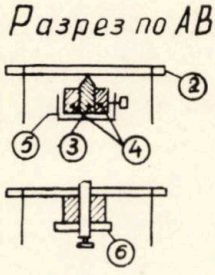


Рис. 6.

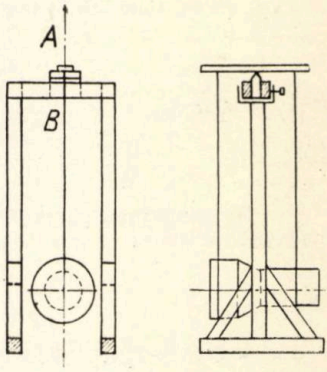


Рис. 7.

Для этого барабана подвешивают с помощью двух вертикальных нитей *1* к планке *2* (рис. 5), опирающуюся на призму *3*, так, чтобы ось барабана была бы параллельна планке и перемещают планку по призме вправо или влево до тех пор, пока при горизонтальном положении планки, система не будет находиться в равновесии. В этом случае линия действия веса барабана G проходит через острие призмы.

Пусть в найденном положении равновесия, нити располагаются на расстояниях a и a_1 от острия призмы.

В приборе (рис. 6 вверху) призма *3* удерживается в равновесии трения, возникающими между боковыми поверхностями призмы и поперечинами *4*, сжимаемыми струбцинкой *5*.

Придерживая в положении равновесия планку *2* левой рукой, делают на ней отметку против острого ребра призмы, затем правой рукой снимают струбцинку, и, надавливая левой рукой на планку, выдавливают призму. После этого планка *2* опирается на две поперечины *4*; в этом положении планка прижимается к поперечинам с помощью шайбы *6* струбцинкой *5* (рис. 6 внизу).

После этого нити располагают на равном расстоянии a от отметки на пластинке, в том месте где пластинка опиралась на призму, когда система находилась в равновесии.

Если, например, $a_1 > a$, как это имеет место в нашем случае (рис. 5), то правую нить перемещают влево до тех пор, пока не будет равенства $a_1 = a$. Общий вид прибора вместе с барабаном, момент инерции которого определяют, показан на рис. 7.

Подвешенному в таком виде барабану сообщают колебания, отклонив его в горизонтальной плоскости на небольшой угол (до 10°).

Введем обозначения: G — вес барабана (детали), I — центральный момент инерции барабана (детали), l_1 и l_2 — длины нитей, $2a$ — расстояние между нитями, z_1 и z_2 — расстояния верхних точек барабана от нижней плоскости планок во время колебания барабана, φ — угол закручивания.

Дифференциальное уравнение колебательного движения барабана (детали) будет:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} - M = 0. \tag{g}$$

Восстанавливающий момент M определится их уравнения элементарных работ:

$$M = \frac{G}{2}\frac{d(Z_1 + Z_2)}{d\varphi}. \tag{h}$$

Пусть, во время колебания барабана (детали) в горизонтальной плоскости, нижние концы нитей отклоняются от первоначальной плоскости нитей на величину $s = a\varphi$, тогда (рис. 5) будем иметь следующие равенства

$$z_1^2 = l_1^2 - a^2\varphi^2\ ,\quad z_2^2 = l_2^2 - a^2\varphi^2. \tag{i}$$

Откуда находим, что

$$\frac{d(z_1 + z_2)}{d\varphi} = -(l_1 + l_2)\,a^2\varphi / l_1 l_2. \tag{j}$$

На основании равенств (h) и (j) перепишем дифференциальное уравнение (g) в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \tag{k}$$

где $k^2 = G(l_1 + l_2)\,a^2 / (2I\,l_1\,l_2)$.

Период этих колебаний будет: $T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{2Il_1l_2 / [G(l_1 + l_2)\,a^2]}$.

Откуда находим, что искомый момент инерции барабана (детали) относительно центральной оси, будет

$$I = (Ta / 2\pi)^2\,G(l_1 + l_2) / (2l_1\,l_2). \tag{7}$$

Прибор позволяет определять центральные моменты инерции деталей с высокой степенью точности в пределах 0,2% до 1%, что очень важно, например, при динамической балансировке быстровращающихся деталей без применения балансировочной установки.

7. Для определения среднего, приведенного, например, к валу барабана момента инерции зернового комбайна С-6 или РСМ-8 применяется установка, состоящая из специального маховика, посаженного на вал, опирающийся на два подшипника. Схематическое изображение такой установки показало на рис. 8, а общий вид на рис. 9 и 10. Для изменения момента инерции маховика к его ободу могут прикрепляться четыре симметрично расположенных дополнительных груза (рис. 10).

На рис. 9 показан общий вид установки без дополнительных грузов на маховике.

Для того, чтобы при изменении момента инерции маховика, момент сил трения в подшипниках установки оставался неизменным, желательно, чтобы дополнительные грузы были бы не съёмными, как это сделано в экспериментальной установке, а могли бы по специальным направляющим перемещаться в радиальном направлении и закрепляться симметрично на маховике в требуемом положении.

Один конец вала маховика может с помощью кулачковой муфты соединяться с валом барабана, а другой конец вала, также при помощи кулачковой муфты, может соединяться с валом, приводимым во вращение 12 кв. электродвигателем типа „Урал".

Маховик установки вместе с валом, муфтами и электродвигателем смонтирован на подвижной раме, которая находится внутри неподвижной рамы и может быть установлена по высоте в любом положении по отношению к неподвижной раме с помощью четырех регулировочных винтов.

Присоединение вала установка в валу барабана производится при помощи специального, надеваемого на шкив барабана, фланца в вырезы которого входят выступы кулачковой муфты вала установки.

Таким образом, после разбега, маховик может быть отключен с помощью кулачковых муфт, как от вала барабана комбайна, так и от вала, приводимого во вращение электродвигателем установки.

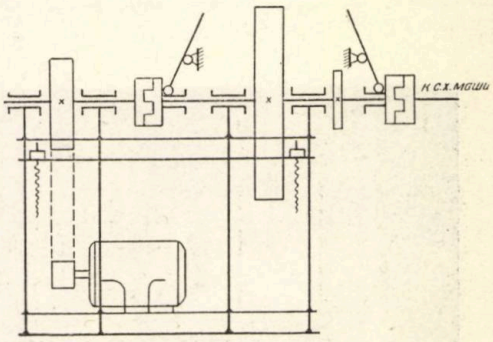


Рис. 8.

При выбеге время каждого оборота маховиков установки записывается на ленте торсиографа с помощью электромагнита, имеющегося на торсиографе и прерывателя, устроенного в форме медной пластинки, набитой на деревянном шкиве вала и двух щеток, соединенных с 4,5 в батареей.

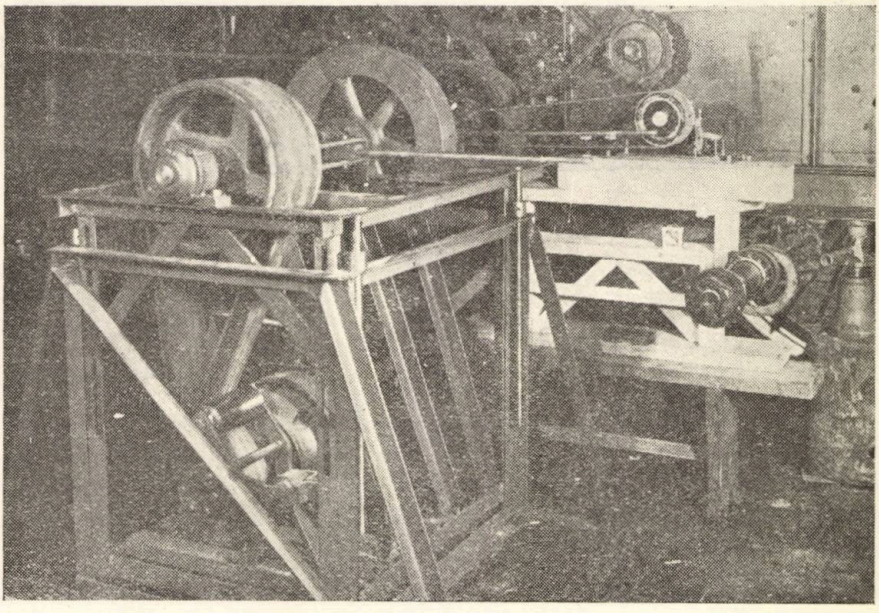


Рис. 9.

Через каждый оборот маховика цепь замыкается, пластинка с записывающим приспособлением притягивается электромагнитом и на движущейся ленте торсиографа получается отметка, соответствующая одному обороту маховика.

Проведение эксперимента заключается в получении четырех торсиограмм или тахограмм методом выбега.

Для этого сначала присоединяют маховик, например, к валу барабана комбайна и снимают при выбеге барабана (вместе с механизмами комбайна), соединенного с маховиком, две торсиограммы-одну без дополнительных, а другую с дополнительными грузами на ободе маховика.

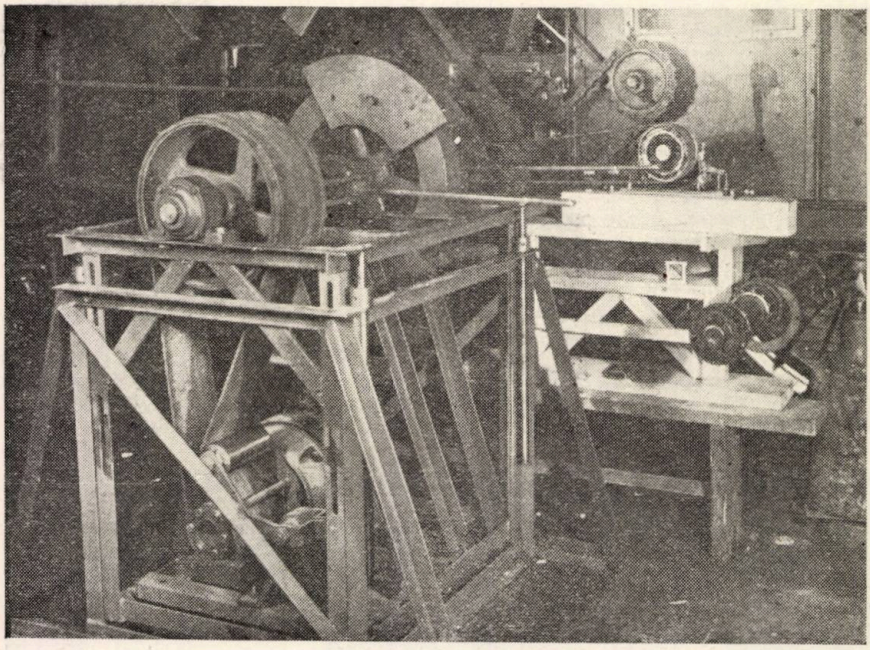


Рис. 10.

Две других торсиограммы при выбеге одного маховика и маховика с дополнительными грузами получают только один раз в начале пользования установкой. Каждый раз при выбеге электродвигатель с помощью муфты отсоединяется от маховика и поэтому не оказывает влияния на полученные результаты.

Введем обозначения: I — приведенный к валу барабана момент инерции движущихся частей комбайна, I_1 и I_2 — моменты инерции маховика установки, ω_1, ω_2, ε_1 и ε_2 — соответственно средние угловые скорости и угловые ускорения при выбеге маховика, соединенного с барабаном, ε_1^* и ε_2^* — средние угловые ускорения при выбеге одного маховика, M_1 и M_2 — моменты сил трения при выбеге маховика, соединенного с барабаном, M_1^* и M_2^* — моменты сил трения при выбеге одного маховика, M — момент сил трения в механизмах комбайна приведенный к валу барабана.

Теорема кинетической энергии в дифференциальной форме для двух случаев выбега маховика, соединенного с валом барабана, может быть записана в виде

$$(1) \qquad d\left[(I+I_1)\,\omega_1^2/2\right] = -M_1\,\omega_1\,dt,\quad d\left[(I+I_2)\,\omega_2^2/2\right] = -M_2\,\omega_2\,dt.$$

Отключив муфту, соединяющую маховик с барабаном, получим для двух случаев выбега маховика следующие уравнения

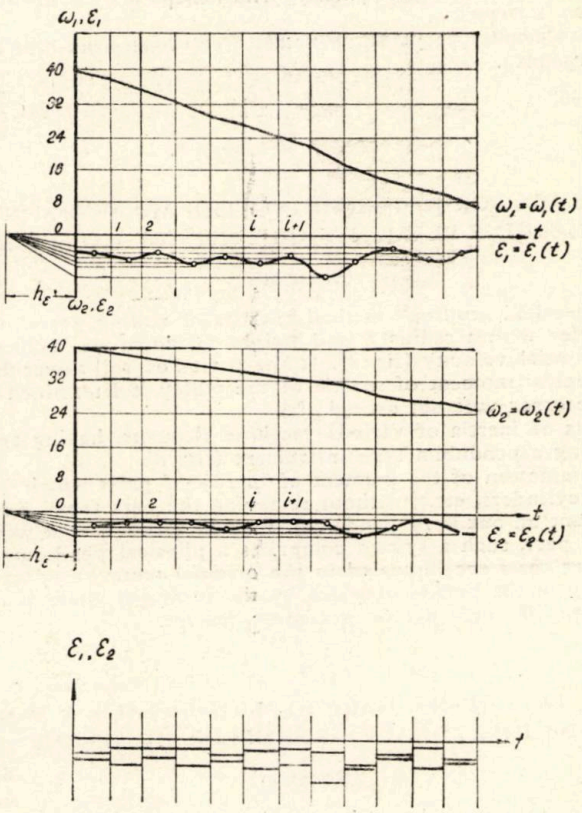
(m) $$I_1 \varepsilon_1^* = -M_1^*, \quad I_2 \varepsilon_2^* = -M_2^*.$$

Между моментами сил трения имеют место соотношения

(n) $$M_1 = M + M_1^*, \quad M_2 = M + M_2^*.$$

Из равенств (1), (m) и (n) получаем

(8) $$I = [I_1 (\varepsilon_1^* - \varepsilon_1) - I_2 (\varepsilon_2^* - \varepsilon_2)] / (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$



Рис, 11.

Значения ε_1, ε_2, ε_1^* и ε_2^* находятся путем графического дифференцирования экспериментальных кривых: $\omega_1 = \omega_1(t)$, $\omega_2 = \omega_2(t)$, $\omega_1^* = \omega_1^*(t)$ и $\omega_2^* = \omega_2^*(t)$, или аналитически, как среднее арифметическое величин

(o) $$\varepsilon_{i, i+1} = (\omega_{i+1} - \omega_i) / \Delta t_{i, i+1}.$$

На рис. (11) приведены кривые выбега ω_1, ω_2 и ε_1 и ε_2 для комбайна С-6.

Если дополнительные грузы вспомогательного маховика будут не съёмными, а перемещающимися в радиальном направлении, то для двух положений таких грузов

расположенных симетрично по отношению к оси вращения маховика в равенствах (1) можем положить $M_1 = M_2$. Исключая из этих равенств сил трения, найдём, что

$$I = (I_2 \varepsilon_2 - I_1 \varepsilon_1) / (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \tag{9}$$

Как видно, равенство (9) значительно проще равенства (8). К тому же при раздвижных грузах на маховике упрощается и проведение эксперимента.

Последний способ даёт возможность, не прибегая к демонтажу механизмов инерции комбайна, определить приведенный момент инерции комбайна с точностью до 3%.

Пользуясь этом способом, можно определить также приведенный момент инерции с учётом его изменения, как функции угла поворота φ, а также с учётом массы перерабатываемого материала.

Точность полученных результатов может быть повышена путем более широкого применения электроники.

Поступило 28 V 1957

МИМЭСХ, Москва, СССР

NEW METHODS FOR DETERMINING THE MOMENTS OF INERTIA OF MACHINE ELEMENTS OR UNITS BY EXPERIMENT

(Summary)

The first, so-called „rolling" method consists of rolling parts of circular forma for instance a pulley with a radius R and weight Q, down an inclined plane from a height h with no initial velocity (fig. 1). If the period of roll t over the given distance s is known, the central moment of inertia of the pulley is determined from the formula where the possible error will not exceed 1%.

The moments of inertia of various machine elements, having any form, may be determined by using a pendulum type instrument (fig. 3).

In the determination of the moment of inertia of parts which rotate în operation (rotors, thrashing cylinders, etc.), without removing the part from its bearings, it is convenient to mount an auxiliary pendulum, such as a rod with a weight, on the axis of rotation of the part, such a system comprises a physical pendulum.

Various other cases are discussed in the original text.

The accuracy of the results obtained by the proposed methods may be considerably increased by the wide use of electronic devices.

NOI METODE DE DETERMINARE EXPERIMENTALĂ A MOMENTELOR DE ÎNERŢIE ALE ORGANELOR DE MAŞINI

(Rezumat)

Autorul expune o serie de metode experimentale de determinare a momentelor de inerţie a organelor de maşini, începînd cu metoda de rostogolire pe un plan înclinat şi terminînd cu acea de folosire a dispozitivelor de tipul unui sau mai multor pendule.

Se evaluează şi limitele erorilor comise.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621-321

ASUPRA MECANISMELOR FĂRĂ LEGĂTURI PASIVE IN SENSUL LUI REŞETOV

DE

OCTAVIAN MUNTEANU şi GH. TUDOR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

1. Introducere

În construcţia de maşini, un rol important îl are costul de fabricaţie şi exploatare a mecanismelor ce intră în compunerea maşinilor.

Legăturile pasive complică mecanismele şi necesită o cheltuială suplimentară de muncă şi timp pentru prelucrare şi ajustări la montaj.

Utilizînd clasificarea cuplelor cinematice dată de L. N. Reşetov [1], [2], [3], în care se ţine seama atît de vitezele relative ale elementelor de cuplă cinematică, cît şi de forţele şi momentele ce pot fi transmise, se studiază mai jos cîteva mecanisme de deosebită importanţă în tehnica inudustrială, arătîndu-se tabelar unele variante posibile, cu indicarea numărului de legături pasive, pentru fiecare.

Pentru proiectare se recomandă alegerea uneia din variantele cu cel mai mic număr de legături pasive.

2. Mecanisme cu camă

Se consideră un mecanism cu camă ce acţionează un tachet, ce se sprijină pe contur prin intermediul unei role, a unei ciuperci de forma unei calote sau printr-un platou plan (fig. 1 a, 1 b şi 1 c). Mecanismul are $n=3$, $p_5=2$, $p_1=1$ (fig. 1 b şi 1 c).

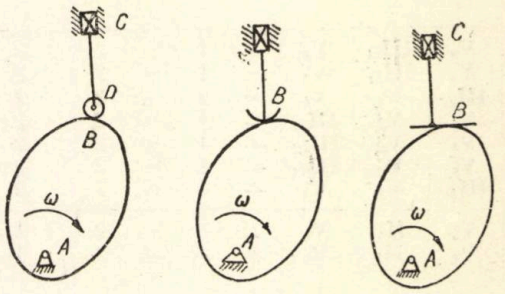


Fig. 1 a Fig. 1 b Fig. 1 c

Conform formulelor lui Cebîşev, pentru mecanismele plane şi Dobrovolski, pentru mecanismele din familia 3-a, rezultă $M=1$.

Deci conform formulei lui Malîşev, adaptată pentru cazul legăturilor pasive,

$$q=1-6.2+5.2+1=0.$$

Mecanismul cu tachet plan se încadrează întocmai în rezultatele de mai sus, întrucît cuplul din B este tot un cuplu de tipul I_2 ca şi în cazul precedent (planul este considerat ca o sferă cu raza infinită sau mai exact un cuplu de tipul I_6, cînd unul din cilindri are raza infinită). Deci, atît în cazul fig. 1 b cît şi în cazul fig. 1 c, $p_1 = 1$.

Dacă tachetul se sprijină pe contur prin intermediul unei role (fig. 1 a), numărul organelor se măreşte cu o unitate şi se introduce un cuplu în plus. În cazul acesta $n = 4$, $p_5 = 3$, $p_1 = 1$.

Conform formulei structurale a lui Cebîşev rezultă $M = 2$, întrucît rola are o mişcare de rotaţie în jurul propriului ax, mişcare care poate fi arbitrară. Rezultă atunci, conform formulei lui Malîşev:

$$q = 2 - 6.3 + 5.3 + 1 = 0$$

Este de remarcat că în toate cele trei cazuri mişcarea organului condus depinde de un singur parametru. (În ultimul caz rola are o

Tabelul 1

Variante posibile

Cuple cinematice			Nr. de cuple cinematice şi clasa lor				Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	B	C	p_2	p_3	p_4	p_5	q	
V_3	V_2	V_4	—	—	—	3	4	Necesită o precizie mare a dimensiunilor cuplelor cinematice şi paralelism între axele şi muchiile cuplelor prizmatice.
V_4	V_2	V_3	—	—	—	3	4	
Caz imposibil							3	Niciuna din cuplele de clasa IV nu poate transmite un efort în lungul axei Oy simultan cu o rotaţie completă în jurul acestei axe.
V_3	III_{21}	V_4	—	1	—	2	2	Permite jocuri ale patinei în ghidaje (în jurul axei Oz).
V_4	III_{21}	V_3	—	1	—	2	2	
III_{22}	V_2	V_4	—	2	—	2	2	Permite jocuri ale şurubului faţă de batiu, respectiv ghidaj.
V_4	V_2	III_{22}	—	1	—	2	2	
V_4	V_2	III_{42}	—	1	—	2	2	Variantă puţin diferită de precedenta.
V_3	V_2	III_{41}	—	1	—	2	2	Nu permite transmiteri de eforturi axiale prea mari.
III_{41}	V_2	V_3	—	1	—	2	2	
V_3	II_4	V_4	1	—	—	2	1	Piuliţa este asigurată contra rotirii prin aripele care formează cu ghidajul o cuplă de clasa II.
V_4	II_4	V_3	1	—	—	2	1	
III_{41}	V_2	III_{22}	—	2	—	1	0	Variante fără legături pasive. Nu se pot transmite eforturi axiale mari.
III_{22}	V_2	III_{42}	—	2	—	1	0	
V_4	III_{21}	III_{22}	—	2	—	1	0	Nu sînt recomandabile, neprezentînd siguranţă în funcţionare.
V_4	III_{21}	III_{42}	—	2	—	1	0	

mişcare proprie arbitrară ce nu influenţează mobilitatea mecanismului fn ansamblu).

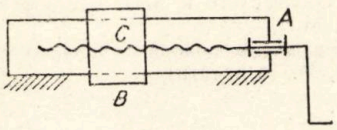


Fig. 2.

3. Mecanismul cu şurub (fig. 2).

Conform formulei lui Dobrovolski pentru mecanismele din familia 4-a, mecanismul are $M = 1$, avînd trei organe şi trei cuple cinematice. Variantele posibile sînt indicate în tabelul 1.

4. Mecanismul culisă dreaptă de translaţie

Mecanismul se compune din patru organe şi patru cuple cinematice (fig. 3). Conform formulei structurale a lui Dobrovolski pentru mecanismele din familia 3-a, gradul de mobilitate este $M = 1$. Variantele posibile sînt indicate în tabelul 2.

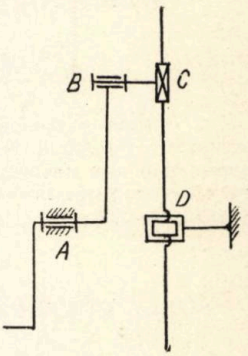


Fig. 3

Tabelul 2

Variante posibile

Cuple cinematice				Nr. de cuple cinematice şi clasa lor				Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	*B*	*C*	*D*	p_2	p_3	p_4	p_5	*q*	
V_3	V_3	V_2	V_2	—	—	—	3	4	Necesită prelucrări foarte precise.
V_3	V_3	V_2	IV_3		—	1	3	2	La prelucrări necorespunzătoare, apar presiuni în cuple şi frecări, care scad randamentul.
V_3	V_3	IV_3	V_2	—	—	1	3	2	
V_3	IV_3	V_2	V_2	—	—	1	3	2	
IV_3	V_3	V_2	V_2		—	1	3	2	
V_3	V_3	IV_3	IV_3	—	—	2	2	1	Axele geometrice ale cuplelor *A* şi *B* trebuie să fie paralele, planul de mişcare al culisei trebuie să fie paralel cu planul de rotaţie al manivelei.
V_3	IV_3	V_2	IV_3	—	—	2	2	1	
IV_3	V_3	V_2	IV_3	—	—	2	2	1	
V_3	IV_3	IV_3	V_2	—	—	2	2	1	
IV_3	V_3	IV_3	V_2	—	—	2	2	1	
IV_3	IV_3	V_2	V_2	—	—	2	2	1	
III_{22}	V_3	IV_2	V_2	—	1	1	2	0	Perechea sferică permite jocuri care oferă posibilitatea de a compensa lipsa de precizie în montarea sau ajustarea cuplelor cilindrice.
III_{22}	V_3	V_2	IV_3	—	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	V_2	IV_3	—	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	IV_3	V_2	—	1	1	2	0	
IV_3	IV_3	V_2	IV_3	—	—	3	1	0	
IV_3	V_3	IV_3	IV_3	—	—	3	1	0	
V_3	IV_3	IV_3	IV_3	—	—	3	1	0	La fel se comportă cupla cilindrică.
IV_3	IV_3	IV_3	V_2	—	—	3	1	0	

BIBLIOGRAFIA

1. Решетов Л. Н., Bulet. Inst. Polit. Iaşi, 3(7), *3—4*, 1957, pp. 185—194.
2. * * * Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории Механизмов и Машин, под ред. Акад. И. И. Артоболевского и Л. П. Бессонова, АН СССР, Институт Машиноведения, 1958, М.
3. Решетов Л. Н., Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам ТММ, АН СССР, Институт Машиноведения, М. (в печати)

О КОНСТРУИРОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ БЕЗ ПАССИВНЫХ СВЯЗЕЙ В СМЫСЛЕ РЕШЕТОВА

(Резюме)

Авторы развивают основы конструирования рациональных механизмов, положенные в [1]...[3] Л. Н. Решетовым, излагая в табличной форме разновидности некоторых плоских механизмов с указаниями числа пассивных связей. Статья заканчивается некоторыми замечаниями о преимуществах разновидностей механизмов без пассивных связей.

SULLA COSTRUZIONE DEI MECCANISMI PRIVI DI LEGAMI PASSIVI NEL SENSO DI RESETOV

(Sunto)

Seguendo la teoria della contruzione dei meccanismi razionali esposta da Resetov [1]...[3], si presentano in forma tabellare le variante di alcuni meccanismi piani con le indicazioni del numero di legami passivi. Si sottolineano poi i vantaggi dei meccanismi privi di legami passivi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

536.212.3

DIE WÄRMELEITFÄHIGKEIT VON SAND, MÖRTELN UND ZIEGELN IN ABHÄNGIGKEIT VON DER MATERIALFEUCHTIGKEIT

VON

TEODOR CÂMPAN, AURELIAN SIMIONESCU und D. ANGHELACHE

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der Technischen Hochschule Jassy, 26-29 Juni 1958

Es ist gut bekannt die Tatsache, dass gegenwärtig die Fragen der Wärmewirtschaft eine grosse Bedeutung sowohl für die Technik im allgemeinen, als auch insbesondere für Bauten verschiedener Art bekommen haben. Hinsichtlich der Bauten, die Wärmeverluste durch die Wände, die einerseits die Ökonomie des Brennmaterials, sowie anderseits die Behaglichkeit und die Gesundheitsbedingungen beeinflussen, hängen unmittelbar von den thermischen Parametern des Baumaterials ab. Der wichtigste unter diesen ist die Wärmeleitfähigkeit λ.

In der Fachliteratur ([3]... [9], [11]) sind Werte für diese Wärmeleitfähigkeit angegeben, aber ohne systematische Bestimmungen in Bezug auf die Abhängigkeit dieses Stoffwertes von der Feuchtigkeit des Materials. Ausserdem experimentelle Bestimmungen über die Wärmeleitung der im Lande bearbeiteten Baumaterialien sind ausserordentlich wenig da.

Dieser Sachlage zufolge wurden im Thermotechnischen Laboratorium der Technichen Hochschule Jassy systematiche Messungen über die thermischen Parameter — Wärmeleitfähigkeit λ und speziffische Wärme c der verschiedenen, heutzutage verwendeten Baumaterialien, wie Sand, Mörtel, Ziegel, u. s. w., vorgenommen. Insbesondere wird die Abhängigkeit dieser Stoffwerte von der Feuchtigkeit des Materials bestimmt. Die erhaltenen Ergebnisse wird man sowohl für das Studium der thermischen Eigenschaften von Bauwänden, wie auch als Entwurfswerte für die Wärmeberechnung der Gebäude benützen können. In der vorliegenden Arbeit sind die Messergebnisse über die thermischen Parameter von Fluss — und Bergwerksand, von je vier Mörtelsorten, nach C — 1952 Entwurfsnormen [2], mit Fluss — bzw. mit Bergwerksand zusammengestellt und von gewöhnlichen Ziegeln (Ziegel Fabrik Ciurea) dargelegt.

1. Methode und experimentelle Anordnung

Die Wärmeleitfähigkeit wurde nach der von Prof. Dr. T. I. Câmpan angegebenen Methode der Kontakttemperaturen, die in einer früheren Arbeit ausführlich beschrieben wurde [1], bestimmt. Die Methode beruht auf die Tatsache, dass, wenn zwei verschiedenartige Körper, mit gleichförmigen inneren Strukturen, deren Stoffwerte λ_1, c_1, γ_1 und λ_2, c_2, γ_2 sind, mit den gleichförmigen Anfangstemperaturen t_1 und t_2, zur Berührung gebracht werden, die Temperatur t_m an der mittleren Zone

der Trennungsfläche während einer bestimmten Zeitdauer konstant bleibt, unter der Bedingung dass die Berührung der zwei Körper vollkommen ist. Betrachtet man nun den Körper *1* als Messkörper, den Körper *2* als Probekörper, so ist die Wärmeleitfähigkeit λ_2 des Probekörpers durch die Gleichung $\lambda_2 = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^2 \frac{\lambda_1 c_1 \gamma_1}{c_2 \gamma_2}$ gegeben. Hierin bedeuten: λ-die Wärmeleitfähigkeiten, c-die spezifischen Wärmen, γ-die spezifischen Gewichte der betreffenden Körper und $\vartheta_1 = t_1 - t_m$, sowie $\vartheta_2 = t_m - t_2$, die Differenzen zwischen den Anfangstemperaturen der zwei Körper und der konstanten Temperatur der Berührungsfläche.

Die Abb. 1 stellt schematisch die experimentelle Anordnung dar, in der Stellung wo die Berührungsflächentemperatur t_m gemessen wird.

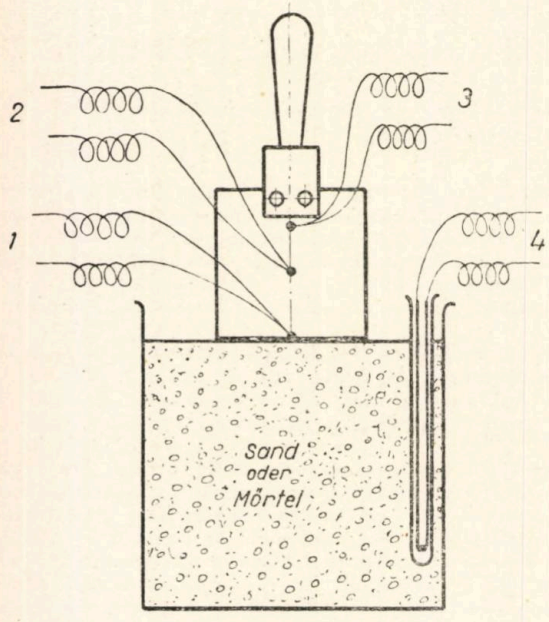


Abb. 1. — Die experimentelle Anordnung

Der Messkörper ist ein kubischer Marmorblock, dessen Kantenlänge etwa 10 cm beträgt. Dicht an der unteren Fläche des Messkörpers angeklebt befindet sich das etwa 0,15 mm dünne Metallblatt, dessen mittlerer Teil, in Form einer kreisrunden Scheibe, vom Rest durch einen kreisförmigen, 1 mm breiten Zwischenraum abgesondert ist. Die Thermoelemente *1*, *2* und *3* werden für die Prüfung der gleichförmigen Erwärmung des Messkörpers verwendet. Der Probekörper, Sand oder feuchter Mörtel, ist in einem 15 cm weiten und 16 cm hohen Aluminiumgefässe eingeführt. Das Thermoelement *4* kann entweder an der Oberfläche oder, mittels eines eigens befestigten Glassrohres, im Innern des Probekörpers angebracht werden. Sämtliche Temperaturen wurden im Bezug auf die Temperatur des Thermoelementes *4*, das auch als kalte Lötstelle diente, abgelesen.

Das Messungsverfahren wird gewöhnlich folgenderweise vollgeführt. Der Probekörper hat die Umgebungstemperatur t_2 des Arbeitszimmers. Der Messkörper wird in einem einfachen doppelwändigen Behälter bis auf eine bestimmte gleichförmige Temperatur t_1 erwärmt. Nach der Prüfung der Gleichförmigkeit der Temperaturen t_1 und t_2, und nachdem das Galvanometer im Stromkreise der Thermoelemente *1* und *4* eingeschaltet wurde, wird der Messkörper vom Erwärmungsbehälter herausgenommen und auf den Probekörper fest hingesetzt. Gleichzeitig

wird die Stopuhr im Laufe gesetzt. Man liest dann, nach regelmässigen Zeitintervallen die Angaben des Galvanometers ab, die den Wert der Kontakttemperatur t_m im Bezug auf t_2 bestimmen. Für die Berechnung der Leitfähigkeit λ wurden nur die nach 4...5 Minuten abgelesenen t_m - Werte betrachtet. Der gesamte Temperaturunterschied $t_1 - t_2$ wurde von 10 bis 30°C gewählt.

Man erhält einwandfreie, zusammenhängende Ergebnisse solange die Berührung an der Trennungsfläche der zwei Körper vollkommen ist. Das tritt immer ein, wenn man mit Sand oder mit feuchtem, weichem Mörtel, oder, bei den festen Körpern, mit gut geschliffenen Flächen arbeitet. Um eine befriedigende Berührung mit rauhen Flächen, wie im Falle des harten, trockenen Mörtels, herzustellen, haben die Verfasser auf die Messoberfläche des Probekörpers eine dünne Schicht aus einer weichen Paste, z.B. sehr weichen Weizenmehlteig, kurz vor der Herstellung der Berührung angebracht. Der Einfluss dieser dünnen, nachträglichen Schicht an der Trennungsfläche, besteht in der Tatsache dass der endgültige Wert der Temperatur t_m tritt eine bis zwei Minuten später als ohne Schicht ein.

Die speziffische Wärme c, sowohl des trockenen als auch des feuchten Materials wurde mit einem Wasserkalorimeter nach der Mischungsmethode bestimmt. Um die Wärmeverlusste durch das Verdunsten des feuchten Stoffes zu vermeiden, wurde der ganze Kalorimeter auf die Temperatur 28°C erwärmt, während die Anfangstemperatur der Messprobe gleich der Umgebungstemperatur (etwa 15°C) eines kalten doppelwändigen Behälters war.

Da nun die Messproben in Gefässen mit regelmässiger Gestalt enthalten waren, wurde das speziffische Gewicht γ (es handelt sich hier um das Raumgewicht der verwendeten Stoffe) mit Hilfe der Wägung und der Volumenmessung ausgeführt. Die Feuchtigkeit wurde aus dem Gewichtsverhältnis

$$\frac{\text{Wassergehalt}}{\text{Gesamtgewicht des Materials}}$$

in Prozenten berechnet. Der Wassergehalt wurde als die Gewichtsdifferenz zwischen der feuchten und der ganz trockenen Probe bestimmt.

2. Ergebnisse

Die erhaltenen Ergebnisse sind in der Tafel 1 zusammengefasst. Der Verlauf der Kurven in Abb. 2 stellt in anschaulicher Weise die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Feuchtigkeit dar. Sowohl die numerischen Werte der Zahlentafel, als auch der Kurvenverlauf in der Abb. 2 bringen folgende Erscheinung zutage:

Der Fluss-Sand, der im ganz trockenen Zustande die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}221$ Kcal/mh°C hat, mit 17,5 prozentigen Wassergehalt erreicht eine etwa sieben mal grössere Leitfähigkeit, das ist $\lambda = 1{,}61$ Kcal/m h °C. Beim Bergwerksand, dessen Kornstruktur feiner ist, nimmt die Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 0{,}215$ im ganz trockenen Zustande bis auf $\lambda = 1{,}585$ mit einem 19,5 prozentigen Wassergehalt zu, das heisst ebenfalls sieben mal. Zu bemerken ist es, dass beim gleichen Wasser-

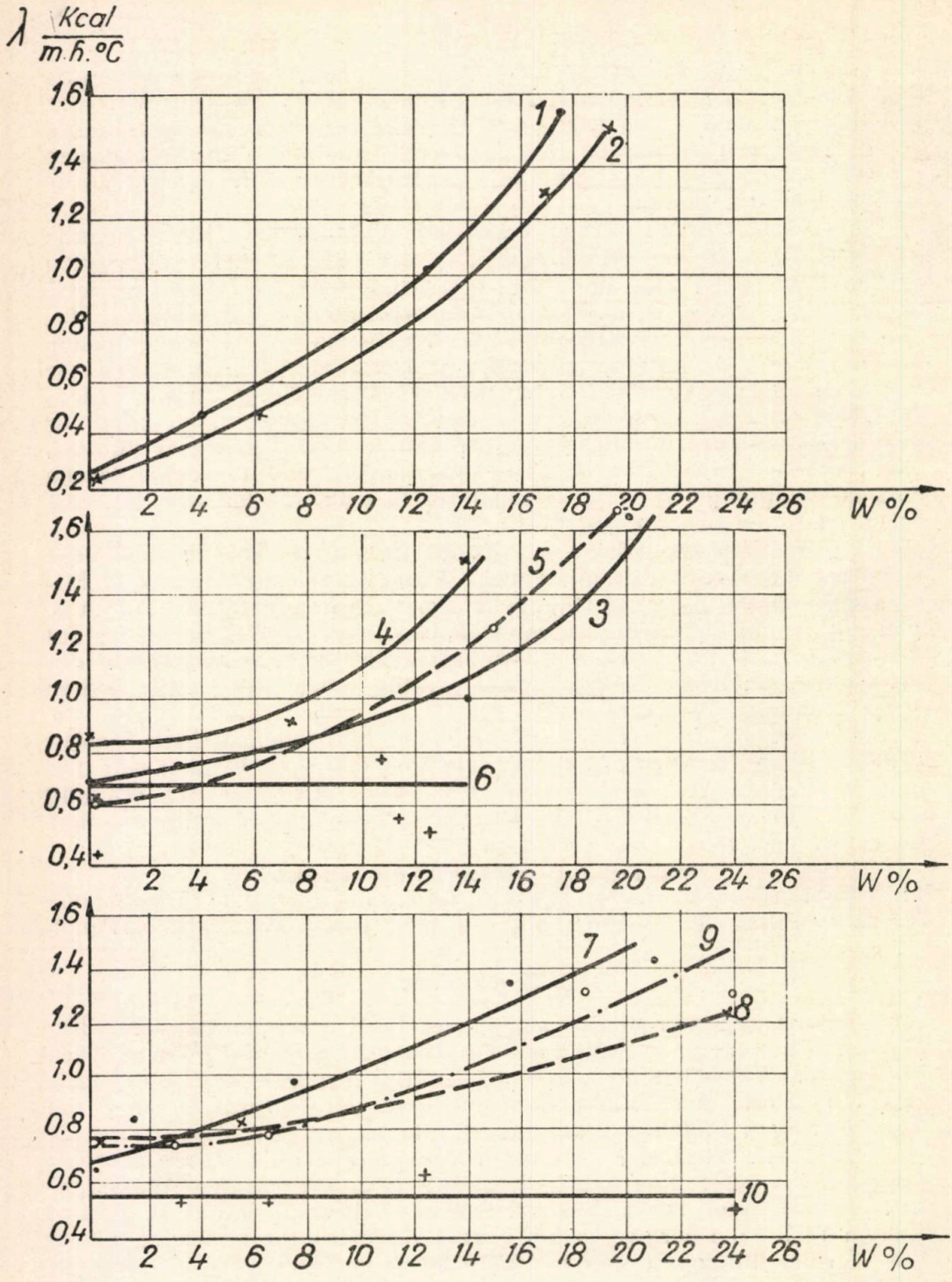


Abb. 2. Die Zunahme der Wärmeleitfähigkeit mit dem Wassergehalt der Stoffe. Kurve 1: Fluss-Sand; Kurve 2: Bergwerk-Sand; Kurven 3...6: Mörtel mit Fluss-Sand (siehe Tafel 1); Kurven 7...10: Mörtel mit Bergwerk-Sand (siehe Tafel 1).

Tafel 1

Zusammenfassende Zahlentafel der erhaltenen Ergebnisse

Nr.	Baumaterialien	W %	γ Kg f / m³	c K cal / kg °C	λ K cal / m h °C
1.	Fluss-Sand	17,5	1664	0,355	1,61
		12,33	1594	0,315	1,016
		4	1423	0,23	0,466
		0	1397	0,223	0,221
2.	Bergwerk-Sand	19,5	1688	0,39	1,58
		17,0	1626	0,365	1,316
		6,20	1446	0,26	0,472
		0	1357	0,20	0,215
3.	Mörtel:	20,6	1860	0,32	1,70
	Kalk . . . . . 0,22 m³	15,5	1760	0,28	1,00
	Fluss-Sand . 1,06 m³	6,17	1657	0,21	—
	Wasser . . . 0,26 m³	3,13	1605	0,19	0,76
		0	1555	0,17	0,74
		0	1555	0,17	0,69
4.	Mörtel:	29,5	1720	0,43	—
		23,2	1672	0,37	—
	Kalk . . . . . 0,66 m³	13,97	1550	0,29	1,52
	Fluss-Sand . 0,67 m³	7,37	1420	0,23	0,92
	Wasser . . . . 0,17 m³	0	1313	0,17	0,87
5.	Mörtel:	19,7	1875	0,35	1,73
	Kalk . . . . . 0,32 m³	15,4	1778	0,31	1,29
	Fluss-Sand . 0,96 m³	9,75	1687	0,27	—
	Wasser . . . . 0,24 m³	6,63	1610	0,24	—
	Zement . . 50 kg	0	1510	0,185	0,61
6.	Mörtel:	15,3	1880	0,28	—
	Kalk . . . . . 0,05 m³	12,4	1838	0,26	—
	Fluss-Sand. . 1,00 m³	11,4	1823	0,25	0,56
	Wasser . . . . 0,25 m³	10,8	1768	0,24	0,78
	Zement . 400 kg	0	1595	0,16	0,62
7.	Mörtel:	21,2	1858	0,36	1,422
	Kalk . . . . . 0,22 m³	15,6	1718	0,31	1,36
	Bgw.-Sand . 1,06 m³	7,54	1615	0,24	0,99
	Wasser . . . 0,26 m³	1,24	1530	0,19	0,84
		0	1530	0,18	0,66
8.	Mörtel:	29,8	1700	0,46	1,25
		24,0	1642	0,39	1,25
	Kalk . . . . . 0,66 m³	17,3	1510	0,32	—
	Bgw.-Sand . 0,67 m³	5,3	1345	0,21	0,82
	Wasser . . . . 0,17 m³	0,57	1290	0,17	0,78
		0	1275	0,16	—
9.	Mörtel:	24	1800	0,40	1,305
	Kalk . . . . . 0,32 m³	18,4	1700	0,35	1,36
	Bgw.-Sand. . 0,96 m³	12,3	1600	0,29	—
	Wasser . . . . 0,24 m³	6,6	1505	0,23	0,78
	Zement . . 50 kg	3,2	1450	0,23	0,76
		0	1410	0,17	—
10.	Mörtel:	10,35	1829	0,32	0,50
		8,25	1791	0,29	—
	Kalk . . . . . 0,05 m³	7,35	1770	0,28	0,63
	Bgw.-Sand . 1 m³	5,67	1735	0,26	0,54
	Wasser . . . . 0,25 m³	3,58	1710	0,24	0,51
	Zement . . 400 kg	0	1645	0,21	0,67
11.	Ziegel	14,7	1936	0,363	1,212
		0	1651	0,227	0,45

gehalt, die Wämerleitfähigkeit des Bergwerk-Sandes immer mit etwa 10% kleiner als die des Fluss-Sandes ist (Kurven *1* u. *2*).

Die Wärmeleitfähigkeit der Mörtel nimmt ebenfalls mit der Zunahme der Feuchtigheit vom trockenen Zustande bis zu der, die dem für die Zubereitung notwendigen Wassergehalte entspricht, zu (die Kurven *3...6* für Fluss-Sandmörtel, und die Kurven *7... 10* für Bgw. Sandmörtel). Bei einfachen Mörteln und bei denen mit kleinen Zementgehalt, geht die Zunahme der Leitfähigkeit bis auf den zwei- oder dreifachen Werte des trockenen Zustandes hinauf. Es ist jedoch zu bemerken, dass für kleine Feuchtigkeiten, bis auf etwa acht-prozentigen Wassergehalt der Leitfähigkeitszuwachs im allgemeinen genug klein ist, um bisweilen vernachlässigt werden zu können. Die Wärmeleitfähigkeit der Mörtel mit grossen Zementgehalt aber, nach den vorläufigen Bestimmungen, scheint wenig vom Wassergehalt, abzuhängen. Die Wärmeleitfähigkeit der Ziegel (letzte Gruppe in der Taffel 1) wird $\lambda = 1{,}21$ mit einem 14,7 prozentigen Wassergehalt, gegenüber dem Werte $\lambda = 0{,}45$ im trockenen Zustande. Das ist ein um etwa 25% grösserer Wert als die Summe der Leitfähigkeiten des trockenen Ziegels (0,45) und des reinen Wassers (0,50).

Die Zunahme, der Wärmeleitfähigkeit des feuchten Materials bis auf Werte die grösser als die Summe der entsprechenden Leitfähigkeiten der trockenen Bestandteile sind, erklären die Verfasser mit der Annahme, dass das Wasser in Berührung mit den Sand-Körnern im feuchten Sande, oder mit der Tonerde im Inneren der Ziegel, eine Lösung oder eine Mischung erzeugt, die eine eigene grosse Wärmeleitfähigkeit besitzt

Die spezifische Wärme, wie auch zu erwarten ist, nimmt mit dem Wasergehalt der Stoffe gleichmässig zu.

3. Zussammenfasung

Die Methode der Kontakttemperaturen für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit lässt sich bequem und mit gutem Erfolge auf Baumaterialien, insbesondere auf feuchte Stoffe, anwenden. Die Wärmeleitfähigkeit nimmt im allgemeinem stark mit dem Wassergehalt der Baustoffe zu. Die Leitfähigkeit der zwei Sandarten, mit 17,5 bzw. 19,5 prozentigen Wassergehalt, nimmt bis auf etwa das siebenfache des Wertes im trockenen Zustande zu. Bei den Ziegeln geht diese Zunahme nur bis auf etwa das dreifache hinauf.

Die Wärmeleitfähigkeit der Mörtel ohne Zement oder mit kleinem Zementgehalt nimmt bei kleiner Feuchtigkeit nur wenig zu; erst für einen grösseren als 8- prozentigen Wassergehalt wird der Leitfähigkeitszuwachs beträchtlicher.

Technische Hochschule Jassy,
Lehrstuhl der Thermotechnik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Cîmpan T., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **3** (**7**), *3—4*, pp. 215—222.
2. * * * *Norme de deviz pentru construcţii de clădiri şi construcţii industriale*, ESAC, Buc., 1952, p. 166.
3. Михеев М. А., Основы теплопередачи, ГЭИ, М.—Л., 1956 стр. 371.
4. * * * Теплофизические свойства веществ, ГЭИ, 1956, стр. 322.
5. Gröber / Erk, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer—Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955, S. 76.
6. Schmidt E., *Einführung in die technische Thermodynamik*, Springer—Verlag, Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1956, S. 340.
7. Фокин К. Ф., Строительная теплотехника ограждающих частей зданий, Госстромиздат 1954, стр. 304.
8. * * * Теплотехнические справочник, М.—Л., 1957, стр. 268.
9. Чиркин В. С., Теплопроводность промышленых материалов, Машгиз, 1957, стр. 150.
10. Cîmpan T., Simionescu A., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1956, **2**(**6**), 3—4, pp. 287—288.
11. Vlădea I., *Bazele teoretice ale termotehnicii*, Ed. tehn., Buc., 1957, vol. II, p. 186.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЕСКА, СТРОИТЕЛЬНЫХ РАСТВОРОВ И КИРПИЧА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИХ ВЛАЖНОСТИ

(Резюме)

Метод контактных температур для определения теплопроводности может быть применяем легко и с хорошими результатами к строительным, и в особенности влажным, материалам. По полученным авторами результатам следует, что теплопроводность указанных материалов, вообще, растет с повышением их влажности. Таким образом, теплопроводность двух исследуемых состояний песка, при влажности в 17,5%, соответственно 19,5%, растет, приблизительно, в 7 раз по сравнению с сухим состоянием. У нового кирпича с влажностью 14,7% этот рост достигает до в 3 раза больще сухого состояния. Теплопроводность строительных растворов не содержаюих, или с малым количеством цемента, растет слабо при слабой влажности : только при влажности превышающей 8% рост ее становится значнтельным.

Объяснение рисунков

Рис. 1. Экспериментальный прибор.
Рис. 2. Рост теплопроводности в связи с влажностью материала :
Кривая 1: Речной песок.
Кривая 2: Карьерный песок.
Кривые 3...6 : Строительный раствор речного песка (см. таблица 1).
Кривые 7...10 : Строительный раствор карьерного песка (см. таблица 1).

CONDUCTIVITATEA TERMICĂ A NISIPULUI, MORTARELOR ŞI CĂRĂMIZILOR ÎN FUNCŢIE DE UMIDITATEA MATERIALULUI

(Rezumat)

Metoda temperaturilor de contact pentru determinarea conductivităţii termice poate fi aplicată comod şi cu bune rezultate la materialele de construcţie şi mai ales la materialele în stare umedă. Rezultatele obţinute de către autori arată că în general, conductivitatea termică a acestor materiale creşte repede cu conţinutul lor în apă. Anume,

conductivitatea termică la cele două feluri de nisip cercetate, avînd umiditățile de 17,5% respectiv 19,5% crește pînă la aproximativ de 7 ori valoarea ei în stare absolut uscată. La cărămizile noi, cu 14,7% umiditate, această creștere ajunge cam de 3 ori valoarea din starea uscată. Conductivitatea termică a mortarelor fără ciment, sau cu ciment puțin, crește puțin la umidități mici; abia pentru umidități mai mari de 8% creșterea umidității este considerabilă.

Explicația figurilor

Fig. 1. Dispozitivul experimental.
Fig. 2. Creșterea conductivității termice cu conținutul de apă al materialului.
Curba 1: Nisip de rîu.
Curba 2: Nisip de carieră.
Curbele 3...6: Mortar cu nisip de rîu (vezi tabelul 1).
Curbele 7...10: Mortar cu nisip de carieră (vezi tabelul 1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

536

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ НА ОСНОВЕ ТЕРМОГРАФИИ

Л. Г. БЕРГ и М. Ш. ЯГФАРОВ

В последние годы в развитии одного из методов физико-химического анализа—термографии намечается все больший уклон к применению ее для количественных измерений тепловых величин. Таковы работы Смита, Берга, Аносова, Капустинского, Барского, Вольд, Зуле, Иванова, Сабатье, Эро, Эриксон, Аллисон ([1]., [14] и др.

Излагаемый в настоящей статье метод, разработанный в лаборатории физической химии Казанского филиала Академии наук СССР, также является дальнейшим развитием термографии, позволяющим применить ее для прецизионных измерений тепловых величин. Метод предназначен для одновременного определения тепловых характеристик веществ, т. е. теплоемкости, теплопроводности, температуропроводности и величин тепловых эффектов в функции от температуры.

Метод базируется на законах температурного поля при квазистационарном режиме нагрева. Согласно теории этого режима [15] распределение температуры в твердом теле при линейном нагреве определяется коэффициентом температуропроводности, т. е. величиной прямо пропорциональной теплопроводности и обратно пропорциональной теплоемкости:

$$a = \lambda / C, \tag{1}$$

где a — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, C — объемная теплоемкость.

Коэффициент температуропроводности, таким образом, в условиях квазистационарного режима находится просто из разности температур двух точек:

$$a = vR^2 / [\Gamma (t_п - t_ц)], \tag{2}$$

где v — скорость нагрева, R — радиус (для цилиндра и шара) или половина толщины (для пластинки), Γ — постоянное число (для неограниченного цилиндра $\Gamma = 4$, для шара $\Gamma = 6$, для пластинки $\Gamma = 3$), $t_п$ — температура поверхности, $t_ц$ — температура центра.

Из уравнений (1) и (2) вытекает, что в условиях квазистационарного режима метод, позволяющий раздельно определять одну из величин — теплоемкость или теплопроводность, является методом одновременного определения всех термических характеристик.

Именно эти свойства квазистационарного температурного поля положены в основу описываемого метода. Непосредственно измеряемой величиной, кроме температуропроводности, является теплоемкость. Она определяется путем сравнения температуры исследуемого вещества с температурой вещества „нулевой" теплоемкости (т. е. с теплоемкостью, величиной которой в пределах опыта можно пренебречь) в условиях создания одинаковой теплопроводности для поступления тепла. В качестве вещества „нулевой" теплоемкости служит воздух. Создание равных условий теплопередачи достигается путем помещения исследуемого вещества и эталона в одинаковые условия, а именно, внутрь цилиндра, при осуществлении односторонней, точнее радиальной, передачи тепла. Для достижения между эталоном и образцом разности температур, достаточно большой для осуществления точных измерений, используется способ пропускания теплового потока, поступающего в образец и эталон, через теплоизоляционное вещество.

Практическое оформление установки с использованием этих принципов осуществляется следующим образом.

Блок, в котором проводятся опыты, представляет собой двойной цилиндр; наружный цилиндр изготовляется из хорошо теплопроводного материала (алюминий, жаростойкая сталь), внутренний — из теплоизолятора (шамот, фарфор). Первый цилиндр служит для выравнивания температур по всей длине его, что дает возможность осуществить условия односторонней передачи тепла. Снаружи цилиндра находится спираль нагревателя; таким образом, блок одновременно является и печью. Центральный канал внутри блока-печи разделен на 3 части при помощи теплоизоляционных перегородок: в одну из них помещается исследуемое вещество, в другую—контрольное; третье (среднее) является эталонным воздушным пространством. Контрольным здесь названо вещество с известной и хорошо воспроизводимой теплоемкостью (такими являются, например, металлы). Введение контрольного вещества представляет весьма существенный элемент метода, т. к. оно, вместе с эталонным воздушным пространством, позволяет исключить из расчетных формул все переменные и трудно определяемые факторы, сводя ведение всех расчетов на основе известной теплоемкости контрольного вещества.

Температурное поле в блоке-печи измеряется при помощи трех дифференциальных термопар, одна из которых является комбинированной. Простой спай комбинированной термопары помещается в центре исследуемого вещества. Все остальные спаи термопар укрепляются на внутренней стенке теплоизоляционного цилиндра: эталонные спаи—у воздушного пространства, остальные спаи—у исследуемого и контрольного веществ соответственно. Обычно спаи укрепляются на поверхности тонких металлических оболочек. Для создания условий одинаковой теплопроводности, необходимых по принципу метода, существенно, чтобы изоляция имела правильную цилиндрическую форму и равномерную толщину стенок. В этих условиях, согласно первому закону термодинамики, разность температуры между эталонным воздушным пространством и поверхностью исследуемого вещества (а также контрольного) будет обусловлена лишь величиной теплоемкости исследуемого (соответ-

ственно-контрольного) вещества. Соблюдение условий бесконечного цилиндра, необходимое при измерениях с высокой точностью, требует исключения поступления тепла с торцов цилиндрического образца. Это достигалось применением не одного, а трех образцов исследуемого вещества, расположенных один за другим с небольшой теплоизоляционной перегородкой между ними. Измерения производились в среднем образце, крайние же образцы обеспечивали исключение поступления тепла с торцов.

Математический анализ температурного поля в блоке в условиях квазистационарного режима не представляет особых трудностей. Принцип метода позволяет получать весьма простые расчетные формулы, в которых измеряемыми величинами являются лишь отклонения гальванометров. Например, для вычисления истинной теплоемкости требуется измерить лишь отклонение двух дифференциальных записей от нулевой линии; для вычисления температуропроводности и теплопроводности — соответственно одного и трех.

Конечная расчетная формула для вычисления теплоемкости имеет следующий вид:

$$mc_p = m_{\text{кв}}\, c_{p(\text{кв})}\, L_1 / L_2. \tag{3}$$

Здесь $m_{\text{кв}}\, c_{p(\text{кв})}$ — теплоемкость контрольного вещества для данной температуры, L_1, L_2 — отклонения двух дифференциальных линий, соответствующие ТЭДС двух термопар, одни спаи которых находятся на поверхности исследуемого и контрольного вещества соответственно (в условиях одинаковой чувствительности гальванометров).

Расчетная формула для вычисления теплопроводности выражается точно также весьма простой формулой:

$$A = m_{\text{кв}}\, c_{p(\text{кв})}\, L_1 K / L_2 L_3, \tag{4}$$

где L_3 — отклонение дифференциальной линии, соответствующее падению температуры в исследуемом веществе, K — постоянная величина, определяемая формой и размерами образца ($K = \frac{\ln d_2/d_1}{2\pi l}$, где d_2, d_1 — наружный и внутренний диаметры образца, l — его длина).

Все величины, входящие в правую часть уравнений (2), (3), (4) могут быть измерены с весьма большой точностью. Следовательно, с такой же точностью определяются и термические характеристики исследуемых веществ.

Знание термических констант дает возможность определять величины тепловых эффектов, используя площадь, образуемую на термограмме пиком дифференциальной записи во время процесса. Из уравнения теплопроводности видно, что вычисление количества поступающего тепла сводится к измерению некоторой площади в координатах температура-время и определению коэффициента теплопроводности:

$$Q = 2\pi l\lambda / \ln \left[\frac{d_1}{d_2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \Delta t\, d\tau \right], \qquad \text{(уравнение для цилиндра)}.$$

Определение теплового эффекта упрощается тем, что ему соответствует образуемая во время эффекта площадь пика, заключенная между линией дифференциальной записи и линией, соединяющей начало и конец отклонения дифференциальной записи от установившегося направления. Это обстоятельство позволяет обойтись без определения конца процесса и единственным затруднением в измерении тепловых эффектов термографическим методом остается необходимость определения коэффициента теплопроводности. Последний же, как было показано, в разработанном методе измеряется с большой точностью. Таким образом, метод позволяет одновременно определять все термические константы и величину тепловых эффектов. Измеренияможно проводить с большой точностью, т. к. принцип метода позволяет в конечных расчетных формулах исключить все переменные и трудно измеряемые факторы.

Применение термографии позволяет получать результаты на термограмме в виде объективной записи и функции от температуры. Измерения производились в интервале температур от комнатной до 1000 °С. Продолжительность одного опыта при этом составляла 1,5...3 часа. Метод использовался, кроме непосредственного измерения тепловых величин, также и для различных физико-химических исследований.

Поступило 15 III 1957 Казанский филиал АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith C. S., Am. Inst. Mining Met. Engers, Inst. Metals, Div. Tech., 1939, *1100*, p.9.
2 Берг Л. Г. и Аносов В. Я., ЖОХ, 1942, **12**, стр. 31.
3. Капустинский А. Ф. и Барский Ю. П., Известия сектора физико-химического анализа, 1950, **20**, стр. 317.
4. Барский Ю. П. Труды НИИ стройкерамики, 1953, **8**, стр. 143.
5. Капустинский А. Ф., и Барский Ю. П., Труды I-го совещания по термографии, 1955, стр. 82.
6. Барский Ю. П., Фридман Н. Г. и Ивницкая Р. Е., Труды I-го совещания по термографии, 1955, стр. 87.
7. Vold M. I., Analyt. Chem., 1949, **21**, p. 683.
8. Soule I. L., J. Phys. Radium, 1952, **13**, p. 516.
9. Иванов Д. С., Известия сектора физико-химического анализа, 1954, **25**, стр. 26.
10. Sabatier G., Bull. Soc. franc. Miner., 1954, **77**, pp. 953, 1077.
11. Eypaud C., Technica, 1954, **177**, p. 2.
12. C. r. Ac. Sci. Paris, 1955, **240**, p. 862.
13. Eriksson E., Ann. 1953a, **19**, S. 127; Ann. 1953 b, **20**, S. 117; Ann., 1 54, **21**, S. 189.
14. Allison E. B., Silicates Industr., 1954, **19**, p. 363.
15. Лыков А. В., Теория теплопроводности, 1952, М., Гостехиздат.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE DÉTERMINATION À L'AIDE DE LA THERMOGRAPHIE DES CARACTÉRISTIQUES THERMIQUES ET DES EFECTS CALORIQUES

(Résumé)

Les Auteurs exposent une méthode constituant l'extension ultérieure de la thermographie, appliquable aux mesures de précision des grandeurs thermiques.

O NOUĂ METODĂ DE DETERMINARE PRIN TERMOGRAFIE A CARACTERISTICILOR TERMICE ŞI A EFECTELOR CALORICE

(Rezumat)

Autorii, considerînd un regim de încălzire cvasistaţionar, expun, pe baza legilor cîmpului de temperaturi, o metodă ce constituie o extindere ulterioară a termografiei, aplicabilă în problema determinării cu precizie a mărimilor interesînd termotehnica.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

536.532

O SONDĂ TERMOELECTRICĂ PENTRU MĂSURAREA TEMPERATURILOR DE SUPRAFAŢĂ LA PEREŢI ŞI ALTE CORPURI

DE

TEODOR CÂMPAN şi D. ANGHELACHE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Aparatul şi funcţionarea lui

În literatura de specialitate, manuale şi reviste, atît clasice cît şi moderne, sînt descrise un mare număr de sonde termoelectrice pentru măsurarea de temperaturi ([1]...[4]).

În general, aceste instrumente sînt construite pentru scopuri limitate de cercetare a regiunilor unde nu pot fi utilizate termometrele sau cuplurile termoelectrice obişnnite; de exemplu, pentru suprafeţe plane, pentru suprafeţe curbe, sau pentru interiorul corpurilor solide, etc.

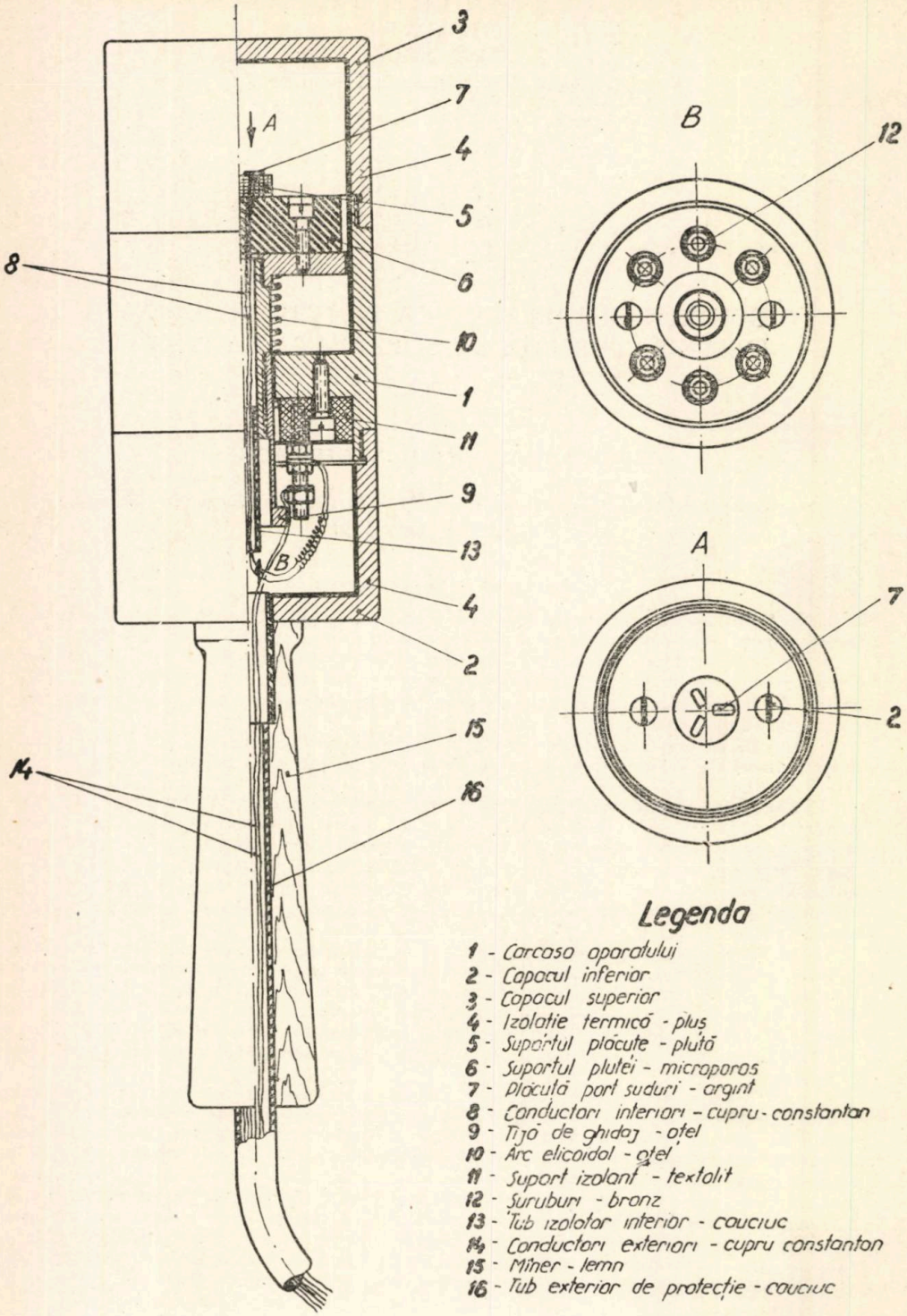
În cele ce urmează este descrisă o sondă termoelectrică construită de către autori pentru măsurarea temperaturii de la suprafaţa corpurilor şi în particular de la suprafaţa pereţilor.

Principial, sonda este formată dintr-un cuplu termoelectric, din sîrme de constantan şi cupru, cu o sudură caldă şi una rece. Particularitatea acestui cuplu constă în faptul că cele două elemente ale lui, adică capetele celor două sîrme, nu sînt sudate direct între ele, ci ambele sînt lipite pe o foiţă de argint, în aşa fel, încît cele două suduri (respectiv lipituri) să aibă între ele o distanţă de cel puţin 1 mm. Foiţa de argint are grosimea de 0,15 mm şi suprafaţa de aproximativ 12 mm^2, greutatea ei fiind de cca 0,02 g.

Deci, atît la sudura caldă cît şi la cea rece, contactul electric între elementele cuplului se face prin corpul foiţei de argint. Foiţele de argint sînt montate pe suporturi potrivite de plută, cu faţa ce poartă sudurile către plute, în aşa fel, încît firele de constantan şi de cupru trec izolat prin masa de plută, către circuitul sistemului. În acest mod, pentru determinarea temperaturii la suprafaţa peretelui sau a corpului, se apasă pe acesta prin intermediul suportului de plută, numai foiţa de argint cu faţa ei liberă.

Atît pentru a asigura protecţia mecanică contra izbiturilor, în timpul măsurătorilor, cît şi mai ales pentru a asigura o inerţie termică mare, la conductele de legătură şi la mecanismele din imediata apropiere a sondelor, acestea sînt montate fiecare, adică atît sudura caldă cît şi cea rece, în interiorul a două carcase masive de oţel, a căror greutate este de 0,950 kg fiecare.

În mod normal, poziţia sondei este astfel aleasă, încît foiţa de argint se află la 2...3 mm deasupra marginei carcasei, cu capacul îndepărtat. Pentru măsurare, una din sonde se aşează pe fundul drept al unui cilindru metalic, care se află scufundat într-o baie de apă, a cărei temperatură este indicată de către un termometru cu mercur; cu alte cuvinte sudura rece capătă temperatura băii prin fundul cilindrului, fără a fi



Legenda

1 - Carcasa aparatului
2 - Capacul inferior
3 - Capacul superior
4 - Izolatie termică - plus
5 - Suportul plăcute - plută
6 - Suportul plutei - microporos
7 - Plăcuță port suduri - argint
8 - Conductori interiori - cupru - constantan
9 - Tijă de ghidaj - otel
10 - Arc elicoidal - otel
11 - Suport izolant - textolit
12 - Suruburi - bronz
13 - Tub izolator inferior - cauciuc
14 - Conductori exteriori - cupru constantan
15 - Miner - lemn
16 - Tub exterior de protecție - cauciuc

Fig. 1. — Secțiune prin dispozitiv

scufundată ea însăşi în apă. A doua sondă, ce poartă foiţa cu sudura caldă, se aşează strîns pe suprafaţa corpului, a cărui temperatură se determină. Fie prin apăsarea cu mîna, la suprafeţele verticale sau înclinate, fie prin apăsarea datorită greutăţii proprii a carcasei la suprafeţele orizontale, sondele, adică foiţele de argint, sînt deplasate pînă la acelaşi nivel cu marginea carcasei fără capac. Resortul de oţel *10* care permite deplasarea dispozitivului ghidat, asigură în acest mod aceeaşi apăsare a foiţei de argint pe suprafaţa de cercetat, în toate punctele de contact.

Firele de cupru şi de constantan sudate la foiţele de argint au diametrele de 0,1 mm, primul şi 0,03 mm, al doilea. Aceste fire conduc numai pînă la interiorul carcasei. Aici ele sînt legate la alte fire, tot de cupru şi constantan, mult mai groase, care formează circuitul exterior. Acest circuit are o lungime de 10 m, pentru a permite astfel o mare libertate de mişcare a sudurii calde faţă de cea rece şi faţă de galvanometru. De altfel, întrucît cele două suduri sînt alcătuite absolut la fel, pentru măsurători, este indiferent care dintre ele este utilizată drept sudură caldă şi care drept sudură rece. Astfel, pentru verificarea datelor obţinute, se schimbă rolul sudurilor, la unele măsurători, în timpul lucrului.

2. Precizia temperaturilor măsurate

În una din lucrările anterioare, efectuată în laboratorul de Termotehnică al Institutului Politehnic din Iaşi [5], s-a arătat posibilitatea de a se măsura în mod fidel temperatura de la suprafaţa corpurilor metalice, cu ajutorul cuplurilor termoelectrice a căror sudură caldă este înlocuită prin contacte mecanice distanţate între capetele firelor elementului şi masa corpului metalic, această masă servind şi de legătură electrică între cele două contacte.

Întrucît în cazul de faţă este vorba mai mult de corpuri izolante din punct de vedere electric, s-a adoptat drept sudură a cuplului, foiţa de argint, apăsată strîns pe suprafaţa corpului cercetat, cu contactele între firele elementului şi foiţă, realizate nu pe cale mecanică, ci prin lipire cu staniu

În cele ce urmează se demonstrează că temperatura punctului de la suprafaţa de cercetat nu este deformată în mod sensibil de către capacitatea calorică a foiţei metalice, adică a sondei, şi de pierderile de căldură prin firele elementului şi prin suportul de plută.

Ca ipoteză, se admite că prin contactul cu sonda este afectat 1 cm^3 de material din perete şi 0,2 cm^3 din partea sondei (suportul de plută). Diferenţa de temperatură între ele, înainte de contact să fie de 10°C. Avînd constantele de materiale cunoscute:

a) greutatea specifică la: tencuială $\gamma_1=1{,}7$ g/cm^3; argint $\gamma_2=10{,}5$ g/cm^3; plută $\gamma_3=0{,}2$ g/cm^3 şi

b) căldura specifică la: tencuială $c_1=0{,}2$ cal/g °C; argint $c_2=0{,}06$ cal/g °C; plută $c_3=0{,}45$ cal/g °C şi socotind greutatea foiţei de argint egală cu 0,02 g, atunci un calcul simplu arată următoarele: capacitatea calorică a 1 cm de tencuială (perete) este de 0,34 cal/cm^3g °C, pe cînd cea a 1 cm^3 de plută plus placa de argint, de cel mult 0,092 cal/cm^3 g °C. Prin urmare, în condiţiile date, cu diferenţa de temperatură de 10°C între cele două corpuri, la echilibrul termic de amestec, pierderea de temperatură a tencuielii prin contactul cu sonda, revine la cel mult 0,3° C.

Dacă se ţine seama că la tencuială conductivitatea termică este $\lambda_1=0{,}67$, iar la plută, în aceleaşi unităţi, $\lambda_3=0{,}033$, deci o conductivitate de aproximativ 18 ori mai mică la plută decît la tencuială (conductivităţile de temperatură fiind aproximativ 0,002-la tencuială şi 0,001-la plută), aceasta înseamnă că o anumită temperatură se propagă în perete cel puţin de două ori mai repede decît în sondă. De aici se trage concluzia că pentru stabilirea echilibrului termic la contactul între sondă şi suprafaţa peretelui, volumul de plută afectat este numai pe jumătate din cît se admite iniţial.

Dacă se ţine cont acum de pierderile de căldură prin firele cuplului, la o diferenţă de temperatură de 10°C, care sînt numai de aproximativ 5.10^{-6} cal/min, deci absolut neglijabile şi de capacitatea calorică a foiţei de argint inclusiv sudura, care este de numai 0,0012 calorii/g °C, se poate admite cu bună aproximaţie că diferenţa între temperatura reală a suprafeţei peretelui şi temperatura indicată de sondă este de cel mult 0,1° la 10° diferenţă de temperatură iniţială între perete şi sondă. Această diferenţă este pozitivă cînd sonda este mai rece decît peretele (adică trebuie adăugată la indicaţiile galvanometrului) şi negativă cînd peretele este mai rece decît sonda.

Întrucît sensibilitatea cuplului este de cca două diviziuni la galvanometru pentru 1°C şi întrucît în cursul mai multor măsurători succesive diferenţa de temperatură între suportul de plută al sondei şi perete se micşorează, diferenţa între temperatura adevărată şi cea indicată de sondă se micşorează şi ea, pînă la limita erorilor de citire la galvanometru.

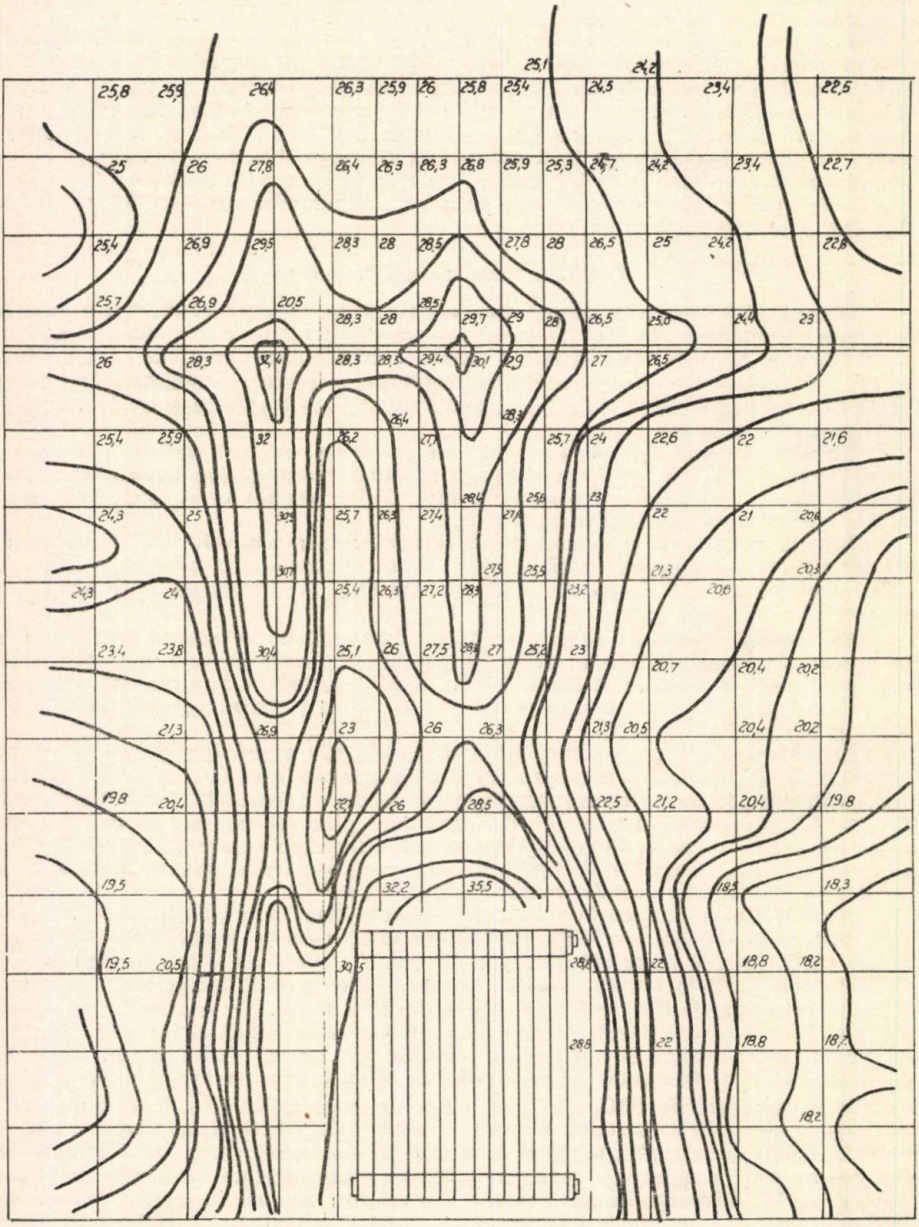


Fig. 2.– Cîmpul termic la suprafaţa peretelui de lîngă uu radiator

Un avantaj deosebit al acestei sonde termoelectrice, constă în faptul că avînd o capacitate calorică foarte mică, are şi o inerţie termică mică, adică intervalul de timp între realizarea contactului şi stabilirea echilibrului termic este foarte scurt. Astfel, cu aparatul construit au putut fi citite de la 150 pînă la 180 puncte distincte de temperatură pe oră, inclusiv deplasările şi pauzele operatorului.

Aceasta demonstrează că echilibrul termic pentru măsurători utile se stabileşte în mai puţin de 20 secunde.

3. Rezultate

Această sondă termoelectrică este construită în scopul de a se determina curbele izoterme la suprafeţele pereţilor încăperilor încălzite. Împreună cu o sondă pentru determinarea temperaturilor din diferitele puncte ale atmosferei din interioarele încăperilor, care este în construcţie, va permite un studiu amănunţit asupra aşezării celei mai favorabile în încăperi a corpurilor de încălzit (sobe, radiatoare, etc.), atît din punct de vedere economic cît şi higienic.

Sonda poate fi utilizată însă şi la determinarea temperaturilor şi a izotermelor de la suprafaţa altor corpuri fixe, ca de exemplu: feţele exterioare ale cilindrilor, motoarelor, boilere, cazane, etc.

În fig. 2 este redat cîmpul termic de la suprafaţa unui perete interior al unei încăperi, lîngă care se află montat un radiator, cîmpul fiind determinat cu această sondă.

Ca metodă de lucru mai trebuie observat următorul fapt: întrucît sudura rece a sondei nu este la galvanometru, ci la o baie de apă, temperatura băii poate fi aleasă după dorinţă, în intervalul de la 0° la 100°C şi dacă recipientul în care se află baia, are o izolaţie termică adecvată, temperatura acesteia se poate menţine aproape constantă pe intervale de timp destul de lungi. Acest fapt permite, alegînd în mod potrivit temperatura băii, să se determine un interval mare de temperaturi cu aceeaşi sensibilitate a galvanometrului de măsură, fără a ieşi din scara acestuia sau fără a fi nevoie să se reducă sensibilitatea lui prin intercalare de rezistenţe în circuit. Întrucît întregul sistem este portabil, acest avantaj compensează din plin incomoditatea cauzată de transportul şi utilizarea băii amintite.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Termotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Degusa Hanau, Catalog T 112/2 — 1957.
2. Knoblauch Oskar u. Koch W., *Technisch Physikalisches Practicum*, Julius Springer, Berlin, 1934, S. 26—29.
3. Никитин В. А., Контрольно измерительные приборы в нефтепереработке, Гостоптехиздат, М.-Л., 1948, стр. 103-106.
4. Турйчин А. М., Электрические измерения неэлектрических величин, ГЭИ, М-Л., 1954, стр. 229-231.
5. Câmpan T. I. şi Simionescu A., Bulet. Inst. Polit. Iaşi, 1955, **1 (5)**, *1-2*, pp. 249-256.

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗОНД ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПОВЕРНОСТНЫХ ТЕМПЕРАТУР СТЕН И ДРУГИХ ТЕЛ

(Резюме)

Построенный авторами, описываемый в работе, зонд имеет следующие характеристики: а) термометрическое тело состоит из серебряной тонкой пластинки, установленной на пробковой подкладке (во избежении потери тепла) с укрепленными на ней проводами таким образом, что электрический контакт происходит через тело пластинки; б) зонд дает измерение точной температуры поверхности тела; разница между реальной и измеряемой температурами находится в границах погрешностей чтения; в) температурная инерция очень мала, промежуток времени измерения, приблизительно, 20 секунд.

Предлагаемый зонд, а также и зонд, находящийся в разработке авторов, для быстрого и точного измерения воздуха, облегчают экспериментальные изучения искомой температуры помещений.

Объяснение рисунков

Рис. 1. Прибор в разрезе.
Рис. 2. Температурное поле на поверхности стены вблизи радиатора.

EINE THERMOELEKTRISCHE SONDE FÜR DIE BESTIMMUNG DER OBERFLÄCHENTEMPERATUR VON WÄNDEN UND ANDEREN KÖRPERN

(Zusammenfassung)

Es wird eine, von den Verfassern zusammengesetzte thermoelektrische Sonde für die Bestimmung der Oberflächentemperatur von Körpern, beschrieben, welche die folgenden Eigenheiten besitzt :

a) Das Thermoelement besteht aus einem Silberblättchen auf dem die zwei Drahtenden abgesondert in der Weise gelötet sind, dass der elektrische Kontackt des Elementes durch das Silberblättchen verwirklicht wird ; um Wärmeverluste zu vermeiden ist das Silberblättchen auf eine Korkunterlage hingestützt.

b) Die beschriebene thermoelektrische Sonde erlaubt eine genaue Bestimmung der Oberflächentemperatur von Körpern ; die Differenz zwischen der wahren und der gemessenen Temperatur liegt in der Fehlergrenze der Galvanometerablesungen.

c) Die thermische Trägheit der Sonde ist klein ; es vergeht weniger als 20 Sekunden von Anbringen der Sonde auf die untersuchte Stelle bis zu der endgültigen Ablesung der Temperatur.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. Querschnitt durch die Sonde.
Abb. 2. Das Temperaturfeld einer Wandoberfläche neben einem Heizkörper.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

536.22

PARAMETRII TERMICI AI ULEIURILOR DE TRANSFORMATOR

DE

DAVID PERETZ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

În ultimul timp studiul procesului de răcire a miezului transformatoarelor în ulei constituie obiectul unor cercetări sistematice [1]. În legătură cu această problemă s-au efectuat lucrări [2], privind parametrii termici ai diferitelor tipuri de uleiuri de transformator, necesare caracterizării acestora ca medii de răcire.

În cercetările noastre s-au determinat experimental parametrii termici ai celor două tipuri principale de uleiuri de transformator din R.P.R.: Tr—2004 şi Tr—2005 (STAS 811—54). Ambele uleiuri se obţin din ţiţeiuri neparafinoase, primul (Tr—2004) prin rafinare selectivă, iar al doilea (Tr—2005) prin rafinare acidă a fracţiunilor corespunzătoare obţinute din ţiţeiurile neparafinoase. Se menţionează că datele experimentale se referă la uleiuri proaspete, în prealabil încălzite pînă la 130 °C pentru îndepărtarea umidităţii.

În această lucrare se expun rezultatele determinărilor privind următorii parametrii, pentru intervalul de temperatură de la 0 °C...100 °C.

1. Greutatea specifică

Pentru determinarea greutăţii specifice a fost folosită o balanţă Mohr-Westphal, calibrată la temperatura de 15 °C, experienţele efectuîndu-se conform STAS 35—50 şi ţinînd seama că viscozitatea produselor e mai mică de 5 °E la 50 °C. S-au făcut corecţiile pentru cîntărirea în aer şi pentru dilatarea cubică a sticlei plutitorului balanţei, conform normelor. Densitatea relativă determinată a fost luată egală cu densitatea absolută, deoarece s-a urmărit o precizie pînă la a patra cifră semnificativă. Rezultatele măsurătorilor sînt redate în tabelul 1.

Fiecare valoare experimentală a greutății specifice reprezintă media a cinci determinări independente, eroarea de măsurare a unei astfel de determinări fiind de 0,05% față de media rezultatului.

Trebuie făcută observația că numai greutatea specifică a uleiului Tr—2004 este normată (mai mică de 910 kgf/m³ la 20 °C).

Din datele experimentale rezultă că greutatea specifică a uleiului Tr—2004 este mai mică decît cea a uleiului Tr-2005. Astfel, uleiul Tr-2004 poate fi folosit în aparatele expuse la temperaturi sub 0 °C; el mai oferă avantajul unei depuneri mai rapide a impurităților mecanice și a apei. Valorile obținute experimental sînt cuprinse în limitele indicate și de literatura sovietică [3].

Tabelul 1

Temperatura °C	Greutatea specifică γ*) kg f/m³	
	Tr—2004	Tr—2005
0,0	899,0	921,7
20,0	885,9	908,6
50,0	836,2	838,9
70,0	853,0	875,7
100,0	833,4	856,1

*) Din literatură [3] $\gamma_{15^\circ} = 0{,}84...0{,}92$ kgf/dm³.

2. Căldura specifică

În experiențe s-a folosit metoda comparativă a electrocalorimetrului. Acesta se compune din două vase calorimetrice identice cu diametrul de 60 mm și grosimea peretelui de 1 mm, unul pentru apă și celălalt pentru ulei, fiecare vas avînd capacitatea de 0,2 l. Vasele sînt din alamă nichelată. În interiorul lor au fost montate central două rezistențe electrice pentru încălzire, identice, din sîrmă de crom-nichel spiralată, alimentate de un curent electric alternativ la 12 V. Prin încălzire, temperatura maximă a rezistențelor în aer a fost de 60 °C. Pentru măsurarea temperaturilor a fost folosită o pilă termoelectrică compusă din 5 elemente cupru-constantan grupate în serie; cu ajutorul acesteia au putut fi măsurate diferențele de temperaturi cu o precizie de 0,005 °C. Sudurile calde ale cuplurilor au fost dispuse circular în vasele calorimetrice la distanța de 10 mm de marginea acestora. Agitarea a fost făcută cu două agitatoare manuale identice foarte ușoare, confecționate din masă plastică.

Tabelul 2

Temperatura °C	Căldura specifică c_p*) k cal/kg°C	
	Tr—2004	Tr—2005
10,0	0,445	0,424
20,0	0,455	0,431
40,0	0,480	0,457
60,0	0,503	0,478
80,0	0,524	0,500

*) Din literatură [3] $c_p = 0{,}43...0{,}58$.

Încălzirea timp de un minut a produs o variație de temperatură de maximum un grad față de temperatura inițială. Ambele calorimetre au fost introduse într-un termostat cu cămașă de apă, care a permis efectuarea măsurătorilor la diferite temperaturi. Pentru evitarea erorilor provocate de neidentitatea posibilă a rezistențelor din cele două calo-

rimetre, acestea au fost schimbate între ele după fiecare determinare. Valorile experimentale sînt redate în tabelul 2, fiecare valoare indicată fiind media a patru determinări independente. Eroarea de măsurare a unei determinări este de 0,4% față de medie.

Din tabelul 2 rezultă că uleiul Tr—2004 are o căldură specifică cu cca 5% mai mare decît a uleiului Tr—2005, deci o capacitate de răcire puțin mai mare.

3. Viscozitatea

Deoarece conversiunea viscozităților convenționale în viscozități cinematice sau dinamice nu este admisă în cazul cînd viscozitatea e folosită ca o constantă fizică exactă, experiențele au fost efectuate cu un viscozimetru Höppler (model de precizie) cu ultratermostatul respectiv. Timpul de cădere al bilei, care nu a fost sub limita de 30 secunde s-a măsurat cu un cronometru de precizie cu gradații de 0,1 secunde. Viscozitatea uleiurilor de transformator variind mult cu temperatura au fost necesare determinări la diferențe de temperaturi relativ mici, astfel ca erorile de interpolare să fie neglijabile. A fost urmărită variația viscozității din 5 în 5 grade; rezultatele sînt date în tabelul 3. Valorile experimentale indicate reprezintă media a cinci determinări independente, abaterea față de medie fiind 0,1...0,2%.

Tabelul 3

Temperatura °C	Viscozitatea cinematică ν cSt	
	Tr—2004	Tr—2005
0,0	111,9	129,5
5,0	73,45	88,56
10,0	54,25	63,54
15,0	42,55	46,35
20,0	33,09	34,77
25,0	25,56	26,93
30,0	20,56	21,62
35,0	17,11	17,30
40,0	13,73	14,05
45,0	11,55	11,70
50,0	9,833	9,844
55,0	8,556	8,413
60,0	7,289	7,207
65,0	6,399	6,300
70,0	5,709	5,524
75,0	5,042	4,910
80,0	4,455	4,418
85,0	4,191	4,035
90,0	3,855	3,783
95,0	3,582	3,495
100,0	3,255	3,205

Din datele prezentate se pot trage următoarele concluzii:

a) Viscozitatea uleiului Tr—2005, este mai mare decît cea a uleiului Tr—2004 numai pentru temperaturi pînă la 50 °C; peste această temperatură valorile viscozității pentru uleiul Tr—2005 sînt mai mici decît cele ale uleiului Tr—2004.

b) La temperatura de 20 °C viscozitatea cinematică a ambelor uleiuri se găsește în limitele normelor din STAS 811—54, dar pentru temperatura de 50 °C, valorile găsite depășesc cu cca 2,5% (foarte puțin) indicațiile normelor citate. Nu s-au mai indicat valorile viscozității din literatura străină, cunoscînd că normele GOST și VDE sînt identice cu cele din R. P. R.

Datele experimentale arată că uleiurile de transformator romînești sînt în limitele normelor, permiţînd deci o răcire suficientă a transformatorului din acest punct de vedere.

4. Conductivitatea termică

Măsurarea acestui parametru s-a efectuat cu un aparat descris în lucrarea [4]. Rezultatele sînt următoarele:

Datele experimentale prezintă media a opt citiri consecutive, corespunzătoare unei singure determinări independente şi sînt în medie cu 2...5% mai mici decît cele indicate în literatura de specialitate.

Tabelul 4

Temperatura °C	Conductivitatea termică λ k cal °C	
	Tr—2004	Tr—2004
20,7	0,108	—
51,5	0,108	—
80,5	0,106	—
21,7	—	0,106
46,2	—	0,105
75,8	—	0,104

*) Din literatură [5] şi [6] $\lambda_{30°...100°}$ = 0,113...0,111, $\lambda_{0°...100°}$ = 0,115...0,107.

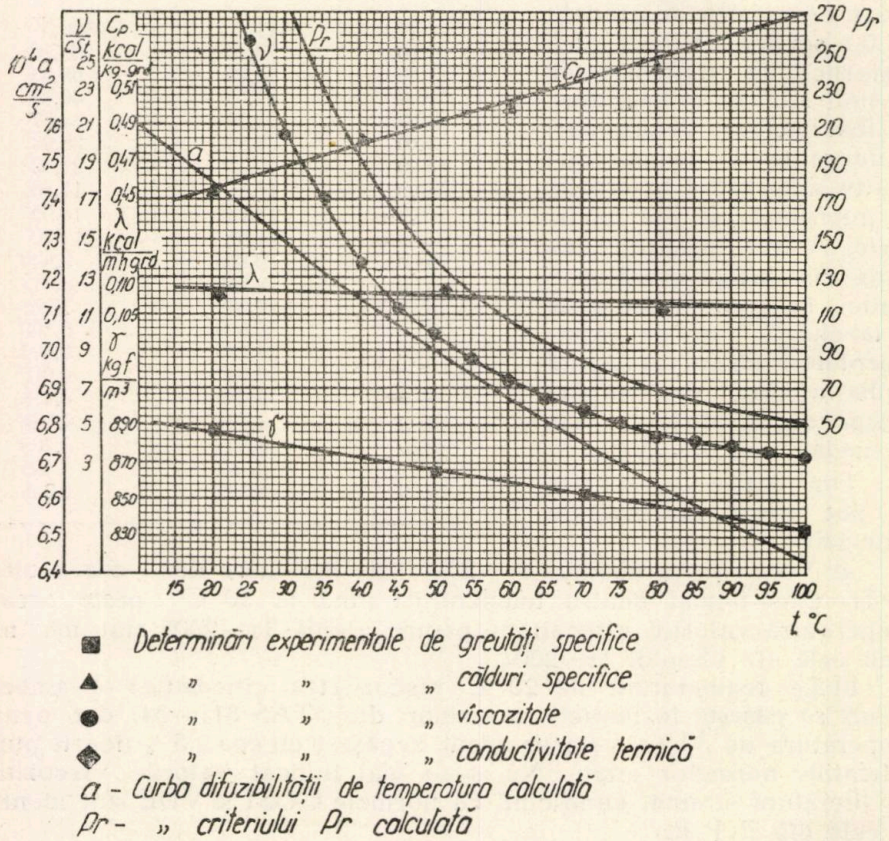


Fig. 1. — Parametrii termici ai uleiului de transformator Tr—2004.

Pe baza datelor experimentale au fost construite diagramele din fig. 1 şi 2, care permit citirea valorilor cu suficientă precizie. Au fost trasate şi curbele variaţiei difuzibilităţii termice *a* şi ale criteriului Prandtl. Aceste diagrame vor putea fi utilizate în calculul răcirii transformatoarelor în ulei.

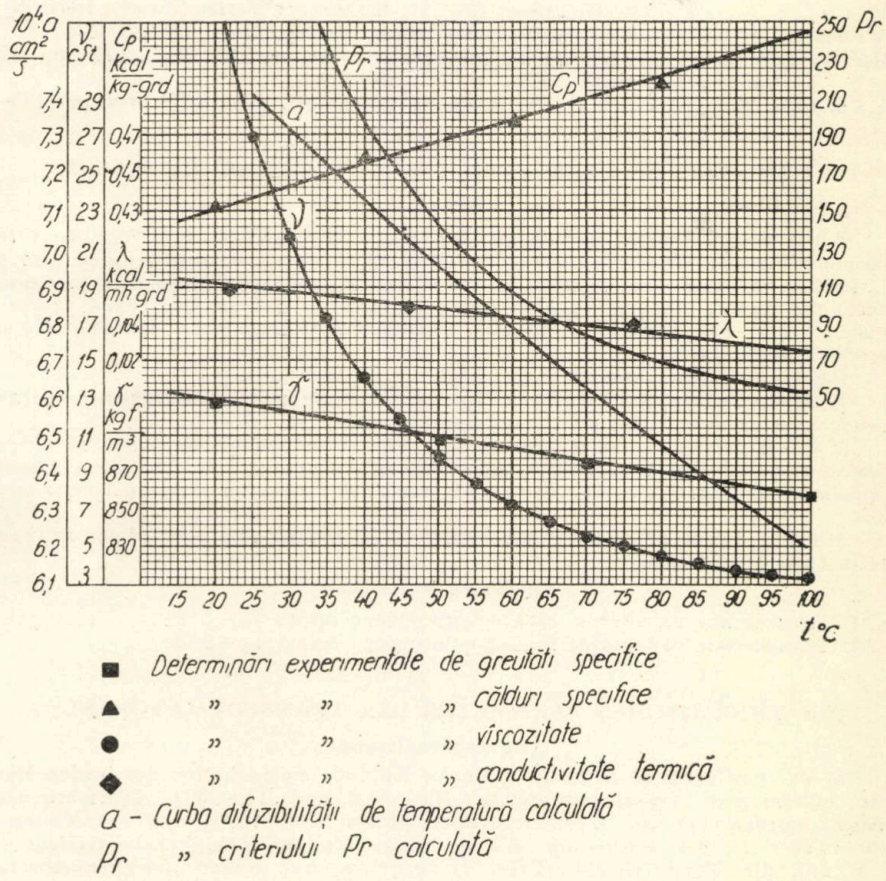


Fig. 2. — Parametrii termici ai uleiului de transformator Tr—2005.

Din lucrare se pot trage următoarele concluzii:

1. Între uleiurile Tr—2004 şi Tr—2005 nu există deosebiri esenţiale din punct de vedere al comportării lor ca mediu de răcire.

2. Datele experimentale indică faptul că valorile parametrilor termici ai uleiurilor de transformator romîneşti sînt comparabile cu datele respective din literatura de specialitate şi posedă deci proprietăţi de răcire similare.

3. Diagramele construite permit efectuarea unui calcul termic mai precis al transformatoarelor indigene, fără a se mai face uz de datele mai generale din literatura străină.

Institutul Politehnic din Iaşi,
Catedra de Termotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Richter R., *Elektriche Maschinen*, Bd. III, Birkhäuser Verlag, Basel, 1954, S. 237.
2. Vidmar M., *Die Transformatoren*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1956, S. 281.
3. Burianov B. P., *Exploatarea uleiului de transformator*, EES, Buc., 1953, pp. 93, 84 (trad. din l. rusă).
4. Câmpan T. şi Peretz D., Bulet. Instit. Polit. Iaşi, 1957, **3 (7)**, *3-4*, pp. 185-194.

ТЕРМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ТРАНСФОРМАТОРНОГО МАСЛА

(Резюме)

В настоящей работе исследуют охлаждаемые свойства двух основных типов трансформаторных масел: Тр—2004 и Тр—2005. Определены опытным путём (интервал 0°Ц...100°Ц), удельный вес (таблица 1), теплоёмкость (таблица 2), вязкость (таблица 3) и теплопроводность (таблица 4). По экспериментальным данным построили диаграммы на рис. 1 и 2, где находят и кривые температуропроводности и критерия Прандля для обоих типов масел.

Работа позволяет вывести следующее:

1. между маслами Тр—2004 и Тр — 2005 не выявили существенных различий в отношении их поведения, как охлаждающая среда.

2. Из экспериментальных данных следует, что численные значения термических параметров румынских трансформаторных масел сравнимы с подобными данными из специальной литературы и, что эти масла обладают сходными охлаждающими свойствами.

3. Построенные диаграммы позволяют более точный термический расчёт отечественных трансформаторов.

Объяснение рисунков

Рис. 1. Термические параметры трансформаторного масла Тр—2004.
Рис. 2. Термические параметры трансформаторного масла Тр—2005.

DIE THERMISCHEN PARAMETER DER TRANSFORMATORENÖLE

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit werden die Kühlungseigenschaften der beiden Haupttypen rumänischer Transformatorenöle, Tr - 2004 und Tr - 2005, erforscht. Durch Versuche wurden, für den Temperaturintervall von 0°C...100°C, das spezifische Gewicht (Tafel 1), die spezifische Wärme (Tafel 2), der Zähigkeitskoeffizient (Tafel 3) und die Wärmeleitzahl (Tafel 4) bestimmt. Auf Grund der Versuchsergebnisse wurden die Diagramme von Abb. 1 und Abb. 2 aufgezeichnet, welche auch die Temperaturleitzahl — und die Prandtlsche Zahl — Kurven enthalten.

Es konnten nachstehende Schlussfolgerungen gezogen werden:

1. Es gibt keinen hauptsächlichen Unterschied zwischen den Kühlungseigenschaften der beiden Öltypen.

2. Die Versuchsergebnisse zeigen, dass die Werte der physikalischen Parameter rumänischer Transformatorenöle denen der Fachliteratur vergleichbar sind, an und ähnliche Kühlungseigenschaften besitzen.

3. Die erhaltenen Diagramme gestatten eine genauere thermische Berechnung der einheimischen Transformatoren.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. Die thermischen Parameter des Transformatorenöls Tr - 2004.
Abb. 2. Die thermischen Parameter des Transformatorenöls Tr - 2005.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

621.9.01

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORŢELOR DE AŞCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ LA OŢELURILE ROMÎNEŞTI, GRUPA OL STAS 500—49

NOTA I

DE

GH. CAŞLER, CESAR BUDA, VICTOR BAUŞIC, AUREL RĂILEANU, GAVRIL BORZAŞ, AL. RENER ŞI DAN NICOLESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26 — 29 iunie 1958

Colectivul catedrei de Maşini Unelte şi Scule a Institutului Politehnic din Iaşi şi-a propus în planul său de muncă, determinarea parametrilor forţelor de aşchiere pentru materiale romîneşti standardizate. În acest scop, continuînd încercările experimentale, din care o parte au fost publicate [1], în lucrarea de faţă autorii au stabilit aceşti parametri pentru grupa oţelurilor carbon prelucrate la cald, OL 34, OL 38, OL 42, OL 50, OL 60, OL 70, STAS 500—49. Autorii consideră că asemenea determinări experimentale trebuie continuate pentru toate materialele fabricate în R. P. R., ţinînd seama de importanţa lor în proiectarea de maşini, scule, dispozitive şi de procese tehnologice. Aceste rezultate, obţinute la toate materialele, vor putea în viitor duce la întocmirea de normative, aşa cum există în alte ţări.

Autorii, folosind ca în [1] un dinamometru tip G. A. Levit, căruia spre deosebire de lucrarea precedentă i s-a legat rigid pîrghia de transmitere a deformaţiilor de amortizorul hidraulic, în vederea reducerii erorilor de lectură datorită oscilaţiilor aparatului indicator, stabilesc valorile parametrilor x_p, y_p, C_p la operaţiunea de strunjire longitudinală, după relaţia cunoscută:

$$P_z = C_p t^{x_p} s^{y_p}. \tag{1}$$

Pentru stabilirea acestor parametri, s-au trasat două rînduri de drepte, în diagrame dublu logaritmice, atît la s=const. cît şi la t=const.

Toate încercările au fost făcute la trei viteze de aşchiere, ce au fost menţinute în limita posibilităţilor, constante.

Trasarea dreptelor s-a făcut după următoarea metodă:

Valorilor forţelor citite la dinamometru, corespunzătoare celor trei viteze, la cîte o anumită valoare a lui s şi t, li s-a calculat media, care s-a înscris prin puncte în diagramele dublu logaritmice şi apoi, printre puncte s-au trasat dreptele din diagramă. Aceste drepte au servit la determinarea valorilor x_p, y_p, şi C_p după cum urmează:

La stabilirea, de exemplu, a parametrilor x_p şi y_p la materialul OL 34, (fig. 1), s-au trasat opt drepte avînd s=const., la diferite valori ale lui t şi cinci drepte avînd t=const., la diferite valori ale lui s.

Fiecare din aceste drepte a furnizat cîte o pereche de valori x_p şi y_p. Astfel, pentru determinarea, de exemplu, a valorilor x_p, s-au ales două puncte pe fiecare dreaptă $s = \text{const.}$ şi s-a calculat conform relaţiilor:

$$P_{z_1} = C_p t_1^{x_p} s_1^{y_p}, \quad P_{z_2} = C_p t_2^{x_p} s_1^{y_p}. \tag{2}$$

Prin logaritmare şi scădere se ajunge la expresia;

$$x_p = \frac{\log P_{z_1} / P_{z_2}}{\log t_1 / t_2} \tag{3}$$

obţinîndu-se, corespunzător pentru cele opt drepte trasate la $s = \text{const.}$, opt valori pentru x_p. S-a procedat în mod analog, la determinarea valorilor y_p

Pentru valorile C_p, folosindu-se relaţia $C_p = P_z t^{x_{pm}} s^{y_p}$ unde x_{pm} este media celor opt valori obţinute mai sus, şi curbele $p = \text{const.}$, se obţine cîte o valoare pentru fiecare curbă.

Pentru fiecare material OL cercetat, s-au trasat diagrame analoage (fig. 2...6), iar valorile x_p, y_p, C_p au tost trecute în tabelul 1.

Lucrările experimentale s-au executat pe un strung romînesc Iosif Rangheţ cu cuţit din oţel rapid R 18, de provenienţă sovietică, cu următoarea geometrie:

$$\alpha = 10°, \ \gamma = 25°, \ \lambda = 0°, \ K = 45°, \ K' = 15°$$

fără lichide de ungere şi răcire.

Institutul Politehnic, Iaşi
Catedra de Maşini Unelte şi Scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. şi colab., Bulet. Instit. Polit. Iaşi, 1956, **2 (6)**, *3—4*, p. 313.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИЛ РЕЗАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ТОКАРНОЙ ПРОДОЛНОЙ ОБРАБОТКИ РУМЫНСКИХ СТАЛЕЙ ГРУППЫ OL (I)

(Резюме)

Продолжая начатые раньше опытные иследования в этой области, автори выявили в исстаящем сообщении значения C_p, x_p и y_p по формуле (1) для следующих сортов стали: OL 34, OL 38, OL 42, OL 50, OL 60, OL 70, STAS 500—49.

Для подучения редултатов авторы исползовали, как и в предыдущих работах, динамометр типа Г. А. Левит, соединенный жестко с рычагом передачи леформации гидравлического успокоителя.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS STANDARDISÉS OL, SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUNIDAL (I)

(Résumé)

En continuant les recherches expérimentales antérieures, dans le présent travail les Auteurs établissent les valeurs des paramètres C_p, x_p et y_p de l'expression (1) pour les suivantes sortes d'acier; OL 34, OL 38, OL 42, OL 50, OL 60, OL 70 STAS 500—49.

Dans leurs recherches, les Auteurs ont utilisé un dynamomètre type G. A. Levit. Pour éviter les erreurs de lecture, qui sont dues aux vibrations de l'appareil d'enregistrement, on a attaché d'une manière rigide, le levier qui transmet les déformations de l'amortisseur hydraulique de ce dynamomètre.

Tabelul 1

Materialul	H_B	x_p								x_{pm}	y_p					C_p				
		$s=0,1$	$s=0,15$	$s=0,2$	$s=0,25$	$s=0,3$	$s=0,4$	$s=0,5$	$s=0,6$		$t=1$	$t=1,5$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=1$	$t=1,5$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
OL 34	99,1	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,03	0,723	0,74	0,75	0,765	0,76	131	138	132	145	147
OL 38	103	0,950	0,94	0,955	0,935	0,950	0,965	0,956	0,91	0,945	0,680	0,67	0,655	0,655	—	165	157	144	156	—
OL 42	143	0,92	0,94	0,878	0,96	0,976	0,96	0,99	1,01	0,954	0,875	0,865	0,860	0,860	0,885	165	170	170	171	170
OL 50	143	1,02	1,03	1,03	1,04	1	1	1,01	1	1,01	0,85	0,83	0,792	0,794	0,795	250	234	220	223	222
OL 60	207	0,95	0,945	0,975	0,995	0,98	1,01	1,01	1,01	0,984	0,750	0,758	0,746	0,75	0,775	168	154	142	148	164
OL 70	200	0,98	0,994	1,01	1,01	1	0,99	0,98	0,97	0,991	0,824	0,81	0,785	0,77	0,76	175	157	160	145	147

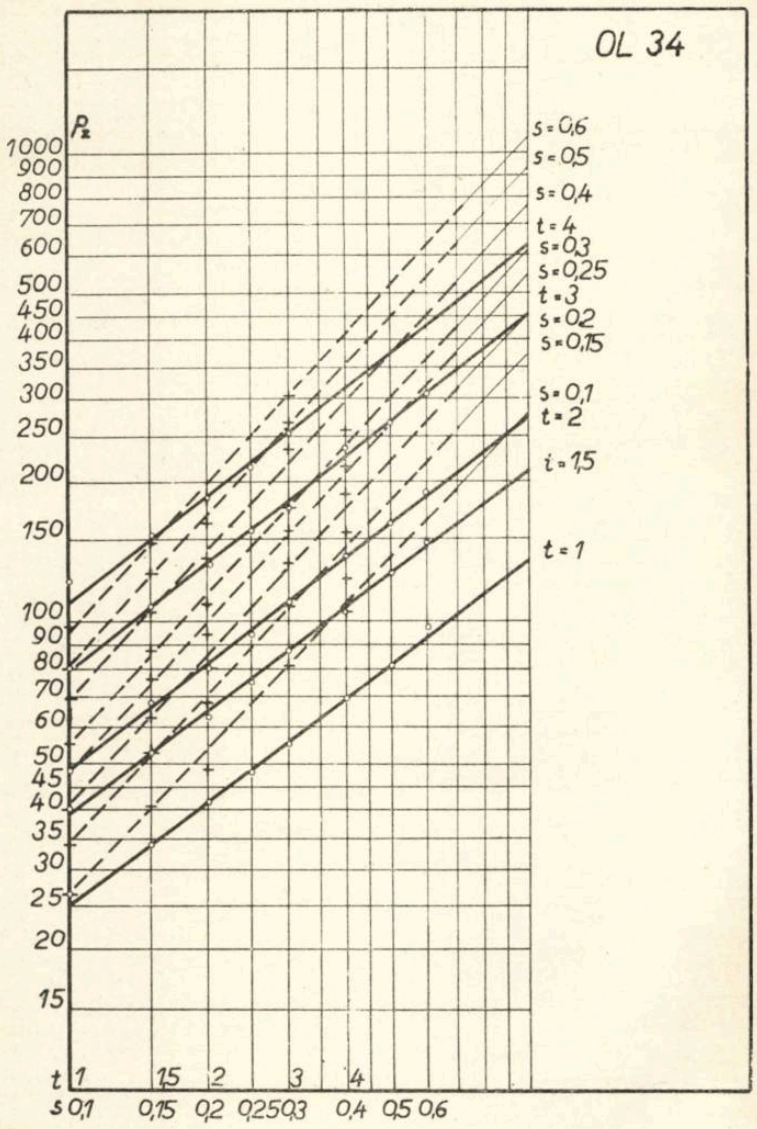


Fig. 1

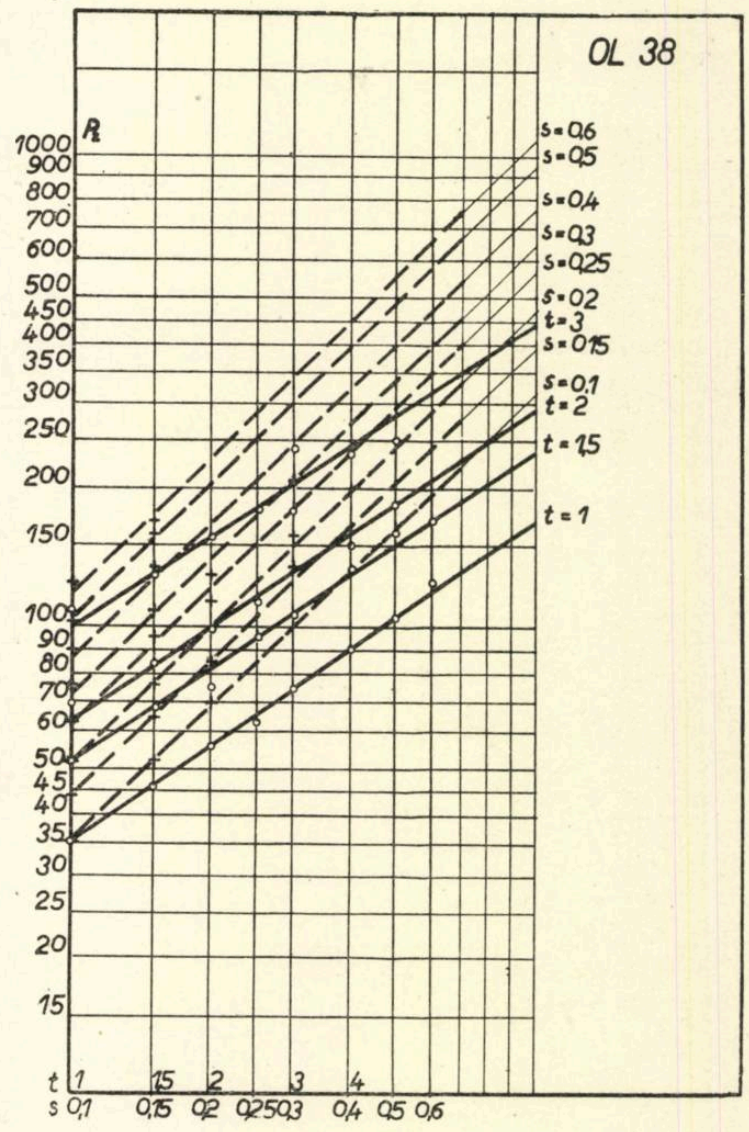


Fig. 2

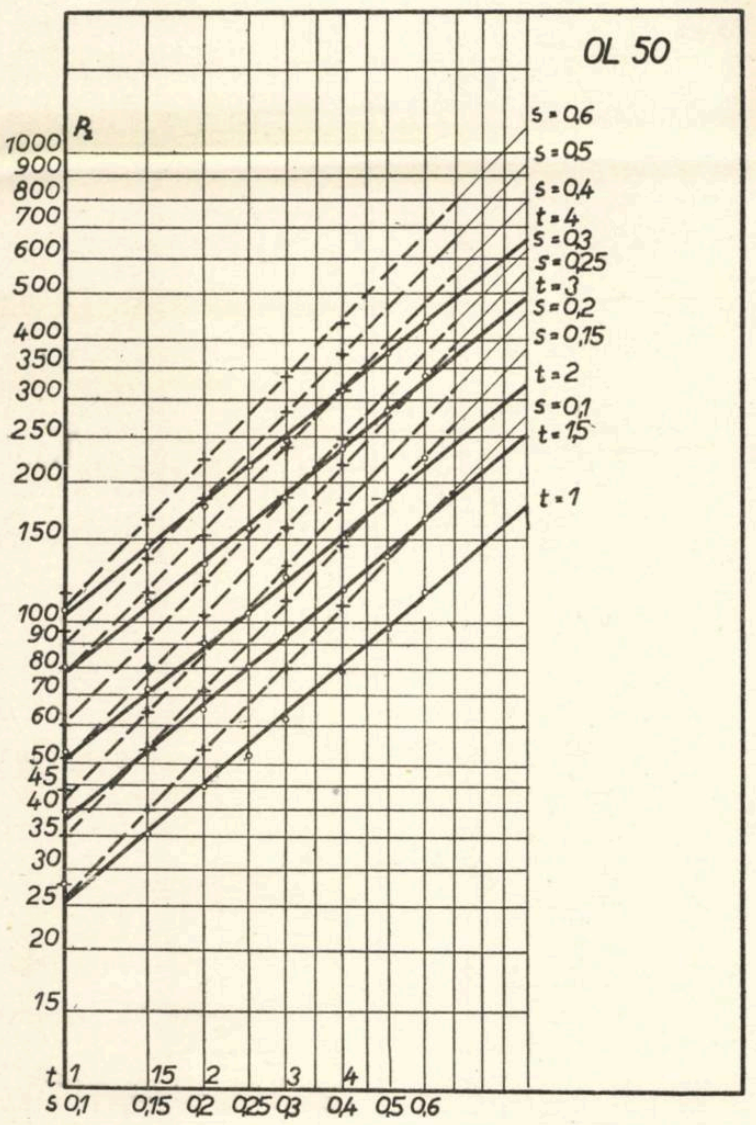


Fig. 4

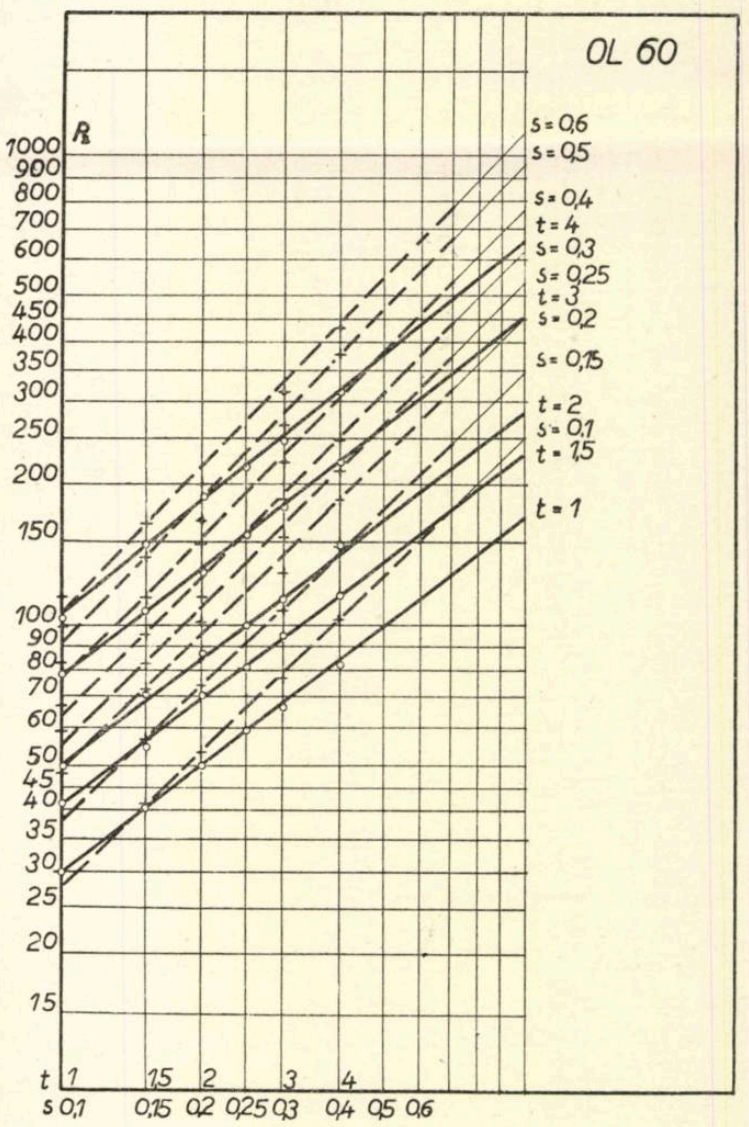


Fig. 5

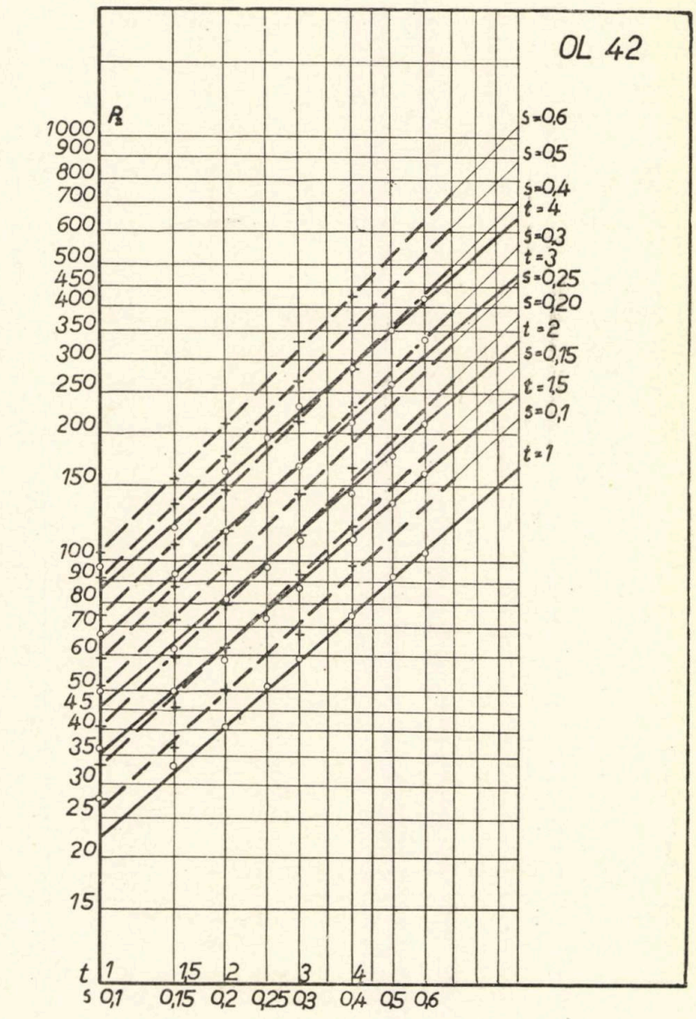

OL 42
R_z
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
s=0,6
s=0,5
s=0,4
t=4
s=0,3
t=3
s=0,25
s=0,20
t=2
s=0,15
t=1,5
s=0,1
t=1
t 1 1,5 2 3 4
s 0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,4 0,5 0,6

Fig. 3

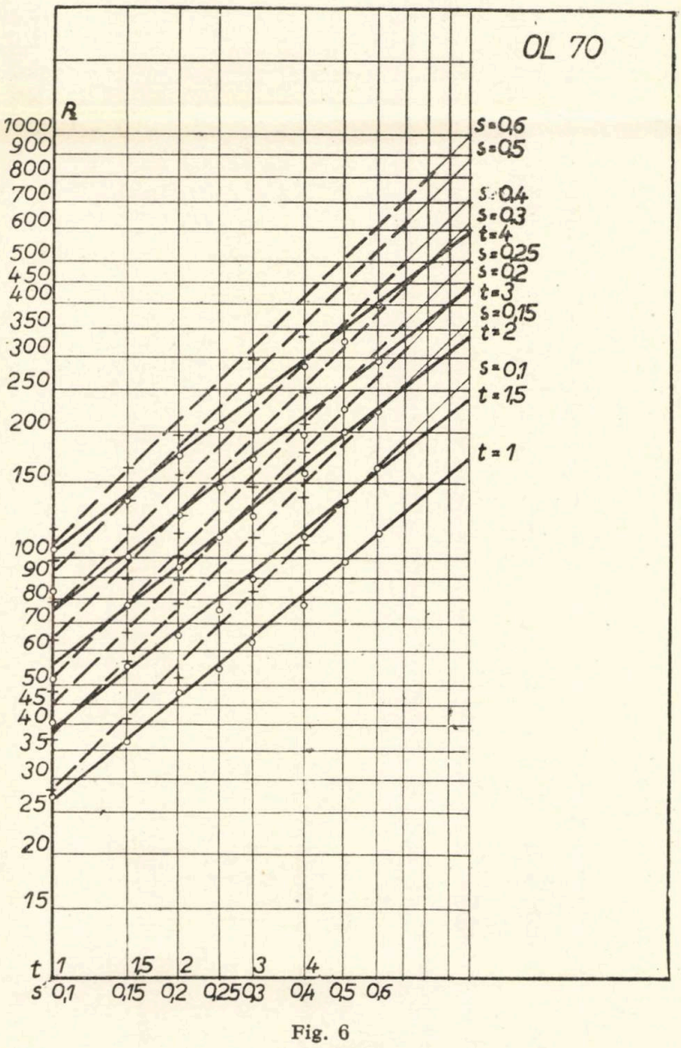

OL 70
R_z
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
s=0,6
s=0,5
s=0,4
s=0,3
t=4
s=0,25
s=0,2
t=3
s=0,15
t=2
s=0,1
t=1,5
t=1
t 1 1,5 2 3 4
s 0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,4 0,5 0,6

Fig. 6

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621.9.01

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORŢELOR DE AŞCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ LA OŢELURILE ROMÎNEŞTI STANDARDIZATE OLC STAS 880—49

NOTA II

DE

VICTOR BAUŞIC, GH. CAŞLER, CESAR BUDA, AUREL RĂILEANU, GAVRIL BORZAŞ, AL. RENER şi DAN NICOLESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26-29 iunie 1953

Autorii continuînd lucrările experimentale [1], [2] în vederea determinării parametrilor forţei principale de aşchiere, după relaţia:

$$P_z = C_p t^{x_p} s^{y_p} , \tag{1}$$

pentru materialele romîneşti standardizate, au stabilit în nota de faţă aceşti parametri pentru grupa oţelurilor de calitate. Astfel s-au cercetat oţelurile: OLC 10, OLC 16, OLC 25, OLC 35, OLC 45, OLC 60, STAS 880 — 49.

Pentru obţinerea rezultatelor experimentale s-a folosit dinamometrul G. A. Levit cu modificările prevăzute în [2].

Prelucrarea datelor experimentale s-a făcut după metoda din [1], obţinîndu-se diagramele corespunzătoare pentru toate oţelurile OLC mai sus amintite (fig. 1...6), iar ca rezultat final, tabelul centralizator 1 cu valorile pentru parametrii x_p, y_p şi C_p.

Determinările experimentale s-au efectuat pe un strung „Iosif Rangheţ" folosindu-se un cuţit cu următoarea geometrie:

$$\alpha = 10°,\ \gamma = 25°,\ \lambda = 0,\ K = 45°,\ K' = 15°$$

din oţel rapid R 18 de proveniență sovietică. Experimentările s-au făcut la prelucrări uscate.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Maşini Unelte şi Scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. şi colab, Bulet. Inst. Polit. Iaşi, 1956, 2 (6), *3—4*, p. 313.
2. Caşler Gh. şi colab., Acest Buletin, pp. 377-378.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИЛ РЕЗАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ТОКАРНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ РУМЫНСКИХ СТАЛЕЙ ГРУППЫ OLC (II)

(Резюме)

Авторы,пользуясь динамометром типа Г. А. Л е в и т, выводят параметры C_p, x_p и y_p, необходимые для определения главной силы резания согласно соотношению (1).

В настоящем сообщении даются соответствующие значения для группы углеродистых качественных сталей OLC, а именно OLC 10, OLC 16, OLC 25, OLC 35, OLC 45, OLC 60, STAS 880—49.

Опытные данные представляют в виде диаграмм в двойных логарифмических координатах формы $P_z=F_1(s)$ и $P_z=F_2(t)$ при помощи которых можно легко установить вышеупомянутые параметры.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS STANDARDISÉS OLC, SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUDINAL (II)

(Résumé)

En utilisant le dynamomètre type G. A. L e v i t pour la détermination des paramètres C_p, x_p et y_p nécessaires au calcul de la force principale de coupe, donnée par l'expression (1), les Auteurs établissent les valeurs de ces paramétres — ci pour les aciers carbon de qualité (OLC), notamment pour les sortes suivantes: OLC 10, OLC 16, OLC 25, OLC 35, OLC 45, OLC 60, STAS 880 — 49.

Dans ce travail-ci, les résultats obtenus par voie expérimentale sont représentés sur un diagramme à l'échelle doublement logarithmique par les fonctions $P_z = F^l\ (s)$ et $P_z = F_2\ (t)$. À l'aide d'un tel diagramme on peut facilement déterminer, d'une part, es valeurs des paramètres, et d'autre part, leur influence sur le procèssus de coupe.

Tabelul 1

Material	H_B	x_p								x_{pm}	y_p					C_p				
		$s=0,1$	$s=0,15$	$s=0,2$	$s=0,25$	$s=0,3$	$s=0,4$	$s=0,5$	$s=0,6$		$t=1$	$t=1,5$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=1$	$t=1,5$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
OLC 10	111	0,905	0,865	0,89	0,925	0,932	0,945	0,975	0,980	0,927	0,615	0,659	0,672	0,717	0,748	134	146	158	163	179
OLC 16	111	1,09	1,13	1,12	1,11	1,10	1,11	1,12	1,12	1,11	0,813	0,850	0,815	0,789	0,79	164	169	184	158	170
OLC 25	131	0,949	0,954	0,965	0,982	0,980	0,980	0,992	0,980	0,972	0,682	0,699	0,715	0,740	0,756	144	147,5	143	155	164
OLC 35	140	0,978	0,972	0,974	0,99	0,992	1,00	0,998	1,01	0,989	0,787	0,812	0,787	0,802	0,800	143	156,5	159	162	147
OLC 45	207	1,09	1,07	1,08	1,07	1,10	1,07	1,06	1,06	1,07	0.815	0,829	0,835	0,850	0,854	160	154	156	156	161
OLC 60	255	0,925	0,915	0,92	0,89	0,89	0,90	0,87	0,82	0,89	0,830	0,834	0,850	0,847	0,827	225	229	220,5	225	217

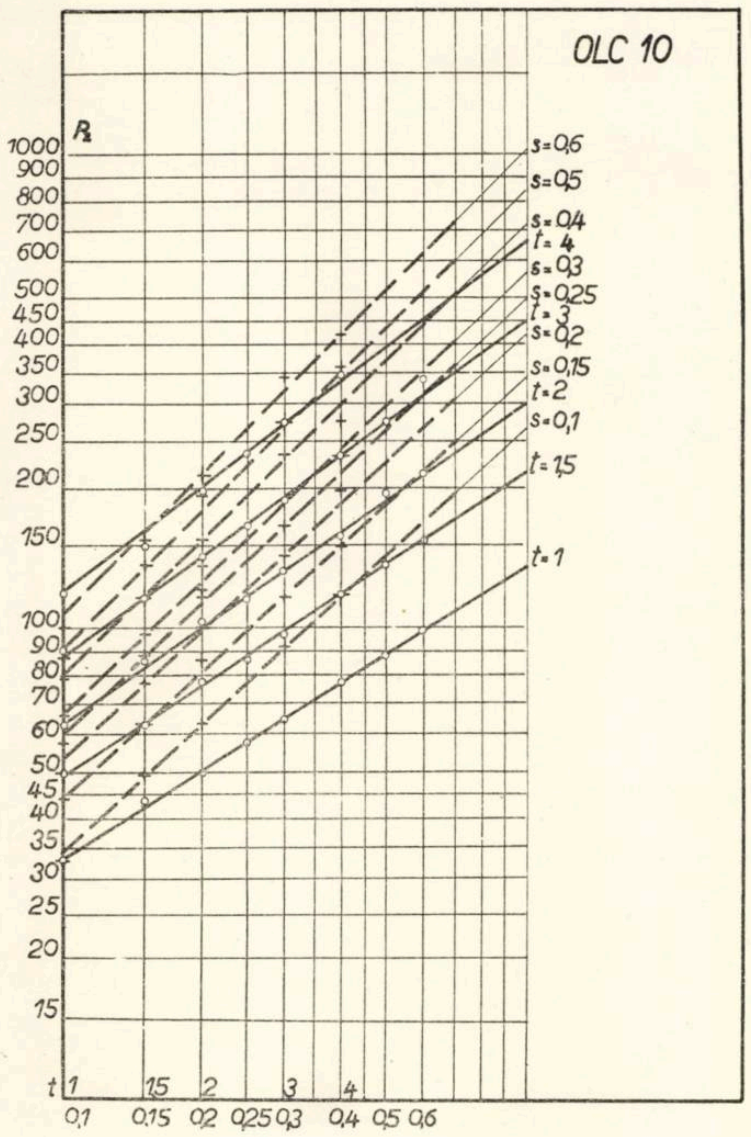


Fig. 1

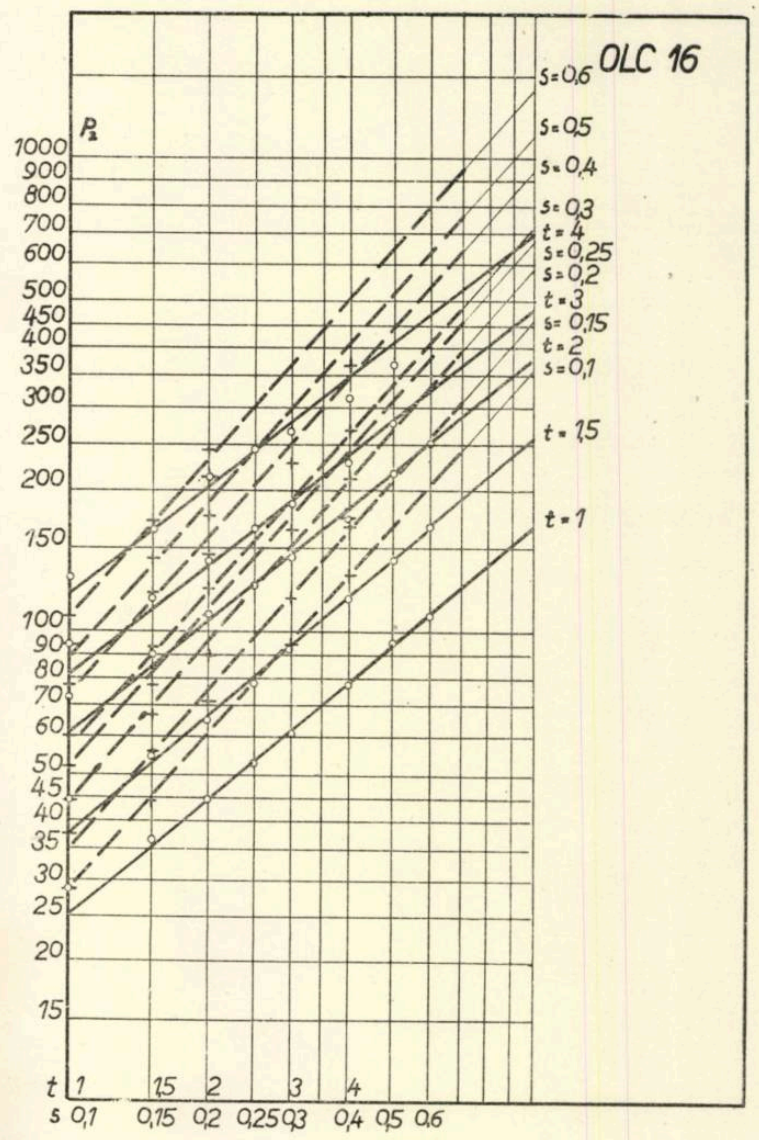


Fig. 2

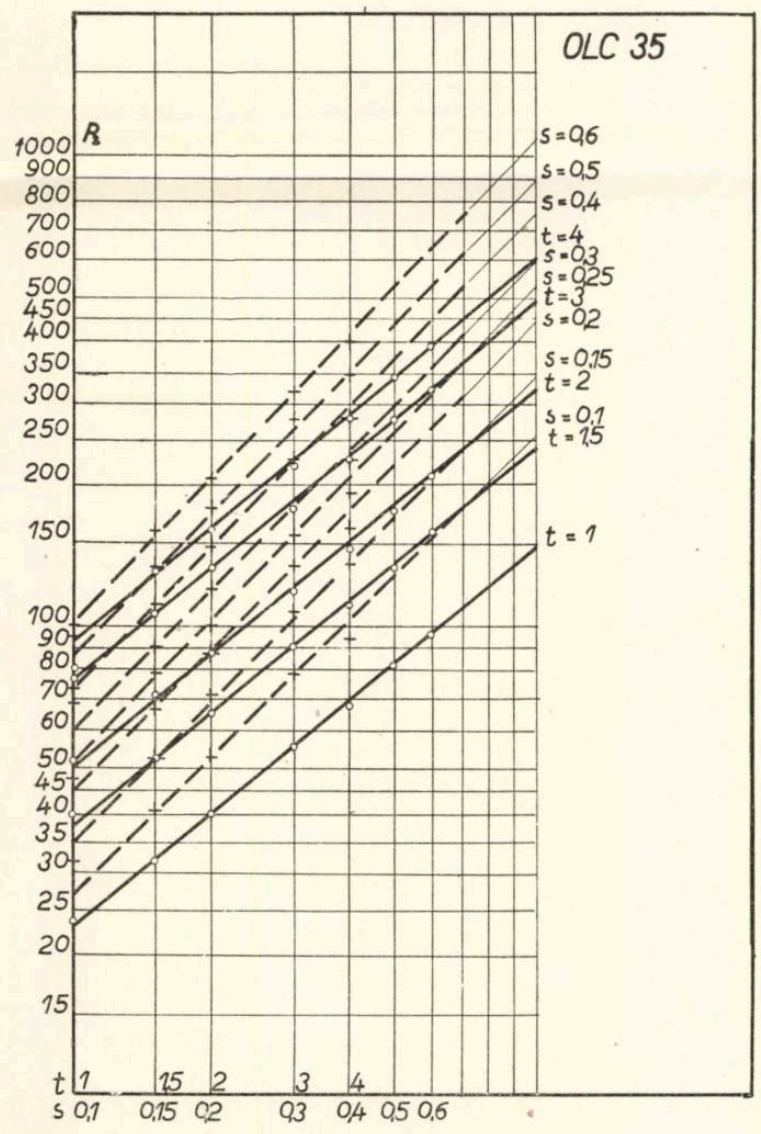


Fig. 4

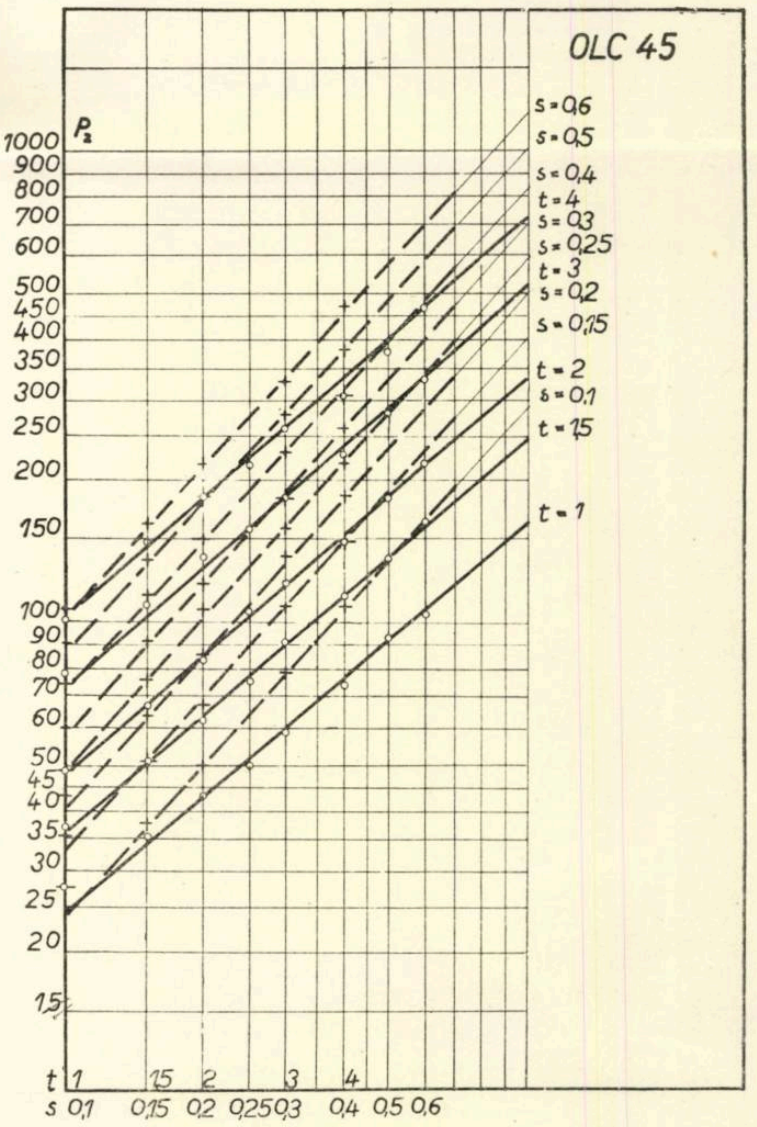


Fig 5

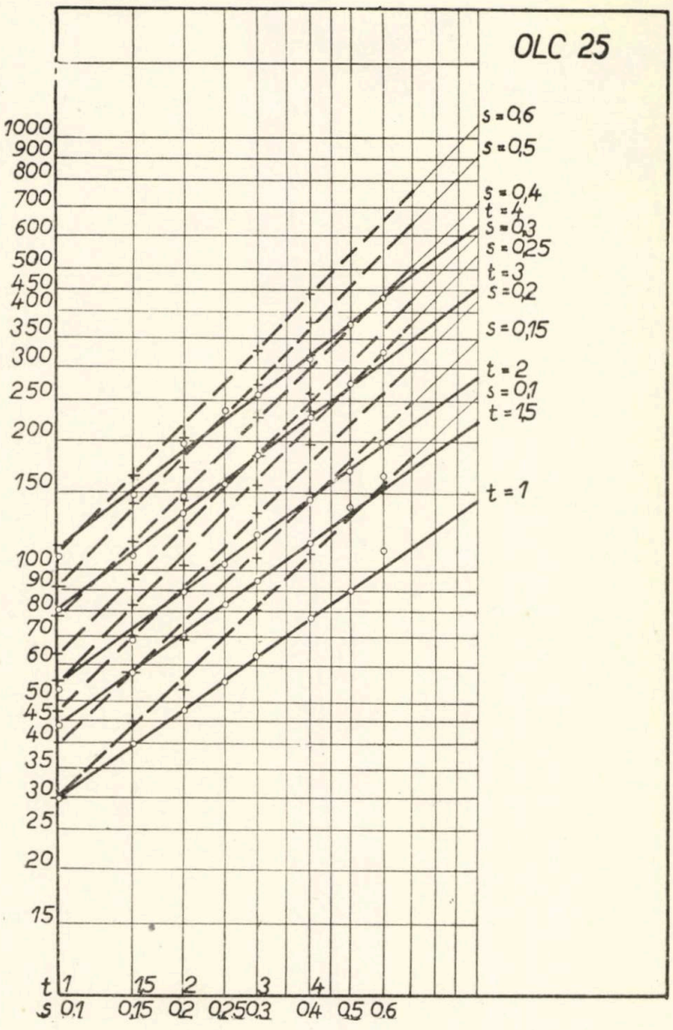

OLC 25
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
s = 0,6
s = 0,5
s = 0,4
t = 4
s = 0,3
s = 0,25
t = 3
s = 0,2
s = 0,15
t = 2
s = 0,1
t = 1,5
t = 1
t 1 1,5 2 3 4
s 0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,4 0,5 0,6

Fig. 3

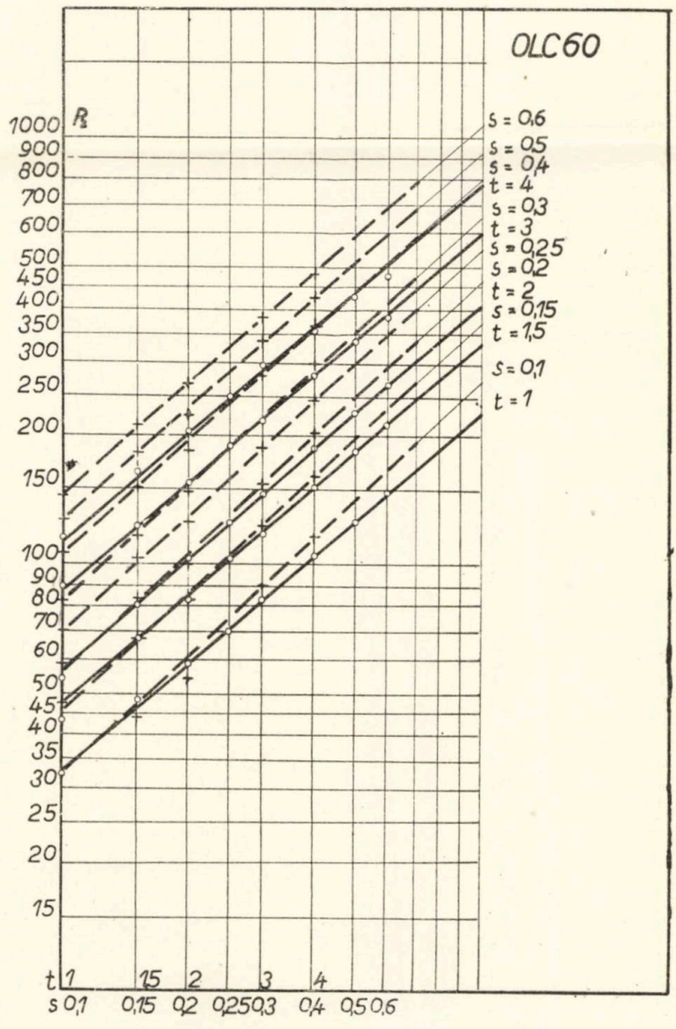

OLC 60
R
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
s = 0,6
s = 0,5
s = 0,4
t = 4
s = 0,3
t = 3
s = 0,25
s = 0,2
t = 2
s = 0,15
t = 1,5
s = 0,1
t = 1
t 1 1,5 2 3 4
s 0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,4 0,5 0,6

Fig. 6

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA
MOSZAKI

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621.04

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СТАЛЬНЫХ БАЛОК

Б. Б. ЛАМПСИ

1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Учет развития пластических деформаций при определении несущей способности стальных балок позволяет во многих случаях получить значительную экономию материала, однако методика этого учета разработана наиболее полно лишь для случая чистого изгиба. В достаточной мере она может считаться разработанной и для случая изгиба с поперечной силой, для которого в ряде работ даны приближенные [1], [6], [7], [9], [11] и в пределах обычных гипотез, точные [2], [8], [10] решения задачи, исходя из представления идеального упруго-пластического материала Л. Прандтля. В последнее время эта проблема рассматривалась также в предположении жестко-пластического материала, деформируемого лишь в пластических зонах [3], [4], [5], [12], [13]. Очевидно, что последняя гипотеза более элементарна, чем предыдущая. Большинство из этих решений относится к балкам прямоугольного сечения и только в трех затронуты и двутавровые балки.

Нетрудно заметить, что влияние касательных напряжений на несущую способность балки становится практически существенным лишь при загружении ее сосредоточенными нагрузками и что в этом случае сечениями, в которых впервые будет достигнуто предельное равновесие, будут сечения под грузами. Но в этих сечениях неизбежно также возникновение значительных местных сминающих напряжений, которые в свою очередь не могут не влиять на развитие пластических деформаций. Во всех выше перечисленных работах влияние этих местных напряжений не учитывается и только в одной [13] учитываются смйнающие напряжения σ_y, развивающиеся в сечении за счет развития в нем пластичности.

В настоящей статье рассматривается случай изгиба статически определимых стальных балок прямоугольного и двутаврового сечений. Критерием потери прочности считается момент наступления в одном из сечений предельного равновесия, которое в свою очередь описывается условием пластичности М. Губера–Р. Мизеса, выполняющемся во всех точках этого сечения. Принимается, что материал балок обладает свойствами упруго-пластического материала Л. Прандтля. Учитываются три компоненты (σ_x, σ_y, τ_{xy}) напряженного состояния, а также скачкообразное изменение коэффициента С. Пуассона при переходе материала из упругого состояния в пластическое. Вопросы потери устойчивости не затрагиваются. Сосредоточенные нагрузки считаются приложенными на некоторой малой длине и контактные напряжения от них принимаются равномерно распределенными.

Связь между напряжениями и деформациями принимается в виде

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x = (1/E + 1/D)\,\sigma_x - [\nu/E + 1/(2D)]\,\sigma_y, \\ \varepsilon_y = (1/E + 1/D)\,\sigma_y - [\nu/E + 1/(2D)]\,\sigma_x, \\ \gamma_{xy} = [2(1+\nu)/E + 3/D]\,\tau_{xy}, \end{cases}$$

где E — модуль нормальной упругости, ν — коэффициент Пуассона в упругой области, D — пластический модуль, определяемый равенствами

$$D = E/(E e_i/\sigma_T - 1) \text{ при } E e_i/\sigma_T > 1 \text{ и } 1/D = 0 \text{ при } 0 \leqslant E e_i/\sigma_T \leqslant 1, \tag{2}$$

где e_i — интенсивность деформации.

Выражения (2) представляют деформацию разложенной на упругую и пластическую части и учитывают разницу в значении коэффициента Пуассона в упругой (ν) и в пластичекой (0,5) зонах.

Решая (2) относительно напряжений, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} &= \frac{E(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}{2(1-\nu)\left[1+\dfrac{E}{2D(1-\nu)}\right]} \pm \frac{E(\varepsilon_x-\varepsilon_y)}{2(1+\nu)\left[1+\dfrac{3E}{2D(1+\nu)}\right]},\\ \tau_{xy} &= \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\nu)\left[1+\dfrac{3E}{2D(1+\nu)}\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2. БАЛКА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Напряженное состояние балки прямоугольного сечения (рис. 1) в упругой стадии работы характеризуется напряжениями

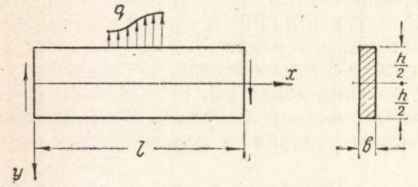


Рис. 1

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 6M\eta/(bh^2),\\ \sigma_y &= q(\eta^3 - 3\eta + 2)/(4b),\\ \tau_{xy} &= 3Q(1-\eta^2)/(2bh), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где M, Q и q изгибающий момент, перерезывающая сила и интенсивность местной нагрузки в исследуемом сечении, $\eta = 2y/h$ относительная ордината слоя, параллельного оси сечения.

Напряжения (4) удовлетворяют дифференциальным условиям равновесия и граничным условиям на длинных сторонах балки.

Этим напряжениям соответствуют деформации

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0\eta - \nu\varepsilon_y^0(\eta^3 - 3\eta + 2)/2, \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x^0\eta + \varepsilon_y^0(\eta^3 - 3\eta + 2)/2,\\ \varepsilon_z = \nu[\varepsilon_x^0\eta + \varepsilon_y^0(\eta^3 - 3\eta + 2)/2], \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0(1-\eta^2), \end{gathered} \tag{5}$$

где ε_x^0 — удлинение на незагруженной ($\eta = 1$) кромке балки, ε_y^0 и γ_{xy}^0 — смятие и сдвиг на оси ($\eta = 0$) балки.

Обычно в задачах, подобных рассматриваемой, принимается как в упругой, так и в пластической стадии гипотеза плоских сечений Бернулли. В данном же случае мы примем, что закон деформирования (5) останется справедливым и в упруго-пластической стадии работы сечения. Тогда, подставляя (5) в (3), вводя безразмерные напряжения

$$s = \sigma_x/\sigma_T, \quad u = \sigma_y/\sigma_T, \quad t = \sqrt{3}\,\tau_{xy}/\sigma_T \tag{6}$$

и обозначая

$$e_x = \varepsilon_x^0 E/\sigma_T, \quad e_y = \varepsilon_y^0 E/\sigma_T, \quad g = \sqrt{3}\,\gamma_{xy}^0 E/[2(1+\nu)\sigma_T],$$
$$\alpha_x = \frac{1}{2} e_x/g, \quad \alpha_y = \frac{1}{2} e_y/g, \tag{7}$$

где σ_T — предел текучести материала, получим после необходимых преобразований

$$\left.\begin{aligned} s/t &= \alpha_x \eta(\vartheta+1)/(1-\eta^2) + \frac{1}{2}\alpha_y(\eta^3-3\eta+2)(\vartheta-1)/(1-\eta^2), \\ u/t &= \alpha_x \eta(\vartheta-1)/(1-\eta^2) + \frac{1}{2}\alpha_y(\eta^3-3\eta+2)(\vartheta+1)/(1-\eta^2), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где ϑ — некоторая функция, вводимая равенством

$$1 + 3E/[2D(1+\nu)] = \vartheta\{1 + E/[2D(1-\nu)]\} \tag{9}$$

и изменяющаяся в пределах $1 \leqslant \vartheta \leqslant 3(1-\nu)/(1+\nu)$.

В момент достижения предельного равновесия во всех точках сечения выполняется условие пластичности Губера-Мизеса, которое в наших обозначениях имеет вид:

$$s^2 + u^2 + t^2 - su = 1. \tag{10}$$

Решая уравнения (8) совместно с условием (10), найдем следующие выражения безразмерных напряжений при предельном состоянии сечения

$$\left.\begin{matrix} s \\ u \end{matrix}\right\} = \left[\alpha_x \eta(\vartheta \pm 1) + \frac{1}{2}\alpha_y(\eta^3-3\eta+2)(\vartheta \mp 1)\right]/\sqrt{A}, \quad t = (1-\eta^2)/\sqrt{A}, \tag{11}$$

где

$$A = (1-\eta^2)^2 + \left[\alpha_x^2\eta^2 + \frac{1}{4}\alpha_y^2(\eta^3-3\eta+2)^2\right](\vartheta^2+3) +$$
$$+ \alpha_x\alpha_y\eta(\eta^3-3\eta+2)(\vartheta^2-3).$$

Предельные интегральные характеристики эпюр соответствующих компонент напряженного состояния при предельном состоянии сечения оцениваются величинами

$$M_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\sigma_T bh^2\int_{-1}^{1} s\eta\,d\eta, \quad Q_{\text{пр}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sigma_T bh\int_{-1}^{1} t\,d\eta, \quad R_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\sigma_T bh\int_{-1}^{1} u\,d\eta, \tag{12}$$

или коэффициентами

$$\mu = M_{\text{пр}}/M_0 = \int_{-1}^{1} s\eta\,d\eta, \quad \chi = Q_{\text{пр}}/Q_0 = 0{,}5\int_{-1}^{1} t\,d\eta, \quad \psi = R_{\text{пр}}/R_0 = 0{,}5\int_{-1}^{1} u\,d\eta, \tag{13}$$

где $M_0 = \sigma_T W_{пл}$, $Q_0 = \sigma_T F/\sqrt{3}$ и $R_0 = \sigma_T F$ — есть значения предельного изгибающего момента, предельной поперечной силы и предельного объема эпюры сминающих напряжений, воспринимаемые сечением соответственно при чистом изгибе, чистом срезе и чистом смятии, $W_{пл}$ — пластический момент сопротивления и F — площадь сечения балки.

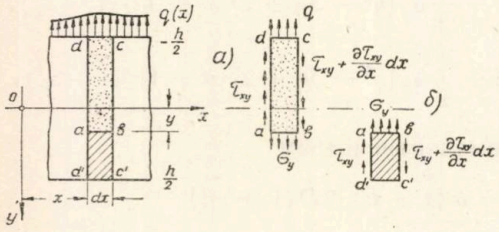


Рис. 2.

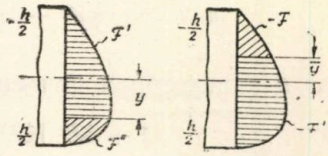


Рис. 3.

Величина R, введенная выше, вообще говоря, формально, связана со значением интенсивности местной нагрузки в сечении. В самом деле, согласно рис. 2 имеем

$$\sigma_y = \frac{q}{2b} + \frac{1}{2}\left[\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dy + \int_y^{-\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dy\right]$$

и, следовательно, объем R эпюры напряжений σ_y

$$R = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y b\, dy = \frac{qh}{2} + \frac{b}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \left[\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dy + \int_y^{-\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dy\right] = \frac{qh}{2} + \frac{b}{2} I.$$

В I пределы интегрирования не зависят от x, тогда, вынося знак дифференцирования за знаки интегралов, получим:

$$I = \frac{d}{dx}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \left[\int_y^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, dy + \int_y^{-\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, dy\right].$$

Интегралы, стоящие в квадратных скобках, выражают собой площади частей эпюры τ_{xy}, отделенных друг от друга на расстоянии y от оси сечения (рис. 3), поэтому все выражение в скобках есть разность ΔF этих площадей. Если эпюра τ_{xy} не имеет точек разрыва, то каждому значению y можно подобрать такое „сопряженное“ ему значение $\bar{y}$, при

котором разность соответствующих площадей эпюры будет равна $-\Delta F$. При выполнении окончательной квадратуры ордината y пробегает все значения, заключенные в промежутке от $-h/2$ до $h/2$, среди которых, очевидно, каждое будет иметь „сопряженное" ему значение этой ординаты. Отсюда следует, что все дифференцируемое выражение равно нулю и $I = 0$. Т. о.

(14) $$R = qh/2, \text{ а } \psi = R_{\text{пр}}/R_0 = q_{\text{пр}}/q_0 \text{ и } q_0 = 2\sigma_T b.$$

Рассматривая случай „простого" загружения, т. е. пропорционального возрастания всех нагрузок, можно допустить, что и усилия в каждом сечении также будут возрастать пропорционально параметру роста нагрузок. Тогда нетрудно установить следующие зависимости между коэффициентами (13):

$$\chi = k\mu, \quad \psi = n\chi, \quad \mu = m\psi,$$

причем

(15) $$k = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{Qh}{M}, \quad n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{qh}{Q}, \quad m = 8M/(qh^2),$$

где M, Q и q расчетные значения момента, перезывающей силы и интенсивности местной нагрузки в рассматриваемом сечении с точностью до параметра.

Для разыскания функции ϑ заметим, что (9) с учетом (2) приводится к виду

(16) $$\vartheta = \frac{2(1-\nu^2) + 3(1-\nu)(Ee_i/\sigma_T - 1)}{2(1-\nu^2) + (1+\nu)(Ee_i/\sigma_T - 1)},$$

а так как в нашем случае интенсивность деформации

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2},$$

то с учетом (5) и (7)

(17) $$Ee_i/\sigma_T = \frac{4}{3}(1+\nu)g\sqrt{f(\alpha_x, \alpha_y, \eta)},$$

где

$$f(\alpha_x, \alpha_y, \eta) = \alpha_x^2\eta^2 - \frac{1}{2}\alpha_x\alpha_y\eta(\eta^3 - 3\eta + 2) +$$

$$+ \frac{1}{4}\alpha_y^2(\eta^3 - 3\eta + 2)^2 + \frac{1}{4}(1-\eta^2)^2.$$

В момент замыкания пластического шарнира, т. е. в момент достижения предельного равновесия в сечении существует по крайней мере одна с ординатой $\eta = \eta_1$, принадлежащая границе между упругой и пластической областями, для которой $Ee_i/\sigma_T = 1$ и, следовательно, в этот момент

(18) $$g = g_1 = 3/[4\ 1 + \nu)\sqrt{f(\alpha_x, \alpha_y, \eta_1)}].$$

Для этой точки одновременно справедливы уравнения упругой и пластической стадий, т. е. для нее имеем

(19) $$s = e_x \eta_1,\ u = \frac{1}{2} e_y (\eta_1^2 - 3\eta_1 + 2),\ t = g_1 (1 - \eta_1^2),\ s^2 + u^2 + t^2 - su = 1.$$

Подставляя три первых выражения (19) в четвертое, перенося все члены в левую часть и деля на $4 g_1^2$, получим

$$f(\alpha_x, \alpha_y, \eta_1) - 1/(4 g_1^2) = 0.$$

Можно показать[1]), что функция $f(\alpha_x, \alpha_y, \eta) - 1/(4g^2)$ должна иметь минимум в точке $\eta = \eta_1$. Тогда, т. к. ее последний член не зависит от η, получаем уравнение

(20) $$f'(\alpha_x, \alpha_y, \eta) = 0,$$

которое совместно с условием

(21) $$f''(\alpha_x, \alpha_y, \eta) > 0$$

определяет относительную ординату η_1 точки, переходящей в данном сечении последней в пластическую стадию, т. е. замыкающей пластический шарнир.

Т. о. задача определения несущей способности по прочности прямоугольной балки, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, является полностью решенной в том смысле, что может быть построена таблица значений коэффициентов μ, χ, ψ, по которой с помощью соотношений (15) можно определить те значения этих коэффициентов, которые соответствуют конкретным условиям задачи. Процесс построения таблицы следующий: по уравнению (20) задавшись параметрами α_x и α_y находим точку η_1, замыкающую пластический шарнир. Решение удобно проводить графически. Затем по (18) находим параметр деформации g_1, соответствующий моменту наступления предельного равновесия. Далее по (17) и (16) вычисляем значения функции ϑ для разных точек сечения и, наконец, по (11) безразмерные компоненты напряжения.

В таблице 1 приведены значения коэффициентов, вычисленные для некоторых сочетаний параметров α_x и α_y.

Исходя из данных таблицы можно, повидимому, предложить приближенную зависимость

---

1) Доказательство не приведено в виду громоздкости выкладок. Полагая противное, будем иметь, что существует такая точка $\eta = \eta_0$, для которой выражение, полученное путем подстановки первых трех равенств (19) в четвертое, меньше единицы. Это неравенство, после подстановки в него значений e_x, e_y и g из (3), обе части которых поделены на σ_T, приводит, совместно с условием пластичности, к неравенству $E/D < 0$, что невозможно, т. к. и E и D — положительны.

Таблица 1

α_x	α_y/α_x	μ	χ	ψ	k	n	m	$\mu^2+\chi^2+\psi^2$
0,1	—0,1	0,373	0,908	0,059	2,430	0,065	6,330	0,968
	—1,0	0,357	0,837	0,339	2,340	0,405	1,053	0,942
	—5,0	0,291	0,572	0,728	1,965	1,271	0,400	0,942
1,0	—0,1	0,877	0,536	0,171	0,612	0,319	5,120	1,084
	—1,0	0,595	0,290	0,760	0,492	2,600	0,284	1,016
	—5,0	0,410	0,088	0,935	0,214	10,600	0,440	1,050
5,0	—0,1	1,075	0,245	0,318	0,228	1,298	3,380	1,317
	—1,0	0,634	0,070	0,765	0,110	10,900	0,830	1,987
	—5,0	0,450	0,016	0,945	0,035	56,250	0,495	1,110

(22) $$\mu^2+\chi^2+\psi^2=1,$$

определяющую в пространстве M, Q, q эллипсоид.

Заметим еще, что, поделив первое уравнение (8) на второе, можно найти для оси ($\eta=0$) балки

$$\sigma_x/\sigma_y=(\vartheta-1)/(\vartheta+1)\geqslant 0 \quad (\text{т.к. } \vartheta\geqslant 1),$$

следовательно в пластической стадии ($\vartheta>1$) напряжения σ_x и σ_y на оси балки однозначны, и нейтральная ось, в смысле геометрического места точек, в которых $\sigma_x=0$, смещается с оси сечения в сторону ненагруженной кромки балки. Положение этой нейтральной оси можно найти, положив в (11) $s=0$, что дает уравнение

(23) $$\eta_0^3+\frac{1}{2}\{\alpha_x(\vartheta+1)/[\alpha_y(\vartheta-1)]-3\}\eta_0+2=0,$$

определяющее ординату η_0 нейтральной оси.

На рис. 4 и 5 приведены графики функции ϑ и эпюры безразмерных напряжений s, u и t для предельного состояния сечения при некоторых значениях параметров α_x и α_y.

Графики ϑ позволяют проследить процесс развития пластических деформаций по высоте сечения, т.к. большие абсциссы кривых соответствуют более раннему наступлению пластичности в данной точке.

На рис. 5 сплошные линии соответствуют значениям безразмерных напряжений по (11), штрих-пунктирные—допущению $\vartheta=1$ и пунктирные — неучету сминающих напряжений, т. е. принятию $u\equiv 0$. Следует отметить, что допущение $\vartheta=1$ согласно (9) утверждает равенство

$$1+3E/[2D(1+\nu)]=1+E/[2D(1-\nu)],$$

которое выполняется лишь в упругой стадии ($1/D = 0$) или при принятии упругого коэффициента ν Пуассона равным 0,5, т. е. его значению в пластической стадии, что, вообще говоря, неверно.

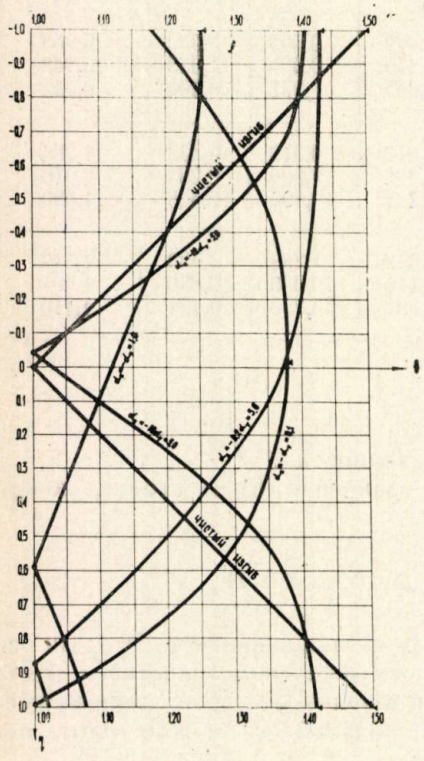


Рис. 4.

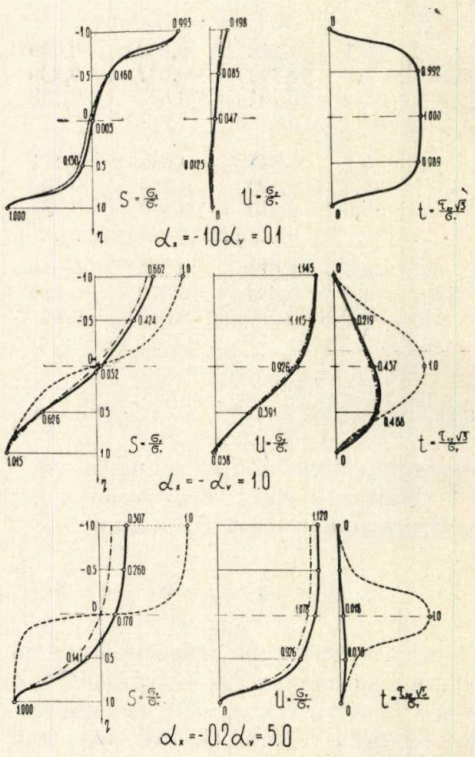


Рис. 5.

3. ДВУТАВРОВАЯ БАЛКА

Если для балки прямоугольного сечения за момент исчерпания несущей способности по прочности было принято образование в каком-либо сечении полного пластического шарнира, то такое условие для двутавровой балки будет неверным. У двутавра, даже при полностью упругой работе полок, но при захвате пластическими деформациями всей высоты стенки, происходит неизбежно потеря несущей способности. Это объясняется тем, что образование пластической зоны в стенке нарушает связь между поясами, которые из своей плоскости, будучи мало жесткими, работать не могут. Этот вывод вытекающий из некоторых экспериментов [2] кладется в основу дальнейшего исследования. Т. е. принимается, что предельное по прочности состояние двутаврового сечения наступает при захвате его стенки по всей высоте пластическими деформациями, вне зависимости от напряженного состояния поясов.

Принимая сечение балки по рис. 6 и обозначая $\beta = S_{ст}/S_0$, где S_0 — статический момент полусечения, $S_{ст}$ — статический момент половины стенки относительно оси сечения, придем к следующей системе напряжений, справедлнвой в упругой стадии работы стенки

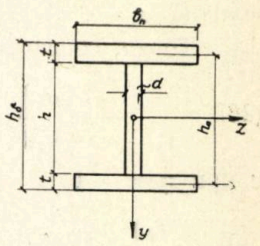


Рис. 6

$$(24)\quad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{1}{2} Mh\eta/(Id), \\ \sigma_y = \dfrac{1}{6} q S_0 h\,(\beta\eta^3 - 3\eta - \beta + 3)/(Id), \\ \tau_{xy} = QS_0(1-\beta\eta^2)/(Id). \end{cases}$$

Здесь I — момент инерции сечения, d — толщина стенки балки. Напряжения (24) относятся только к стенке балки и хорошо согласуются, например, с опытами Циллингера [14].

Поступая далее аналогично изложенному в решении для прямоугольной балки, найдем безразмерные напряжения в стенке двутавра при его предельном состоянии

$$(25)\quad \left.\begin{matrix} s \\ u \end{matrix}\right\} = [\alpha_x\eta(\vartheta \pm 1) + \alpha_y B(\vartheta \mp 1)/(3-\beta)]/\sqrt{A_\beta},\quad t = (1-\beta\eta^2)/\sqrt{A_\beta},$$

где

$$A_\beta = (1-\beta\eta^2)^2 + [\alpha_x^2\eta + \alpha_y^2 B^2/(3-\beta)^2](\vartheta^2+3) + 2\alpha_x\alpha_y\eta B(\vartheta^2-3)/(3-\beta),$$

$$B = \beta\eta^3 - 3\eta - \beta + 3.$$

Несущая способность всего сечения оценивается коэффициентами

$$(26)\quad \mu = M_{пр}/M_0,\ \chi = Q_{пр}/Q_0,\ \psi = q_{пр}/q_0,$$

которые, однако, сразу не могут быть определены.

Введем в рассмотрение коэффициенты

$$(27)\quad \mu_c = \int_{-1}^{1} s\,\eta\,d\eta,\ \chi_c = 0{,}5\int_{-1}^{1} t\,d\eta,\ \psi_c = 0{,}5\int_{-1}^{1} u\,d\eta,$$

дающие изменения предельных усилий воспринимаемых только стенкой при плоском напряженном состоянии, по сравнению с предельными усилиями, соответственно, при чистом изгибе, чистом срезе и чистом смятии стенки.

Коэффициенты (26) необходимо связать с (27), что может быть сделано путем рассмотрения совместности усилий в месте сопряжения стенки балки с полкой. Этим будут учтены и напряжения, развивающиеся в полках балки.

В точке $\eta=1$ (сопряжение стенки с ненагруженной полкой) $\varepsilon_x = \varepsilon_x^0$ и $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x^0$, а при $\eta=-1$ (сопряжение стенки с нагруженной полкой) $\varepsilon_x = -\varepsilon_x^0 - 2\nu\varepsilon_y^0$ и $\varepsilon_y = \nu\varepsilon_x^0 + 2\varepsilon_y^0$.

Тогда, согласно (3), при $\eta = 1$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} \cdot \{1 + 3E/[2D(1+\nu)]\} = \frac{1}{2}\sigma_T e_x(\bar{\vartheta} \pm 1) \tag{28}$$

и при $\eta = -1$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} \cdot \{1 + 3E/[2D(1+\nu)]\} = -\frac{1}{2}\sigma_T [e_x(\vartheta^* \pm 1) - 2e_y(\vartheta^* \mp 1)], \tag{29}$$

где $\bar{\vartheta}$ и ϑ^* значения функции ϑ в точках $\eta=1$ и $\eta=-1$.

Т. к. выражения в фигурных скобках в левых частях (28) и (29) не меньше единицы, то напряжения не могут быть больше соответствующих значений правых частей этих равенств. Принимая наибольшее возможное значение папряжения σ_x, т. е. приравнивая его в соответствующих точках правым частям (28) и (29), можем найти изгибающий момент, воспринимаемый полками при предельном состоянии сечения:

$$M_{\text{полок}} = \frac{1}{4}\sigma_T F_{\text{п}} h [e_x(\bar{\vartheta} + \vartheta^* + 2) - 2e_y(\vartheta^* - 1)],$$

где $F_{\text{п}}$—площадь сечения одной полки.

Складывая эту величину с моментом, воспринимаемым стенкой балки

$$M_c = \frac{1}{4}\mu_c \sigma_T dh^2,$$

найдем полный момент, воспринимаемый всем сечением при его предельном состоянии

$$M_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\sigma_T dh^2 \left\{\mu_c + \frac{1}{4}\lambda [e_x(\bar{\vartheta} + \vartheta^* + 2) - 2e_y(\vartheta^* - 1)]\right\}, \tag{30}$$

где

$$\lambda = 4F_{\text{п}}/(dh) = (1-\beta)/\beta. \tag{31}$$

При чистом изгибе в поясах $\sigma_x = \sigma_T$, тогда в этом случае

$$\frac{1}{2}e_x(\bar{\vartheta}+1) = 1 \text{ и } \frac{1}{2}[e_x(\vartheta^*+1) - 2e_y(\vartheta^* - 1)] = 1,$$

и, полагая $\mu_c = 1$, получим из (30) с учетом (31) $M_0 = \frac{1}{4}\sigma_T dh^2(1+\lambda)$, откуда

$$\mu = M_{\text{пр}}/M_0 = \beta\mu_c + \frac{1}{4}(1-\beta)[e_x(\bar{\vartheta} + \vartheta^* + 2) - 2e_y(\vartheta^* - 1)], \tag{32}$$

причем согласно (28) и (29) имеют место неравенства

$$e_x \leqslant 2/(\vartheta+1) \text{ и } -e_y \leqslant \frac{1}{2}[2-e_x(\vartheta^*+1)]/(\vartheta^*-1). \tag{33}$$

Заметим, что при $\beta=1$ (прямоугольное сечение) согласно (32) $\mu=\mu_c$, что и следовало ожидать.

Совершенно аналогично, но с добавлением игнорирования толщиной полки балки по сравнению с высотой ее стенки, можно получить в общем случае для двутавра

$$\chi=\chi_c \text{ и } \psi=\psi_c, \tag{34}$$

откуда следует, что на перерезывающую силу и смятие работает в основном стенка балки.

Дальнейшее решение не представляет ничего принципиально нового по сравнению со случаем балки прямоугольного сечения. При простом загружении первые три зависимости (15) остаются в силе, а последние получают вид:

$$K=\frac{\sqrt{3}}{4}Qh/(M\beta), \quad n=\frac{1}{2\sqrt{3}}qh/Q, \quad m=8M\beta/(qh^2). \tag{35}$$

Функция ϑ определяется общей формулой (16), формулы (17), (18), (20) и (21) сохраняют силу, только для двутавра

$$f(\alpha_x, \alpha_y, \eta)=\alpha_x^2\eta^2-\alpha_x\alpha_y\eta(\beta\eta^3-3\eta-\beta+3)/(3-\beta)+$$
$$+\alpha_y^2(\beta\eta^3-3\eta-\beta+3)^2/(3-\beta)^2+\frac{1}{4}(1-\beta\eta^2)^2.$$

На рис. 7 и 8 приведены графики функции ϑ и эпюры безразмерных напряжений в стенке двутавра при его предельном состоянии, вычисленные для некоторых значений параметров α_x и α_y. В таблице 2 приведены также значения коэффициентов μ, χ и ψ, а также величин e_x и e_y, причем при определении последних учтены неравенства (33). Подчеркнутые в таблице значения этих величин, вычисляемых вообще по (7), взяты как предельно возможные по (33), т. к. по (7) они получились больше. Это указывает, что в данных случаях пластичность развивается вначале в полках и потеря несущей способности происходит при пластической работе последних. В остальных случаях потеря несущей способности происходит при упругой работе полок.

Следует еще заметить, что по самому смыслу величина q для двутавра представляет собой интенсивность давления загруженной полки балки на стенку в исследуемом сечении. Она должна при сосредоточенных нагрузках вычисляться с учетом распределения давления по длине балки за счет жесткости поясов. Согласно исследованию Б. М. Броуде можно считать

$$q=P/(dz),$$

где P — сосредоточенная нагрузка, $z=3{,}25\sqrt[3]{I_п/d}$ — длина распределе-

ния сосредоточенной нагрузки по длние балки на уровне сопряжения полки со стенкой, причем $I_п$ — момент инерции полки относительно оси сечения.

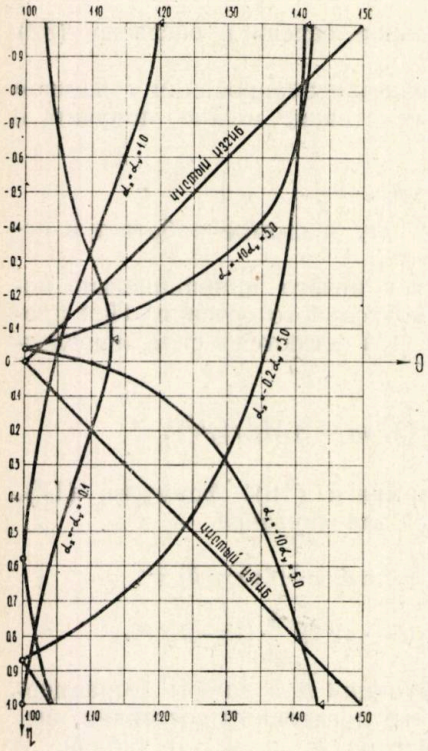


Рис. 7.

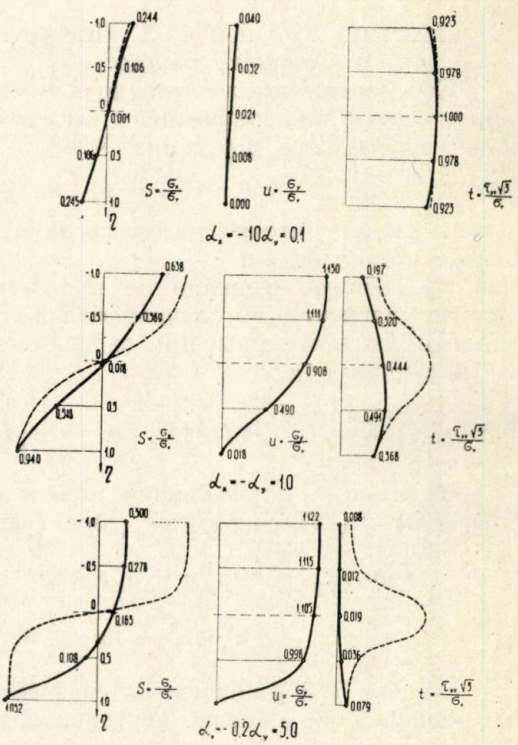


Рис. 8.

Таблица 2

α_x	α_y/α_x	μ_c	e_x	e_y	μ	χ	ψ	k	n	m
0,1	—0,1	0,162	0,280	—0,028	0,256	0,984	0,031	3,838	0,031	8,440
	—1,0	0,160	0,273	—0,273	0,266	0,973	0,233	3,650	0,240	1,141
	—5,0	0,149	0,273	—1,253	0,402	0,666	0,702	1,658	1,050	0,573
1,0	—0,1	0,807	*0,900*	*—0,023*	0,965	0,633	0,125	0,657	0,197	7,720
	—1,0	0,557	*0,184*	*0,408*	0,913	0,433	0,798	0,474	1,838	0,917
	—5,0	0,328	0,900	*0,277*	0,834	0,145	0,978	0,174	6,740	0,853
5,0	—0,1	1,072	*0,823*	*0,000*	1,014	0,208	0,282	0,205	1,356	3,591
	—1,0	0,628	*0,988*	*0,438*	0,927	0,071	0,857	0,077	12,180	1,065
	—5,0	0,340	0,910	*0,236*	0,843	0,042	0,987	0,050	23,430	0,855

Поступило 15 IV 1957

Горьковский инженерно-строительный институт им. В. П. Чкалова, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н. И., К теории пластического расчета на изгиб, „Вестник инженеров и техников", 1936, *10*.
2. Броуде Б. М., Расчет балок по предельному состоянию при учете касательных напряжений, сб. „Исследования по теории сооружений", 1951, *5*. Его же — Предельные состояния стальных балок, Москва, 1953.
3. Green A. P., The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1953, **6**, *2*, pp. 223–239.
4. — Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1954, **3**, *1*, pp. 1–15.
5. — Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1955, **3**, *2*, pp. 143–156.
6. Жудин Н. Д., Пластичні деформації в стальних конструкціях, *2*, Київ, 1936.
7. Митинский В. И., Касательные напряжения при упруго-пластическом изгибе и т. д., Труды ВНИТОСС, 1939, **3**, *3*.
8. Папкович П. Ф., Основы теории упруго-пластического изгиба статически определимых балок, Труды ВНИТОСС, 1939, **3**, *3*.
9. Пальчевский С. А., Определение несущей способности стальных стержней и т. д., Сборник трудов Киевского инженерно-строительного института, 1948, *8*.
10. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала, 1939 и его же 2-е издание, 1954.
11. Стрельбицкая А. И., Влияние поперечной силы на величину предельной нагрузки при изгибе балок, Сборник трудов института строительной механики АН УССР, 1950, *12*.
12. Hill R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, 1950.
13. Horne M. R., Proc. of the Royal Soc. 1951, **207**, A, p. 216.
14. Zillinger, *Biegeversuche mit gewaltzen und genieteten Trägern*, Stahlbau, 1934, *26*.

ON THE LIMIT OF EQULIBRIUM OF THE STEEL BEAMS

(Summary)

The given article is concerned with the task of the limit of equilibrium of the bending steel beams having rectangular and diametric dual T-shaped sections in plane stress. We take into consideration the local stress σ_y as well as the additional stress of the three directions manifesting in the sections due to the change of the coefficient of S. Poisson by transition of the material from the elastic stage of work into the plastic stage besides the normal and cuting stress. The material is supposed to be the ideal-plastic L. Prandtl's body.

The formation of the complete plastic joint-hinge in one of the sections of the beam is supposed to be the necessary condition for reaching the limit of equilibrium, and for the dunl T-shaped section this is the complete plastic joint-hinge in the wall of the beam. The condition of plasticity of M. Hubert and R. Mises is accepted. The questions of stability are not discussed here.

The attained solution has given us the possibility to make up the table of the values of the coefficients

$$\mu=\frac{M_{\text{пр}}}{M_0}\ ,\ \chi=\frac{Q_{\text{пр}}}{Q_0}\ ,\ \psi=\frac{q_{\text{пр}}}{q_0},$$

$M_{\text{пр}}$, $Q_{\text{пр}}$, $q_{\text{пр}}$—being the limit values of the bending moment, diametric force and the intensity of the local load borne by the section in plane stress; M_0, Q_0, q_0 — respectively the same values but in the pure bending, pure cut and pure pressing. In the article is given the expression of some function θ describing the process of plasticity development in the section; the general expressions of the stress components in limit

conditions are given which show the great qualitative and quantitative divergences from the elementary decision.

It is proved that due to the plasticity development on the axis of the beam section the normal stress σ_x is not equal to zero and has the same significance with the stress σ_y, i. e. the axis of the plastic joint-hinge is displaced from the beam axis to the side of the beam which bears no load.

ASUPRA CAPACITĂŢII PORTANTE A GRINZILOR DE OŢEL

(Rezumat)

Autorul studiază limita de echilibru pentru grinzile de oţel cu secţiune dreptunghiulară şi dublu T în ipoteza că materialul este perfect plastic în sensul lui L. P r a n d t l.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

539,31

STUDIUL FOTOELASTICIMETRIC AL STĂRII DE TENSIUNI LA GRINZI SIMPLU REZEMATE CU ÎNĂLŢIMI LINIAR VARIABILE (CU DOUĂ PANTE)

DE

N. PREDA, VICTOR BAUŞIC, D. HORBANIUC şi M. MARINESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

Scopul acestui studiu îl constituie determinarea stării de tensiuni în grinzi simplu rezemate cu moment de inerţie variabil, pentru a vedea în ce măsură teoria elementară a rezistenţei materialelor este sau nu aplicabilă în acest caz. În prima fază s-au ales grinzi cu înălţimea liniar variabilă.

S-au confecţionat din plexiglas două tipuri de modele: cel din fig. 1 cu panta 7°47′ şi cel din fig. 2 şi 3 cu panta 9°50′. La modelele de tipul II diferă doar poziţia sarcinilor exterioare. Apoi, la bancul fotoelasticimetric, în lumină plan-polarizată, s-au obţinut izoclinele modelelor (fig. 1, 2 şi 3).

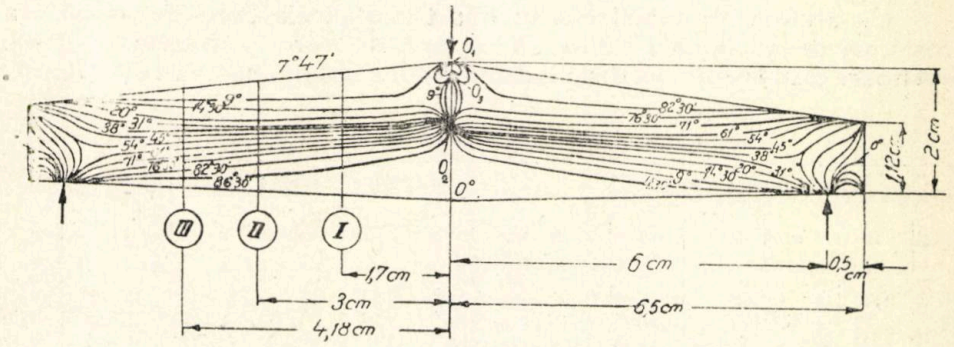


Fig. 1

De remarcat că parametrul α al izoclinelor nu variază cu aceeaşi amplitudine, întrucît am reţinut numai pe cele ce se diferenţiază în mod distinct. Analizînd tabelul izoclinelor se constată că sarcinile exterioare sînt izvor pentru ele şi în plus, între punctul de aplicaţie al sarcinii de la mijlocul grinzii, O_1, şi punctul izotrop cel mai de jos de pe axa de

simetrie O_2, se intercalează un alt punct izotrop O_3 ($\sigma_2=\sigma_1$ şi $\tau=0$), ceea ce se vede şi din fotografiile izoclinelor (fig. 4 a şi 4 b—pl. I). Acest aspect este similar cu cazul corespunzător de la grinzi simplu rezemate, de secţiune constantă şi care a fost rezolvat de Miura şi Krasnov [1].

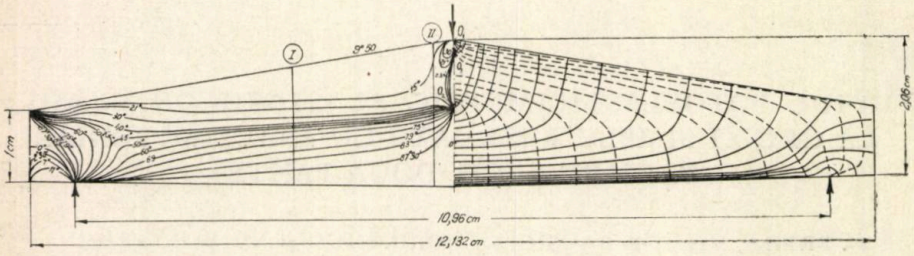


Fig. 2

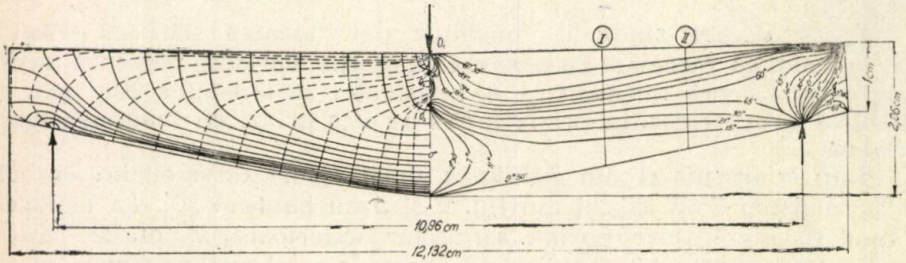


Fig. 3

Cu ajutorul izoclinelor s-au trasat izostaticele, aproximînd ramura izostatică dintre două izocline cu un arc de cerc şi folosind curbele ajutătoare duse la mijlocul distanţei dintre două izocline succesive (fig. 2 şi 3).

Tabe

Secţiunea I dreapta						Secţiunea I stînga					$\tau_{I_s}-\tau'_{I_d}=\Delta\tau$	σ'_y
Secţ.	m	α	2α	$\sin 2\alpha$	τ'_I dr.	m	α	2α	$\sin 2\alpha$	τ'_I st.		
0	11,64	90°	180°	0	0	11,84	90°	180°	0	0	0	0
1	10,75	88°40′	177°20′	0,0465	0,501	10,45	88°	176°	0,0697	0,728	0,227	-0,227
2	8,34	86°50′	173°40′	0,1103	0,920	8,10	86°	172°	0,139	1,126	0,206	-0,433
3	5,74	84°	168°	0,207	1,185	5,43	83°20′	166°40′	0,230	1,250	0,064	-0,497
4	3,07	75°30′	151°	0,484	1,487	2,98	73°30′	147°	0,544	1,623	0,136	-0,633
5	2,40	51°	102°	0,978	2,450	2,50	47°20′	94°40′	0,996	2,490	0,040	-0,673
6	3,02	21°40′	43°20′	0,686	2,086	3,10	20°10′	40°20′	0,647	2,002	0,084	-0,589
7	5,53	10°20′	20°40′	0,352	1,944	5,70	9°10′	18°20′	0,314	1,890	0,054	-0,535
8	8,00	8°05′	16°10′	0,278	2,224	8,25	7°55′	15°50′	0,272	2,244	0,020	-0,555
9	11,00	8°	16°	0,275	3,028	11,25	7°50′	15°40′	0,270	3,040	0,012	-0,577
9,9	13,55	7°50′	15°40′	0,270	3,655	13,75	7°42′	15°22′	0,265	3,648	0,008	-0,569

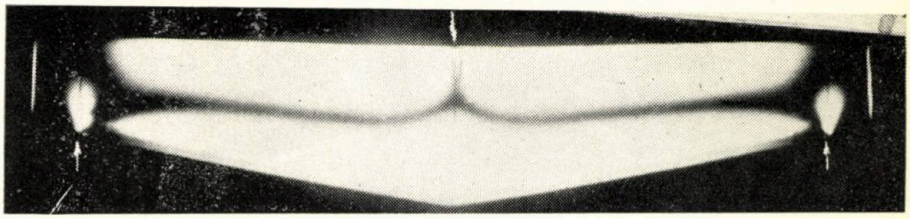


Fig. 4 a

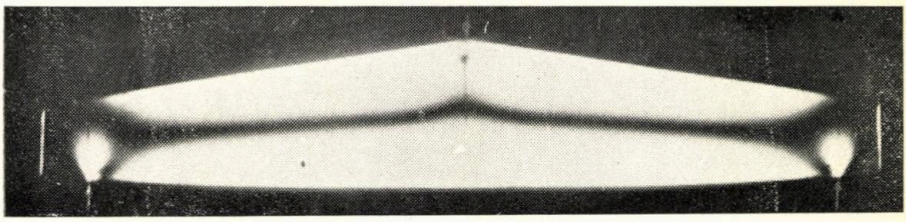


Fig. 4 b

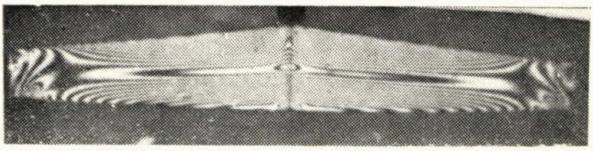


Fig. 5

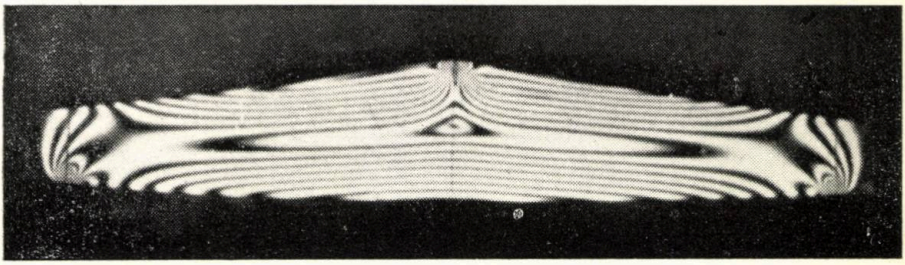


Fig. 6

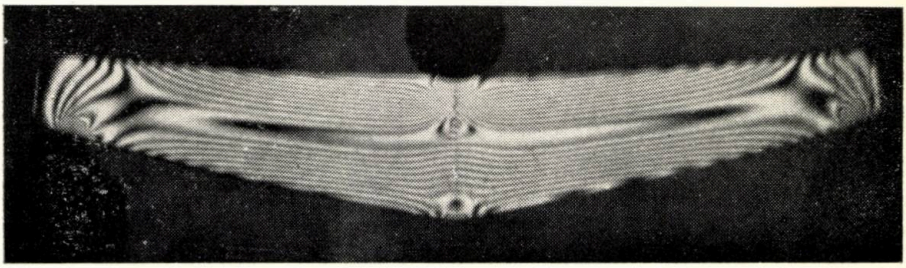


Fig. 7

PLANŞA I

Se constată că sarcinile exterioare sînt izvor pentru izostaticele de speţa II-a. De asemenea, punctul izotrop O_2 este atractiv, iar O_3 este repulsiv. Din analiza izostaticelor de speţa I rezultă că pentru grinzile de beton armat de forma celor din fig. 2, armătura întinsă este orizontală, iar ridicarea fiarelor se face la 45°. Pentru cele de forma din fig. 3 armătura întinsă se pune paralel cu marginea înclinată şi ridicarea se poate face aproximativ la 45° faţă de orizontală.

Pentru obţinerea izocromaticelor, modelul de tip I (fig. 1) a fost confecţionat dintr-o placă de Vishomlit (I. M. 44) groasă de 6,7 mm, preparat după reţeta publicată de prof. Prigorovski în „Laboratorul uzinei", *3*, 1949, iar modelul de tip II (fig. 2 şi 3) au fost confecţionate dintr-o placă de juralit groasă de 5 mm.

Pe grinzi drepte de secţiune constantă, decupate din aceleaşi plăci, s-au determinat echidistanţele pentru izocromate, folosind încovoierea sub moment constant [3]. S-au obţinut următoarele date: pentru I. M. 44 echidistanţa $a=17{,}6$ kgf/cm^2, iar pentru juralit $a=20{,}90$ kgf/cm^2. În fig. 5, 6 şi 7 (pl. I) sînt reproduse fotografiile izocromaticelor în lumină polarizată circular, sursa fiind lumină monocromatică furnizată de o lampă cu vapori de sodiu.

Din analiza izocromaticelor se poate constata prezenţa punctelor izotrope O_2 şi O_3 care corespund ca poziţie cu cele date de izocline. Apoi se constată că punctele de aplicaţie a sarcinilor exterioare sînt regiuni de concentrare de tensiuni.

Acelaşi lucru se poate afirma şi despre locurile în care se prezintă o variaţie bruscă de secţiune (fig. 7), ceea ce indică necesitatea racordării lente între pante. În fig. 5 se observă că punctul de la mijlocul grinzii, pe latura orizontală, prezintă o concentrare de tensiuni care se datoreşte unei trăsături practicate pe bord, de adîncime sub 1 mm. Avînd în vedere că ordinele izocromaticelor ce izvorăsc din această creştătură sînt 13, 14 şi 15, rezultă influenţa nefavorabilă a degradărilor marginilor.

Pentru determinarea diagramelor de variaţie a eforturilor unitare s-au făcut diverse secţiuni verticale, care în fig. 1, 2 şi 3 sînt marcate

lul 1

Secţiunea I mijloc											
m	α	2α	$\sin 2\alpha$	τ_I'	σ_y	$(\sigma_1-\sigma_2)^2$	τ_I	$4\tau_I^2$	$(\sigma_1-\sigma_2)^2-4\tau_I^2$	$\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2-4\tau_I^2}$	σ_x
11,74	90°	180°	0	0	0	11,74²	0	0	11,74²	11,740	11,740
10,60	88°20′	176°40′	0,0581	0,617	-0,113	112,100	0,308	0,378	111,722	10,580	10,467
8,23	86°25′	172°50′	0,124	1,019	-0,217	67,600	0,509	1,035	66,565	8,165	7,948
5,60	83°40′	167°20′	0,219	1,226	-0,248	31,200	0,613	1,448	29,752	5,460	5,212
3,02	74°30′	149°	0,515	1,554	-0,317	9,090	0,777	2,415	6,575	2,565	2,248
2,45	49°	98°	0,990	2,426	-0,336	6,000	1,213	5,870	0,130	0,3608	0,024
3,06	20°55′	41°50′	0,667	2,040	-0,295	9,340	1,020	4,160	5,180	2,275	- 2,470
5,61	9°35′	19°10′	0,328	1,837	-0,217	31,350	1,418	8,040	23,310	4,835	- 5,052
8,13	8°	16°	0,275	2,232	-0,228	66,000	1,116	4,970	61,030	7,820	- 8,048
11,12	7°55′	15°50′	0,272	3,030	-0,238	123,200	1,515	9,160	114,040	10,690	-10,928
13,65	7°45′	15°30′	0,267	3,651	-0,235	186,100	1,825	13,300	172,800	13,150	-13,385

cu cifre romane. Aproape toate secţiunile verticale au fost plasate în afara zonelor de perturbaţie, produse de sarcinile concentrate. Din cea de a doua ecuaţie de echilibru elastic, în coordonate rectangulare:

$$(1) \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,$$

se deduce variaţia lui σ_y pe verticală, în funcţie de variaţia lui τ_{xy} pe orizontală, adică

$$(\sigma_y)_A = (\sigma_y)_B - \sum \Delta \tau_{xy} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

unde $(\sigma_y)_B = 0$, punctul B fiind pe bordul orizontal şi liber de sarcini. Deci:

$$(2) \qquad \sigma_y = -\frac{\Delta y}{\Delta x} \sum \Delta \tau_{xy}.$$

Pentru determinarea lui $\Delta \tau_{xy}$ s-au făcut secţiuni ajutătoare la stînga şi la dreapta secţiunilor marcate cu cifre romane, simetrice faţă de acestea, iar împărţirea pe verticală a secţiunilor s-a ales astfel că $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

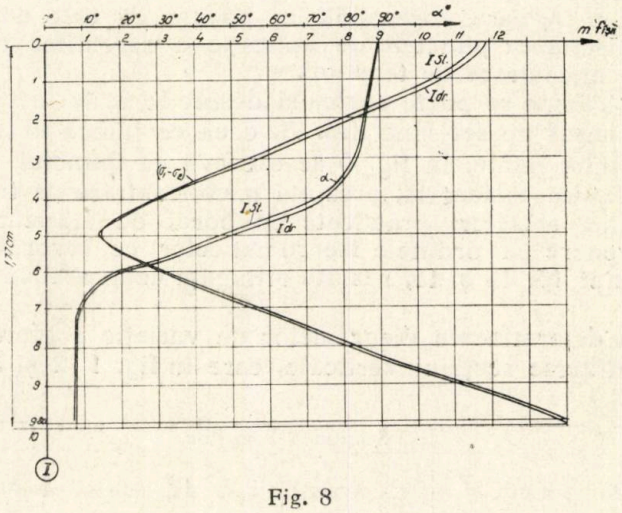


Fig. 8

Pentru secţiunile ajutătoare s-au trasat cu ajutorul izoclinelor şi izocromaticelor diagrame de felul celor din fig. 8 care reprezintă variaţia lui $\sigma_1 - \sigma_2$ şi α pe înălţime.

Apoi, cu ajutorul acestora s-au întocmit pentru fiecare secţiune tabele de tipul tabelului 1, utilizînd relaţia (2) precum şi relaţiile

$$(3) \qquad \tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad \text{şi} \quad (4) \quad \sigma_x = \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}.$$

S-a folosit relaţia (4) întrucît prima ecuaţie din (1) nu ne poate da variaţia lui σ_x pe înălţime [1].

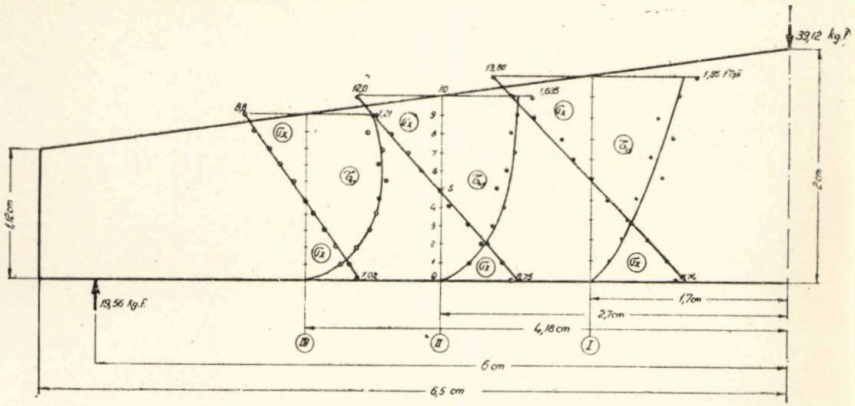


Fig. 9

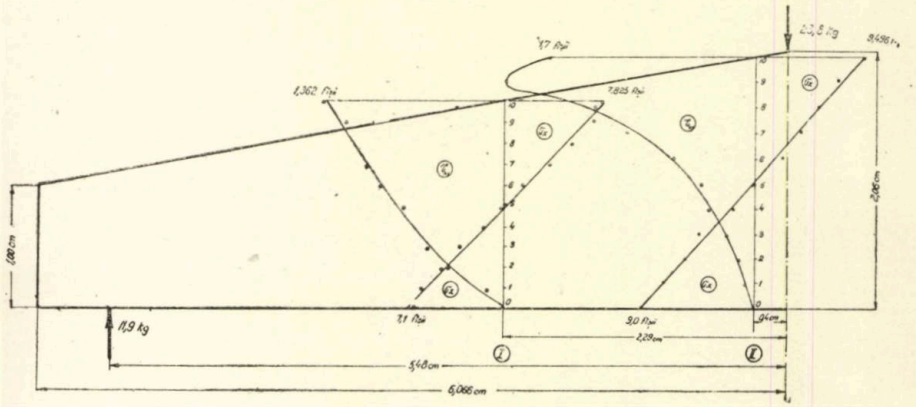


Fig. 10

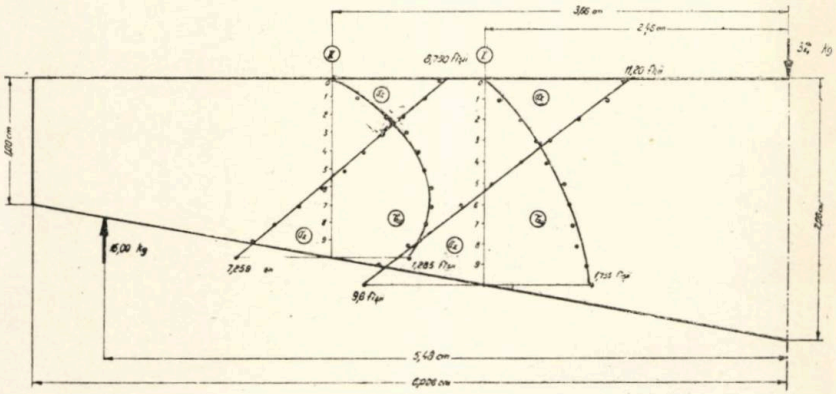


Fig. 11

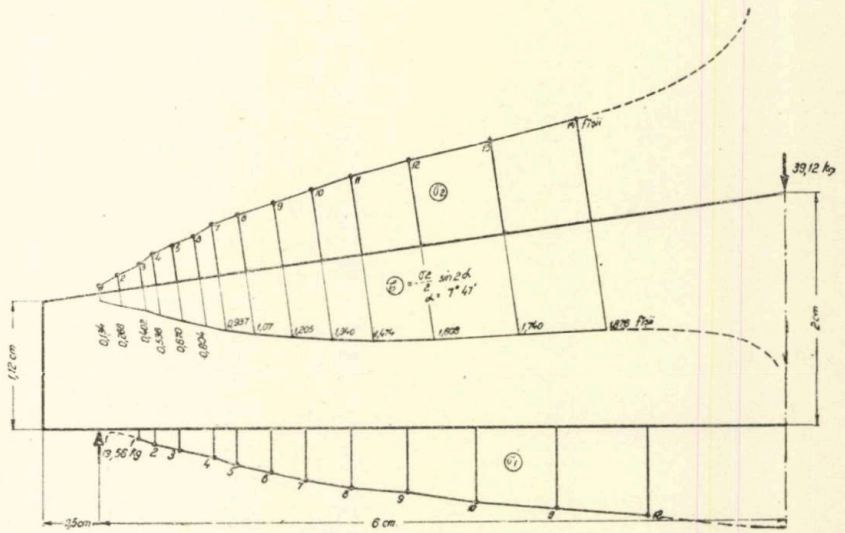


Fig. 12

Cu ajutorul datelor din tabele (de tipul tabelului 1) s-au construit, prin puncte, diagramele de variație ale eforturilor σ_x și τ_{xy}, pe înălțimea secțiunilor alese (fig. 9, 10 și 11 — pl. II).

În primul rînd ne-au preocupat verificările eforturilor căpătate pe cale experimentală. S-au obținut rezultatele din tabelul 2.

Tabelul 2

Grinda fig.	Secțiunea	Forțe de forfecare kgf			Momente încovoietoare kgfcm		
		Interioare $\sum_{i=1}^{10} \tau_i A_i$	Exterioare	Diferențe %	Interioare $\sum_{i=1}^{10} \sigma_{xi} y_i A_i$	Exterioare	Diferențe %
9	I	19,65	19,56	+0,45	80,00	84,10	−4,8
	II	19,00		−2,8	54,60	58,68	−6,9
	III	18,59		−4,9	32,80	36,60	−10,7
10	I	13,05	11,90	+9,6	39,60	38,00	+4,2
	II	12,90		+8,4	62,70	60,70	+3,3
11	I	16,70	16,00	+4,37	51,18	49,63	+3,2
	II	17,20		+7,5	29,80	30,78	−3,2

Analizînd diferențele procentuale, apreciem că rezultatele obținute sînt bune, deși cauzele erorilor pot fi multiple (erori de calcul grafic, numeric, neomogenitate structurală din cauza continuării procesului de polimerizare).

Analizînd diagramele obținute se constată următoarele:

a) eforturile tangențiale τ_{xy} variază pe secțiunile verticale după o lege cu totul diferită de cea furnizată de teoria elementară a rezistenței materialelor și anume, pornesc de la zero, de pe marginea orizontală, atingînd un maxim pe marginea înclinată, indiferent de poziția sarcinilor exterioare. Este probabil că curba de variație reprezintă un arc de parabolă. Se observă că cu cît ne apropiem de reazem, efortul tangențial maxim de pe marginea înclinată scade simțitor. O oarecare abatere de la forma comună de variație a lui τ_{xy} se observă în secțiunea II (fig. 10), apropiată de sarcina concentrată din mijlocul deschiderii;

b) eforturile unitare normale σ_x pe secțiunile verticale au o variație care se apropie de cea liniară, fiind nule în vecinătatea mijlocului înălțimii, însă între $(\sigma_x)_{max}$ și $(\sigma_x)_{min}$ de pe aceeași secțiune, sînt diferențe apreciabile. Se observă că σ_x este mai mare în valoare absolută pe liziera încărcată cu sarcină concentrată, indiferent dacă aceasta este orizontală sau înclinată. Forma grinzii, cît și repartiția eforturilor σ_x pe secțiune, ne face să ne gîndim la o bară cu axă curbă de rază mare de curbură. Dacă comparăm datele experimentale cu cele teoretice rezultate din relația lui Navier, rezultă că aceasta este acoperitoare (tabelul 3);

Tabelul 3

Grinda fig.	Secţ.	σ_x experimental kgf/cm²		$\sigma_x = \pm \frac{M}{W}$ teoretic kgf/cm²
		maxim	minim	
9	I	+ 203,30	− 243,00	± 240,00
	II	+ 171,50	− 211,20	± 206,00
	III	+ 123,40	− 154,80	± 154,50
10	I	+ 148,70	− 163,50	± 167,50
	II	+ 188,10	− 198,47	± 182,00
11	I	+ 201,00	− 234,00	± 224,30
	II	+ 151,50	− 183,00	± 174,63

c) în ceea ce priveşte presiunea între fibre (σ_y), din datele similare celor din tabelul 1 se constată că variază între 0,015 σ_x ...0,05 σ_x ;

d) în afară de cele semnalate mai sus s-au mai trasat şi diagramele tensiunilor de coardă pentru o singură grindă (fig. 12 —pl. II).

Experimentările s-au făcut în laboratorul de fotoelasticimetrie al Secţiei de Fizică de la Academia R. P. R., filiala Iaşi.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Statică, Rezistenţă şi Beton

BIBLIOGRAFIE

1. Фрохт М. М., Фотоупругость, т. I, ОГИЗ, М., 1948, (перевод из английской).
2. Iosipescu N., *Introducere în fotoelasticitate*, vol. I, 1953, Buc., Ed. Acad. R.P.R., seria ştiinţă şi tehnică, *12*.
3. Pirard A., *La Photoélasticité*, 1947, Dunod, Paris.
4. Coker E. G. a. Filon L. N. G., *A treatise on Photoelasticity*, 1931, Cambridge University Press.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ СВОБОДНО ОПОРНОЙ БАЛКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ВЫСОТОЙ (С ДВУМЯ УКЛОНАМИ)

(Резюме)

Даны результаты измерения методом фотоупругости распределений напряжений у некоторых балок с переменной линейной высотой.

Устанавливается, что σ_x в вертикальном разрезе приближается, как величина и распределение, к указанной в формуле Навье, а τ_{xy} заметно разнится от указанной в формуле Журавского.

ÉTUDE PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE DE L'ÉTAT DE TENSIONS AUX POUTRES SIMPLEMENT APPUYÉES ET À HAUTEUR LINÉAIRE VARIABLE (À DEUX PANTES)

(Résumé)

Dans cette Note les Auteurs donnent les résultats obtenus par voie photoélasticimétrique concernant la répartition des tensions dans certains poutres à hauteur linéaire variable. On constate que tandis que la valeur et la repartition de σ_x s'approchent de celles données par la formule de Navier, la valeur et la répartition de τ_{xy} diffère sensiblement de celles données par la formule de Juravsky.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

624.04

GENERALIZAREA METODEI DISTRIBUIRII MOMENTELOR, ÎN CALCULUL PLASTIC, LA CADRE OARECARE

DE

ANTON ŞESAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

1. Metoda distribuirii momentelor, sub oricare dintre variantele cunoscute, prezintă deosebite avantaje practice în calculul elastic al structurilor cu noduri paralel deplasabile.

În domeniul plastic, metoda aproximaţiilor succesive cîştigă şi mai mult interes, dovedindu-se a fi cu adevărat o metodă de *proiectare,* întrucît este singura care permite intuirea alegerii raţionale a secţiunilor şi urmărirea – în desfăşurarea unor calcule deosebit de simple – a întregului istoric de adaptare a structurii şi de repartizare a solicitărilor pînă la starea de cedare totală sau parţială.

Această metodă de calcul plastic, prezintă interes chiar la proiectarea în domeniul elastic întrucît ea indică limitele raţionale ale rapoartelor de dimensiuni între diferitele elemente ale structurii şi poate conduce cu uşurinţă la un calcul de *greutate minimă* a întregii structuri.

Cunoscuta metodă a distribuirii momentelor plastice (H o r n e) – dealtfel ca şi aceea a relaxărilor succesive (E n g l i s h) — este restrînsă, ca aplicare, în afara structurilor cu noduri fixe, doar la cadre etajate.

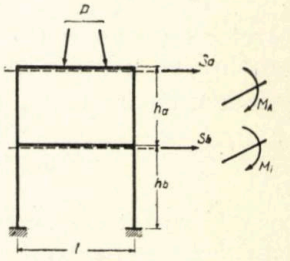


Fig. 1.

Limitarea este condiţionată de cunoaşterea momentelor de *deplasare* ale lanţurilor cinematice, necesare operaţiilor de echilibrare succesivă. Numai pentru cadrele etajate — cu noduri paralel deplasabile şi stîlpi de aceeaşi înălţime, (fig. 1) – se pot calcula imediat aceste momente neechilibrate de etaj (M_A, M_B,...), cunoscînd forţa de lunecare totală a etajului (S_A, S_B, ..) şi înălţimea stîlpilor (h_a, h_b ,....), ca braţ de pîrghie:

$$M_A = S_A h_a . \tag{1}$$

La cadre cu stîlpi de înălţime diferită (fig. 2a şi 2b), la cele cu noduri neparalel deplasabile (fig. 2c) ca şi la cadrele cu bare frînte (fig. 2d), aplicarea metodei distribuirii momentelor sub formele cunoscute devine, în general, greoaie în calculul în domeniul elastic, iar în domeniul plastic, realmente imposibilă, din cauza dificultăţii de echilibrare a lanţurilor cinematice oarecare.

H o r n e, în încheierea discuţiilor asupra comunicării sale [1], arată cum se poate extinde aplicarea distribuirii momentelor plastice şi la cadre portal (fig. 3), dar se poate observa uşor că, în fond, nu se generalizează metoda ci se reduce structura la un cadru

obişnuit cu grinda dreaptă, folosind în locul grinzii frînte *BCD* – o grindă *de înlocuire* – cu coeficienţi de transmitere deosebiţi: o deplasare în stînga „—1" produce în *C* un moment h/H, iar în *D* se transmite „+1" (v. fig. 3).

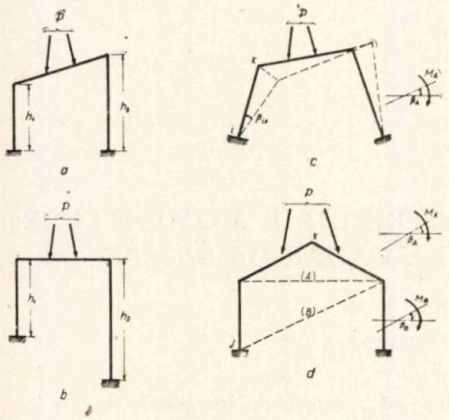


Fig. 2.

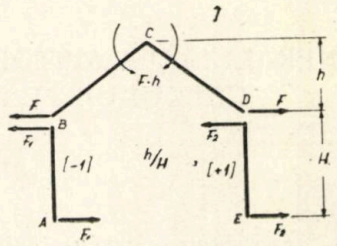


Fig. 3.

2. Folosind noţiunea de *moment activ* de *nod* şi *deplasare*, am stabilit [4] expresia coeficientului de proporţionalitate a rotirii (β_A), a barei de suport a momentului de deplasare (M_A) – lanţul *A* –, funcţie de rigidităţile la deplasare ($\overline{K}_{ik}$), corectate cu coeficienţii (β_{ik}) de proporţionalitate a rotirii barelor ($\overline{K}'_{ik} = \overline{K}_{ik}\ \beta_{ik}$ şi $\overline{K}''_{ik} = \overline{K}_{ik}\ \beta^2_{ik}$); anume:

$$\beta_A = \sum_A \overline{K}''_{ik} / \sum_A \overline{K}'_{ik}, \tag{2}$$

sumele referindu-se la toate barele antrenate în mişcarea mecanismului *A*.

Ştiind că β_A din relaţia (2) este corespunzător coeficienţilor β_{ik} a barelor lanţului *A* (fig. 2c şi 2d), momentele *active* de deplasare – iniţiale sau în echilibrările succesive, ($\mathfrak{M}_A$ sau M'_A)—se deduc imediat din relaţiile simple de lucru mecanic virtual:

$$\mathfrak{M}_A = \left(\sum_A \overline{P}_i \overline{\delta}_{i(\beta_{ik})} + \sum_A \mathfrak{M}_{ik}\, \beta_{ik} \right) / \beta_A . \tag{3}$$

Cunoaşterea acestor *momente active* de *deplasare* pentru orice lanţ cinematic, permite, în calculul elastic, generalizarea metodei distribuirii momentelor la cadre oarecare, sub o formă deosebit de simplă şi într-o singură treaptă de calcul.

Pentru a putea extinde şi în domeniul plastic metoda distribuirii momentelor la cadre oarecare, sînt necesare, în prealabil, unele observaţiuni şi precizări.

3. Prin corectarea succesivă a momentelor în calculul iterativ – în domeniul elastic sau plastic – al structurilor static nedeterminate, se urmăreşte, în esenţă, găsirea stărilor de coacţiune, corespunzătoare

legăturilor suplimentare şi a condiţiilor de echilibru căutate (elastice sau plastice), ceea ce revine la determinarea poziţiei liniei de referinţă *AB* (fig. 4) a funicularului de încărcare (*F*), pe fiecare element al structurii, în parte.

Poziţia iniţială a liniei de referinţă este arbitrară; se poate pleca de la grinda static determinată, de la momente de încastrare perfectă, de la momente plastice totale sau de la cele corespunzătoare unui grad de încastrare oarecare. Pentru ca numărul de aproximaţii succesive să fie cît mai redus, e indicat a se pleca de la o poziţie a liniei de referinţă cît mai apropiată de cea finală şi cît mai uşor de determinant; de aceea se *obişnuieşte* — fără a fi bineînţeles obligator — a se pleca în calculul elastic, de la momentele de încastrare perfectă iar în cel plastic, de la momentele plastice totale, a căror valoarea se determină imediat printr-un calcul simplu.

Dacă în calculul elastic, aproximaţiile succesive se pot conduce oarecum *mecanizat*, pe baza unor relaţii deduse din sistemul de ecuaţii de echilibru elastic, cu o convergenţă cunoscută sau eventual îmbunătăţită - prin calcul sau prin modificarea sistemului de bază - în domeniul plastic, condiţiile de echilibru fiind cuprinse într-un sistem de inegalităţi, aproximaţiile sînt arbitrare, orientate doar de cîteva criterii generale, pentru a ajunge la starea de echilibru final.

Dacă la prima vedere, ar putea să pară că lipsa mecanizării operaţiilor de echilibrare succesivă constituie un inconvenient al metodei distribuirii momentelor plastice, la o analiză mai adîncită şi mai ales după un număr, chiar redus, de rezolvări practice, proiectantul va recunoaşte că, în timpul echilibrărilor succesive, calculul plastic oferă instituţiei inginereşti o gamă variată de posibilităţi în proiectare, că structura începe să capete dimensiuni abia pe măsura elaborării calculului şi că aceste dimensiuni sînt filtrate prin simţul ingineresc al proiectantului ce poate urmări continuu posibilităţile de redistribuire a solicitărilor pe întreaga structură. Sub aspectul *adevăratei* proiectări, metoda distribuirii momentelor plastice apare cu mult mai *generoasă*; în locul verificării mecanizate a unei predimensionări, în calculul plastic proiectarea devine o muncă de *creaţie* şi o încercare continuă a proiectantului în *arta construcţiilor*.

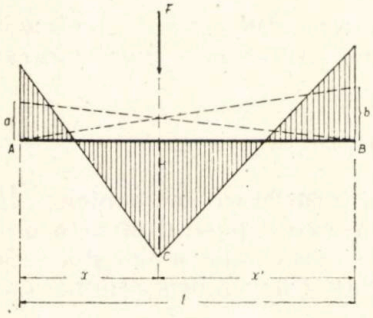


Fig. 4.

Tabelul 1

	A	*C*	*B*
I	*a*	ax'/l	0
II	0	bx/l	*b*
III	*a*	$ax'/l-bx/l$	*b*
IV	*a*	0	ax'/x
V	bx/x'	0	*b*

Cunoscînd semnificaţia deplasării liniei de referinţă în operaţiile de echilibrare succesivă ale calculului iterativ (elastic sau plastic), se pot deduce cu uşurinţă expresiile generalizate ale coeficienţilor de transmitere în calculul plastic (cu convenţia de semne cunoscută), descompunînd deplasarea în rotiri elementare în jurul celor trei secţiuni caracteristice *A*, *B* şi *C*, sau combinîndu-le convenabil (v. tabelul 1).

Prin *potrivirea* succesivă a liniei de referinţă, se modifică mereu momentele de *coacţiune* astfel ca în afara celor două condiţii de echilibru (static şi de curgere) —ce sînt iniţial şi în continuare satisfăcute — să se ajungă, prin echilibrări succesive de noduri şi *deplasări*, în baza *principiului de maxim* şi la satisfacerea condiţiei de mecanism.

Trebuie de observat că atît cele trei condiţii de echilibru, cît şi cele două principii (de maxim şi minim) folosite în calculul plastic, nu sînt decît aspecte diferite ale unicului principiu ce guvernează, sub diferite forme, întreaga statică (mecanică, elastică sau plastică) şi anume ale *lucrului mecanic minim*, care, la trecerea structurii din stadiul elastic în cel plastic, se transformă treptat din *lucru mecanic minim de deformaţie* în *lucru mecanic minim absorbit*.

În stadiul elastico-plastic relaţia de echilibru a lanţului A se poate scrie sub forma

$$L_A = \sum_A M_i \vartheta_i + \sum_A M_{ik} \beta_{ik} + \sum_A \overline{P}_i \overline{\delta}_i = 0 \tag{4}$$

în care primul termen reprezintă lucrul mecanic absorbit :

$$M_{ik} \beta_{ik} + M_{ie} \beta_{ie} = M_i (\beta_{ik} + \beta_{ie}) = M_i \vartheta_i \tag{4'}$$

rezultat din egalizarea momentelor în nodul i şi din însumarea rotirilor barelor $(\beta_{ik} + \beta_{ie}) = \vartheta_i$; termenul al doilea reprezintă lucrul mecanic de deformaţie (interior), iar al treilea, lucrul mecanic al încărcărilor exterioare.

La limită, în stadiul plastic, relaţia de echilibru va fi dată de *lucrul mecanic minim absorbit*

$$L_A = \sum_A M_i \vartheta_i + \sum_A \overline{P}_i \overline{\delta}_i = 0 \tag{4''}$$

4. Pentru cazurile cînd putem calcula *momentul activ de deplasare* în stadiul plastic, funcţie de rotirea β_A, prin modificarea corespunzătoare a relaţiei (2) şi anume (pentru I constant) :

$$\beta_A = \sum_A \beta_{ik}^2 / \sum_A \beta_{ik}, \tag{5}$$

ajungem la o primă generalizare a metodei distribuirii momentelor. În acest caz operaţiile se conduc similar ca în cazul generalizării în domeniul elastic [4], echilibrarea deplasărilor şi distribuţia momentului de deplasare pe bare putîndu-se face, în lipsă de alt criteriu, proporţional cu :

$$\nu'' = \beta_{ik} / \sum_A \beta_{ik}, \tag{5'}$$

rezultată din modificarea corespunzătoare a relaţiei $\nu' = \overline{K}'_{ik} / \sum_A \overline{K}'_{ik}$, valabilă în domeniul elastic.

Adevărata generalizare a metodei distribuirii momentelor plastice se poate obţine prin folosirea ca „*operant*“ al *corectărilor* succesive, în locul *momentelor active de deplasare*, a „*lucrului mecanic de deplasare*“.

Lucrul mecanic de deplasare inițial $\mathfrak{L}_A$ rezultă din relația:

$$(6) \qquad \sum_A \mathfrak{M}_{ik}\beta_{ik} + \sum_A \bar{P}_i \bar{d}_i + \mathfrak{L}_A = 0$$

iar dezechilibrările succesive ale deplasărilor pot fi prinse ca lucru mecanic, prin relația:

$$(7) \qquad \Delta' L_A = \sum_A \Delta' M_{ik} \cdot \beta_{ik}.$$

Trecerea de la *lucrul mecanic de deplasare* la momente se face prin intermediul *lucrului mecanic al barei:*

$$(8) \qquad \mathfrak{L}_{ik} = \mathfrak{L}_A \beta_{ik} / \sum_A \beta_{ik}$$

și similar:

$$(8') \qquad \Delta' L_{ik} = \Delta' L_A \cdot \beta_{ik} / \sum_A \beta_{ik},$$

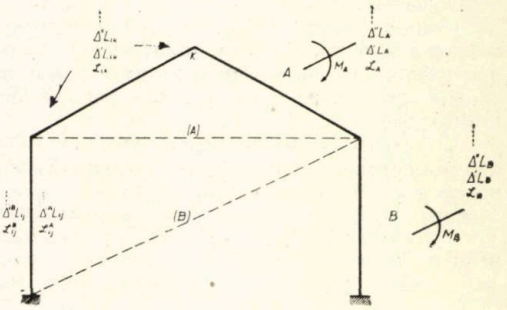


Fig. 5.

iar momentele de echilibrare a deplasării rezultă din:

$$(8'') \qquad \Delta' L_{ik} / \beta_{ik} = (\Delta' M_{ik} + \Delta' M_{ki}).$$

În cazul lanțurilor cinematice legate, trecerea unui moment de echilibrat de pe bara *ik* a lanțului *A* pe bara *rp* a lanțului *B* se face cu ajutorului relației:

$$(9) \qquad \Delta' M_{rp} = \Delta' M_{ik} \cdot \beta^A_{ik} / \beta^B_{rp}.$$

Operarea echilibrărilor succesive de deplasare prin intermediul *lucrului mecanic* generalizează aplicarea metodei distribuirii momentelor plastice la cadre oarecare, restul calculului efectuîndu-se ca la cadrele etajate.

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Statică, Rezistență și Beton

BIBLIOGRAFIE

1. Horne M. R, Proc. Instn. Civ. Engrs., 1954, *3* (Part 3), p. 51.
2. Baker J. F., Horne M. R. a. Heyman J., *The Steel Skeleton*, vol. II, *Plastic Behaviour and Design.*, University Press, Cambridge, 1956, pp. 154 – 163.
3. Neal B. G., *The Plastic Methode of Structural Analysis*, Chapman et Hall L T D, London, 1956.
4. Șesan A. și Orlovschi N., St. și Cerc. Șt., Acad. R. P. R., Filiala Iași, 1955 **6**, *3–4*, pp. 59–69.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА РАССПРЕДЕЛЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ЛЮБЫХ РАМ

(Резюме)

Известная форма метода расспределения пластических моментов (Horne) применима, используя равенство (1) — „момент смещения этажа", только для обыкновенных рам с параллельно смещающимися узлами (рис. 1).

Используя „активные моменты узлов" и „смещений", в работе [4] применяя равенство (2) обобщается в упругои области выражение „активного момента смещении"

— равенство (3) — для любых рам, т. е. обобщается применение метода к расчету любых рам (рис. 2).

Зная смысл смещения замыкающей (*AB*) (рис. 4) в упругом или же в пластическом итеративном расчете, даются обобщенные выражения коэффициентов передачи в пластическом расчете (табл. 1).

Дальше автор устанавливает, что условия равновесия — статическое, пластическое и механизма, а так же принцип максиммума и миниммума применяемые в пластическом расчете, это различные виды общего принципа строительной механики: принцип наименьшей работы. В упруго-пластичной работе системы, часть потенциальной энергии превращается в затраченую работу—равенство (4) — так, что в пределе, т. е. в пластичной работе системы, условие равновесия вытекает из „начала наименьшей затраченной работы".

В статье так же устанавливается, что обобщение метода расспределения пластических моментов возможно или используя активный момент смещения—равенство (5) вместо равенства (2) — (для частных случаев), или же используя — для общих случаев—возможную работу соответственной кинематической цепи (рис. 5).

Равенства (6), (7), (8) и (9) связывают возможную работу кинематической цепи и стержня и моменты на концах стержней; итеративный расчет ведется также как и для обыкновенных этажных рам.

LA GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE DISTRIBUTION DES MOMENTS, DANS LE CALCUL PLASTIQUE, AUX PORTIQUES QUELCONQUES

(Résumé)

L'application de la méthode de distribution des moments plastiques, sous les formes connues (H o r n e ou E n g l i s h) est, en général, limitée aux portiques étagés (fig. 1) car c'est seulement pour ceux-ci qu'on peut calculer — à l'aide de la relation (1) — les *moments de déplacement* pour chaque étage.

En utilisant comme *opérants* des approximations succésives, dans le domaine élastique les *moments actifs* de *noeud* et de *déplacement* et à l'aide de la relation (2) — où β_A représente la rotation de la *barre de support* du moment de déplacement (M_A) de la chaîne cinématique respective (fig. 2) et β_{ik} les rotations des barres — nous avons généralisé [4] l'expression de ce moment actif de déplacement pour des chaînes quelconques — relation (3) — et par conséquent l'application de la méthode de distribution des moments à toutes espèces des portiques.

Vu la signification — dans le calcul itératif, élastique où plastique — du déplacement de la ligne de référence *(A B)* (fig. 4) on trouve aisément les expressions généralisées des coefficients de transmission des moments plastiques (tableau 1).

On montre que les trois conditions d'équilibre (statique, d'écoulement et de mécanisme) ainsi que les deux principes (de maximum et minimum) connus dans la littérature concernant le calcul plastique, représentent seulement des aspects particuliers du principe général, qui sous différentes formes gouverne toute la théorie des constructions (des corps rigides, élastiques ou plastiques) à savoir, le principe du *travail minimum*.

Au delà de la limite élastique, une partie de l'énergie potentielle de déformation se transforme en *travail absorbé* — relation (4) — tandis que, à la limite, au stade plastique— la condition d'équilibre est donnée exclusivement en fonction du *travail absorbé*.

Qu'il soit question du *travail de déformation*, du *travail absorbé* ou de la somme de tous les deux (dans le stade élasto-plastique) la condition d'équilibre reste toujours correspondante au *minimum de ces travaux*.

On montre, enfin, qu'on peut obtenir la généralisation de la méthode de distribution des moments plastiques — pour quelques cas particuliers — à l'aide du *moment actif de déplacement modifié* — la relation (5) remplaçant la relation (2) — et, dans le cas général, en utilisant comme *opérant* des *corrections* succésives — au lieu des moments actifs — *le travail de déplacement* de la chaîne respective.

Les relations (6), (7), (8) et (9) établissent la liaison entre le travail de la chaîne, celui de la barre et les moments fléchissants correspondants.

À l'exception du calcul de l'équilibre de déplacement, le calcul plastique itératif reste similaire à celui connu pour le cas des portiques étagés.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

624.04

RELATIONS STATIQUES GÉNÉRALES POUR L'ÉTUDE DE LA FLEXION

PAR

ANTON ŞESAN

Note présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, 19—21 mai 1956

La flèche, la rotation, le moment fléchissant, l'effort tranchant et la charge uniformément distribuée (y, ϑ, M, T, p) — considérées *fonctions du fléchissement* — satisfont à la relation différentielle connue:

$$(1) \qquad \{\vartheta\,;\, M;\, T;\, p\} = \left\{ \pm \frac{dy}{dx};\quad \pm EI\frac{d^2y}{dx^2};\quad \pm EI\frac{d^3y}{dx^3};\quad \mp EI\frac{d^4y}{dx^4} \right\}$$

où chaque fonction à gauche est égale à la différentielle correspondante à droite, le signe étant déterminé par le système de référence et les conventions choisies.

Habituellement, on passe des fonctions statiques (M, T, p) à celles élastiques (ϑ, y) à l'aide de la seconde des relations (1), à savoir:

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{EI}$$

qui conduit, par intégration, à l'expression explicite de la rotation et de la flèche:

$$(2') \qquad \operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta_0 = \pm A_{0x}/EI = \pm A'_{0x},$$

$$(2'') \qquad y - y_0 - x\operatorname{tg}\vartheta_0 = \pm S_{x0}/EI = \pm S'_{x0}$$

où l'indice $_0$ marque l'origine, A_{0x} représente la surface du diagramme des moments pour l'intervalle $0x$ et S_{x0}, le moment statique de la surface des moments, (dans l'intervalle $0x$), par rapport à la section x.

Utilisant les équations (2′) et (2″), O. Mohr établit une relation statique entre les surfaces des moments et les déformations (y, ϑ), relation connue sous le nom de *méthode de la charge fictive — moment aria*

method, où encore *méthode grapho-analytique*. Mais, étant donné que dans cette méthode on utilise comme charge — au lieu des actions primaires (p, $p(x)$, F, M) — les surfaces élémentaires des moments réduits par le EI correspondant, il faut parfois changer les liaisons de la structure (poutres encastrées, poutres en console, etc.) de telle manière que l'effort tranchant et le moment de cette *poutre conjuguée* représentent justement la flèche et la rotation de la poutre réelle.

Cette interprétation statique des relations différentielles — si connue et largement utilisée — n'est qu'un cas particulier puisqu'elle relie seulement les diagrammes des moments aux déformations (ϑ et y) et en outre, elle semble *incomplète* puisqu'il est nécessaire *d'ajuster* les liaisons de la *poutre fictive*.

Persuadé d'une part, qu'aux relations différentielles (1) doivent correspondre des relations statiques tout aussi générales et unitaires, connaissant d'autre part que la solution générale des équations différentielles de la forme $\frac{d^m y}{dx^m} = y(x)$ — correspondantes aux fonctions de la flexion — est:

$$y = \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{m-1}\varphi(t)\,dt + \sum_{p=1}^{m}\frac{C_p\,x^{m-p}}{(m-1)!} \tag{3}$$

et observant enfin que les *fonctions de la flexion* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ (à l'origine, dûes aux liaisons) et $\varphi(t)\,dt$ (à la distance t de l'origine, dûe à la charge), peuvent être considérées comme des *actions* qui sont multipliées par la puissance des bras de levier respectifs et se divisent par la factorielle de l'exposant on arrive à une *nouvelle notion statique*, à savoir, le *moment factoriel*.

Ce terme nous à été suggéré par la forme de l'expression:

$$\text{Moment factoriel} = Ad^k/k! = M^i,\ (i = \ldots - \text{I}, 0, \text{I}, \text{II}\ldots), \tag{4}$$

moment, parce qu'une action A est multipliée par un bras de levier d^k et *factoriel*, afin de rappeler que ce bras (d^k) se trouve divisé par la factorielle de l'exposant $k!$.

Si l'on exprime toutes les fonctions de la flexion sous forme de *moments factoriels* — statiques et élastiques — de différents ordres et si on établit une relation directe entre ces moments, on obtient une relation statique générale reliant toutes les fonctions du fléchissement.

Considérant que le moment fléchissant usuel est un moment factoriel statique de premier ordre (M^{I}), il en résulte qu'à la force tranchante (concentrée) correspond le moment M^0 et à la charge uniformément distribuée, le moment factoriel d'un ordre négatif $M^{-\text{I}}$, tandis qu'aux fonctions elastiques (ϑ, y) correspondent les moments factoriels élastiques d'ordre II et III (M_ϱ^{II} et M_ϱ^{III}) où l'indice ϱ est utilisé pour faire une distiction entre un moment élastique et un moment statique).

Les relations différentielles (1) peuvent donc s'exprimer sous la forme suivante:

$$\{y, \vartheta M, T, p\} = \{M_\rho^{III}, M_\rho^{II}, M^I, M^0, M^{-1}\} \tag{5}$$

où toutes les fonctions du fléchissement sont exprimées sous forme de moments factoriels.

Les moments factoriels d'ordres différents sont reliés par la relation

$$M_\rho^i = \left(\frac{1}{\varrho}\right) \frac{M^k d^{i-k}}{\{i-k\}!}, \qquad \{i-k\}! = \begin{cases} (i-k)! \text{ pour } i \geqslant k, \\ \dfrac{1}{(k-i)!} \text{ pour } i < k. \end{cases} \tag{6}$$

Le facteur $1/\varrho$ représente la caractéristique élastique ($1/EI$ en général) et intervient toutes les fois qu'on passe d'un moment factoriel statique à un momment élastique. Inversement, dans la relation (6) on remplace $1/\varrho$ par ϱ.

Puisque aux constantes d'intégration C_i, de la relation (3), correspondent, statiquement, les fonctions du fléchissement à l'origine (forces de liaison et déformations) et que, à la fonction $\varphi(t)\,dt$ de la même relation, correspondent les charges de la poutre (actions extérieures) et si l'on les exprime toutes sous forme de moments factoriels, on peut déterminer n'importe quelle fonction du fléchissement, dans une section quelconque, sous forme d'une somme de moments factoriels d'un ordre correspondant.

Sous la forme de *moments factoriels* toutes les fonctions du fléchissement peuvent être calculées aisément, en partant directement des charges ets des liaisons réelle de la poutre. Le calcul et l'expression d'une déformation ne diffère de l'expression d'un moment fléchissant usuel que par la caractéristique élastique, la puissance du bras de levier et la factorielle correspondante.

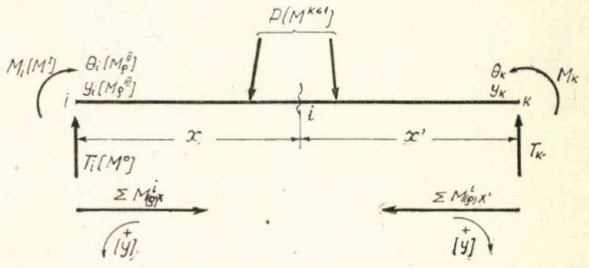


Fig. 1

Ainsi, par exemple, la flèche de la section i (fig. 1), est donnée par

$$y_i = M_{(\rho)i}^{III} = \sum_0^x \pm M_{(\rho)i}^{III} = \sum_i^{x'} \mp M_{(\rho)i}^{III} \tag{7}$$

c'est à dire — comme dans le cas du moment statique de l'ordre I — par la somme des moments factoriels M_ρ^{III} (liaisons et charges) de gauche ou de droite par rapport à la section.

Puisque le sens des moments factoriels est connu, la règle de signe est tout aussi simple que pour les moments fléchissants usuels.

La facilité de calcul de toute fonction du fléchissement est illustrée par les exemples qui suivent, pour des structures iso-et hypo-statiques :

Pour la poutre ik (fig. 2) :

a) Cas d'appui simple en i :

$$\theta_i = M^{II}_{(p)i} = \frac{1}{l_{ik}} \sum_i^k M^{III}_{(p)k} = \frac{1}{l}\left[- T_i \frac{l^3}{3!EI} + \frac{F(l-a)^3}{3!EI} + \right.$$

$$\left. + \frac{p(l-b)^4}{4!EI} + \frac{p'(l-c)^5}{5!EI} + v \right]$$

et

$$T_i = M^0_i = \frac{M^1_k}{l_{ik}} = \frac{1}{l}\left[\frac{F(l-a)}{1!} + \frac{p(l-b)^2}{2!} + \frac{p'(l-c)^3}{3!} \right].$$

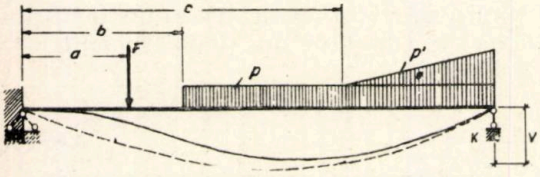


Fig. 2.

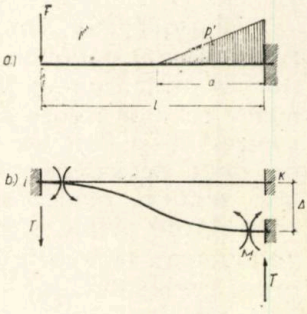


Fig. 3.

b) Cas d'encastrement en i (hachuré, fig. 2) :

$$\theta_i = \frac{1}{l_{ik}} \sum_i^k M^{III}_{(p)k} = 0 = \frac{1}{l}\left[- \frac{M_i l^2}{2!EI} - T_i \frac{l^3}{3!EI} + F \frac{(l-a)^3}{3!EI} + \dots \right]$$

et

$$T_i = \frac{1}{l}\left[- M_i + F_i \frac{(l-a)}{1!} + \frac{p(l-b)^2}{2!} + \frac{p'(l-c)^3}{3!} \right]$$

d'où l'on peut déduire immédiatement la valeur de M_i.

L'expression de la flèche en x $(x > c)$ est :

$$y_x = \sum_0^x M^{III}_{(p)k} = - \frac{M_i x^2}{2!EI} - \frac{T_i x^3}{3!EI} + \frac{F(x-a)^3}{3!EI} + \frac{p(x-b)^4}{4!EI} + \frac{p'(x-c)^5}{5!EI}.$$

Pour la poutre de la fig. 3a on peut écrire directement

$$\theta_i + \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{p'a^4}{4!EI} = 0, \quad y_i + \theta_i l + \frac{Fl^3}{3!EI} + \frac{p'a^5}{5!EI} = 0.$$

et pour la poutre de la fig. 3 b :

$$\frac{T_i l^3}{3!EI} - \frac{Ml^2}{2!EI} + \Lambda = 0, \; T = \frac{2M}{l}; \text{ d'où } M = \frac{6EI}{l^2}\Lambda.$$

On observera que l'on peut obtenir les valeurs des liaisons aux points d'appui (déformations T_0, ϑ_0, ou sollicitations M_0, T_0), à l'aide de la relation (6), pour le cas $i < k$. En utilisant la même relation, pour $i = 0$ et $k = 1$ on retrouve la relation connue qui permet à calculer la réaction T_0 (la liaison de la poutre sur deux appuis).

Cette façon de calcul peut être généralisée, tout en conservant sa simplicité, pour une liaison quelconque, soit en fonction du moment factoriel d'un ordre immédiatement supérieur, $i = k - 1$ (par exemple, $\vartheta_i = M^{II}_{(\rho)i} = M^{III}_{(\rho)k} \cdot 1!/d = M^{III}_{(\rho)k}/l_{ik}$) soit en fonction d'un tout autre moment factoriel d'un ordre supérieur, d'au moins deux degrés (par exemple, $i = k - 2$, voir l'exemple ci-dessus, fig. 3 b, $M_0 = M^I_i = M^{III}_{(\rho)k} \cdot 2!\varrho/d^2 = (2EI/l^2_{ik}) \sum_i^k M^{III}_\rho = 2EI[y - T_i l^3/(3!EI)]/l^2_{ik})$.

Dans le cas des charges distribuées, le bras de levier est celui qui correspond à la section d'où les charges commencent à être apliquées et les charges partiellement distribuées seront considérées comme résultant de la superposition des charges continues, pourvues des signes convenablement choisis.

Les déformations des appuis ainsi que les dénivellations et les rotations intermédiaires, considérées comme moments factoriels d'un degré déterminé, peuvent être aisément introduites dans l'expression de la fonction du fléchissement que l'on cherche — comme éléments de la somme des moments factoriels — conformément à la relation (7).

Il apparaît que l'utilisation des moments factoriels, comme „*opérateurs*" des fonctions du fléchissement, conduit à des généralisations et à un nouveau langage dans la théorie des constructions, plus simple, et mieux approprié aux besoins de la technique.

Toutes les opérations et relations mathématiques dont on fait usage dans la théorie des constructions, ont une signification statique ; les aspects mathématiques et statiques doivent s'entr'aider et se compléter réciproquement. Les limitations d'expression d'un langage peuvent alors être supplées par les posibilités d'un autre, et ce n'est que leur considération unitaire qui doit mener à un entendement complet et à une expression généralisée.

Considérant la liaison entre les *fonctions de la flexion* sous son double aspect, mathématique et statique, et joignant les possibilités des relations différentielles à celles des *moments factoriels*, on peut établir les expressions les plus générales sous une forme simple.

Exprimant la solution particulière de la relation différentielle sous forme d'une intégration succesive d'ordre n de la fonction $f(x)$,

$$\underbrace{\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x}_{n \text{ fois}} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{9}$$

on peut aisément remarquer que, — exceptant les conditions de liaison — le diagramme d'une fonction quelconque représente justement la fonction d'un ordre immédiatement supérieur et que, par conséquent, l'aire élémentaire d'un diagramme représente la variation de la fonction d'un ordre immédiatement supérieur.

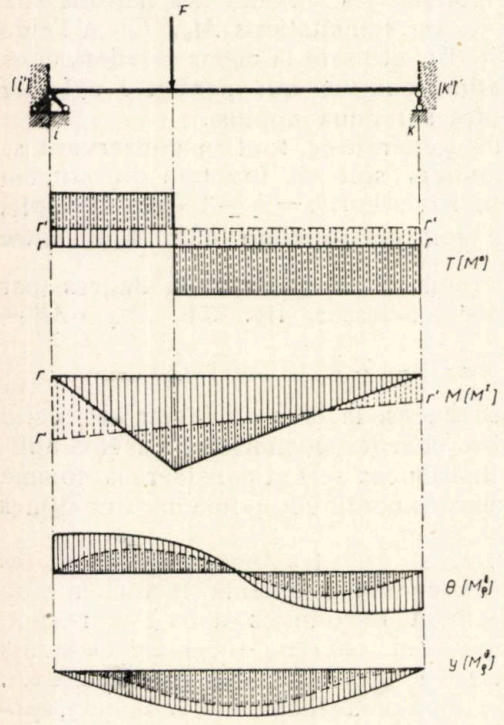


Fig. 4.

L'interprétation statique permet de remarquer que par la sommation du diagramme d'un moment factoriel on peut obtenir le moment factoriel d'un ordre immédiatement supérieur — dû évidemment à la charge seulement — et que le moment du premier ordre de l'aire élémentaire d'un moment factoriel représente justement le moment factoriel élémentaire dont l'ordre est supérieur de deux degrés à celui du moment initial.

On peut obtenir tout aussi bien le moment factoriel dont l'ordre est supérieur de trois degrés par rapport à celui du moment initial, en prenant les moments factoriels du deuxième ordre de l'aire élémentaire du diagramme de la fonction primaire, et ainsi de suite. Pour obtenir le moment factoriel *total*, on doit évidemment tenir compte aussi des *liaisons corrigées*, car, au lieu des actions primaires, nous avons considéré comme *forces fictives* les surfaces élémentaires des diagrammes corespondants.

Au lieu de la charge réelle, on peut donc considérer un des diagrammes des moments factoriels (d'un ordre supérieur ou au moins égal à celui de la charge remplacée — fig. 4); tout aussi bien pour des systèmes iso-que hyper-statiques (v. fig. 4); la seule dificulté consiste à corriger les *liaisons* en fonction du diagramme initial de départ, c'est-à-dire de la *force généralisée* qui a été *utilisée*.

L'utilisation des aires élémentaires des diagrammes des moments factoriels — de tout ordre — comme *forces généralisées de substitution* permet l'emploi des moments factoriels dans les cas les plus généraux: charge quelconque $p(x)$, et poutre ayant un moment d'inertie variable $I_{(x)}$.

Une charge quelconque $p(x)$ peut toujours être exprimée sous la forme d'un moment factoriel statique élémentaire d'ordre 0 ou 1. Si l'aire élémentaire du diagramme du moment factoriel statique considéré (d'ordre k), est $f^k(t)\,dt$, (qui représente la variation du moment

factoriel d'ordre $k+1$) le moment factoriel d'ordre i, dû à la charge, sera alors pour une section x :

$$(10) \qquad \overline{M}^{i}_{(\varrho)x} = \left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{1}{(i-k-1)!}\int_0^x (x-t)^{i-k-1} f^k(t)\,dt + \sum_{p=1}^{i-k}\frac{C'_p\, x^{i-k-p}}{(i-k-p)!}\,.$$

Si le moment d'inertie est variable, l'aire élémentaire du diagramme du moment factoriel sera affectée aussi par la variation du moment d'inertie ; la relation (10) sera alors modifiée :

$$(10a) \qquad M^{i}_{(\varrho),x} = \frac{1}{(i-k-1)!}\int_0^x (x-t)^{i-k-1}\frac{I_0}{I_{(t)}}F^k(t)\,dt,$$

où C'_p a une valeur corespondante aux liaisons corrigées pour la force généralisée $f^k(t)\,dt$, et où ϱ_0 est une caractéristique élastique de répère. Dans la relation (10a) l'aire élémentaire $f^k(t)\,dt$ est remplacée par $F^k(t)\,dt$ parce que celle-ci, outre l'action de la charge, embrasse aussi l'influence des liaisons corrigées.

La méthode de la *charge fictive* de Mohr nous semble maintenant comme une double particularisation des relations statiques générales reliant les fonctions de la flexion ; Mohr, en effet, utilise comme charge, aux lieu des actions primaires, des *forces généralisées*, celles-ci, étant particularisées une seconde fois par le choix du diagramme du moment factoriel d'ordre I.

En faisaint usage des nouvelles notions statiques, définies plus haut sous le nom de *moments factoriels*, nous espérons avoir établi, par les relations statiques généralisées (6), (8) et (10a), une liaison d recte entre toutes les fonction de la flexion, réduisant ainsi le calcul des déformations (et de leurs aires) au simple calcul d'un moment statique usuel.

Institut Polytehnique de Jassy,
Chaire de Statique, Résistence et Béton

BIBLIOGRAFIE

1. Filipescu Gh. Em., *Statica Construcţiilor şi Rezistenţa Materialelor*, Ed. II, Impr. Naţ. Bucureşti, 1940, pp. 354–359.
2. Filonenko M. M., Borodici, Iziumov S. M., Olisov B. A., Kudrievţev I. N. şi Malghinov L. I., *Curs de rezistenţa materialelor*, Vol. II, pp. 78–86, (traduit de russe).
3. Kiepert Ludwig, *Grundriss der Integral Rechnung*, Zweiter Band, *Theorie der gewöhnlichen Differential–Gleichungen*, Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover, 1920, S. 760-785.

ОБЩИЕ СТАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ИЗУЧЕНИИ ИЗГИБА

(Резюме)

В соответствии с дифференциальными уравнениями (1), используя „факториальные моменты“, статические и упругие различных порядков, — понятие введенное

автором (4) — устанавливаются статическое соотношение (8) и его обобщение (10a) между нагрузкой усилий и перемещений, как „функции изгиба".

Используя соотношение (6) можно непосрадственно вычислить любое перемещение — уоругуй факториальный, момент: M_ρ^{II}, M_ρ^{III}, M_ρ^{IV},— также как и обыкновенный статический момент (статический факториальный момент первого порядка: M^I).

RELAŢII STATICE GENERALE PENTRU STUDIUL INCOVOIERII

(Rezumat)

Corespunzător relaţiilor diferenţiale (1), cu ajutorul noţiunii introduse de: *moment factorial* static şi elastic, de diferite ordine — definit de relaţia (4) — se stabileşte o relaţie statică (8) — şi generalizarea ei (10 a) — de legătură directă între sarcini, solicitări şi deformaţii, ca „funcţii ale încovoierii".

Cu ajutorul relaţiei (6) se poate calcula direct orice deformaţie (moment factorial elastic de ordinul II, III sau IV: M_ρ^{II}, M_ρ^{III}, M_ρ^{IV}) cu aceiaşi uşurinţă ca şi momentul static obişnuit.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

693.55

CONTRIBUŢIUNI LA ALCĂTUIREA ELEMENTELOR PRECOMPRIMATE DIN BETON ARMAT PRIN FOLOSIREA PRETENSIONĂRII DE MONTAJ

DE

ANATOLIE MIHUL şi CHIMON CAPATU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 19—21 mai 1956

1. Problema introducerii unor armături preîntinse care se recuperează într-o anumită fază de încărcare a elementului

Betonul armat obişnuit prezintă două neajunsuri esenţiale care conduc uneori la ridicarea exagerată a costului lucrărilor din beton armat, limitînd totodată domeniul de folosire a acestui material în practica construcţiilor. Aceste neajunsuri sînt :

a) Rezistenţa la întindere mult redusă faţă de rezistenţa la compresiune (aproximativ 1/10 din rezistenţa la compresiune).

b) Deformaţia limită la întindere mult scăzută faţă de cea la compresiune (deformaţia limită a betonului la întindere este de 0,1...0,15 mm/m, iar la compresiune de 1,00... 2,00 mm/m).

Aceasta face ca la elementele solicitate la întindere sau la încovoiere betonul întins să fisureze cu mult înainte de a fi folosit toată capacitatea de rezistenţă a armăturii şi a betonului comprimat. Eforturile unitare din armătura întinsă a elementelor din beton armat ajung în momentul fisurării betonului la valori neînsemnate, de cca 200... 300 kg/cm^2 adică abia la 1/10 din limita de curgere a oţelurilor celor mai inferioare folosite în construcţii.

Momentul capabil al secţiunii din beton armat, la pierderea capacităţii de rezistenţă, este determinat de eforturile din armătură şi cele din betonul comprimat, (betonul întins fisurat în acest moment nu este capabil să preia efort).

Momentul capabil al secţiunii, la limita apariţiei fisurilor, este determinat de eforturile care apar în betonul comprimat şi armătură, care sînt departe de valorile limită şi de efortul limită din betonul întins.

Aceasta face ca momentul capabil al secţiunii, corespunzător limitei de fisurare, să fie incomparabil mai mic decît momentul corespunzător capacităţii de rezistenţă. În practică, elementele din beton armat solicitate la încovoiere se dimensionează la starea limită referitoare la pierderea capacităţii de rezistenţă şi numai în anumite cazuri şi la fisurare. Fisurile care apar în zona întinsă micşorează rigiditatea elementelor din beton armat; în cazul cînd deschiderea fisurilor depăşeşte 0,20 mm ele devin periculoase permiţînd corodarea armăturii. De aceea, alcătuirea elementelor din beton armat se face în aşa fel încît, în zona întinsă, fisurile să nu depăşească o anumită deschidere, determinată de condiţiile de exploatare ale elementului din beton armat.

Formarea şi deschiderea fisurilor în betonul întins, sub acţiunea sarcinilor de exploatare, nu permite folosirea raţională a oţelurilor şi a betoanelor de calitate supe-

rioară, chiar în ipoteza folosirii unor armături cu profil periodic, ceea ce implicit conduce la imposibilitatea reducerii esenţiale a costului construcţiei din beton armat.

Betonul întins, în afară de faptul că nu preia eforturi, constituie o sarcină moartă suplimentară care măreşte greutatea elementelor din beton armat. Costul specific al elementelor din beton armat, cît şi greutatea proprie a acestor elemente, nu se pot reduce din această cauză, decît cu valori neînsemnate.

Prin înlocuirea betonului armat obişnuit cu beton armat pretensionat se rezolvă în mare măsură aceste neajunsuri. Totuşi şi betonul armat pretensionat mai prezintă încă o serie de neajunsuri, cum ar fi :

a) Folosirea neraţională a armăturii preîntinse din zona comprimată a elementelor. Această armătură, necesară pentru eliminarea apariţiei fisurilor din zona comprimată în timpul pretensionării şi montării elementelor, ori de cîte ori este preîntinsă cu eforturi mai mari decît $\varepsilon_{bc} E_f$, care reprezintă cca 4500 kg/cm², micşorează momentul capabil de rupere al secţiunii. Cu ε_{bc} s-a notat deformaţia maximă a betonului comprimat iar cu E_f-modulul de elasticitate al armăturii preîntinse din zona comprimată. În cazul cînd armătura preîntinsă din zona comprimată este tensionată iniţial cu un efort mai mic decît $\varepsilon_{bc} E_f$, momentul capabil al secţiunii, în ceea ce priveşte preluarea eforturilor de compresiune, este mărit, datorită faptului că în momentul pierderii capacităţii de rezistenţă a secţiunii această armătură este capabilă să ia un efort de compresiune $N' = A_f' \sigma_f'$, unde $\sigma_f' = \varepsilon_{bc} E_f - \sigma_{fp}$- rezistenţa efectivă în armătura preîntinsă din zona comprimată, la limita pierderii capacităţii de rezistenţă a secţiunii din beton armat precomprimat, A_f'- secţiunea armăturii preîntinse din zona comprimată, σ_{fp}-efortul de preîntindere din armătura preîntinsă din zona comprimată, mai puţin pierderile, corespunzător rezistenţei nule în beton.

Menţionăm că rezistenţa în armătura A_f' în momentul pierderii capacităţii de rezistenţă a grinzii, este întotdeauna cu mult inferioară limitei de curgere a oţelului respectiv, oţelul putînd fi folosit numai într-o mică măsură.

b) Betonul întins la elementele pretensionate fisurează totuşi cu mult înainte ca betonul comprimat şi armătura întinsă să fi ajuns la starea limită.

Acest neajuns se datoreşte faptului că betonul din zona întinsă nu poate fi comprimat decît pînă la maximum 80% din rezistenţa de rupere la compresiune (în mod curent pînă la $0{,}65 R_{pr}...0{,}75 R_{pr}$). Pentru a asigura precomprimarea betonului din zona întinsă în aşa fel încît momentul de fisurare să ajungă foarte apropiat de momentul de rupere, sîntem nevoiţi a introduce o cantitate apreciabilă de armătură preîntinsă în zona comprimată (mai cu seamă în elementul la care greutatea proprie, în raport cu celelalte sarcini, este redusă) pentru a nu se produce fisurarea acestei zone, ceea ce ridică costul specific al elementului şi micşorează totodată capacitatea de rezistenţă a betonului comprimat.

Datorită acestor neajunsuri nu toate materialele pot fi folosite cu toată capacitatea lor de rezistenţă.

La dimensionarea la limita apariţiei fisurilor, în elementele din beton armat pretensionat, diagrama de repartiţie a eforturilor din zona comprimată se consideră triunghiulară. Rezultanta eforturilor de compresiune cît şi momentul capabil al secţiunii sînt mult mai mici decît acelea care ar corespunde stării de rupere. Singurul material care ajunge la limita de rupere în momentul apariţiei fisurilor este betonul întins.

La starea limită de rezistenţă, betonul comprimat ajunge la rupere şi armătura din zona întinsă, la curgere sau la rupere, fără să se poată conta pe betonul întins şi nici pe armătura preîntinsă din zona comprimată, care, în anumite cazuri, micşorează capacitatea portantă a elementului sub sarcină (atunci cînd $\sigma_{fp} > \varepsilon_{bc} E_f$).

c) Grinzile şi stîlpii prefabricaţi, în timpul transportului sau al montajului, prezintă în mod continuu pericolul de fisurare în zona comprimată; introducerea armăturii preîntinse în cantitate mare în zona comprimată măreşte costul acestora fără a mări în acelaşi timp capacitatea portantă.

Pentru eliminarea acestor neajunsuri autorii propun folosirea unor armături preîntinse de montaj, care sînt recuperate într-o anumită fază de încărcare a elementelor.

Este ştiut faptul că armătura preîntinsă din zona comprimată a betonului se introduce în scopul de a împedica fisurarea betonului provocată de eforturile de întindere rezultate din aplicarea excentrică a forţei de precomprimare. Pericolul de fisurare este înlăturat în momentul încărcării grinzii cu sarcinile exterioare care dau naştere în zona comprimată la eforturi de compresiune. O dată cu apariţia acestor eforturi, tensiunea din armătură scade, betonul comprimat deformîndu-se. În momentul cînd efortul total de compresiune provenit din sarcinile exterioare depăşeşte eforturile de întindere provocate prin precomprimarea zonei întinse, armătura preîntinsă din zona comprimată poate fi eliminată.

Plecînd de la această observaţie, am ajuns la concluzia că armătura din zona comprimată, care îndeplineşte un rol foarte important în timpul precomprimării elementului şi montării acestuia pînă la încărcarea lui cu o parte din sarcinile de exploatare, poate fi recuperată şi refolosită. Prin aceasta, pe de-oparte se pot realiza economii importante în ceea ce priveşte consumul de oţel, iar pe de altă parte se poate efectua o precomprimare mult mai ridicată a zonei întinse, permiţînd astfel o mai bună folosire atît a betonului comprimat cît şi a armăturii întinse, mărind simţitor momentul capabil de fisurare.

Pentru elementele din beton armat precomprimat cu armătură postîntinsă, la care cea mai mare parte din pierderile de tensiuni din armătura zonei întinse (datorită contracţiei betonului şi curgerilor lente) pot fi corijate, se poate ajunge prin folosirea acestui sistem ca ruperea să se producă prin atingerea valorilor rezistenţelor limită a tuturor materialelor componente. Momentul de fisurare ajunge astfel să fie foarte apropiat de momentul de rupere, posibilitatea de fisurare fiind cu totul îndepărtată pînă la scoaterea din exploatare a construcţiei.

Prin folosirea unor armături care prezintă limite de curgere distincte, tensiunea iniţială a armăturii poate fi dusă pînă la o valoare foarte apropiată de limita de curgere, ceea ce asigură folosirea betonului întins precomprimat şi în momentul ruperii grinzii cu condiţia ca precomprimarea corespunzătoare a betonului din zona întinsă să ajungă la peste 90% din rezistenţa la rupere (în ipoteza că armătura preîntinsă din zona comprimată nu ar acţiona). Acest lucru este posibil să fie realizat numai prin folosirea unor armături preîntinse în zona comprimată, care sînt extrase la o anumită fază de încărcare a elementului, eliberînd betonul din zona comprimată de eforturile de compresiune şi betonul din zona întinsă de eforturile de întindere introduse iniţial.

2. Variaţia stărilor de tensiune în elementele de beton armat precomprimate cu armătură preîntinsă de montaj, recuperabilă

Introducerea unor stări iniţiale de tensiune în elementele din beton armat ne permite a exploata proprietăţile mecanice ale materialelor componente mult mai raţional. Variaţia tensiunilor iniţiale este necesar

BIBLIOTECA CENTRALĂ 1948

a fi astfel realizată, încît prin suprapunerea acestor stări de tensiune peste eforturile date din încărcările de exploatare, să rezulte o repartiţie de aşa natură, încît materialele ce alcătuiesc secţiunea (betonul şi armătura) să fie folosite la maximum.

În cele ce urmează vom analiza comparativ stările de tensiune ce apar în secţiunea de mijloc a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu sarcini simetrice, pentru cazul cînd elementul este armat cu armătură tensionată dispusă în zona întinsă, cu armătură obişnuită în zona comprimată şi în zona întinsă şi cu armătură de montaj în zona comprimată, care se recuperează într-o anumită fază de încărcare a elementului.

În fig. 1 sînt prezentate stările de tensiune ce apar în secţiunea de beton în cazul cînd pretensionarea s-a efectuat prin folosirea unei armături preîntinse dispuse în zona întinsă a grinzii.

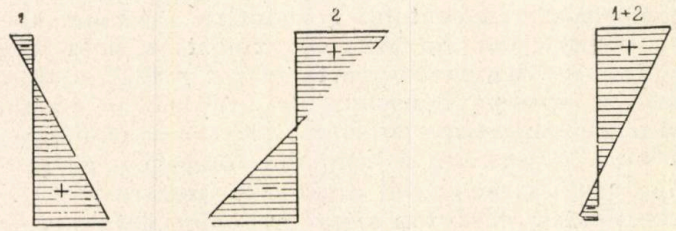


Fig. 1 — Stările de tensiune în secţiunea din mijloc a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu sarcini simetrice, precomprimată cu armătură preîntinsă dispusă la partea inferioară.
1. — Eforturi din pretensionare.
2. — Eforturi din sarcinile de exploatare.

Se poate uşor observa că în acest caz, în mod obişnuit, pentru grinzi a căror greutate proprie este mică faţă de restul sarcinilor cu care se încarcă grinda (ceea ce se întîmplă curent), în zona comprimată apar eforturi iniţiale de întindere. Dimensionarea, în acest caz, trebuie astfel făcută încît eforturile de întindere din zona comprimată a grinzii să nu depăşească eforturile limită admise, pentru a nu se produce distrugerea zonei comprimate înainte ca grinda să fie încărcată cu sarcina de exploatare. Înlăturarea apariţiei unor tensiuni periculoase în zona comprimată din precomprimarea zonei întinse se poate realiza printr-o precomprimare mai puţin intensă a zonei întinse, prin amplasarea armăturii preîntinse pe o zonă mai mare, în aşa fel încît rezultanta eforturilor de compresiune să fie apropiată de marginea sîmburelui central, sau prin mărirea greutăţii proprii a elementului. Toate aceste măsuri conduc de fapt la o folosire mai puţin raţională a materialelor componente ale elementului din beton armat. Sub acţiunea sarcinilor de exploatare pot apărea eforturi de întindere în zona întinsă. Se poate uşor constata că în acest caz momentul de fisurare rezultă mult îndepărtat faţă de momentul de rupere. Aceasta se dato-

reşte mai cu seamă faptului că betonul din zona întinsă nu poate fi precomprimat decît la un efort limitat, care nu poate depăşi în nici un caz un efort mai mare decît 80% din rezistenţa de rupere la compresiune. De aceea, cu toate că prin precomprimare se îmbunătăţeşte mult comportarea celor două materiale la acţiunea sarcinilor, totuşi nu se poate ajunge ca betonul armat să fie folosit ca un material omogen cu aceeaşi comportare în zona întinsă ca şi în zona comprimată.

În fig. 2 sînt prezentate tensiunile într-o grindă precomprimată, la care sînt introduse eforturi din precomprimare atît în zona întinsă cît şi în zona comprimată. Din analiza stărilor de tensiune iniţiale se constată că prin precomprimarea zonei întinse, în zona comprimată (aşa cum a fost arătat în cazul precedent) apar eforturi de întindere. Aceste eforturi sînt anihilate prin precomprimarea zonei comprimate cu ajutorul armăturii preîntinse din această zonă.

Precomprimarea zonei comprimate micşorează efortul de compresiune iniţial al betonului din zona întinsă, ceea ce ar permite de fapt

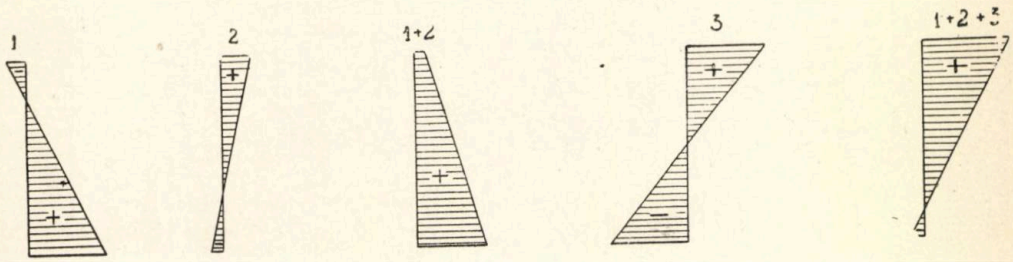


Fig. 2. — Stările de tensiune în secţiunea de mijloc a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu sarcini simetrice, precomprimată cu armătură preîntinsă dispusă la partea inferioară şi superioară.
1. — Eforturi din pretensionarea armăturii inferioare.
2. — Eforturi din pretensionarea armăturii superioare.
3. — Eforturi din sarcina de exploatare.

introducerea unor eforturi iniţiale de precomprimare în betonul întins, mai mari decît cele care ar apărea în cazul cînd în zona comprimată nu s-ar fi introdus armătura preîntinsă. Starea de tensiune iniţială într-un element astfel alcătuit este mai raţională decît cea din cazul precedent. Dificultatea pe care o prezintă însă această stare de tensiune, după suprapunerea stării de tensiune din sarcina finală, constă în faptul că precomprimarea din zona comprimată are o acţiune defavorabilă asupra capacităţii portante, iar efortul de întindere introdus din această precomprimare în zona întinsă de fapt nu poate fi folosit raţional pentru mărirea precomprimării deoarece nu poate acţiona favorabil în starea finală de încărcare. Eforturile de întindere introduse în zona întinsă, prin precomprimarea zonei comprimate, reprezintă pentru zona întinsă o micşorare a capacităţii portante.

Armătura preîntinsă din zona comprimată nu rezolvă decît o singură problemă, aceea de a împiedeca fisurarea zonei comprimate datorită

eforturilor de întindere introduse în această zonă la precomprimarea zonei întinse.

Dezavantajele, în ceea ce priveşte stăpînirea în condiţii mai raţionale a tensiunilor iniţiale, pot fi înlăturate în mare parte prin folosirea sistemului propus, de a introduce în zona comprimată o armătură de montaj care este îndepărtată într-o anumită fază de încărcare a elementului. Lucrul acesta, practic, este posibil a fi realizat cu mai multă uşurinţă la sistemele alcătuite din elemente prefabricate, dar poate fi aplicat şi la sistemele monolite.

În fig. 3 sînt reprezentate stările de tensiuni care se suprapun la un astfel de element, în diferite faze de precomprimare şi încărcare.

Din fazele *1* şi *2* rezultă că zona întinsă poate fi precomprimată la efortul dorit cu armătura distribuită în zona inferioară a secţiunii, care poate depăşi 80% din rezistenţa de rupere la compresiune a betonului.

Pentru a ajunge ca secţiunea, în cele din urmă, să lucreze similar cu o secţiune alcătuită din material omogen este necesar ca tensiunile

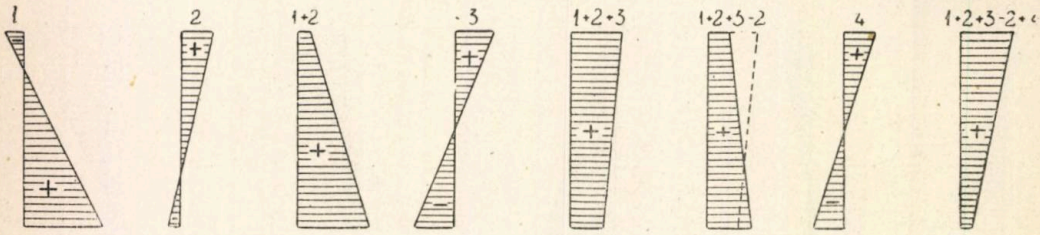


Fig. 3. — Stările de tensiune în secţiunea de mijloc a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu sarcini simetrice, precomprimată cu armătură preîntinsă dispusă la partea inferioară a secţiunii şi cu armătură preîntinsă recuperabilă dispusă în zona superioară.
1. — Eforturi din preîntinderea armăturii inferioare.
2. — Eforturi din preîntinderea armăturii superioare.
3. — Eforturi din sarcina permanentă.
4. — Eforturi din sarcina utilă.

de compresiune din beton, în faza iniţială, să ajungă la cca 95% din rezistenţa de rupere la compresiune. Desigur că aceasta nu este posibil a fi realizat decît prin precomprimarea cu un efort destul de însemnat şi a betonului din zona comprimată, ceea ce are ca urmare introducerea în zona întinsă a unor eforturi de întindere, care reduc eforturile de compresiune iniţiale din această zonă la un efort pe care-l dorim şi care poate fi ales de 65...75% din rezistenţa de rupere la compresiune a betonului folosit.

Menţionăm că introducerea de tensiuni în fazele *1* şi *2* trebuie să se facă progresiv, alternativ.

Astfel stabilite, stările de tensiune la care s-a ţinut seama şi de pierderile de tensiune în beton (în zona întinsă se merge pentru faza *1* cu un efort în beton de cca 0,95 R_{pr} faţă de 0,9 R_{pr} care ar fi necesar dacă nu ar exista aceste pierderi) se obţine iniţial starea de tensiune *1+2*, secţiunea fiind în întregime comprimată, repartiţia tensiunilor fiind

trapezoidală. Încărcînd elementul cu o anumită sarcină, de exemplu cu sarcina permanentă, peste starea de tensiune inițială se suprapune starea de tensiune *3* care în definitiv dă starea de tensiune *1+2+3*. Analizînd mărimile tensiunilor ce apar în această fază de încărcare, se constată că eforturile de compresiune cresc, datorită suprapunerii eforturilor inițiale peste eforturile din sarcina exterioară, iar eforturile de întindere micșorează în mare măsură (în funcție de mărimea momentului încovoietor rezultat din acțiunea sarcinilor exterioare) eforturile inițiale din zona întinsă. De asemenea crește efortul din armătura preîntinsă din zona întinsă. Secțiunea, în această fază, trebuie ajutată în sensul de a se micșora eforturile de compresiune din zona comprimată și de a se mări eforturile de compresiune din zona întinsă. Aceasta se poate realiza foarte simplu prin eliminarea armăturii preîntinse din zona comprimată, care în această fază de încărcare, nu numai că nu este folositoare ci dăunează comportării sub sarcină a elementului.

Rezultă astfel prin suprapunerea eforturilor din fazele *1+2+3—2* o stare de tensiune îmbunătățită care permite încărcarea în continuare a elementului. Încărcînd cu sarcina de exploatare totală se obține starea de tensiune *1+2+3—2+4*. Dacă încărcăm elementul pînă la limita capacității portante, printr-un calcul corespunzător al stărilor inițiale de tensiune, prin folosirea tensiunilor date de armătura din zona comprimată (care se elimină într-o anumită stare de tensiune) se poate ajunge ca în momentul ruperii, toate materialele că alcătuiesc elementul din beton armat precomprimat să ajungă în același timp la starea limită și anume: betonul comprimat la R_c, betonul întins la R_t, armătura întinsă la σ_c. Singura armătură care nu poate ajunge la starea limită ar fi armătura nepreîntinsă din zona întinsă, care este în cantitate neglijabilă sau poate fi complet eliminată. Repartiția tensiunilor în betonul comprimat și cel întins poate fi considerată dreptunghiulară. Pentru ca ruperea să nu fie casantă este indicat a se folosi armătură cu palier de curgere distinct sau oțel cu deformabilitate totală ridicată.

Menționăm că în acest caz dimensionarea secțiunii de armătură preîntinsă din zona comprimată a secțiunii de beton și a restului de armătură preîntinsă trebuie făcută în așa fel încît din faza *1*, în betonul întins, eforturile de compresiune să ajungă la cca 95% din rezistența de rupere la compresiune a betonului, care de fapt este tensiunea inițială ce se suprapune peste tensiunile finale din acțiunea sarcinilor iar tensiunea din armătură în această fază să fie calculată în așa fel încît la faza *1+2+3* să nu depășească limita de curgere. Eliminarea în mare parte a influenței din pierderile de tensiuni poate fi realizată și prin întinderea repetată a armăturilor, la elementele ce se execută cu armătura postîntinsă. Întrucît se poate acționa asupra tensiunilor din betonul comprimat prin precomprimarea zonei comprimate, se poate ține seama de coeficientul de omogenitate al betonului prin precomprimarea în măsură mai mare a zonei comprimate. Prin acest sistem se poate înlătura în mare măsură neconcordanța dintre coeficienții de omogenitate, diferiți, ai betonului în raport cu cei ai armăturii.

Calculul unui element alcătuit după acest sistem, folosind metoda de calcul după starea limită referitoare la pierderea capacității de rezstență, ar fi următorul:

a) Se dimensionează secțiunea folosind ecuațiile de echilibru la limita pierderii capacității de rezistență:

$$(1)\quad A_{b_1} K_{b_1} R_i^n + m_{f_0} K_{f_0} \sigma_{c_0}^n A'_{f_0} = m_f A_f K_f \sigma_c^n + m_{f_0} A_{f_0} 300 + K_{b_2} R_t^n A_{b_2},$$

$$(2)\quad \bar{M} \leqslant m\,(S_{b_1} K_{b_1} R_i^n + m_f S'_{A_{f_0}} K_{f_0} \sigma_c^n + m_{f_0} S_{A_{f_0}} 300 + S_{b_2} K_{b_2} R_t^n).$$

În relațiile (1) și (2) s-au utilizat următoarele notații:

A_{b_1} — secțiunea de beton comprimată,
K_{b_1} — coeficientul de omogenitate al betonului la compresiune,
R_i^n — rezistența normată la rupere din compresiune din încovoiere a betonului,
m_{f_0} — coeficientul condițiilor de lucru al armăturii nepreîntinse,
$\sigma_{c_0}^n$ — rezistența normată de curgere a armăturii nepreîntinse,
m_f — coeficientul condițiilor de lucru al armăturii preîntinse din zona întinsă,
K_f — coeficientul de omogenitate al armăturii preîntinse,
$\sigma_{c,rr}^n$ — rezistența normată de curgere sau de rupere a armăturii preîntinse, în funcție de tipul de oțel folosit,
A_{f_0} — secțiunea de armătură nepretensionată din zona întinsă,
300 — rezistența convențională la care se presupune că ajunge armătura nepretensionată din zona întinsă,
K_{b_2} — coeficientul de omogenitate al betonului la întindere,
R_t^n — rezistența normată la întindere a betonului,
$\bar{M}$ — momentul maxim posibil la care poate fi solicitat elementul calculat cu sarcinile normate amplificate cu coeficienții respectivi de supraîncărcare,
m — coeficientul condițiilor de lucru,
S_{b_1} și S_{b_2} — momentele statice ale secțiunii de beton comprimat și întins față de centrul de greutate al secțiunii de armătură preîntinsă,
$S'_{A_{f_0}}$ și $S_{A_{f_0}}$ — momentele statice ale secțiunii de armătură preîntinsă din zona comprimată și zona întinsă față de centrul de greutate al secțiunii de armătură preîntinsă.

b) După ce secțiunile de beton și armătură satisfac la limită relațiile (1) și (2), se calculează secțiunea de armătură preîntinsă A_f în așa fel încît pentru faza *1+2* în betonul întins să apară eforturile de compresiune în jurul de $0{,}70R_{pr}...0{,}75R_{pr}$. Tensiunea din armătura întinsă trebuie să fie astfel aleasă încît în faza *1*, în beton, eforturile să fie în jurul de $0{,}95\ R_{pr}$, iar în faza *1+2+3* efortul din armătura întinsă să nu ajungă la limita de curgere. De asemenea trebuie verificat ca în faza *1+2+3* betonul din zona comprimată să nu depășească rezistența de rupere. Încărcarea din faza *3* se stabilește de la caz la caz în așa fel încît să nu depășească stările amintite.

Punerea în concordanță a acestor condiții și ajungerea la soluția optimă presupune o adîncă analiză a tuturor posibilităților și o practică suficientă în proiectare.

3. Sisteme constructive propuse pentru realizarea elementelor din beton armat precomprimat cu armătură preîntinsă de montaj recuperabilă

Problemele practice cele mai importante care se urmăresc la realizarea elementelor din beton armat precomprimat cu armătură pretensionată de montaj sînt, pe de-oparte realizarea în bune condiţii a blocajului armăturii superioare recuperabile, iar pe de altă parte, asigurarea unei relaxări uşoare a acestei armături şi extragerea ei din elementul din beton armat, atunci cînd nu mai este necesară. Problema relaxării trebuie rezolvată astfel ca să nu fie necesară întrebuinţarea de utilaje complicate, avînd în vedere faptul că operaţia se face în condiţii obişnuite de şantier.

Ca idee generală, transmiterea efortului de la armătura pretensionată recuperabilă la elementul de beton nu se poate face în nici un caz prin aderenţă ci numai prin blocaje speciale de capăt, care să permită şi o relaxare uşoară în condiţii de şantier.

Armătura pretensionată recuperabilă poate fi interioară elementului sau exterioară lui; în cazul cînd este interioară elementului ea se va introduce într-un gol special prevăzut la turnare. În acest din urmă caz există dezavantajul slăbirii secţiunii de beton, chiar în ipoteza că ulterior se poate injecta în acest gol mortar de ciment. Mai practice apar sistemele cu armătură exterioară recuperabilă, pentru montarea căreia nu se slăbeşte secţiunea şi în acelaşi timp se simplifică operaţiile de introducere şi extragere a armăturii.

Armătura proprie a elementului precomprimat poate fi sau pretensionată sau posttensionată, după sistemele întrebuinţate astăzi în tehnică. Armătura de montaj recuperabilă poate fi pusă sub tensiune fie prin folosirea unui procedeu de preîntindere, fie pur şi simplu datorită efortului ce apare în armătura din zona comprimată o dată cu precomprimarea zonei întinse.

În cele ce urmează se propun cîteva sisteme de realizare a elementelor cu armătură pretensionată recuperabilă. Ne vom referi numai la realizarea blocării şi relaxării preîntinse de montaj recuperabile.

3. 1. ELEMENTE CU ARMĂTURĂ INTERIOARĂ

3. 1. 1. *Transmiterea efortului prin piuliţe.* Se pot utiliza fie bare de diametru mare, filetate la capete (dezavantajul este că au lungimi relativ mici), fie fascicule de armături cu diametru mic sudate la capete de o tijă groasă filetată.

Preîntinderea se poate exercita cu ajutorul preselor speciale (fig. 4 – planşa), cu ajutorul cheilor cu clicheţi (fig. 5 – planşa) sau prin procedee electrotermiçe.

Atunci cînd preîntinderea se exercită cu ajutorul cheilor cu clicheţi sau a cheilor dinamometrice, învîrtirea piuliţei este uşurată de un rulment axial dispus între piuliţă şi placa de repartiţie. Prin folosirea rulmenţilor la cele două capete, se înlătură în mare parte eforturile de torsiune în barele de oţel cu care se efectuează precomprimarea.

3. 1. 2. *Transmiterea eforturilor prin pahare de capăt şi blocaje.* Se pot utiliza, de asemenea, fascicule de armături sub formă de cabluri din corzi. Paharele se execută la un singur capăt al fasciculului, iar la celălalt capăt se blochează cu pene înclinate, ce se introduc în bucla de capăt a fasciculului. Ultima pană se execută cu partea dinspre bucla de capăt a fasciculului rotunjită, pentru a se micşora concentrările de tensiuni. Întinderea cablului se poate face cu prese tip Korovkin care acţionează asupra paha-

rului. Relaxarea armăturii se face prin extragerea penelor prin batere, fără a fi necesară folosirea presei.

În fig. 6 (planşa) se prezintă un sistem de blocaj cu pahare şi pene. Se preconizează întrebuinţarea de pene înclinate care micşorează efortul necesar relaxării blocajului.

În fig. 7 (planşa) se prezintă o variantă a sistemului de mai sus care are la un capăt în loc de pene un sistem cu bolţ. Bolţul circular este introdus într-un înveliş de tablă care se unge pentru ca extragerea bolţului să se poată face cu mai multă uşurinţă.

3. 2. ELEMENTE CU ARMĂTURĂ EXTERIOARA

La astfel de elemente armătura trebuie aşezată simetric de o parte şi de alta a elementului. În toate cazurile, pentru transmiterea de efort de la armătură la beton trebuie să se întrebuinţeze juguri solidarizate cu plăci de repartiţie. Avantajul acestui sistem faţă de cel descris anterior constă în faptul că barele de oţel sau cablurile nu trebuie introduse în interiorul elementului, ceea ce uşurează mult operaţia de montare şi extragere, fiind posibilă folosirea de bare cu blocaje fixate care nu trebuie îndepărtate la relaxarea armăturii.

3. 2. 1. *Transmiterea efortului prin juguri şi piuliţe sau blocaje.* În fig. 8 a (planşa) este prezentat un sistem cu juguri şi piuliţe. Efortul de preîntindere se poate realiza cu ajutorul preselor, cu ajutorul cheilor cu clicheţi sau prin procedee electrotermice care în acest caz sînt cele mai indicate. Preîntinderea trebuie dată simultan şi simetric ambelor grupuri de armături recuperabile. Blocajul se poate alcătui din corniere cu aripi egale sau neegale sau fiare U, care pot servi în acelaşi timp şi ca juguri şi ca plăci de repartiţie. Relaxarea, respectiv recuperarea, se execută prin deşurubarea piuliţelor cu ajutorul unor chei obişnuite.

Un alt sistem, similar celui de mai sus, este acela cu juguri şi blocaje expus în fig. 8b (planşa). Aici transmiterea de efort la juguri şi apoi la beton se face prin intermediul fie al unor şaibe sudate de tija ce se întinde, fie al unor manşoane sudate de tijă. Întinderea barelor de montaj se face cu prese.

3. 2. 2. *Transmiterea efortului prin juguri de capăt şi înşurubare laterală cu manşon.* Sistemul este o variantă îmbunătăţită a celor de mai sus şi care s-ar putea preta foarte bine scopului propus. Exercitarea preîntinderii se face prin înşurubarea laterală, lucru care poate aduce reale avantaje atunci cînd nu există spaţiu suficient de lucru la capetele elementului respectiv.

4. Concluzii

1. Folosirea unor armături de montaj preîntinse în zona comprimată a elementelor din beton armat pretensionat permite introducerea unor stări de tensiuni temporare care conduc la o folosire mai raţională a betonului şi a armăturii.

2. Armătura de montaj preîntinsă din zona comprimată înlătură apariţia eforturilor de întindere iniţiale. După încărcarea parţială a elementului cu sarcini exterioare şi deci după apariţia unr eforturi de compresiune din aceste solicitări, armătura de montaj este înlăturată, fiind în întregime recuperată.

3. Introducerea armăturii de montaj recuperabilă în zona comprimată, permite o precomprimare în măsură mai mare a betonului din zona întinsă, ceaa ce face ca momentul de fisurare să apară la încărcări mai mari decît acela corespunzător pretensionării obişnuite, la care nu se foloseşte sistemul propus.

4. Prin folosirea armăturii de montaj la elementele încovoiate sau comprimate excentric cu mare excentricitate, se poate ajunge ca momentul de fisurare să fie foarte apropiat de momentul de rupere în

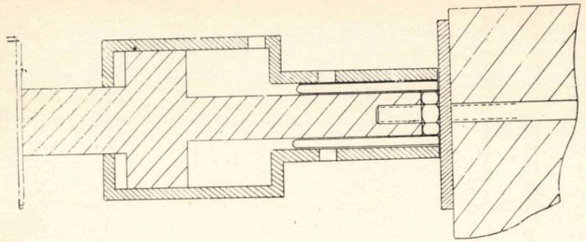


Fig. 4. — Schema de principiu a presei pentru întins bare cu filet.

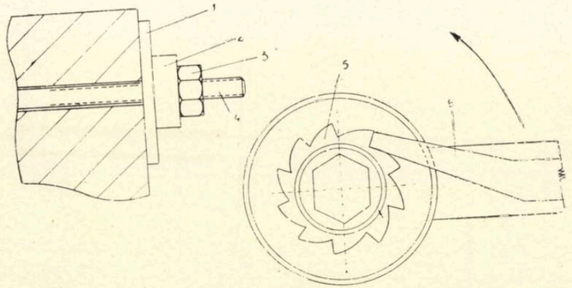


Fig. 5. — Întinderea barelor filetate cu piuliţa cu chei cu clicheţi (schema de principiu). 1. — Placă. 2. — Rulment axial. 3. — Piuliţa. 4. — Bara filetată. 5. — Clicheţi. 6. — Ghiară.

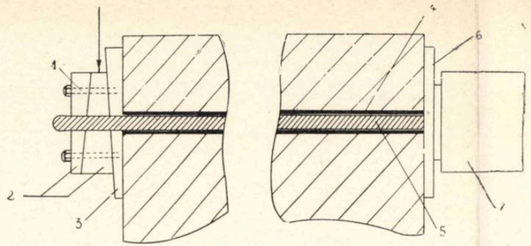


Fig. 6. — Sistem de blocaj cu pahare şi pene. 1.—Şurub de fixare. 2. — Pene inclinate. 3. —Placă înclinată. 4. — Tub. 5. — Fascicul. 6. — Distanţier (planşaibe). 7. — Pahar.

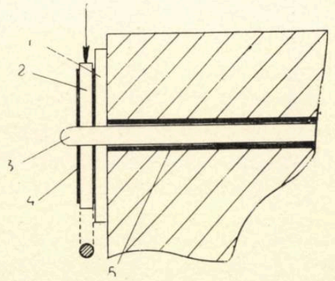


Fig. 7. — Sistem de blocaj cu bolţ. 1. — Placa, 2 — Bolţ circular uns. 3. — Fascicul. 4. — Tub din tablă subţire. 5. — Golul din elementul din beton.

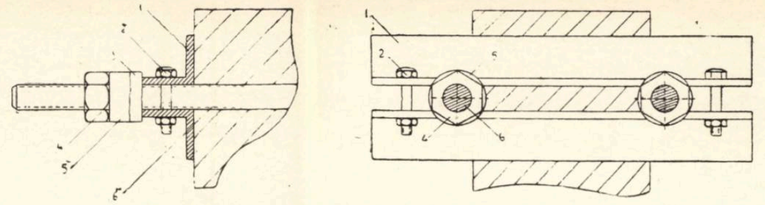


Fig. 8 a.—Transmiterea efortului prin juguri şi piuliţe. 1.—Corniere. 2. — Şurub de fixare. 3. — Şaibă. 4. — Piuliţă. 5. — Rulment axial. 6. — Bară exterioară.

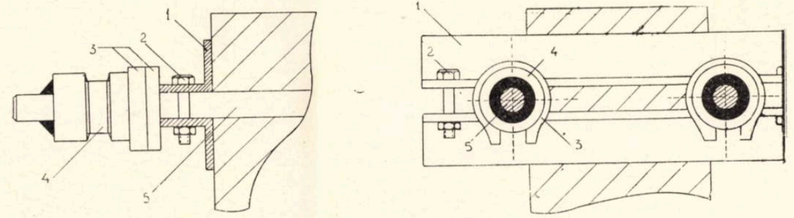


Fig. 8 b. — Transmiterea efortului prin juguri şi blocaje. 1.—Corniere. 2. — Şurub de fixare. 3. — Distanţieri. 4. — Şaibă canelată sudată. 5. — Bara exterioară.

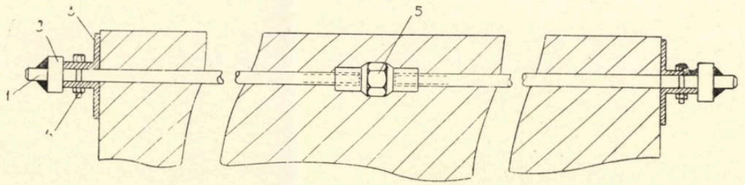


Fig. 9. — Transmiterea efortului prin juguri de capăt şi înşurubare laterală cu manşon 1. — Bara exterioară. 2. — Şaibă sudată. 3. — Corniere. 4. — Şurub fixator. 5. — Manşon.

anumite cazuri practic chiar la egalarea momentelor, materialele fiind astfel folosite mult mai raţional.

5. Prin introducerea armăturii de montaj se realizează economii în ceea ce priveşte consumul de oţel, (armătura din zona comprimată se recuperează în întregime, iar cea din zona întinsă este folosită mai raţional).

6. Folosirea armăturii preîntinse de montaj poate corecta şi mai mult neajunsurile betonului armat, permiţînd ca cele două materiale, betonul şi armătura, să lucreze în elementele încovoiate în ansamblu ca un material similar cu materialele omogene.

7. Realizarea unor tensiuni iniţiale cu ajutorul armăturii recuperabile de montaj, la stîlpii prefabricaţi de mare înălţime, comprimaţi centric sau excentric, permite ridicarea acestora şi montarea lor fără a fi necesară introducerea unor armături suplimentare, care ar ridica mult costul unor astfel de construcţii.

8. În general transportul şi montarea elementelor prefabricate se poate face cu mai mare uşurinţă şi fără pericol de fisurare atunci cînd elementele sînt pretensionate cu armătură de montaj distribuită raţional.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Statică, Rezistenţă şi Beton

ИЗГОТОВЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ МОНТАЖНОЙ АРМАТУРЫ

(Резюме)

Авторы излагают некоторые данные касающиеся изготовления предварительно напряженных элементов из железобетона, при использовании предварительно напряженной монтажной аппаратуры. Полученные результаты могут быть прослежены на соответствующих рисунках.

Объясненне рисунков

Рис. 1. Состояние напряжения в среднем сечении простой балки нагруженной симметрическими тяжестями, с предварительно-напряженной арматурой помещенной в нижней части сечения. 1 Напряжения предварительного натяжения вызванные нижней арматурой. 2. Напряжения созданные нагрузками.

Рис. 2. Тоже. Арматура расположена в нижней и верхней частях сечения. 1. Напряжения предварительного натяжения вызванные нижней арматурой. 2. Напряжения предварительного натяжения вызванные верхней арматурой. 3. Напряжения созданные нагрузками.

Рис. 3. Тоже. Арматура предварительно-натяжена в нижней части, поддержанная использована в верхней части сечения. 1, 2. Напряжения предварительного натяжения вызваны нижней и, соответственно, верхней арматурами 3,4. Напряжения созданные постоянной и, соответственно, полезной нагрузакми.

Рис. 4. Принцип работы пресса для натяжения стержней с нарезкой.

Рис. 5. Напряжения стержней с нарезкой при помощи гайки и ключем с кликетом (принципиальная схема). 1. Пластинка 2. Осевой подшипник 3. Гайка. 4. Стержни с нарезкой. 5. Кликет. 6. Коготь.

Рис. 6. Система блокировани стаканом и клиньями. 1. Закрепляющий винт. 2. Клинья. 3. Пластинка. 4. Трубка. 5. Пучок. 6. Планшайба. 7. Стакан.

Рис. 7. Система блокирования болтами. 1. Пластинка. 2. Смазанный болт с круглым сечением. 3. Пучок. 4. Трубка из тонкой жести 5. Отверстие в бетонном элементе.

Рис. 8 a. Передача напряжения посредством ярма и блокажа. 1. Уголковый металлический профиль. 2. Винт для закрепления. 3. Устроиство для регулирования расстояния. 4. Сварная шайба с каналом. 5. Внешний стержень.

Рис. 8 b. Передача напряжения посредством ярма и блокажа. 1. Уголковый металлический профиль. 2. Винт для закрепления. 3. Диспозитив для регулирования расстояния 4. Сварная шайба с каналом. 5. Внешний стержень.

Рис. 9. Передача напряжения посредством конечных ярмов и стержней продвигаемых винтовой муфтой. 1. Внешний стержень. 2. Сварная шайба. 3. Уголковый металлический профиль. 4. Закрепляющий винт. 5. Муфта.

CONTRIBUTION À L'EXÉCUTION DES ÉLÉMENTS EN BÉTON PRÉCONTRAINT PAR L'EMPLOI DE LA PRÉCONTRAINTE DE MONTAGE

(Résumé)

Les Auteurs exposent nombre de données relatives à l'éxécution des éléments en béton précontraint par l'emploi de la précontrainte de montage. Les résultats acquis peuvent être suivis assez facilement à l'aide des figures.

Explication des figures

Fig. 1. Les états de tensions dans la section transversale médiane d'une poutre simple (simplement appuyée), chargée simmétriquement, soumise à la précontrainte par l'armature prétensionnée disposée dans la zone inférieure. 1. Efforts dus à la précontrainte. 2. Efforts dus aux charges d'exploitation.

Fig. 2. Idem. L'armature prétensionnée est disposée dans les zones inférieure et supérieure. 1. Efforts dus au prétensionnement de l'armature inférieure. 2. Efforts dus au prétensionnement de l'armature supérieure. 3. Efforts dus aux charges d'exploitation.

Fig. 3. Idem. L'armature prétensionnée se trouve dans la zone inférieure et l'armature prétensionée récupérable est disposée dans la zone supérieure. 1. Efforts dus au prétensionement de l'armature inférieure. 2. Efforts dus au prétensionnement de l'armature supérieure récupérable. 3. Efforts dus aux charges permanentes. 4. Efforts dus aux charges utiles.

Fig. 4. Le schéma de principe de la presse pour le tensionnement des barres à filet.

Fig. 5. La mise en traction des barres filettées avec écrous et clef à cliquets (schéma de principe).
1. Plaque. 2. Roulement axial. 3. Écrou. 4. Tige filettée. 5. Cliquet.

Fig. 6. Type de blocage à tête d'ancrage système Korovkin et plaques (clavettes).
1. Boulon de fixage. 2. Plaques d'ancrage inclinées (clavettes). 3. Plaque de répartition. 4. Tuyau. 5. Câble. 6. Distancier. 7. Tête d'ancrage système Korovkin.

Fig. 7. Système avec clou d'ancrage à un bout.
1. Plaque. 2. Clou d'ancrage graissé. 3. Câble. 4. Tuyau en tôle mince. 6. Orifice dans l'élément en béton.

Fig. 8a. La transmission de l'effort par des jougs et des écrous. 1. Acier cornier. 2. Boulon de fixage. 3. Plaque percée. 4. Écrous. 5. Roulement axiale. 6. Barre extérieure.

Fig. 8b. La transmission de l'effort par des jougs et des blocages. 1. Acier cornier. 2. Boulon de fixage. 3. Distancier. 4. Bloc métallique d'arrêt cannellé. 5. Tige extérieure.

Fig. 9. La transmission de l'effort par des jougs aux bouts et les barres mises en traction par des manchons filettés latérales. 1. Barre extérieure. 2. Bloc d'arrêt métallique. 3. Acier cornier. 4. Boulon de fixage. 5. Manchon.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

691.7

CONSIDERAŢIUNI ASUPRA EFICIENŢEI GRINZILOR DE OŢEL CU INIMĂ PLINĂ

DE

EMANOIL MUNTEANU-ADĂSCĂLIŢEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Introducere

Aproape toate ţările întîmpină în prezent dificultăţi din cauza producţiei insuficiente de oţel, care nu reuşeşte să facă faţă nevoilor consumului. Această situaţie are, fără îndoială, un caracter trecător, pînă cînd, în urma creşterii producţiei se va restabili aprovizionarea normală cu oţel a tuturor ramurilor de activitate economică. Pînă atunci problema economisirii oţelului se pune cu toată acuitatea, mai ales a economisirii lui în construcţii şi, în primul rînd, a economisirii laminatelor de oţel.

Construcţiile de oţel se execută, aproape exclusiv, din laminate. Problema îmbunătăţirii formei laminatelor preocupă în prezent pe specialiştii din diferite ţări [2], [19]. În U. R. S S. s-a introdus anul acesta (1958) un nou sortiment de profile dublu T, mai perfecţionat faţă de cel din 1939. Totodată s-au întocmit standarde noi şi s-au elaborat proiecte de standard pentru alte profile [8]. În Franţa, S. U. A şi în alte ţări s-au introdus, de asemenea, laminate de tip nou [10]. Perfecţionarea sortimentului de laminate, constituie unul din mijloacele eficace pentru reducerea consumului de oţel în construcţii.

O importantă cantitate de laminate se foloseşte drept grinzi, sau pentru alcătuirea grinzilor compuse. În lucrarea de faţă se examinează unele posibilităţi de economisire a oţelului în alcătuirea grinzilor cu inimă plină cu secţiune constantă, prin îmbunătăţirea formei secţiunii lor transversale.

Economia unui profil este determinată de parametrii lui geometrici care, la rîndul lor, depind de destinaţia oţelului. În cele din urmă, economia unui profil se reduce la repartizarea cît mai avantajoasă a materialului pe suprafaţa secţiunii lui transversale.

La grinzile cu inimă plină compuse este mai avantajoasă folosirea sudurii pentru îmbinarea elementelor componente. Nituirea micşorează secţiunea netă a grinzilor dublu T pînă la 19...20%, reducerea modulului de rezistenţă W_x mergînd pînă la 22...23% [11]. Deci nituirea nu este indicată pentru alcătuirea secţiunilor economice.

2. Forma optimă a secţiunii dublu T

Forma cea mai potrivită pentru secţiunea transversală a unui element cu inimă plină, solicitat la încovoiere, este forma în dublu T. Ea permite, la o secţiune de suprafaţă dată, obţinerea valorilor mari pentru momentul de inerţie I_x şi modulul de rezistenţă W_x, realizînd, mai bine ca oricare altă formă, îndepărtarea maximă de axa neutră a unei părţi însemnate a materialului.

Pentru alcătuirea inimii profilului, este indicat de a folosi material mai puțin, mărirea secțiunii inimii contribuind într-o măsură prea mică la sporirea momentului de inerție. Înălțimea inimii fiind determinată de distanța dintre tălpi, va trebui redusă cît mai mult grosimea inimii.

În cazul general, secțiunea dublu T este determinată de trei parametri:

a) grosimea specifică a inimii, $K = h/g$,

b) grosimea specifică a tălpii, $\gamma = a/t$ și

c) suprafața specifică a inimii, $\alpha = A_{in} = A$.

În funcție de acești parametri se poate stabili înălțimea optimă a grinzii. Expresia care se obține este:

$$H_{opt} = 1{,}22\, W_{x\,nec}/g.$$

Formula dă înălțimea optimă a grinzii pentru modulul de rezistență dat, $W_{x\,nec}$, în funcție de zvelțețea inimii ($K = h/g$).

În ce privește repartizarea optimă a materialului între inima și tălpile grinzii, pentru o grindă de înălțime optimă și o grosime constantă a inimii, suprafața secțiunii tălpilor rezultă egală cu suprafața secțiunii inimii, deci:

$$\alpha = A_{in}/A = 1/2, \text{ adică } A_{in} = A/2.$$

Așadar, pentru un modul de rezistență dat ($W_{x\,nec}$), suprafața minimă a secțiunii se obține pentru înălțimea optimă a grinzii în funcție de zvelțețea aleasă a inimii (K) și a coeficientului de distribuție a materialului pe secțiune (α). Orice depărtare de la valoarea $\alpha = 0{,}5$ (la un K constant) duce la mărirea suprafeței secțiunii, iar sporirea ui K (la un $\alpha = 0{,}5$) duce la micșorarea secțiunii.

3. Eficiența la încovoiere a grinzilor

Pentru a putea compara între ele diverse forme de secțiuni transversale ale grinzilor în ce privește economia de oțel, se folosesc diferite expresii. În lucrare s-a adoptat raportul dintre modulul de rezistență și suprafața secțiunii transversale. Acest raport, denumit eficiența la încovoiere a grinzii, are forma:

$$Ef = W_x/A,$$

arată cîți cm^3 ai modulului de rezistență se pot obține de fiecare cm^2 al secțiunii transversale a grinzii. Eficiența la încovoiere se exprimă în cm^3 de cm^2 (cm^3/cm^2). Cu cît valoarea eficienței la încovoiere este mai mare pentru o secțiune de suprafață dată, cu atît secțiunea este mai economică și invers.

Este evident că eficiența la încovoiere a unui profil de suprafață dată, se poate mări prin sporirea înălțimii secțiunii. Acest lucru rezultă și din examinarea eficienței profilelor dublu T din orice sortiment de laminate; eficiența crește o dată cu înălțimea, cu toate că și secțiunea profilului se mărește. Așadar, și în cazul elementelor încovoiate rămîne valabil principiul concentrării materialului.

4. Formula eficienței optime

Forma cea mai potrivită pentru alcătuirea unei secțiuni încovoiate este evident aceea în dublu T, la care se reușește a se îndepărta o cantitate mai mare de material de axa neutră, realizînd totodată o legătură între cele două mase de material printr-o inimă cît mai subțire.

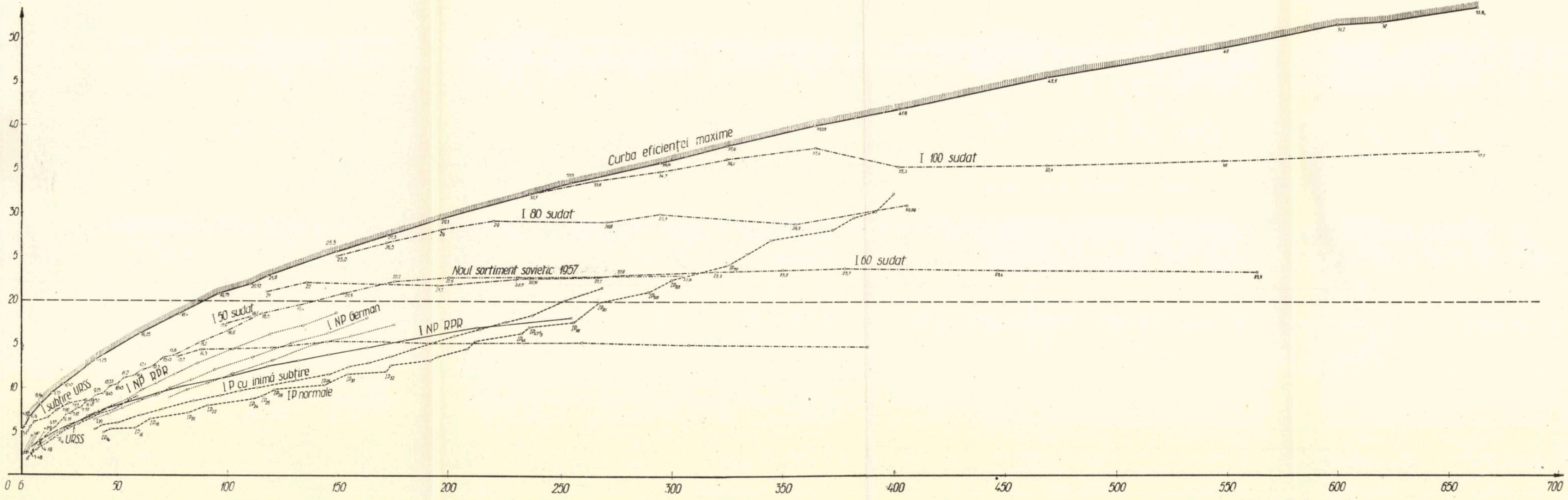

Curba eficienței maxime
I 100 sudat
I 80 sudat
Noul sortiment sovietic 1957
I 60 sudat
I 50 sudat
I NP German
I NP RPR
I subțire URSS
I NP RPR
I P cu inimă subțire
I P normale
I URSS
0
6
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700

Fig. 1

S-a arătat că repartizarea cea mai avantajoasă a materialului se obține cînd pentru inimă se folosește o jumătate din cantitatea totală de material: $\alpha = A_{in}/A = 0{,}5$. Subțirimea inimii nu poate depăși o anumită limită, pentru a evita consolidarea ei contra voalării, cea ce mărește coeficientul de construcție și deci greutatea grinzii. Se va adopta raportul limită $K = h/g = 80$. Din aceleași considerațiuni lățimea tălpilor nu trebuie să depășească 30 t. Se va lua raportul limită $\gamma = a/t = 30$.

Ținînd seamă de cele trei rapoarte de mai sus se pot determina ușor dimensiunile unui profil „ideal" avînd inima cea mai subțire (în cazul cînd nu este consolidată), tălpile cele mai late, precum și raportul optim dintre secțiunea tălpilor și a inimii. Pentru grosimea inimii g, înălțimea ei va fi 80 g. Rezultă:

$$A_{in} = 80\,g^2, \quad A_t = 40\,g^2, \quad A = 160\,g^2.$$

Grosimea tălpii se deduce astfel:

$$a = 30\,t \text{ și } A_t = 40\,g^2 = 30\,t^2, \text{ deci } t = g\sqrt{4/3} = 1{,}1547\,g,$$

$$a = 30,\ t = 30.\,1{,}1547\,g = 34{,}641\,g.$$

Expresia grosimii inimii în funcție de suprafața profilului:

$$A = 160\,g^2, \quad g = \sqrt{A/160} = 0{,}07905\sqrt{A}.$$

Eficiența profilului „ideal" se deduce astfel:

$$Ef_{\max} = W_x/A = I_x/yA = [a\,(h+2t)^3 - (a-g)\,h^3] \,/\, [2\,(h+2\,t)\,(2\,at+gh)] =$$

$$= 2{,}091\sqrt{A}.$$

Formula eficienței maxime este valabilă numai în cazul profilelor dublu T „ideale", adică a profilelor care satisfac cele trei condiții de mai sus.

Pentru orice valoare a suprafeței unei secțiuni transversale se poate determina cu formula de mai sus, eficiența maximă, care nu poate fi depășită, atît timp cît sînt respectate limitele impuse pentru K, γ și β. Depășirea primelor două limite aduce necesitatea consolidării inimii și a tălpilor. În unele cazuri, consolidarea inimii poate fi avantajoasă. Examinarea acestei posibilități iese din cadrul studiului nostru.

5. Eficiența profilelor dublu T existente

Problema perfecționării sortimentelor de profile este actuală. La profilele dublu T se tinde spre reducerea grosimii inimii și îmbunătățirea formei tălpilor. Prin perfecționarea laminoarelor s-a putut ajunge la raportul $K = h/g = 70$. Se proiectează încă noi tipuri de corniere, mai mari, reducîndu-se totodată grosimea relativă a aripilor. Se elaborează tipuri de profile T mari și altele. În cele de mai jos, se va examina eficiența diferitelor profile dublu T (fig. 1).

a) *Profile din tablă subțire îndoită la rece* [1], [21]. Profilele folosite pentru grinzi au forma literii C și sînt ansamblate cîte două, formînd grinzi ușoare. Grosimea tablei

variază obișnuit între 2...3 mm. Prin întrebuințarea lor se realizează economii de oțel pînă la 25...30% [3], [4]. Eficiența acestor profile este, aproape în toate cazurile, mai mare ca a oțelurilor INP de aceeași secțiune, deși rămîne mai mică decît eficiența maximă, „eficiența plafon", dată de formula $Ef_{max}=2{,}091\sqrt{A}$. La prima vedere acest lucru pare ciudat, secțiunea profilelor din tablă fiind nerațională, prin faptul că inima lor are o grosime dublă față de grosimea redusă a tălpilor. La ele raportul h/g este mic: $K=12{,}35...39$. Valoarea mai mare a eficienței provine din aceea că profilele au o înălțime mai mare, care depășește înălțimea profilelor INP de secțiune corespunzătoare, cu 50% sau mai mult.

b) *Profile laminate dublu T cu inimă subțire* [12]. Ele sînt dimensionate foarte avantajos. Eficiența lor este mai ridicată decît eficiența tuturor celorlalte profile dublu T și se apropie cel mai mult de eficiența maximă. Înălțimea profilelor este sporită față de INP. Grosimea inimii variază de la 3 la 6 mm. Coeficientul K este cuprins între 40...58,6. Domeniul lor de folosire este însă redus, profilul cel mai mare (I_s 24 III) avînd $W_x = 299$ cm³.

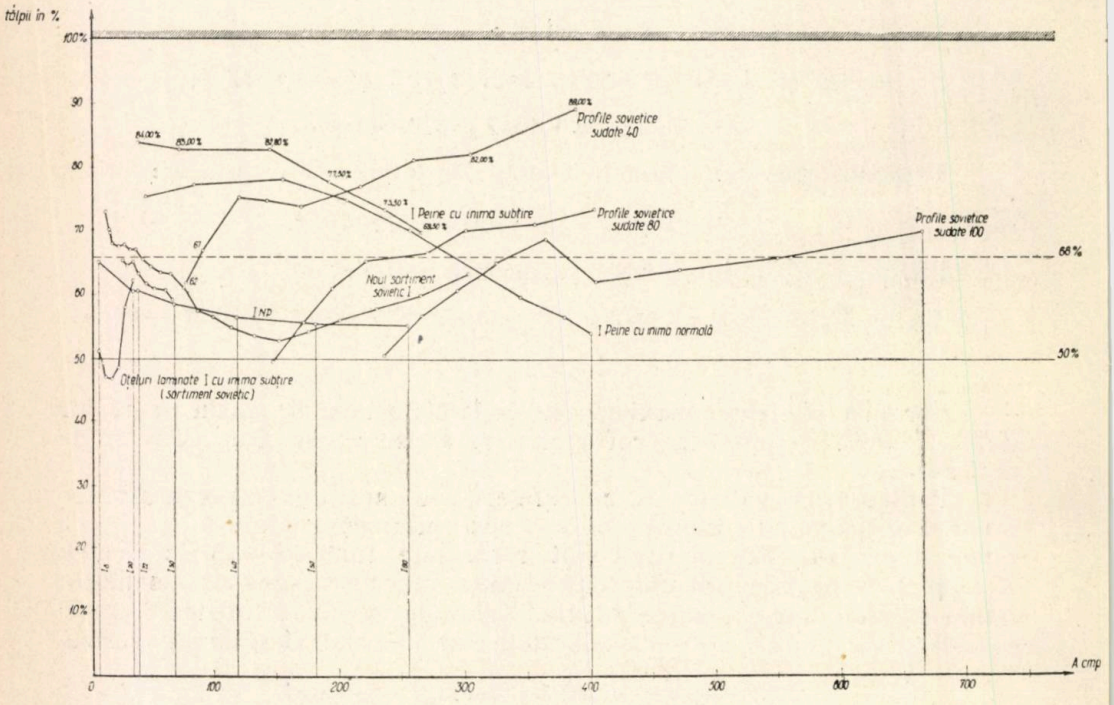


Fig. 2.

c) *Noul sortiment sovietic de profile dublu T.* În ultima vreme s-au desfășurat în U. R. S. S. cercetări științifice importante în vederea îmbunătățirii sortimentelor profilelor de oțel. Au fost elaborate standarde noi pentru profilele T și U, profile din tablă subțire, corniere, profile tubulare sudate, grinzi dublu T sudate și altele [17]. Standardul nou pentru oțeluri laminate dublu T (GOST 8239—56) a intrat în vigoare la 1 iulie 1958.

Principiile de bază care au servit la elaborarea acestui sortiment au fost:

a) stabilirea tipurilor de profile ținînd seamă de destinația principală a unei grinzi dublu T de a lucra la încovoiere;

b) alegerea gradației suprafețelor secțiunilor transversale și modulelor de rezistență după indicii de utilizare a diferitelor numere de profile;

c) distribuția rațională a materialului în secțiune, reducîndu-se, în primul rînd, grosimea inimilor;

d) îmbunătățirea calităților constructive ale profilelor prin reducerea înclinării fețelor interioare ale tălpilor;

e) respectarea condițiilor tehnologice de laminare [18].

Principala îmbunătățire adusă noului sortiment constă în micșorarea grosimii inimilor: $K = 22...55$ (în vechiul sortiment $K = 22...45$). Grosimea minimă a inimii este de 4,5 mm (în sortimentul nostru și cel german — 3,9 mm). Cantitatea relativă a materialului din tălpi a fost mărită (fig. 2). S-a sporit și lățimea tălpilor cu circa 10%, mărindu-se astfel stabilitatea generală a profilului. Economia totală de oțel se apreciază la 10...15% față de vechiul sortiment.

Comparînd acest sortiment cu un sortiment S. U. A. [18], se constată că la cel din urmă tălpile oțelurilor dublu T sînt ceva mai late și mai subțiri. Eficiența profilelor de înălțimea corespunzătoare, din ambele sortimente, este aproape aceeași.

d) *Oțelurile laminate dublu T cu tălpi late.* Profile puternice de tipul Differdinger, Peine sau similare prezintă față de oțelurile INP avantajul unei rigidități transversale mai mari, avînd și modulul de rezistență W_x mult mai mare. Eficiența profilului Peine este mai mică chiar decît a profilelor INP din cauza înălțimii lor reduse. Numai la profile mai înalte ea crește, fără însă să atingă eficiența maximă dată de „curba plafon". La oțelurile Peine cu inimă subțire, eficiența este puțin mai mare față de cele cu inimă normală.

e) *Sortimentul sovietic de profile dublu T sudate.* În U.R.S.S. se confecționează prin sudură, încă din 1944, profile dublu T puternice, cu tălpi late [20]. Sortimentul lor a fost elaborat de Institutul de Proiectare „Proektstalkonstrukția". Confecționarea profilelor prin sudare prezintă avantajul că ele pot avea inimi mai subțiri ca cele laminate (la unele profile K atinge valoarea 79,2) și tălpi cu dimensiuni optime și cu fețe paralele. Eficiența acestor profile, mai ales a celor mai înalte, este mare, depășind pe aceea a noilor profile laminate sovietice și atingînd, în unele cazuri, chiar „curba plafon".

Profilele sudate sînt mai eficiente și mai puternice decît oțelurile Peine de înălțimi corespunzătoare; de exemplu, oțelul sudat 100 C 524 are $W_x = 24730$ cm^3, iar oțelul IP 100 — $W_x = 12895$ cm^3. Acest lucru se explică prin posibilitatea mai largă de care se bucură profilele sudate în ce privește alegerea dimensiunilor elementelor componente. De pildă, lățimea maximă a tălpilor profilelor sudate s-a luat de 600 mm, pe cînd la oțelurile Peine ea este limitată la 300 mm.

Din examinarea fig. 1, se poate vedea că eficiența cea mai mare o au profilele dublu T sudate, ceea ce se explică prin faptul că la ele se pot adopta dimensiunile optime pentru inimi și tălpi, ceea ce nu se poate obține deocamdată prin laminare. Un dezavantaj al lor îl constituie surplusul de manoperă, peste manopera de laminare a tablelor: sudarea elementelor componente.

6. Repartizarea materialului profilelor dublu T între tălpi și inimă

S-a arătat că procentul de material folosit pentru tălpile unui profil dublu T economic este de aproximativ 60% ($\beta = A_{2t}/A = 0,5$). Această condiție nu este însă cea mai importantă pentru realizarea unui profil eficient, rămînînd drept condiție principală valoarea raportului dimensiunilor inimii $K = h/g$.

În realitate, procentul de material folosit în tălpi variază mult la diferite tipuri de profile (fig. 2). El coboară rar sub 50%, ajungînd, uneori, pînă la 84% (profilul Peine cu inimă subțire — IP$_s$14), chiar pînă la 89% (profile sovietice sudate nr. 40 — folosite pentru stîlpi). Cea mai apropiată de orizontala 50% este curba INP, precum și curba

noilor profile sovietice, în zona ei mijlocie. Se poate vedea deci, că depărtarea în condiția $A_{2t} = 0{,}5\,A$ nu exclude posibilitatea realizării unor profile eficiente.

7. Înălțimea profilelor eficiente

În esență, problema obținerii maximului de eficiență pentru un profil încovoiat se rezumă la găsirea unei modalități care să permită amplasarea unui procent cît mai mare de material, cît mai departe de axa neutră, menținîndu-se totodată în limitele impuse de alte condiții ca: stabilitatea generală și locală, grosimile minime admise pentru sudură, folosirea dimensiunilor standardizate ale elementelor componente ș. a. Drept consecință, profilele eficiente vor fi mai înalte ca cele obișnuite. Înălțimea optimă a profilelor „ideale" se deduce din formula eficienței maxime:

$$H = 3{,}154\,Ef_{\max}\,, \text{ sau } H = 5{,}111\sqrt[3]{W_x}\,, \text{ sau încă } H = 0{,}65\sqrt{A}\,.$$

În fig. 3 sînt reprezentate înălțimile diferitelor profile în funcție de W_x.

În literatură se arată [15], [18] că înălțimea mai mare a grinzilor eficiente nu influențează defavorabil asupra costului total al construcțiilor, atîta timp cît valoarea raportului $K = h/g$ nu depășește 80, chiar 85.

Comparînd între ele diferite secțiuni de aceeași înălțime se constată că profilele noi sovietice, dar mai ales profilele Peine, au o eficiență mai mare ca cele „ideale" la fel de înalte. Aceasta se explică prin folosirea pentru ele a unei cantități mai mari de material decît în cazul profilelor „ideale", mai ales în tălpi, ceea ce duce la sporirea modulului de rezistență W_x și deci la creșterea eficienței. Dacă limitarea înălțimii nu ar fi existat, cu materialul folosit pentru un oțel Peine s-ar fi putut realiza un profil de eficiență cu 24...71% mai mare.

7. Influența mărimii și formei tălpilor asupra eficienței profilului dublu T

Dacă valoarea raportului $K = h/g$ are o influență deosebită asupra eficienței profilului, influența formei și mărimii secțiunii tălpilor este mai puțin importantă. Pentru a determina importanța acestor factori s-au cercetat cîteva aspecte.

S-a considerat la început o secțiune dublu T de o suprafață constantă. Valoarea modulului de rezistență W_x a secțiunii, depinde, evident, nu numai de dimensiunile inimii dar și de mărimea și forma tălpilor. Variația modulului de rezistență determină și variația eficienței, suprafața secțiunii fiind neschimbată ($A = \text{const.}$). Aici se deosebesc trei cazuri:

a) *Înălțimea profilului nu este limitată.* Atunci forma cea mai eficientă va fi aceea a profilului „ideal", care este determinată de cele trei condiții:

$$K = h/g = 30,\quad \beta = A_{2t}/A = 0{,}5 \text{ și } \gamma = a/t = 30\,,$$

mai ales de prima din ele.

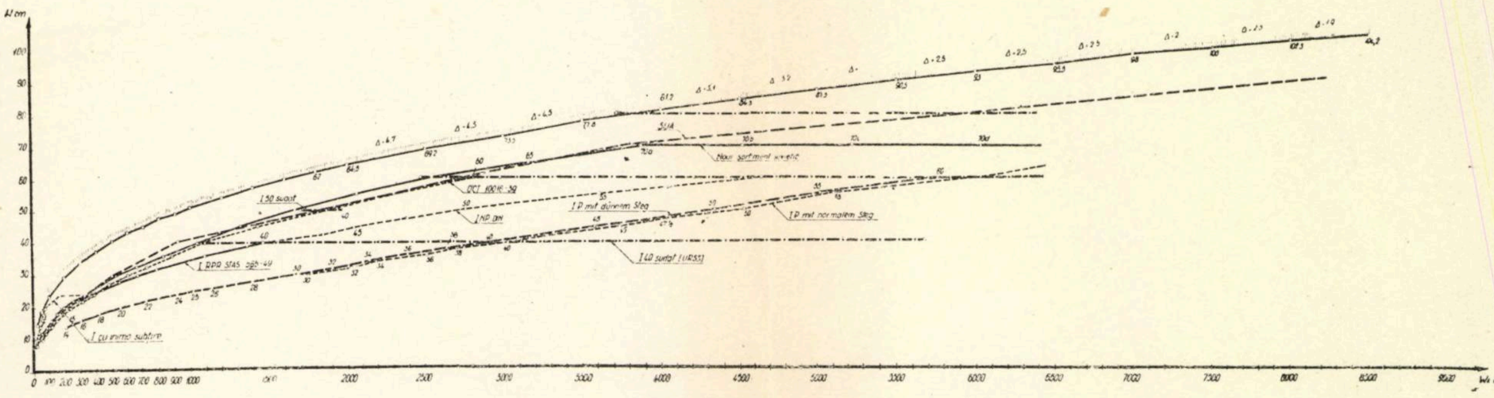

H cm
W cm³
I 50 suoat
I RPR STAS 385-49
I cu inimă subțire
OCT 10016-39
I NP DIN
I P mit dünnem Steg
I P mit normalem Steg
I 40 sudat (URSS)
Nou sortiment sovietic
SUA

Fig. 3

b) *Înălțimea totală a profilului nu variază* (H = const.). Este evident că în acest caz W_x maxim se obține sporind cît mai mult procentul de material din tălpi și totodată, făcînd tălpile cît mai late ($\gamma = 30$). Inima se va alege de o grosime minimă, astfel încît să se realizeze $K = 80$, grosimea minimă fiind însă de cel puțin 4 mm.

c) *Înălțimea inimii profilului (h) este constantă, putînd varia însă înălțimea totală a profilului (H).* Și în acest caz este indicat a reduce la limită grosimea inimii luînd $g = h/80$.

Din studiile făcute, pornind de la profilul „ideal" cu grosimea inimii $h/80$, cît și în cazul profilelor cu inima mai groasă, s-a văzut că variația modulului de rezistență W_x, deci și a eficienței, este dată de o curbă cu concavitatea în sus. Maximul valori-

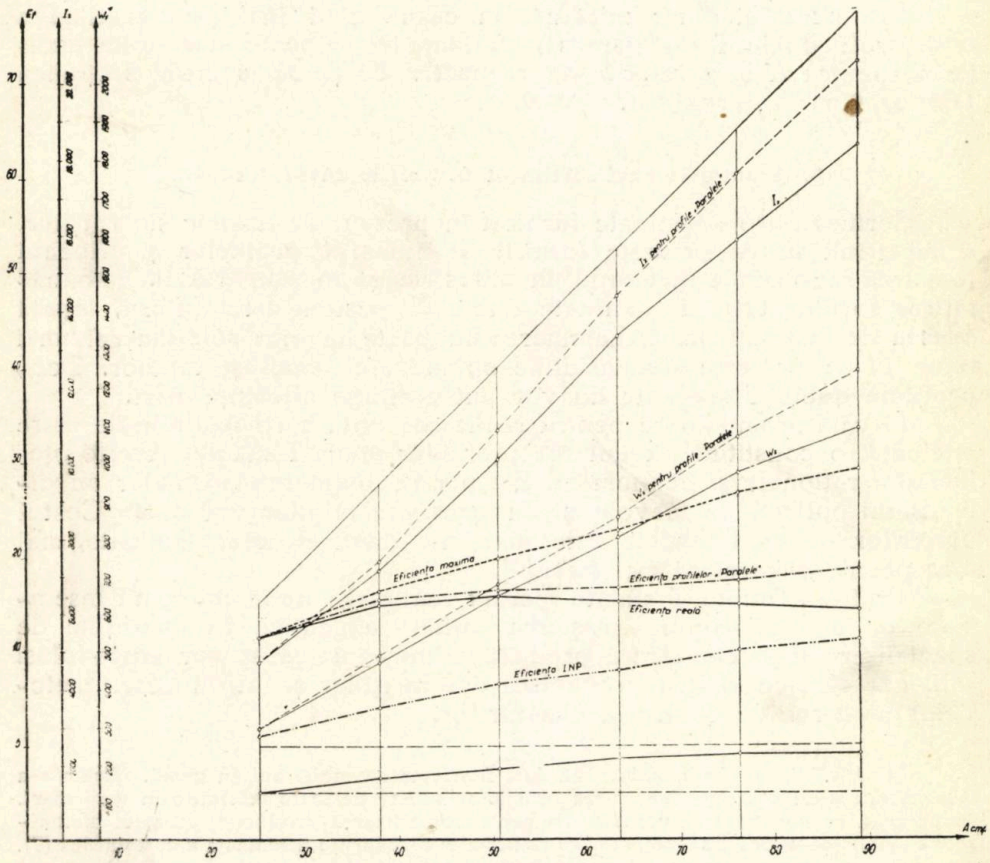


Fig. 4

lor se obține pentru tălpi late; un alt maximum, mult mai accentuat, apare în cazul tălpilor foarte înguste avînd însă o mare grosime. În zona acceptabilă din punctul de vedere constructiv, variațiile modulului de rezistență sînt mici (sub 2%), ceea ce permite adoptarea unei forme a tălpii mai avantajoasă din considerații constructive.

S-a studiat, pe de altă parte, și influența sporirii grosimii tălpilor asupra eficienței profilului dublu T. S-au păstrat invariabile înălțimea totală a profilului, grosimea inimii și lățimea tălpilor. Variază grosimea tălpilor și, ca urmare, suprafața secțiunii

transversale. Ca punct de plecare a servit un profil studiat anterior, avînd caracteristicile foarte apropiate de acelea ale unui profil „ideal" (K=80, $\beta = 50{,}4$, $\gamma = 25$) și $Ef_{\text{reală}} = Ef_{\max} = 10{,}63$ cm³ / cm².

S-a putut constata că eficiența crește la început față de cea inițială, apoi începe să scadă. Fiind la început egală cu eficiența optimă, eficiența reală se depărtează de ea din ce în ce mai mult (fig. 4). Astfel, cînd procentul de material în tălpi ajunge la 87%, eficiența reală este de numai 12,45 față de 19,7 — eficiența maximă.

Dacă o dată cu mărirea secțiunii tălpilor se sporește și lățimea lor, în vederea menținerii raportului optim între lățimea și grosimea tălpilor ($\gamma = 30$), eficiența crește puțin mai repede, rămînînd mereu cu mult sub cea optimă (curba eficienței profilelor „paralele" din figură).

Din acest studiu rezultă că, în cazul cînd înălțimea maximă a unui profil dublu T este impusă, eficiența lui se poate mări puțin menținînd pentru K și γ valorile de respectiv 80 și 30, sporind secțiunea tălpilor pînă la aproximativ $\beta = 0{,}85$.

9. Avantajele unui sortiment de profile dublu T sudate

Sortimentul de laminate furnizat în prezent de uzinele siderurgice, a îmbătrînit în ce privește formele și numărul profilelor și frînează folosirea rațională a metalului în industrie și în construcții. Îmbunătățirea sortimentului de laminate dublu T existent este dificilă, legată adesea de investiții mari. Laminarea nu poate da încă soluțiile cele mai bune în ce privește dimensiunile optime ale inimii și tălpilor. Deci, profilele dublu T laminate nu vor putea atinge eficiențe mari.

O cale promițătoare pentru realizarea unui sortiment nou de mare eficiență, o constituie executarea profilelor dublu T sudate. Aceste oțeluri sînt raționale și economice. Ele permit obținerea profilelor cu dimensiuni optime, la nevoie și cu grosimea tălpilor variabilă. Costul oțelurilor dublu T sudate este mai mic decît al celor laminate, mai ales pentru dimensiuni mai mari [9].

Profilele dublu T sudate permit realizarea unor economii însemnate de oțel și asigură creșterea calității execuției. În condițiile de specializare și mecanizare a producției dintr-o uzină, se vor putea folosi mijloace eficace pentru prevenirea deformațiilor și introducerea metodelor moderne de control a cusăturilor.

În U.R.S.S., profilele sudate au fost fabricate cu mulți ani în urmă. Acum s-a luat hotărîrea de a începe fabricarea profilelor sudate de toate mărimile în serii mari. În prezent, au loc lucrările pregătitoare pentru organizarea producției complet mecanizate a oțelurilor dublu T sudate, ceea ce va permite o reducere însemnată a costului lor [7].

Organizarea acestei producții, relativ simple, va descongestiona mult uzinele de construcții metalice și va spori considerabil producția lor.

După proiectul GOST oțelurile dublu T sudate vor avea inimile și tălpile de grosimi variind între 4...50 mm. O serie de condiții asigură economia profilului și stabilitatea grinzii:

a) raportul dintre grosimea tălpilor și a inimii nu trebuie să depășească 3, 2;

b) raportul dintre lățimea tălpii și înălțimea inimii nu va fi mai mare de 2;

c) raportul dintre lățimea tălpii și grosimea ei nu trebuie să depășească 30, în cazul elementelor încovoiate sau comprimate centric ori excentric (pentru profile dublu T din oțelul St 3).

10. Gradația profilelor dublu T

Gradația profilelor laminate ale unui sortiment trebuie să corespundă nevoilor constructive, determinate pe baza cercetării datelor asupra consumului laminatelor respective pe un număr oarecare de ani. Cheltuiala în plus a oțelului, provenită din supradimensionări la proiectare, depinde de mărimea intervalelor dintre profile, precum și de distribuția profilelor în sortiment.

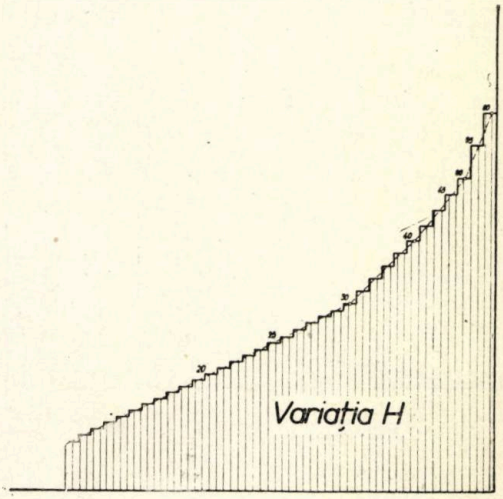


Fig. 5

Laminatele dublu T sînt clasate în sortimente după înălțimi; variația înălțimilor este liniară, iar gradația înălțimilor, mai apropiată în zona profilelor mult folosite și mai rară pentru celelalte (fig. 5).

Dacă ne referim însă la variația suprafeței secțiunilor transversale a laminatelor sau, mai ales, la variația modulelor de rezistență W_x (fig. 6 și 7), vedem că ea este mai rapidă și mai neregulată, așa că, deși gradația înălțimilor crește liniar, decalarea dintre două valori consecutive ale modulului de rezistență este din ce în ce mai accentuată (variația valorilor ΔW_x este reprezentată în fig. 8 și 9).

Concepția simplă a gradației laminatelor dublu T după înălțimi s-a impus în toate sortimentele. Or, înălțimea profilului interesează într-o măsură mai mică pe proiectant; ceea ce-l interesează în primul rînd, este nu înălțimea, ci modulul de rezistență — găsirea unui modul de rezistență (W_x) cît mai apropiat de cel necesar. În loc de gradație fină a înălțimilor din centimetru în centimetru, este mai indicată gradația după valorile modulului de rezistență W_x. În felul acesta, căutarea unui modul de rezistență potrivit va fi simplificată. Oțelurile ar purta un număr, reprezentînd valoarea modulului de rezistență; înălțimea ar deveni o simplă caracteristică a profilului, cum sînt, de exemplu, lățimea ori grosimea tălpii sau grosimea inimii.

În sortimentul de profile sudate studiat de noi, s-a adoptat următoarea gradație a profilelor în funcție de W_x:

a) la primele 7 profile, din 20 în 20 cm³ (50, 70, 90, 110, 130, 150 și 170), ceea ce corespunde aproximativ profilelor noastre I 12...I 18;

b) la următoarele 11 profile, din 30 în 30 cm³ (200, 230, 260, 290, 320, 350, 380, 410, 440, 470 și 500), corespunzînd aproximativ profilelor noastre I 20...I 26;

c) la următoarele 10 profile, din 50 în 50 cm³ (550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950 și 1000), care corespund în sortimentul nostru intervalului I 28...I 36;

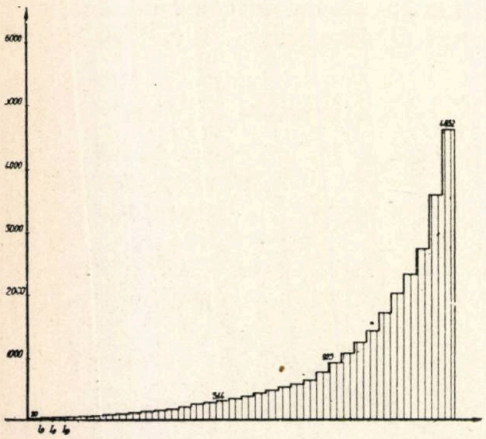


Fig. 6.

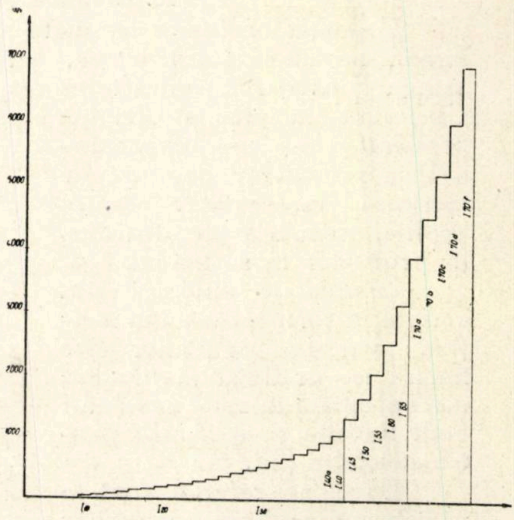


Fig. 7.

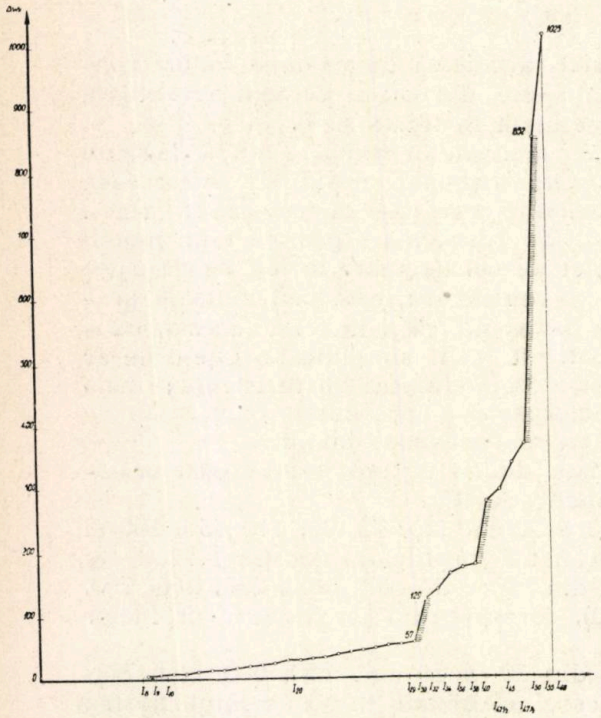


Fig. 8.

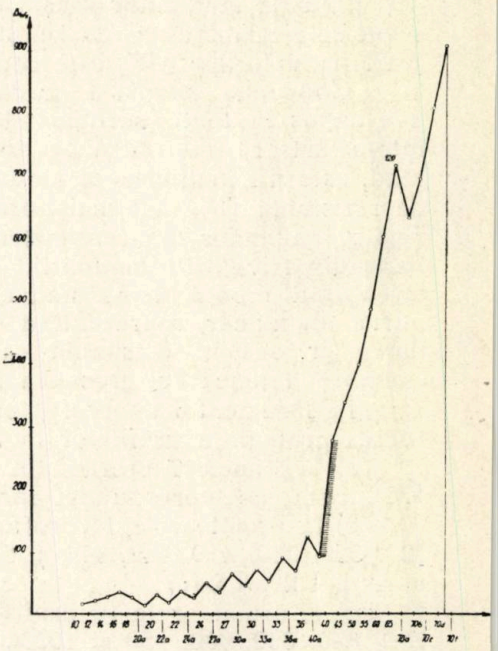


Fig. 9.

d) urmează un număr de 12 profile mari la care W_x variază din 500 în 500 cm³ (1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000, 4500 și încă : 5000, 5500, 6000, 6500 și 7000), care se încadrează în intervalul profilelor germane INP 40 ... INP 60, afară de ultimele cinci profile care corespund oțelurilor dublu T ale noului sortiment sovietic: I 70 *c*, I 70 *d* și I 70 f.

11. Proiectarea unui sortiment sudat de profile dublu T

Proiectarea profilelor dublu T sudate s-ar putea realiza mai lesne folosindu-se platbandele aflate în sortimentul nostru. Din studiile făcute rezultă însă că întrebuințarea acestor platbande nu dă posibilitatea obținerii unor profile eficiente și care să se poată încadra în gradația stabilită mai sus. La proiectarea oțelurilor este nevoie de a varia din milimetru în milimetru grosimile, lățimile sau înălțimile elementelor. Or, în sortimentul nostru de platbande, grosimile variază din 2 în 2, apoi din 5 în 5 și din 10 în 10 mm. Lățimile variază din 20 în 20, din 30 în 30 și din 50 în 50 mm. În sortiment nu sînt platbande de 4 mm grosime, necesare pentru alcătuirea inimilor profilelor mai mici.

Așadar, va fi nevoie de a folosi table groase. Ele au grosimi care, pornind de la 4 mm, variază din milimetru în milimetru; numai pentru table mai groase de 30 mm variația este din 2 în 2 mm. Din table groase se pot tăia fîșii de orice lățime. Această tăiere trebuie executată cu flacăra oxiacetilenică, sporindu-se astfel randamentul tăierii.

Specialiștii sovietici recomandă folosirea procedeelor de tăiere mecanizate (cu mașini speciale automate sau semiautomate), care sînt superioare tăierii manuale și ca randament și în ce privește calitatea tăieturii. Se obține o tăietură regulată, cu margini drepte, care nu are nevoie de nici o prelucrare ulterioară [5].

S-a constatat că tăierea cu oxigen, schimbă mai puțin calitățile metalului, structura și însușirile mecanice ale acestuia, decît tăierea mecanică cu foarfece sau fierăstrău de fricțiune. Pentru oțelul cu puțin carbon, cum este oțelul OL 38, nu este necesară îndepărtarea unui strat de metal de-a lungul marginei tăiate. Oțelurile cu puțin carbon, nealiate, cu conținut de carbon sub 0,3%, nu se călesc aproape deloc la tăiere. Zona de influență termică la aceste oțeluri, avînd grosimi sub 10 mm, nu are o lățime mai mare de 1 mm [9].

La proiectarea oțelurilor dublu T din table groase, se pot obține profile a căror eficiență să atingă pe cea limită. Din examinarea caracteristicilor profilelor proiectate se constată că eficiența lor este egală, sau aproape egală, cu cea maximă, ceea ce permite economii de oțel pînă la 40% (fig. 10). Alte avantaje ale profilelor proiectate sînt:

a) rigiditatea mai mare în plan vertical și, de asemenea, în plan orizontal, datorită tălpilor mai late;

b) profilele sînt mai ușoare ca cele obișnuite, deci manipularea, transportul și montarea lor se simplifică.

Ca dezavantaje, se remarcă înălțimea mai mare a profilelor față de oțelurile INP. Sporul de înălțime poate atinge, în unele cazuri, 73%

și chiar mai mult. În consecință, ele nu sînt indicate în cazul înălțimilor de construcție limitate.

În total au fost proiectate de noi primele 19 profile ale sortimentului sudat: profilele nr. 30, 70, 90 *n*, 110 *n*, 130 *n*, 150 *n*, 170 *n*, 200 *a*, 230, 260, 290, 320, 350 *a*, 380, 410, 440, 470, 500 și 550. Eficiența acestor profile a rezultat totdeauna mai mare ca aceea a profilelor din noul sortiment sovietic, plasîndu-se cam la mijlocul intervalului dintre eficiența lor și eficiența maximă, după cum se vede din fig. 10. Caracteristicile profilelor sudate proiectate sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Proiect de sortimente ale profilelor dublu T sudate

Nr. profilului	W_x (cm³)	H (cm)	A (cm²)	Inima $g \times h$ (mm)	Tălpile $t \times a$ (mm)	Efic. reală (cm³/cm²)	Efic. calculată (cm³/cm²)	Eficiența (%)
50	50,3	15	10,88	4×142	4× 66	4,63	6,90	67
70	70,2	15	13,68	4×142	4×101	5,12	7,75	66
90 *n*	90,5	20	14,64	4×192	4× 87	6,16	8,00	77
110 *n*	110,3	20	16,80	4×190	5× 92	6,56	8,56	76,5
130 *n*	130,5	25	17,40	4×240	5× 78	7,50	8,72	86
150 *n*	150,9	25	19,10	4×240	5× 95	7,90	9,14	86
170 *n*	170,1	25	20,70	4×240	5×111	8,25	9,51	86,5
200 *a*	200,7	30	21,70	4×290	5×101	9,26	9,73	95
230	231,2	30	23,80	4×290	5×122	9,70	10,20	95
260	260,6	30	25,92	4×288	6×120	10,07	10,63	94,5
290	292,4	30	28,24	4×286	7×120	10,35	11,10	93
320	321,4	35	28,10	4×340	5×145	11,44	11,08	103
350 *a*	351,5	35	29,96	4×338	6×137	11,70	11,40	103
380	380,5	35	31,78	4×336	7×131	12,00	11,78	102
410	410,7	35	33,68	4×334	8×127	12,55	12,12	103,5
440	440,1	35	35,44	4×334	8×138	12,45	12,45	100
470	471,0	40	37,40	5×388	6×150	12,60	12,80	98,5
500	501,3	40	38,96	5×388	6×163	12,90	13,05	98,9
550	552,4	40	41,70	5×386	7×160	13,30	13,80	96,5

La cîteva profile, eficiența a rezultat chiar puțin mai mare ca cea maximă, ceea ce se explică prin faptul că pentru unele profile raportul K a depășit 80, mergînd pînă la $K=85$, ceea ce s-a făcut din motive constructive. O mică depășire a valorii limită a raportului poate fi admisă deoarece la aprecierea stabilității locale a inimii, înălțimea inimii se măsoară de fapt între extremitățile sudurilor care îmbină tălpile cu inima.

La proiectarea profilelor, înălțimea lor a fost aleasă cît mai apropiată de înălțimea optimă a profilului „ideal", dată de formula: $H_{optim} = 5{,}111 \sqrt[3]{W_x}$. De cele mai multe ori, înălțimea reală a rezultat mai mică ca cea optimă.

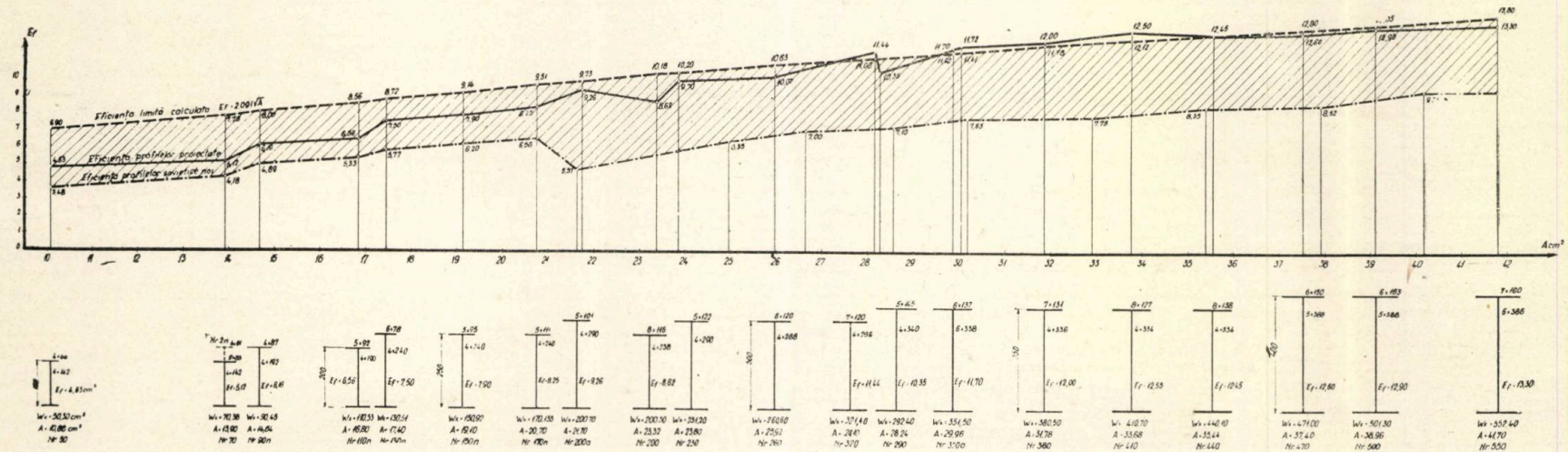

Eficienţa limită calculată
Eficienţa profilelor proiectate
Eficienţa profilelor sovietice noi
Acm²

Fig. 10

Pentru profilele sudate s-au adoptat mai puține înălțimi decît în sortimentele obișnuite. Variația lor este din 5 în 5 cm. Profilele propuse au următoarele înălțimi: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 cm și așa mai departe, ceea ce este, fără îndoială, mai comod la proiectare. Faptul că numerele profilelor corespund cu valorile modulelor de rezistență W_x, precum și variația liniară adoptată pentru aceste valori pe diferite intervale, contribuie la simplificarea și accelerarea proiectării.

Profilele au o eficiență mare și o rigiditate transversală sporită; prin folosirea lor se pot obține economii importante de oțel. Această economie se poate aprecia la cel puțin 34 %, în comparație cu profilele germane INP. De fapt economia este mai mare, fiindcă în intervalul $W_x = 50{,}3...552{,}4$ cm³ în sortimentul german sînt numai 17 profile, față de 19, ca în cel proiectat. Dacă se compară sortimentul acestor oțeluri cu cel din STAS 565—49, care posedă numai 9 profile în intervalul considerat, se vede că economia va fi și mai mare, deoarece supradimensionările cauzate de nepotrivirea modulelor de rezistență W_x necesare, cu cele ale profilelor din sortiment, vor fi mai reduse.

12. Concluzii

Din cele de mai sus rezultă că forma profilelor dublu T laminate poate fi simțitor îmbunătățită, sporindu-se într-o însemnată măsură, eficiența acestor profile. În orice caz însă, ele nu vor putea să atingă eficiența ridicată a oțelurilor dublu T obținute prin sudură, cu toate perfecționările aduse în ultima vreme laminoarelor.

În această situație apare ca deosebit de interesantă soluția organizării unei producții de profile dublu T sudate, ceea ce se poate realiza cu investiții reduse și într-un timp relativ scurt. Din cele expuse mai sus se vede că un astfel de sortiment poate fi elaborat; dacă unele premize sau amănunte în legătură cu el pot fi discutate, rămîne însă stabilit că profilele dublu T sudate sînt foarte economice și că eficiența lor poate întrece eficiența oricărui alt profil dublu T realizat pînă acum.

Institutul Politehnic Iași,
Catedra de Construcții

BIBLIOGRAFIE

1. Балдин В., Голенко Г. и Писчиков В., Строительная промышленность, 1956, *3*, стр. 32 — 36.
2. Бардин И., 40 лет чёрной металлургии СССР, 1957, М., Издат. Знание.
3. Давыдов В., Изделия из тонкостенных профилей, 1957, М., Машгиз.
4. Давыдов В. и Максаков М., Производство гнутых профилей, 1954, М., Металлургиздат.
5. Хренов К., Сварка, резка и пайка металлов, 1952, М.—К., Машгиз.
6. Карякин Е., Строительная промышленность, 1953, *2*, стр. 24 — 27.
7. Котляр Е., Опыт строительства, 1957, *8*, стр. 96 — 118.
8. Ложкин Б., Известия АН СССР, ОТН, 1956, *1*, стр. 137 — 149.
9. Михайлов Г., Кириллов А. и Сергачёв М., Производство сварных металлических конструкций, 1953, М.—С., Машгиз.
10. Николаев Г., Сварные конструкции, 1953, М., Машгиз.
11. Nicolaï de Gorhez, J. Acier-Stahl-Steel, 1957, *9*, pp. 357 — 361.
12. Otreșco A., *Elemente de construcții*, vol. II, *Construcții metalice*, 1950, Buc., OPED, CFR, (trad. din l. rusă).

13. Патон Е. и Горбунов В., Стальные мосты, 1935, Харьков-Киев, Гостехиздат.
14. Stegmann G., *Berechnungsgrundlagen im Hochbau*, 1953, Berlin, VEB Verlagtechnik.
15. Streleţki N., Gheniev A., Baldin V. ş. a., *Construcţii metalice*, v. I., 1951, Buc., ESAC, (trad. din l. rusă).
16. Швейкин В. и Тягунов В., Технология прокатного производства, 1956 Свердловск, Металлургиздат.
16. * * * Вопросы применения стальных конструкции в строительстве, (сборник статей), 1953, Москва, Госстройиздат, стр. 340 — 349.
18. Вахуркин В., Строительная промышленность, 1958, *11*, стр. 29 — 33.
19. * * * *Aide-mémoire Dunod. Construction métallique*, 1956, Dunod, Paris.
20. * * * Справочник монтажника стальных конструкций, 1948, Москва, Госстройиздат.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАЛЬНЫХ БАЛОК СО СПЛОШНОЙ СТЕНКОЙ

(Резюме)

Рассматриваются сечения прокатных, штампованных и сварных стальных балок отечественного и зарубежного сортамента, в целях выяснения из эффективности на изгиб.

Находится оптимальная форма сечения и устанавливается значение предельной эффективности двутаврого сечения :

$$Ef_{\max} = 2{,}091\sqrt{A},$$

с которой сравнивается реалная эффективность различных существующих и предложенных сечений (рис. 1).

Исследуется влияние разных факторов на эффективность профилей на изгиб. Отмечается возможнсть создания двутавров более эффективных чем существующие и указывается что наибольщую эффективность имеют сварные двутавры. Предлагается сортамент сварных профилей повыщенной эффективности, близкой к предельной. Градация профилей установленна по значениям момента сопротивления W_x.

STUDIUM DER WIRKSAMKEIT VOLLWANDIGER STAHLBALKEN

(Zusammenfassung)

Zwecks Ermittlung sparsamer Querschnitte der vollwandigen Stahlträger, wurden verschiedene Querschnitte die în R. V. R. und Ausland verwendet werden, untersucht um die günstigsten Formen der gewalzten, geschweisten Träger zubestimmen.

Zu diesem Zweck werde der Begriff der Wirksamkeit auf Biegung bestimmt.

Es wurde der günstigste Querschnitt des Balkens bestimmt und es wurde die Formel der maximalen Wirksamkeit abgeleitet

$$Ef_{\max} = 2{,}091\sqrt{A}$$

mit der die Wirksamkeit der verschiedenen vorhandenen oder abgeleiteten Querschnitte verglichen wurde (Abb. 1).

Es wurde der Einfluss der verschiedenen Faktoren über die Wirksamkeit auf Biegung der Profile untersucht.

Weiter wird gezeigt dass die Erziehung wirksamerer Querschnitte als derjenigen die bisheute vorhanden sind, möglich ist.

Die grösste Wirksamkeit haben die geschweisten I — Träger.

Es wurde eine Gruppe geschweister Querschnitte deren Wirksamkeit sich der grössten nähert, untersucht.

Die Reihenfolge der Querschnitte wurde in Funktion der Werke des Wiederstandsmoduls festgestellt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

624.2

DSEPRE COSTUL INFRASTRUCTURII LA PODURILE METALICE CU DESCHIDERI ECONOMICE

DE

GH. URSESCU şi FLORIN CONSTANTINESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Costul total al unui pod metalic cu pile de mărimi egale se poate exprima cu ajutorul relaţiei:

$$C_t = 2C_c + (n-1)C_p + n(\alpha + \beta l)lC, \tag{1}$$

în care: C_c — costul unei culei, C_p — costul unei pile, $\alpha + \beta l$ — greutatea grinzilor principale şi a elementelor metalice ale căii şi trotuarelor pe metru liniar, C — costul unei tone de material metalic din suprastructură, l — mărimea unei deschideri, n — numărul deschiderilor.

Dacă exprimăm costul unei culei în funcţie de costul unei pile, adică $C_c = \eta C_p$, în care η este un coeficient pozitiv, atunci expresia (1) devine:

$$C_t = 2\eta C_p + (n-1)C_p + n(\alpha + \beta l)lC. \tag{2}$$

Din relaţia (2), prin derivare, rezultă deschiderea cea mai economică atunci cînd costul unei pile este egal cu costul grinzilor principale pe lungimea unei deschideri, adică:

$$C_p = \beta l^2 C. \tag{3}$$

Înlocuind în (2) $lC = C_p/\beta l$, se obţine:

$$C_t = (2n + 2\eta - 1 + n\alpha/\beta l)C$$

sau, fiindcă lungimea totală a podului este $l_t = nl$,

$$C_t = (2n + 2\eta - 1 + \alpha n^2/\beta l_t)C_p, \tag{4}$$

expresie în care singura variabilă este n.

Dacă se notează cu C_i costul total al infrastructurii, acesta se poate exprima cu ajutorul relaţiei:

$$C_i = (n + 2\eta - 1)\, C_p .$$

Însemnînd cu y raportul dintre costul total al infrastructurii şi costul total al podului, se obţine:

$$y = \frac{C_i}{C_t} = \frac{n + 2\eta - 1}{2n + 2\eta - 1 + \alpha n^2/\beta l_t} . \tag{5}$$

Observăm că oricare ar fi valoarea lui η, cînd $n \to 0, y \to 1$, iar cînd $n \to \infty$, $y \to 0$. Deci $y(n)$ reprezintă o familie de curbe, care au comună valoarea 1. Excepţie de la această regulă o face numai cazul cînd $\eta = 0{,}5$ şi anume:

$$y = [2 + \alpha n/\beta l_t]^{-1} ,$$

în care caz, dacă $n \to 0$, $y \to 0{,}5$, iar dacă $n \to \infty$, $y \to 0$.

Derivînd pe y în raport cu n, se obţine:

$$\frac{dy}{dn} = -\frac{\alpha n^2/\beta l_t + 2(2\eta - 1)\,\alpha n/\beta l_t + 2\eta - 1}{(2n + 2\eta - 1 + \alpha n^2/\beta l_t)^2} . \tag{6}$$

Anulînd derivata (6) se obţine:

$$n_0 = -(2\eta - 1)\{1 \pm \sqrt{1 - \beta l_t/[\alpha(2\eta - 1)]}\} . \tag{7}$$

Pentru ca rădăcinile n_0 ale derivatei (6) să fie reale, trebuie îndeplinită condiţia $1 - \beta l_t/[\alpha(2\eta - 1)] > 0$ de unde rezultă:

$$(1 + \beta l_t/\alpha)/2 < \eta < 1/2 . \tag{8}$$

Pentru cazurile în care $1/2 < \eta < (1 + \beta l_t/\alpha)/2$, rădăcinile derivatei sînt imaginare, deci cel puţin două rădăcini ale lui y sînt imaginare.

Din inegalitatea $\eta > (1 + \beta l_t/\alpha)/2$ se poate deduce că η are valori foarte mari, căci β este totdeauna mai mare ca α, iar dacă luăm pentru l_t o valoare mică, de exemplu $l_t = 30$ m şi admitem că $\beta = \alpha$, rezultă pentru η valoarea la limită $\eta = 15{,}5$, ceea ce conduce la un cost prea ridicat al culeelor şi deci trebuie căutate alte soluţii pentru amplasamentul podului, aşa încît să obţinem pentru culei valori mai mici.

În concluzie, problema costului total al infrastructurii trebuie limitată la valori ale lui η care să nu depăşească prea mult valoarea 1, pentru ca să nu avem un cost prea ridicat al infrastructurii.

Ca aplicaţie, în tabelul 1, se arată variaţia funcţiei y pentru $l_t = 500$ m şi $\alpha/\beta = 1/10$. În tabel, pe orizontală sînt înscrise diverse valori ale lui η şi pe verticală, numărul deschiderilor. Reprezentarea grafică a cîtorva curbe din acest tabel este dată în fig. 1.

Din cercetarea datelor din tabelul 1 se pot trage următoarele concluzii în legătură cu podurile metalice cu deschideri economice:

1. Cînd costul unei culei nu depăşeşte costul unei pile.

a) Dacă costul culeii este mic, soluţia economică este dată de podurile cu deschideri mari, adică cu un număr redus de deschideri.

Tabelul 1

n \ η	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,236	0,444	0,546	0,616	0,667	0,706	0,737	0,763	0,783	0,800
2	0,412	0,474	0,542	0,566	0,600	0,630	0,655	0,677	0,706	0,704
3	0,444	0,483	0,516	0,546	0,573	0,596	0,615	0,634	0,659	0,667
4	0,459	0,487	0,512	0,535	0,556	0,575	0,592	0,608	0,629	0,636
5	0,467	0,489	0,510	0,527	0,546	0,562	0,576	0,581	0,608	0,616
6	0,473	0,492	0,508	0,523	0,538	0,562	0,565	0,577	0,595	0,600
7	0,477	0,493	0,507	0,521	0,532	0,546	0,557	0,568	0,583	0,587
8	0,481	0,494	0,505	0,517	0,530	0,541	0,551	0,561	0,576	0,572
9	0,483	0,494	0,506	0,516	0,527	0,537	0,546	0,555	0,567	0,566
10	0,485	0,495	0,505	0,515	0,524	0,533	0,542	0,550	0,562	0,560
15	0,489	0,496	0,504	0,511	0,516	0,523	0,528	0,534	0,543	0,546
20	0,492	0,497	0,503	0,508	0,513	0,518	0,522	0,526	0,534	0,534
25	0,493	0,497	0,503	0,506	0,510	0,514	0,518	0,521	0,527	0,528
30	0,493	0,498	0,502	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,522	0,524
40	0,493	0,497	0,502	0,503	0,506	0,508	0,512	0,515	0,517	0,517
50	0,494	0,496	0,501	0,502	0,505	0,506	0,508	0,511	0,512	0,513

b) Dacă costul culeii este mare, soluția economică este dată de podurile cu un număr mai mare de deschideri, adică cu deschideri mici.

c) În cazul podurilor cu mai multe deschideri, costul total al infrastructurii se menține foarte apropiat de jumătatea costului total al podului, așa încît se poate afirma că în cazul podurilor cu un număr mare de deschideri, costul infrastructurii este aproximativ 50% din costul total al podului.

2. Cînd costul unei culei este mai mare decît costul unei pile.

a) Dacă costul culeii este mic, soluția economică este dată de podurile cu un număr mare de deschideri, adică cu deschideri mici.

b) Dacă costul unei culei este mare, atunci soluția economică este dată de podurile cu un număr mic de deschideri, adică cu deschideri mari. Aceste concluzii teoretice nu trebuie privite ca absolute, ci va trebui analizată situația de la caz la caz, întrucît pot interveni și alte considerațiuni care să influențeze asupra soluției celei mai economice, cum este de exemplu navigabilitatea, sistemul de alcătuire al grinzilor, etc.

Citățm, de exemplu, cele două poduri peste Dunăre din R. P. R. și anume, podul de la Cernavodă și podul de la Giurgiu.

La primul pod s-a impus cota căii la 30 m deasupra etiajului pentru ca să poată trece pe sub el corăbiile turcești care aveau catarge ce nu puteau fi micșorate. De aici a rezultat un important surplus de material în infrastructură, ceea ce a condus la soluția cu un număr

mic de deschideri şi adoptarea sistemului de grinzi cu console, pe cînd dacă cota căii nu ar fi fost condiţionată, desigur că s-ar fi ajuns la soluţia cu un număr mai mare de deschideri.

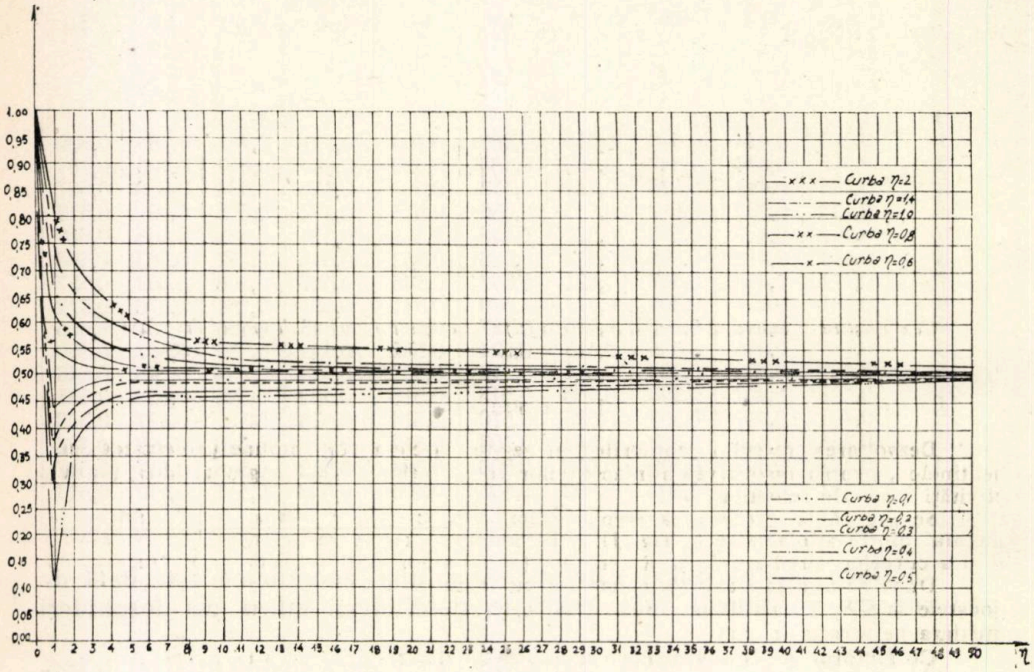


Fig. 1

La podul de la Giurgiu unde cota căii a fost determinată de consideraţiuni corespunzătoare condiţiilor moderne de navigabilitate, s-a ajuns la soluţia cu un număr mare de deschideri.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Drumuri şi Poduri

О СТОИМОСТИ ИНФРАСТРУКТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МОСТОВ С ЭКОНОМНЫМИ ПРОЛЁТАМИ

(Резюме)

Дана функция представленная отношением между инфраструктурной и общей стоимостями железных, с экономными пролётами, мостов и изучается изменение этой функции в отношении числа пролётов. Заключения указывают на способ построения железных мостов с экономными, в отношении числа и размеров, пролётами.

SUR LE PRIX DE L'INFRASTRUCTURE DES PONTS MÉTALLIQUES TRAVÉES ÉCONOMIQUES

(Résumé)

On considère la fonction représentant le rapport du prix de l'infrastructure et du prix total des ponts métalliques travées économiques et on étudie la variation de cette fonction rapportée aux nombres des travées.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

625.7

O METODĂ NOUĂ DE PROIECTARE A SERPENTINELOR

DE

BENIAMIN WEINŞTEIN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi. din 12-13 februarie 1955

1. Introducere

Dezvoltarea traseului drumurilor în regiuni accidentate, impune proiectarea serpentinelor, pentru racordarea aliniamentelor ce se întîlnesc sub unghiuri mici, pe declivităţi mari ale terenului.

Se ştie că la proiectarea serpentinelor prin metodele cunoscute, pornim de la unghiul dintre aliniamente α (fig. 1) şi ne impunem razele curbei principale (turnant) R şi a curbelor auxiliare R_1 şi R_2, în funcţie de valorile recomandate pentru acestea.

După aceasta se stabileşte şi poziţia centrului C al curbei principale, prin coordonatele sale X, Y, faţă de un sistem de axe, format de bisectoarea unghiului şi perpendiculara pe aceasta în vîrf.

Cu ajutorul acestor elemente cunoscute, se determină, prin calcul, unghiurile δ_1 şi δ_2 (fig. 1) între aliniamentele auxiliare şi cele ale traseului, necesare determinării celorlalte elemente ale serpentinei.

Inconvenientul cel mai important al metodelor cunoscute, rezultă din faptul că la proiectarea în plan, nu se ţine seamă de declivitatea longitudinală, care se verifică la urmă, iar în cazul cînd serpentina rezultată nu satisface limitele admisibile pentru declivităţi, se reia proiectarea prin alegerea unei alte poziţii pentru centrul C al curbei principale.

Pornind de la această observaţie, noi am studiat posibilitatea înlăturării încercărilor repetate, prin îmbinarea calculelor proiectării serpentinei în plan şi pe verticală. În metoda pe care o prezentăm, pornim de la acelaşi unghi α dintre aliniamente. Trebuie creată însă posibilitatea de a rezolva simultan cu proiectarea în plan şi problema obţinerii declivităţilor longitudinale admisibile.

Pentru aceasta am înlocuit fixarea independentă a centrului C al turnatului unei serpentine, cu un ax $\overline{VV'}$ (fig. 2), din care sectorul $\overline{LV'}$ ar reprezenta poziţia mai multor puncte (C_1, C_2,...,C_n) ce pot fi alese ca centre de turnant. Între acestea se va afla şi centrul turnantului serpentinei căutate.

Acest considerent ne impune fixarea poziţiei axei $\overline{VV'}$ astfel încît să creeze serpentinelor ce vor avea centrul turnatului pe ea, o bună înscriere în relieful terenului.

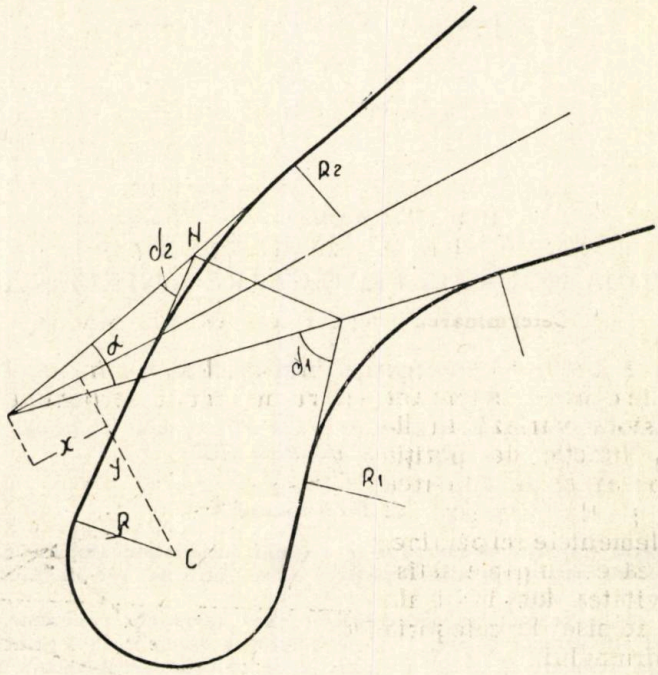


Fig. 1.

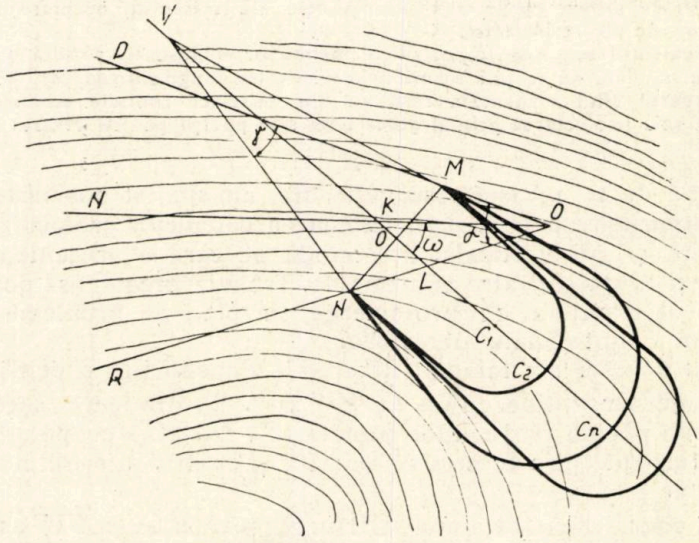


Fig. 2.

După ce axa VV' este astfel fixată în planul de situație, poziția ei se determină prin măsurarea elementelor: ω — unghiul dintre ax și bisectoarea $\overline{OH}$ a unghiului α și $\overline{OK}$ — distanța dintre vîrful aliniamentelor principale și intersecția axei cu bisectoarea $\overline{OH}$.

Mai departe, folosind tabelele întocmite pentru aplicarea metodei, urmează să realizăm următoarele faze de lucru:

a) determinarea lungimii necesare a serpentinei,

b) determinarea unghiului ajutător γ,

c) calculul elementelor de bază ale serpentinei.

2. Determinarea lungimii necesare a serpentinei

Datorită faptului că alegerea unui ax $\overline{VV'}$ — în locul unui centru fix — admite centre de turnant pentru mai multe serpentine și cum lungimea acestora variază în limite mari, funcție de poziția centrului pe ax și de valoarea razelor R și R_1, urmează să calculăm elementele serpentinei căutate, a cărei lungime satisface declivitatea longitudinală în limitele admise de categoria tehnică a drumului.

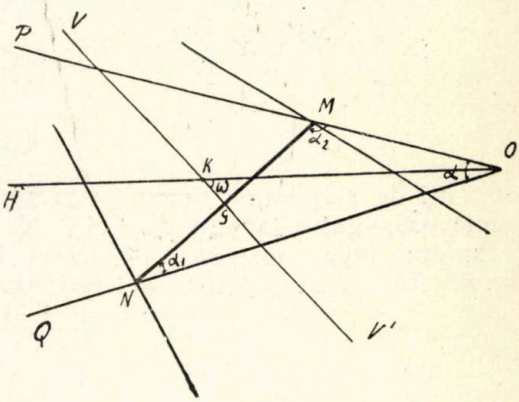


Fig. 3.

Trebuie să stabilim acum poziția aliniamentelor auxiliare.

În acest caz, facem ipoteza că ele sînt sînt simetrice față de $\overline{VV'}$, iar $\overline{MN} \perp \overline{VV'}$ (fig. 3).

Rezultă că prin alegerea axei $\overline{VV'}$, sînt determinate punctele M și N de intersecție a aliniamentelor principale cu cele auxiliare, iar axa $\overline{VV'}$ împarte distanța $\overline{MN}$ în părți egale ($\overline{MG} = \overline{GN}$).

Distanța $\overline{MN} = Z$ se obține din:

$$(1) \quad Z = \overline{OK} \cdot \frac{2\sin\omega \sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha/2)\cos(\omega-\alpha/2)} \left[1 - \frac{\operatorname{ctg}(\omega+\alpha/2 \operatorname{tg}(\omega-\alpha/2)}{1+\operatorname{ctg}(\omega+\alpha/2)\operatorname{tg}(\omega-\alpha/2)}\right]^{1}).$$

Distanțele $\overline{OM}$ și $\overline{ON}$ se obțin din triunghiul OMN funcție de α și Z, cunoscute. Deoarece $\alpha_1 = 90° - \omega - \alpha/2$, $\alpha_2 = 180° - \alpha - \alpha_1$

---

[1]) Pentru a putea face uz de tabele, se recomandă rotunjirea lui Z, urmînd a se calcula distanța $\overline{OK}$, cu ajutorul aceleiași relații în care se introduce valoarea lui Z rotunjită. În cazul serpentinelor de categoria I, simetrice, cînd $\omega = 0$, axa $\overline{VV'}$ corespunde cu bisectoarea aliniamentelor principale și segmentul $\overline{MN}$ este perpendicular pe bisectoare. De aceea Z nu mai este determinat, urmînd să calculăm distanța minimă necesară între ramurile serpentinei, Z_1, și să alegem $Z \geqslant Z_1$ cu care se intervine în tabele.

(2) $\overline{OM} = \overline{MN} \sin \alpha_1 / \sin \alpha$ și (3) $\overline{ON} = \overline{MN} \sin \alpha_2 / \sin \alpha$.

În continuare, ținem seama de faptul că serpentina fiind o construcție rutieră complexă, se studiază separat de restul traseului, la care în general, linia roșie este deja stabilită. Aceasta va determina calculul

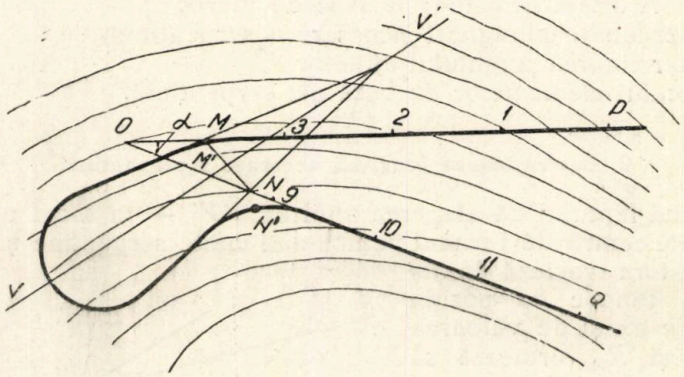


Fig. 4 a.

lungimii de serpentină necesară, în funcție de diferența de nivel între cotele proiectului în punctele M și N. Astfel, dacă pe planul de situație în studiu avem porțiunea de traseu POQ (fig. 4 a) unde urmează să introducem o serpentină, determinăm din profilul în lung (fig. 4 b)

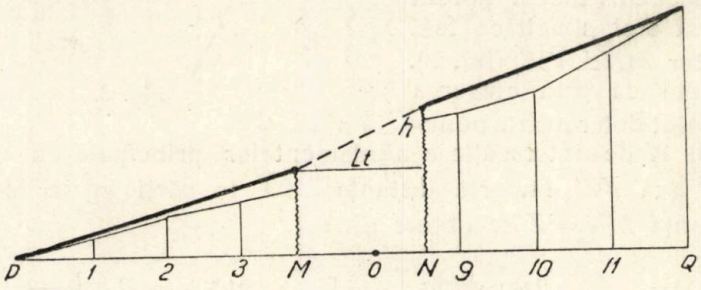


Fig. 4 b

diferența de nivel h, dintre cotele proiectului în ax a punctelor M și N (poziția acestor puncte fiind stabilită așa cum s-a arătat mai sus).

Impunîndu-ne panta medie pe care vrem să o obținem (notată cu p), lungimea serpentinei necesară pentru satisfacerea declivităților admisibile (notată cu L_t) este:

(4) $$L_t = h/p.$$

După calculul lui L_t este necesar să determinăm razele turnantului și ale curbelor auxiliare, ținînd seama de valorile recomandate pentru

acestea. În acest scop folosim tabelele amintite, după modelul tabelului 1. Căutăm în tabele valoarea lui L_t dată de (4) în spațiul corespunzător

Tabelul 1

$\alpha+2\omega$		45°									
R_1		50		100		150		200		250	
Z	R	L_t	L_a	L_t	L_a	L_t	L_a	L_t	L_a	L_t	L_a
40	20	165	∞	186	∞	205	∞	225	∞	245	∞
	25	197	294	218	343	239	402	260	456	281	510
	30	234	199	256	235	278	271	300	307	322	343
	35	267	174	280	204	314	233	337	262	360	291
	40	301	161	325	187	349	213	373	239	397	265
	45	334	157	359	182	384	206	409	230	433	254
	50	366	156	392	180	417	203	443	227	468	250

valorilor $\alpha+2\omega$ și Z din relația (1). Vom găsi în tabele[2]) valori apropiate pentru L_t, corespunzînd la diferite perechi de valori pentru R și R_1. Studiind terenul pe planul de situație, alegem cea mai convenabilă pereche de valori pentru R și R_1. Acesteia îi corespunde în tabele un număr în colona L_a care reprezintă valoarea distanței $\overline{O_1B}$ de la inter-

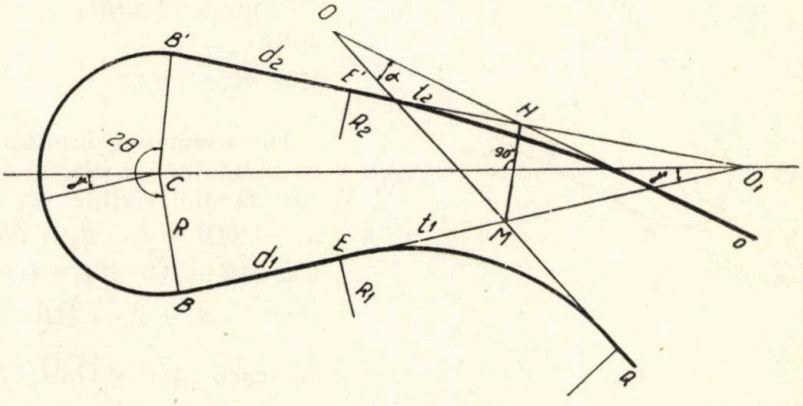


Fig. 5.

secția aliniamentelor auxiliare — notat cu O_1 — și pînă la punctul de tangență a acestora cu turnantul — notat cu B — (fig. 5).

[2]) Tabelele sînt întocmite pentru valori ale elementelor componente cuprinse între limitele uzuale.

3. Determinarea unghiului ajutător γ

Unghiul γ reprezintă jumătatea unghiului format de aliniamentele auxiliare (fig. 5) și se calculează cu relația:

$$\text{tg}\,\gamma = R/\overline{O_1B}, \text{ cînd } R > Z/2. \tag{5}$$

Pentru cazul cînd $R < Z/2$ (fig. 6) unghiul γ se obține din:

$$\sin\gamma = Z/2\overline{O_1M}. \tag{6}$$

4. Calculul elementelor de bază ale serpentinei

Elementele de bază ale serpentinei sînt: unghiul de întoarcere ϑ, tangentele curbelor auxiliare $\overline{ME}$, $\overline{NE'}$, notate cu t_1 și t_2 și porțiunile $\overline{BE}$, $\overline{B'E'}$ din aliniamentele auxiliare, notate cu d_1 și d_2 (fig. 5).

Unghiul de întoarcere rezultă din fig. 5 și 6

$$\vartheta = 90° \pm \gamma. \tag{7}$$

Tangenta curbelor auxiliare rezultă a fi $t_1 = R_1\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\delta_1$ unde $\delta_1 = \omega + \gamma + \alpha/2$ și deci

$$t_1 = R_1\,\text{tg}\,\frac{1}{2}(\omega + \gamma + \alpha/2). \tag{8}$$

De asemenea $t_2 = R_2\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\delta_2$ în care $\delta_2 = \omega - \gamma - \alpha/2$ și deci

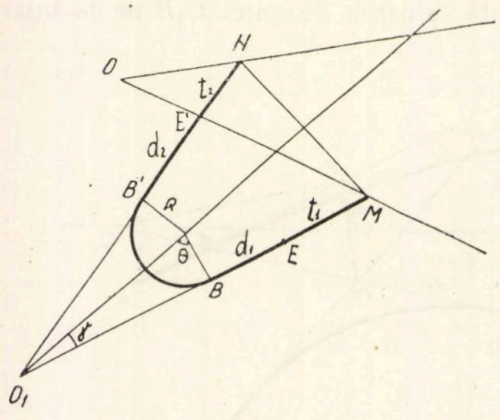


Fig. 6.

$$t_2 = R_2\,\text{tg}\,\frac{1}{2}(\omega - \gamma - \alpha/2). \tag{9}$$

Punînd condiția $t_2 = t_1$ rezultă:

$$R_2 = t_1/\text{tg}\,\frac{1}{2}(\omega - \gamma - \alpha/2). \tag{10}$$

De asemenea lungimea aliniamentelor auxiliare d_1 și d_2 rezultă din relațiile fig. 5 și 6) $d_1 = \overline{MB} - t_1$, $d_2 = \overline{NB'} - t_2$, dar $\overline{MB} = \overline{NB'}$ și $t_1 = t_2$ de unde

$$d_1 = d_2 = \overline{MB} - t_1 \tag{11}$$

în care $\overline{MB} = \overline{O_1M} - \overline{O_1M} = L_a - Z/(2\sin\gamma)$ cînd $R > Z/2$ (fig. 5) și $\overline{MB} = \overline{O_1M} - \overline{O_1B} = L_a - \alpha/\text{tg}\,\gamma$ cînd $R < Z/2$ (fig. 6).

În continuare se pot calcula toate elementele serpentinei.

În unele cazuri fiind recomandată introducerea curbelor de tranziție, la turnant sau curbele auxiliare, urmează a se realiza aceasta după metodele cunoscute.

Se va avea în vedere că la întocmirea tabelelor, s-au dat pentru L_a astfel de valori încît lungimile aliniamentelor auxiliare $d_1 = d_2$ să acopere necesităţile de racordare cu arce de tranziţie.

5. Concluzii

Proiectarea serpentinelor prin metoda prezentată în această lucrare oferă o serie de avantaje şi anume:

a) evitarea repetării încercărilor pentru găsirea serpentinelor ce corespund şi condiţiilor de declivitate;

b) de asemenea, după cum a rezultat din cele arătate mai sus, folosirea acestei metode, dă posibilitatea să alegem în modul cel mai convenabil mărimea razelor turnantului şi a curbelor auxiliare, în funcţie de configuraţia terenului;

c) în fine, un rezultat cu caracter teoretic, îl constituie faptul că studiul serpentinelor prin metoda prezentată, ne-a condus la *definirea matematică a categoriilor de serpentine cunoscute*, în funcţie de unghiurile α, ω şi γ astfel:

1. Serpentine de categoria I sînt acelea la care $\omega < \alpha/2 + \gamma$, din care:

a) simetrice cînd $\omega = 0$,

b) nesimetrice cînd $\omega \neq 0$.

2. Serpentine de categoria II sînt acelea la care $\omega > \alpha/2 + \gamma$.

3. Semiserpentine avem atunci cînd $\omega = \alpha/2 + \gamma$.

Metoda a fost verificată la serpentinele studiate în cadrul proiectelor de diplomă şi de an, cu rezultate bune, adeverind avantajele arătate.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Drumuri şi Poduri

BIBLIOGRAFIE

1. Бируля А. К., Проектирование автомобильных дорог, ч. I, Автотрансиздат, М., 1953
2. Щестаков П. Н. и др., Упражнения по курсу проектирования автомобильных дорог Дориздат, М., 1949.
3. Weinştein B., Teoria şi Practica Construcţiilor, Iaşi, 1954, 2, pp. 61-71.

НОВЫЙ МЕТОД ПРОЭКТИРОВАНИЯ СЕРПЕНТИН

(Резюме)

Автор, испольэуя несколько таблиц монелью которых служит Таблица 1, уменьшает трудоёмкость вычислительных работ касающихся проэктирования элементов серпентин соответстзующих выбранному уклону.

Выбор радиусов кривизны как и использование математических характеристик для различных видов серпентин — некоторые дополнительные преимущества изложенного метода.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE CALCUL DES SERPENTINES

(Résumé)

L'Auteur, en utilisant quelques tableaux dont le tableau 1 en constitue un modèle, élimine la répétition des calculs des éléments des serpentines correspondant à une declivité convenablement choisie.

Le choix des rayons de courbure convenables et l'introduction des critères mathématiques pour les cathégories des serpentines, voilà quelques autres avantages de la méthode préconisée.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

677.05

THE FIBROGRAPH TYPE „L"

BY

IOSIF IONESCU-MUSCEL, V. HANGANU, I. VLAD, EMILIA VLAD
and SEMERAD RĂDULESCU

Comunication presented at the scientific session of the Polytechnic Institute, Jassy, 26—29 June 1958

1. Introduction

The technique involved in the processing of cotton fibres requires more rapidity in testing and much more accurateness in the method of assessing the characteristics of cotton fibers. Among these characteristics, the following which are directly dependent upon fiber length are of particular importance: the modulus, the commercial length, the mean length of all fibers, the upper mean length (of fibers longer than the mean length) and the length uniformity index.

Various methods and devices are used at present to assess partially or totally these characteristics. Thus, there is a series of methods based upon sorting fibers according to their length (Baer, Suter Webb Duplex, Zweiglé [4], Jukov [1]) — some ot these based upon measurement of the thickness of a bundle of fibers having one end in the same plane, or of groups sorted according to their length (Fibrograph Hertel [5], Fibrograph RPU).

The first two methods mentioned have the inconvenience that a long period of time is required for testing (aprox. 3—5 hours). The methods based upon transparency of cotton fibers bundles are mode expeditions but are lacking precision.

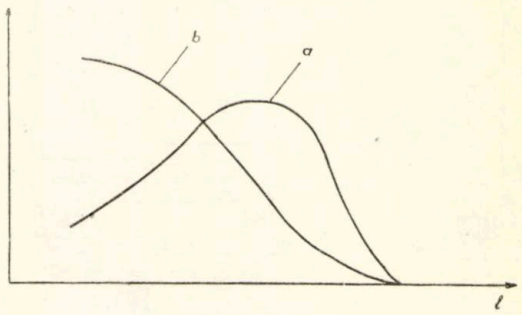


Fig. 1

The fibrometer method was developed in the Roumanian People's Republic using the hand-operated fibrometer and the mechanized fibrometer, presently applied in mill production, for determining rapidly the modulus and staple length [6], [7].

Our research team conceived the idea of designing an apparatus for obtaining reproductible results in a short time, which could be plotted as diagrams to accompany test results for cotton bales or samples.

To our knowledge two such devices are available: the Fibrograph of Hertel, which provides the length-frequency distribution curve of the fibers of a cotton sample and the Hungarian Fibrograph, which gives the frequency distribution curve.

The Type „L" Fibrograph, designed and built as a result of our research is drawing automatically and accurately the two characteristic curves — *the length-frequency distribution curve of fibers* (Fig. 1 a) based upon the number of fibers in the sorted length groups and *the cumulated frequencies curve* (Fig. 1 b). Using these curves, the characteristics which are dependent upon cotton fiber length are easily determined, according to some well-known rules.

2. Principle of work of Fibrograph Type „L"

Fibers sorted and distributed in groups, varying in length by 0,25 mm, are drawn through detective tongs whose jaws are lined with rubber strips; just when the tensile force equals the friction force between the fibers and the tongs jaws, — the friction force is graphically recorded on a paper band, this force being proportional with the number of fibers in the tested group [8].

If this operation is being effected for each group in the bundle of fibers, the frequency curve is obtained, as points. The other curve, that of the cumulated frequencies, is developped by means of an integrator that is summing up the ordinates of the first curve, recording being simultaneously performed with the first curve.

Sorting by groups is carried according to principles established for fibrometers [6], [7].

3. Description of the apparatus

The apparatus (Fig. 2) consists of the following essential mechanisms :

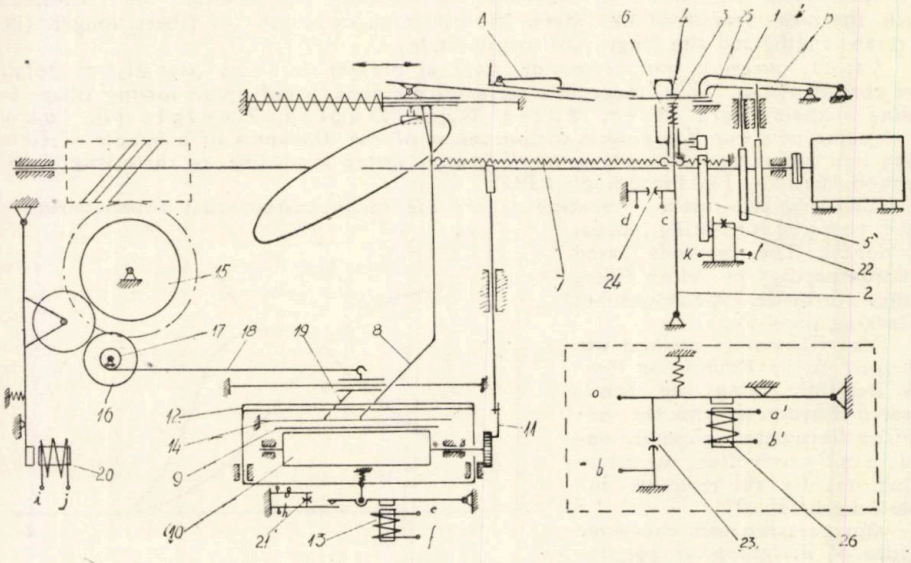


Fig. 2

a) mechanisms for sorting,
b) mechanism for detecting the number of fibers,
c) mechanism for recording the frequency curve,

d) mechanism for recording cumulated frequencies curve (integrator mechanism).

Essentially, *the mechanisms for sorting* are those used for the mechanized fibrometer [7]. But an additional jaw was inserted to retain the sorted fibers.

The mechanism for detecting the number of fibers consists of tongs mounted on an oscillatory holder, situated in front of the sorting tongs. The bottom jaw *3* is attached to the holder and the upper jaw *4* is operated by a cam *5*, situated on the main shaft. Jaws are lined with rubber strips. Between the jaws a constant pressing down is maintained through springs *6*.

The mechanisms for recording the frequency curve consist of: the spring *7* which exerts the tensile force upon the detective tongs is attached at one end to the oscillatory holder *2*, and with the other end to the movable holder of the sorting mechanism; the recording spring *8*, that is also attached to the movable holder, the mechanism for driving recording tape *9*, consisting of roll *10*, operated by the ratchet *11*, of the main shaft; the needle impact mechanism consisting of: the frame *12* and the electromagnetic relay *13*, that operates the frame when this is connected to the corresponding electrical circuit, an inked ribbon *14* fixed above tape *9*.

The mechanism for recording the cummulated frequencies curve embodies the following: a gearing group *15*, on the wheel shaft on this group being fixed the drum *17*, on which the yarn *18* can be wounded, intended to displace the recording needle *19*; the electromagnetic relay *20*, that serves for coupling by friction the wheels of the gearing mechanism, in view of winding the yarn.

4. Test Procedure and Functioning of the Apparatus

Sampling proceeds identically as for the fibrometer [6], [9]. Sorting of fibers allows a spacing of 0,25 mm in length. The bundle of fibers having one end in the same plane is caught in the tongs *A*, mounted in the movable holder of the sorting mechanism. The tongs *B* catches the group of fibers and takes it out from the bundle, when the tongs *A* recedes.

The additional jaw *1* closes and secures in position the fibers of the sorted group, during the period in wich the fibers are exposed to tensile force by the detective tongs.

Following the catching of fibers in the detective tongs, just the moment when the tensile force given by spring *7* is zero (the recording needles are in zero position), — the electrical circuits of the instrument are fed by means of the contacts *22* operated for a brief period of time, from the main shaft and the integrator mechanism starts.

When the tensile force provided by spring *7* surpasses the friction force existent between the fibers and the detective tongs, the contact *24* of the electrical circuit feeding the relay *13* of the recording mechanism closes; then each of the recording needles *8* and *19* marks

simultaneously a point, feeding of all electrical circuits being broken off at the same time through the opening of the contact 21. As a

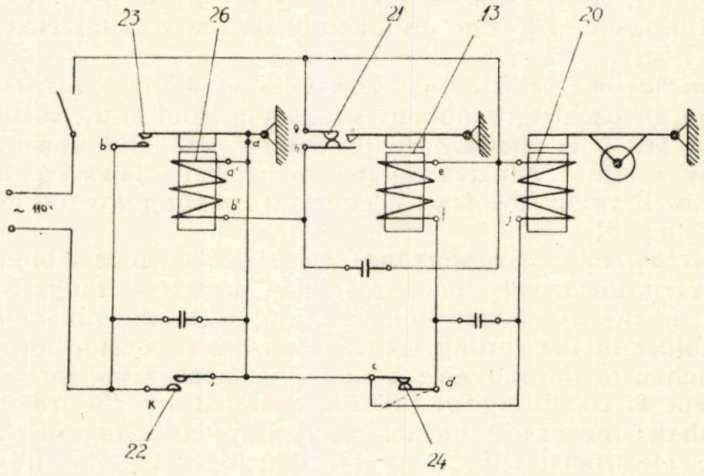


Fig. 3

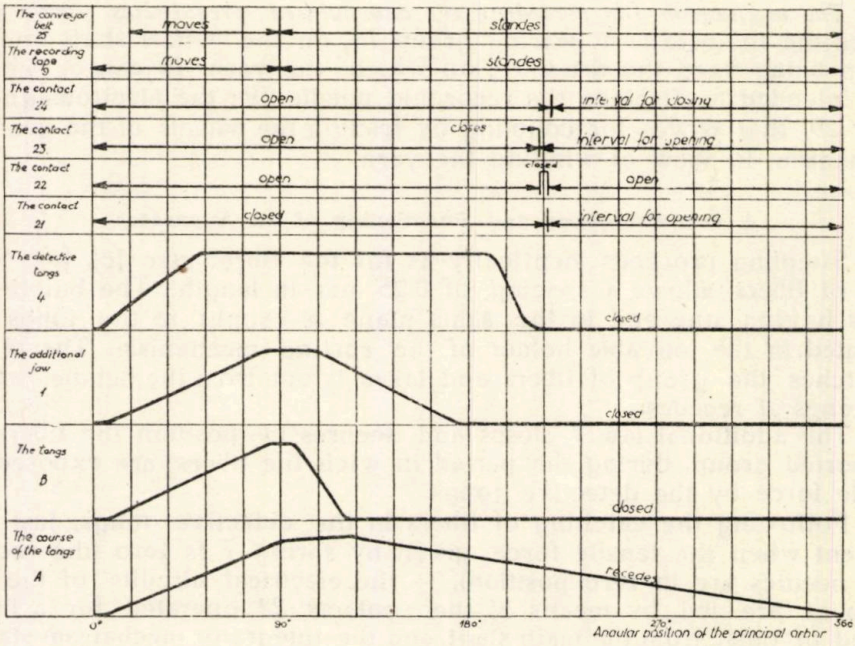


Fig. 4

result the integrator mechanism also stops. The sorted fibers are removed from the working space by means of the conveyor belt 25.

Each group sorted passes through the testing stages above described till the whole bundle of fibers caught in tongs *4* is exhausted and the two characteristic curves for cotton are thus drawn as points

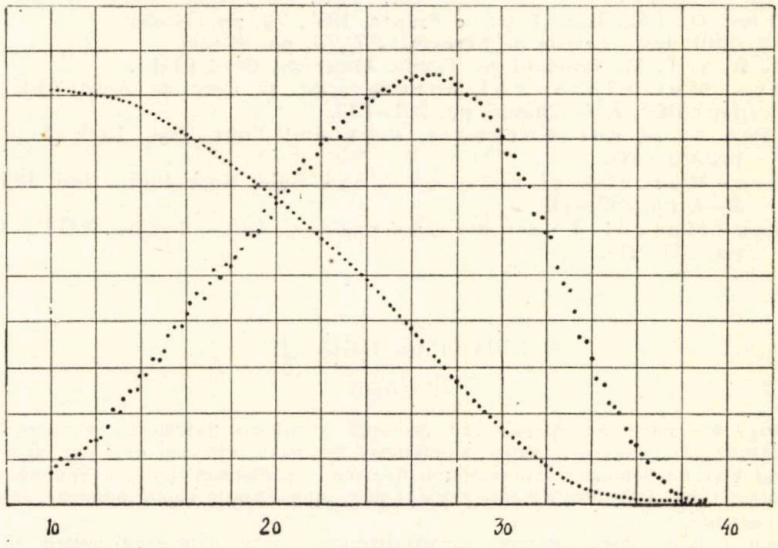


Fig. 5

on the recording tape. Fig. 3 schematically shows the electrical equipment, and the cyclogram of the apparatus is shown in Fig. 4. In Fig. 5 we see the curves drawn with this fibrograph.

5. Conclusion

1. This apparatus *directly draws both characteristics curves* regarding cotton fibers length, *the frequency distribution curve*, according to the number of fibers and *the cummulated frequencies curves*.

2. The results obtained are *reproductible*, the accuracy with which this instrument works, being thus manifest. This precision is particularly due to sorting fibers according to the pri cipale on which the fibrometer works that offers *the least degree of dispersion* compared with other methods known till now.

3 The process of drawing the curves is *automatized*, time of testing (including preparation of samples for sorting) taking aprox. 15 minutes (homogenized cotton).

4. Since the apparatus draws the two curves for the cotton fibers length, the work of assessing characteristics is facilitated and new posibilities are offered to interpret them.

5. In comparison with similar instruments presently available, the Fibrograph Type „L" shows *more simplicity* of construction being easily handled and adjusted.

Polytechnic Institute, Jassy
Depts. of Machine Details
and of Textile Technology

LITERATURE

1. Kukin G., *Studiul teoretic al materialelor fibroase*, Buc, 1949, IDT, (transl. from Russian).
2. Lutz C. et Cuvelier G., Bul. Inst. Text. de France, 1955, *51*, pp. 23—43.
3. Cuvelier G., Bull. Inst. Text. de France, 1957, *70*, pp. 33—53.
4. *** Bull. Inst. Textile de France, 1957, *70*, pp. 85—99.
5. *** A. S. T. M. Standard on Textile Materials, Oct., 1954.
6. Ionescu-Muscel I. şi colaboratori, St. şi Cerc. Şt. Acad. RPR., Filiala Iaşi, 1956, **7**, *1*, Chimie, pp. 201—213.
7. Hanganu V. şi colaboratori, Bulet. Inst. Polit. Iaşi, 1956, **2** (**6**), *3—4*, pp. 432—438.
8. Ionescu-Muscel I. şi colaboratori, Bulet. Inst. Polit. Iaşi, 1956, **2** (**6**), *3—4*, pp. 439—448.
9. Ionescu-Muscel I. şi colaboratori, Ind. Textilă ASIT, 1956, *8*, pp. 273—277.

ФИБРОГРАФ ТИПА „L"

(Резюме)

Дается описание аппарата, при помощи которого наносятся непосредственно характеристические кривые длины хлопковых волокон, кривая частоты волокон по длине (рис. 1 а), на основе числа волокон из отсортированных групп и кривая кумулятивных частот (рис. 1 в). Эти кривые служат для определения характеристик, зависящих от длины хлопка.

Процесс получения кривых автоматизирован, продолжается около 15 минут (гомогенизированное испытание), причем он отличается более высокой точностью и более простой конструкцией, чем известные до настоящего времени аппараты.

FIBROGRAFUL TIP „L"

(Rezumat)

Se prezintă un aparat cu ajutorul căruia se trasează direct curbele caracteristice, privind lungimea fibrelor de bumbac, curba de frecvenţă a fibrelor după lungime (fig. 1 a), bazată pe numărul de fibre din grupele sortate şi curba frecvenţelor cumulate (fig. 1 b). Cu ajutorul lor se determină caracteristicile dependente de lungimea bumbacului.

Procesul de obţinere a curbelor este automatizat, durata-circa 15 minute (probă omogenizată), precizia mai mare şi construcţia mai simplă ca la aparatele cunoscute pînă în prezent.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

ИЗ ИСТОРИИ РУМЫНСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

(Связи между румынскими, русскими и советскими математиками)

А. Н. ГЛИВИЧ

В январе 1957 года исполнилось 60 лет со дня образования Румынского Математического Общества. В течении этого времени Общество проделало большой путь развития и стало организацией, которая охватывает практически всех творчески работающих румынских математиков. Особенно больших успехов достигло Общество в народно-демократической Румынии, когда оно стало работать в содружестве с математическими обществами других демократических стран, в частности, с математическими обществами Советского Союза. В настоящее время существует тесный контакт между румынскими и советскими учеными в различных областях математики, что благотворно влияет на развитие математических наук как в одной, так и в другой стране.

Настоящая статья содержит обзор некоторых главнейших фактов истории Румынского Математического Общества и данных о научных связях между румынскими и русскими и советскими математиками.

Румынское Математическое Общество возникло на базе Инженерного общества. Последнее было организовано в 1881 году. В число его членов вошли и представители других наук: физики, химии и математики [1]. Среди членов инженерного общества находились наиболее крупные в то время математики, такие как Спиру Харет, Гр. Цицейка и др. С течением времени, когда число специалистов различных отраслей науки настолько выросло, что могло уже образовать самостоятельные коллективы, из инженерного общества выделились вначале физики и химики, а затем и математики (1894 г.), образовав под руководством профессора Бухарестского Университета К. Гогу общество **Друзья математических наук**, явившееся прообразом будущего Румынского Математического Общества. Целями образованного общества были: 1) улучшение преподавания математических дисциплин в средней школе и 2) углубление знаний в области математики самих членов общества. Спустя три года, общество **Друзья математических наук** объединилось с обществом физиков и химиков в одно общество под названием **Научное Бухарестское Общество** с тремя секциями: физики и химии, математики и естествознания. Это объединение произошло в январе месяце 1897 года. С этого времени начал издаваться бюллетень научного общества, в котором печатался материал по секциям. Так было положено налало Румынского Математического Общества, которое за 60 лет своего существования подняло высоко математическую культуру в своей стране, заняв почетное место среди математических коллективов других стран. С 1903 года **Научное Бухарестское Общество** стало называться **Румынское Научное Общество**, т.к. оно стало объединять не только представителей Бухареста, но и других городов Румынии. Отдельный бюллетень математической секции Общества начал издаваться с 1923 года [2]. В связи с реформой всех научных учреждений в Румынии (1948 г.) [3], бюллетеню было дано другое название: **Studii şi cercetări matematice** (математические труды и исследования).

Условия исторического развития румынского народа не создавали необходимых предпосылок для более раннего появления научных обществ. Научно-педагогические коллективы математиков стали формироваться только в первой половине 19 века когда стали работать: *Clasul de inginerie şi de hotărnicie.* (Инженерная школа, основанная Г. Асаки, Яссы, в 1813 г.) [4] и с 1835 года—*Academia Mihăileană* (Михайловская Академия

в тех же Яссах. Подготовка математиков в Румынии начинается только когда были открыты румынские университеты: в Яссах с 1860 года и в Бухаресте с 1864 года. Однако до конца 19 века математиков-специалистов было подготовлено еще очень мало. До 1892 года математический факультет в Бухаресте закончило 31 человек, а математический факультет в Яссах — 13 человек [5], [6]. Отдельные румынские математики были известны своими работами и до организации Общества. Среди них наибольших результатов добились Ем. Бакалоглу [7], [8] (1830 — 1891) и Ясский самоучка Н. С. Ботез [9]. Бакалоглу в существующей литературе упоминается как первый румын-физик и математик, занимавшийся серьезно не только педагогической, но и научно-исследовательской работой. В 1856 году Бакалоглу получает научную командировку в Лейпциг, где занимается математикой, физикой и химией, затем, в 1857 г., едет в Париж где специализируется по физике. В 1859 году Бакалоглу возвращается в Лейпциг и с этого времени начинает публиковать оригинальные работы по математике, физике и химии в заграничных журналах. По предложению Терраччини (1935) именем Бакалоглу названа выведенная им одна из формул кривизны поверхности [8]. Бакалоглу примечателен еще и тем, что он первый пытался организовать математическое общество в Румынии (в 1862 году и в 1868 году), но его попытки успеха не имели. С одной стороны, не было еще достаточно количества математиков, с другой стороны — предложенный им статут общества был весьма строг: член общества обязан был каждые три месяца представлять на заседание общества работу, в противном случае он автоматически выбывал из членов общества: за четыре отсутствия на заседаниях общества, член общества также подвергался исключению.

Н. С. Ботез известен в мировой литературе некоторым вкладом в изучение гармонического ряда, судя по представлению сделанному Е. Каталаном в Бельгийской Академии Наук [10], [11].

Необходимо упомянуть еще Спиру Харета, Константина Гогу и Давида Эммануеля, оказавших большое влияние на развитие математики в Румынии.

Спиру Харет (1853 — 1912) — первый румын, который защитил докторскую диссертацию в Париже (1878 года) на тему: „О неизменяемости больших осей планетных орбит", перед коммиссией состоящей из Пюизе, Брио и Байо. Помимо научной деятельности в Бухарестском университете, где он занимал кафедру теоретической механики, Спиру Харет ведет большую работу по организации образования в Румынии, где он несколько раз занимал пост министра просвещения.

Давид Эммануель (1854—1941) защитил докторскую диссертацию в Париже в 1879 году (Вторая диссертация, защищенная румыном в Париже). Тема его диссертации была: Об абелевых интегралах третьего порядка. Вернувшись на родину Д. Эммануель посвятил себя исключительно подготовке будущих математиков и инженеров, работая профессором в Бухарестском университете и в Школе мостов и дорог. Его выдающееся педагогическое мастерство и любовь к математике, которую он прививал молодежи в течение 50 лет, получили высокую оценку румынской научной общественности. Д. Эммануель написал ряд учебников для высшей школы, в том числе курс Теории функций, в двух томах, опубликованный в 1924 году [12].

Константин Гогу (1854—1897) защитил докторскую диссертацию в Париже в 1882 г. по небесной механике. Полученные результаты были опубликованы в мемуарах Лондонского королевского общества по астрономии в 1885 году. Некоторые его результаты цитируются в известном труде по небесной механике Тиссерана, а также и в [13]. На родине К. Гогу был профессором аналитической геометрии Бухарестского университета.

В первые же годы существования математического общества определяется круг математических проблем, на исследование которых направляются усилия большинства членов общества.

Одним из основных научных направлений сразу же становятся исследования по дифференциальной и проективной геометрии. Исходным пунктом этих исследований явилась докторская диссертация Гр. Цицейка (1873—1939): „О циклических конгруенциях и трижды сопряженных системах" [14], защищенная им 1899 году в Париже и выполненная под руководством Г. Дарбу.

Второе, не менее значительное направление образовали работы по теории аналитических функций, берущие свое начало от Д. Помпейю (1873—1954). Последний, получив научную подготовку в Париже, под руководством Пуанкаре, достиг многочисленных научных результатов, получивших международное признание. В частности,

им в 1912 году было введено и исследовано понятие производной по области (derivata areolară [15]) оказавшееся необычайно плодотворным в теории аналитических функций, геометрии и теории уравнений с частными производными.

Наряду с этими двумя направлениями, с начала 20-го века развертываются исследования по теории дифференциальных и интегральных уравнений. Они были начаты учеником Пикара, Тр. Лалеску (1882—1929) [16] и превратились в одно из главных для Румынского Математического Общества направлений, вокруг которого в течение всей истории общества группируется часть его лучших сил [17].

Начиная с 20-х годов число членов Общества заметно выросло. Само общество настолько окрепло, что смогло организовать у себя в стране математические съезды [1]), принять активное участие в международных конгрессах, приглашать видных математиков для чтения лекций и докладов и т. д. [18].

Расширение международных связей оказало большое влияние на изменение характера научной деятельности членов общества. Она стала гораздо более разносторонней. В течение 30-40 лет появляются исследования по топологии (С. Стоилов), алгебре и теории групп (Гр. Моисил, Д. Барбилиан), по математической логике (Гр. Моисил), теории вероятностей (О. Онический, Г. Михок). Особенно большие размеры и многообразные формы приняло научное сотрудничество и связи румынских математиков с математиками Советского Союза. Благотворное влияние этих связей очевидно. Они сложились как неотъемлемая часть экономических, политических, общекультурных и научных связей румынского народа и народов Советского Союза.

Связи румынских математиков с русскими математиками существуют с давних времен, несмотря на искусственные преграды буржуазно-помещичьего режима.

На территории Румынии, с 14 в. существовали два феодальных княжества: Валахия и Молдова, попавшие вскоре под турецкое иго, продолжавшееся до 1859 года.

В 1859 году эти княжества, добившись, благодаря помощи России, автономии от Турции, объединились в единое государство, называвшееся с 1861 года Румынией. Имеются данные, что еще в 17 в. русская культура начала проникать в румынские княжества. Некоторые из этих данных, относящиеся к истории математики, мы и приведем ниже. Профессор ясского университета К. Климеску один из организаторов первого румынского математического (а также и физ.—хим.) журнала, выходящего в г. Яссы (1883—1888 гг. [4]) пишет [19], что в 1642 году, в Яссах была организована академия по образцу Киевской Академии, основанной митрополитом Петром Могила (рум. Петру Мовилэ), куда были приглашены преподаватели из Киева.

В этой Академии обучался известный румынский книжник XVIII в., Николай Милеску (1625—1708), который по политическим соображениям был вынужден покинуть Молдову и уехать за границу. Долгое время он жил в России, в Москве, где написал на славянском языке **Трактат по арифмологии** (1673) — по отзыву П. Сержеску, [20], настоящую математическую, религиозную и философскую энциклопедию.

В организованных академиях (в 1678 г. в Бухаресте открывается Академия Ш. Кантакузино) преподавание велось вначале на славянском и латинском языках, затем на греческом и с конца 18 в. на французском языке. К концу XVIII в. в княжествах все настойчивее и настойчивее раздаются голоса об открытии национальных школ, где румыны могли бы получать образование на своем родном языке. К этому времени появляются уже рукописи и математические книги на румынском языке.

Первая школа, с преподаванием исключительно на румынском языке была открыта в 1803 году, в Соколах, близ Ясс [19]. В связи с открытием школы с преподаванием на румынском языке, академии, где преподавание велось на иностранных языках стали терять свое значение и вскоре прекратили свое существование.

Большие изменения политического порядка произошли в румынских княжествах после войны между Россией и Турцией в 1828—1829 г. г. С этого времени и навсегда румынские княжества избавляются от турецкого ига. В качестве протектора, Россия составила для обоих княжеств первую Конституцию так называемый Регуламентул Органик. Эта конституция составлялась специальной коммиссией, в которую вошли представители обоих княжеств [21]. Секретарем коммиссии был известный румынский ученый математик того времени Георгий Асаки (1788—1869).

---

1) Всего было организовано четыре съезда: 1929—Клуж, 1932—Турну-Северин, 1937 — Бухарест, 1956 — Бухарест. В 1927 г. Рум. Мат. Общество провело первую научную конференцию за которой последовала вторая, в 1945 г.

В регуламенте особое место было отведено общему образованию в княжествах и в частности математике.

Было создано 4 типа школ [18]: начальная школа с 4-х годичным сроком обучения, средняя четырехгодичная школа, дополнительная средняя школа и инженерная школа в Яссах с трехгодичным сроком обучения.

В инженерной школе на первом курсе преподавались тригонометрия, основы топографии и высшая алгебра, на втором курсе — дифференциальное исчисление и геодезия, на третьем курсе — механика и архитектура. Г. Асаки был назначен первым директором инженерной школы и преподавал в ней математику.

Созданная конституция вошла в жизнь в Валахии в 1831 году, в Молдове в 1832 году и сыграла положительную роль в деле поднятия культурного уровня в обоих княжествах.

Вот что пишет И. Ионеску (1870–1946), занимавшийся вопросом истории развития математики в Румынии на протяжении всей своей жизни [22] „Русский протекторат над обоими княжествами" имел хорошее влияние на развитие образования в „княжествах". „Регуламентул Органик был составлен в связи с действительными нуждами нашей страны". И дальше, он продолжает: „Регуламентул Органик свидетельствует о том с какой заботой был составлен отдел, касающийся образования и поднятия культуры в нашей стране" [23].

В 1835 году по настоянию Г. Асаки в Яссах открывается высшая школа, так называемая: **Academia Mihăileană** (Михайловская Академия), преобразованная в 1860 г. в Ясский университет.

Среди первых преподавателей математики, кроме Г. Асаки, В. Фабияна и др. встречаем имя русского майора Сингурова, читавшего курс лекций по прикладной метематике [24].

Более тесная связь между румынскими и русскими математиками начинает устанавливаться вскоре после организации математического общества. Ярче всего эта связь проявилась в научной деятельности таких ведущих румынских математиков как Гр. Цицейка, Д. Помпейю и др.

Как было отмечено выше, математические интересы Цицейка сформировались в период его пребывания в Париже (1895—1900), где он обучался в **l'École Normale Supérieure** под руководством замечательного французского математика Дарбу (1824—1917), члена Парижской Академии Наук с 1884 года и члена-корреспондента Петербургской Академии Наук с 1895 года. Влияние идей Дарбу сказывалось не только на работах Цицейка, но и на работах известных математиков других стран. В частности Д. Ф. Егоров, в своей работе **„Une classe nouvelle de surfaces algébriques qui admettent une déformation continue en restant algébrique** [25] ", неоднократно ссылается на работы Дарбу. Эта общность научной проблематики и одновременность работы определили естественно взаймное значение работ Д. Ф. Егорова и Цицейки, атмосферу творческого соревнования между ними. Работа Д. Ф. Еровова **„Une classe nouvelle de surfaces"** [26] была изучена Цицейка и результатом этого исследования явилась его работа: **„Sur la deformation continue des surfaces"** в которой он, говоря, что часть результатов Егорова была им найдена и опубликована в **C. R. Paris, t 128, p. 1276**, в 1899 году, ставит более обшую задачу: отыскать поверхности, которые при непрерывной деформации допускают неизменяющуюся сопряженную сеть. Цицейка находит такие поверхности из тетраэдральных поверхностей:

$$x = A(u+a)^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}},\ y = B(u+b)^{\frac{3}{2}}(v+b)^{\frac{3}{2}},\ z = C(u+c)^{\frac{3}{2}}(v+c)^{\frac{3}{2}},$$

с помощью преобразований Петерсона [27].

Другие работы Цицейка по теории поверхностей также тематически близки к работам виднейших представителей Московской дифференциально-геометрической школы Д. Ф. Егорова и К. Петерсона.

Эта тематическая близость румынских и русских математиков более ярко проявляется в других областях математики, в частности в области теории аналитических функций.

Долгое время математики считали неопровержимым фактом, что однозначная функция, имеющая в некоторой области множество особых точек, является разрывной на этих точках, но тем не менее доказательство этого утверждения искали и в 1905

году Людовик Зоретти, дал доказательство этого утверждения, оказавшееся в последствии неверным. Д. Помпейю опроверг это утверждение; он построил аналитическую, однозначную функцию, непрерывную на множестве её особых точек [28].

Рассмотрим прямоугольник R и удалим из этого прямоугольника точки, образующие область R_1 в виде креста, таким образом, чтобы оставшаяся область представляла собой 4 отдельных прямоугольника, расположенных в углах первоначального прямоугольника R. С каждым полученным прямоугольником сделаем то же самое и т. д. Если сумма $\sigma = \sum_1^\infty \alpha_k$ площадей удаленных областей R_k будет меньше площади α прямоугольника R, то совокупность E оставшихся точек $\zeta = \xi + i\eta$ имеет как площадь число $\alpha - \sigma$. Затем, обозначим через $z = x + iy$ точки, которые не принадлежат совокупности E и через $w = u + iv$ произвольную точку из прямоугольника R (которая может принадлежать E, а может и не принадлежать E). Определим в R произвольную, непрерывную функцию $\varphi(u, v)$; можно предположить, что $\varphi(u, v)$ действительная и положительная функция. Рассмотрим двойной интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_{(R)} \frac{[(u-x)-i(v-y)]\varphi}{[(u-x)^2+(v-y)^2]}\,du\,dv,$$

взятый по площади прямоугольника R; его можно записать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{\varphi(w)}{(w-z)}\,d\omega,$$

обозначив через $d\omega$ элемент площади и через w афикс центра тяхести элемента $d\omega$.

Из этого интеграла вычтем последовательно интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(R_k)} \frac{\varphi(w)}{(w-z)}\,d\omega, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

взятые по области R_k, и обозначим через $F(z)$ эту разность,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{\varphi(w)}{w-z}\,d\omega - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(R_k)} \frac{\varphi(w)}{w-z}\,d\omega.$$

$F(z)$ и есть искомая аналитическая функция, она непрерывна на всей плоскости, её особые точки принадлежат совокупности E. Функция $F(z)$ непрерывна также и в этих точках.

Это открытие Помпейю заинтересовало таких математиков как А. Данжуа, Ж. В. Линдберга, П. Пенлеве, С. Стоилова [29], а среди русских математиков В. С. Федорова, В. В. Голубева, П. Урысона.

В своей диссертации В. В. Голубев [30] неоднократно упоминает о работах Помпейю. Во введении В. В. Голубев говорит, что работ, в которых авторы пытались разрешить вопросы общего характера о функциях имеющих совершенные множества особых точек, весьма не много и эти работы написаны главным образом в связи с вопросами аналитической теории дифференциальных уравнений. Достаточно упомянуть работы Пенлеве, Зоретти, Помпейю, Данжуа.

В. В. Голубев отмечает, что Помпейю первый построил пример аналитической функции, всюду непрерывной и имеющей совершенное множество особых точек, когда множество особых точек имеет площадь отличную от нуля.

В некоторых местах своей работы [30] В. В. Голубев делает ссылки на работы Помпейю, в других местах критикует недостаточно математически строгое обоснование доказательств Помпейю. Говоря, что на характер поведения функции влияют характеристики размеров множества, Голубев подчеркивает, что мысль о влиянии меры множества на поведение функции впервые встречается в работе Помпейю [28], который исходя из неё получил ряд интересных результатов, доказательство которых, говорит Голубев, оставляет желать лучшего. Далее он говорит, что Помпейю первый стал при-

менять для построения функций с совершенным множеством особых точек интеграл Лебега. На основании работы Помпейю, Голубев доказывает, что $F(z)$ в области L может быть представлена интегралом, распространенным по L и голоморфной в области L функции. Большой интерес в то время представляло построение ограниченных функций с совершенным всюду прерывным множеством особых точек. Помпейю в своей диссертации, говорит Голубев, первый пытался построить такие функции, при помощи определенных интегралов, но его доказательства не были строгими. Строгое доказательство построения таких функций дал Данжуа [31]. По этому же вопросу П. С. Урысон [32] также упоминает о диссертации Помпеию.

Свою работу Урысон начинает следующими словами: „В примере Помпейю [32, стр. 93], [33] аналитической фунюции $f(z)$, всюду непрерывной, равной нулю на бесконечности и имеющей особыми точками точки совершенного влолне разрывного множества P, множество P имеет положительную меру. Существование функции с аналогичными свойствами, но со множеством P меры нуль утверждалось Данжуа [31.]

Лузин и Меньшов доказали [2], что следуя методу построения, указанному Данжра, мы действительно получили функцию имеющую требуемые свойства.“ „Все эти примеры крайне сложны, говорит Урысон, и доказательство утверждаемых фактов требует длинных и иногда довольно утомительных вычислений“.

Статья Урысона посвящена построению более простого примера такой функции.

Урысон, очевидно, хорошо знал и работы Лалеску, т. к. в своей работе О единственности решения линейных интегральных уравнений Вольтерра [32, стр. 78], [33], он полемизирует с утверждением Тр. Лалеску, высказанным в работе *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Paris, 1912), что решение уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x)$$

существует и оно имеет „одно единственное решение являющееся конечным“.

Объектом совместного труда румынских и советских математиков явилось также и введенное в 1912—1913 г. г. Д. Помпейю понятие производной по области (derivata areolară). Помпейю ввел его в следующей форме [34]:

Если $f(z)$ есть функция от комплексной переменной, непрерывная в области D без того чтобы быть голоморфной, то интеграл Коши

$$\int f(z)\,dz$$

на замкнутом и спрямляемом контуре C не равен нулю. В этом случае производная по области функции $f(z)$ в точке z_0 представляется как предел

$$\lim \frac{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz}{\displaystyle\iint_\delta d\omega} = \frac{Df}{D\omega} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

когда контур γ стягивается к точке z_0, а δ — область ограниченная кривой γ.

Помпейю и ряд математиков, которые занимались свойствами этого оператора, ограничились случаем когда функция

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$$

допускает частные производные первого порядка непрерывные в области D, когда производная по области существует, непрерывна и имеет выражение:

$$\frac{Df}{D\omega} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|.$$

---

2) Доказательство не было опубликовано.

Румынские математики М. Николеску и Г. Кэлугэряну, в своих докторских диссертациях [34], [35] выявили ряд свойств „производной по области" [36].

В 1930 году Гр. Моисил [37] расширил понятие „производной по области" на пространство со многими измерениями. Мысль о расширении этого понятия у него возникла, как он сам отмечает, в связи с чтением мемуара Иваненко и Никольского [38], которые установили связь между уравнениями Дирака для волновой механики электрона и уравнениями Коши-Римана для голоморфных функций. Теория приложений производной по области была развита Н. Теодореску в 1931 году, в его докторской диссертации, защищенной в Париже [39]. Он показал важность этого понятия для математической физики, заменив в некоторых задачах уравнения в частных производных, уравнениями с производной по области. Понятие производной по области привлекло внимание многих зарубежных ученых. В. С. Федоров опубликовал ряд работ о производной по области, обобщая результаты Помпейю, Теодореску и Гр. Моисила. Между прочим он изучил выражение вида

$$I(L)=\int_L Pdx + Qiy$$

на множестве E замкнутых кривых L, ориентированных в односвязной области A [40]. Ссылаясь на работы Д. Помпейю и Н. Теодореску, послужившие в его исследованиях отправным пунктом, В. С. Федоров подробно исследует производную по области и подтверждает исключительную важность, с функциональной точки зрения, теории производной по области.

В 1952 году акад. И. Н. Векуа, исследовал [41] эллиптическую систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g,$$

(где функции a, b, c, d, f, g непрерывны в области D) с линейным условием $\alpha u+\beta v= \gamma$ на контуре C. Векуа записывает вышеприведенную систему в виде;

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U} + F$$

и, толкуя U в смысле производной по области, находит ряд результатов

В 1953 году советский математик А. В. Бицадзе использовал расширенное понятие „производной по области" в изучении проблемы связанной с эластичными пластинками [42]. Исследования теории и приложений производной по области продолжаются и в настоящее время как румынскими, так и советскими математиками, работающими в тесном контакте.

Примеров отражающих интерес румынских математиков к достижениям русских математиков дозольно много. Например, в 1925 году А. Анжелеску занимается многочленами Чебышева. Работу Анжелеску „О некоторых многочленах Чебышева" [43] предстанил Румынскому Математическому Обществу П. Сержеску. Анжелеску указывает, что если даны $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ положительны, $\lambda_1 a_1^i f(a_1) + \lambda_2 a_2^i f(a_2) + \ldots + \lambda_p a_p^i f(a_p) = 0$, (где $i=0, 1, 2 \ldots (n-1)$, тогда $f(x)$ имеет по меньшей мере n действительных корней, содержащихся в интервале $a_k\ a_{k+1}$. Много члены Чебышева $P_n(x)$, определенные соотношениями, записанными выше, где заменяется f через P_n, имеют все действительные корни. Используя формулы из механических квадратур, Анжелеску показывает, что корни $P_n=0$, определены корнями многочлена $P_{n-1}=0$ и многочлена $Q_n(x) = 0$, где

$$Q_n(x) = \sum \lambda_k \frac{[P_n(x) - P_n(a_k)]}{x - a_k}.$$

В 1929 году Ал. Миллер [44], а затем и Д. Хулубей, продолжая свои работы, кристаллизованные отчасти в замечательных спецкурсах систематически проводимых из года в год в Ясском Университете [46], [47], также занимаются многочленами Чебышева. В 1943 году Г. Кэлугэряну пишет работу: „Особенности однозначных аналитических функций и многочлены Чебышева" [48].

В 1932 году Д. Манжерон в своей докторской диссертации [49], [50] и в ряде последующих работ посвященных новым видам краевых задач для уравнений в частных производных с действительными кратными характеристиками [51], вида, если остановиться лишь на самом простом но все же важном и интересном случае уравнения, $U_{xxyy} - (\lambda A + p) U = 0$, $U=0$ на границе **FR** прямоугольника **R** со сторонами параллельными координатным осям использует известные численно-теоретические результаты русского математика Г. Ф. Вороного, в то время как недавно проведенный доклад Манжерона на IV Съезде румынских математиков [52] заинтересовал акад. АН СССР И. Н. Векуа, а его предыдущие работы послужили основой многочисленных докторских диссертаций зарубежных ученых, как, напр., М. Сальвадори, Ф. Манарези, Г. Стампаккия и др.

В этой же обширной области математического анализа Д. Манжерон впервые использует методы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [53], а К. Якоби А. Климеску, соответственно, многочисленные работы С. Н. Чаплыгина [54] и С. Н. Бернштейна, В. Л. Гончарова, А. Г. Куроша [55]...[57], вовлечённые и эти путём в целый ряд последующих исследований различных румынских и зарубежных авторов.

Ранние докторские диссертации Веры Е. Миллер-Лебедевой [58] и А. Миллера [59], посвященные интегральным уравнениям, многогранно развиваемым в свое время школой Д. Гильберта, наряду с более новыми работами С. Василаке [52, стр. 2`8-9] служат и теперь источником работ молодых поколений.

Работы профессора Ясского политехнического института по теоретической механике Д. Манжерона заинтересовали проф. Ростовского на Дону Института железнодорожного транспорта Я. С. Зильбермана и послужили поводом некоторых новых работ Зильбермана и А. И. Ясюлёниса, а в РНР Н. Манолеску, В. Манафу, К. Дрэган и др.

В 1935 году, впервые в румынском журнале печатается статья советского математика Н. Н. Лузина: **Quelques remarques sur les courbes qui sont des complémentaires analytiques** [17].

Вскоре после этого начали налаживаться некоторые формы непосредственной связи между Румынским Математическим Обществом и математическими обществами и научными организациями Советского Союза.

По инициативе профессоров Ясского университета Ал. Миллера и В. Е. Миллер-Лебедевой, библиотека Ясского математического семинара начала получать, первая в Румынии, советскую математическую литературу задолго до второй мировой войны.

Некоторые заседания Ясского математического семинара были посвящены работам русских и советских математиков. Сетями Чебышева занимались Ал. Миллер, О. Майер, С. Крянга, Г. Георгиев, М. Хаймович, И. Попа, И. Крянга, А. Хаймович.

В работе Ясского семинара были использованы гометрические исследования Д. М. Синцова, В. Р. Кагана, С. П. Фиников а, Я. С. Дубнова, С. С. Бюшгенса и др. Одновременно исследования румынских математиков в области геометрии заинтересовали советских математиков. Результаты полученные А. Миллером и О. Майером были использованы в 1934 г. А. Широковым, а работы по биаксиальной геометрии были использованы А. П. Норден. В настоящее время деятельность Ясского семинара тесно связана с Советской математической школой [60].

В развитии Бухарестской школы теории вероятностей большую роль сыграли достижения русских и советских математиков. Работы А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, В. Н. Романовского послужили исходным пунктом для многих работ румынских математиков.

В 1939 году Г. Михок и О. Ониеску издали курс теории вероятностей, в котором излагают результаты полученные русской и советской школой в области теории вероятностей. Почти половина книги посвящена цепям Маркова. Кроме открытий П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, в этом курсе говорится о результатах А. Н. Колгоморова, А. Я. Хинчина, В. И. Романовского [61].

Мирон Николеску [62], профессор Бухарестского университета, член Академии Наук РНР, говорит, что он еще в 1936 году в своей монографиз использовал исследования Н. И. Мусхелишвили, относящиеся к решению бигармонической плоской задачи. В 1938 году он распространил идею наилучшего приближения многочленами по Чебышеву, к некоторым семействам функций, а в 1941 году применил разультаты А. А. Ляпунова и Н. М. Гюнтера из теории потенциала для решения задачи Лауричелла.

В 1936 году Румынское Математическое Общество начинает обмениваться изданиями с математическими обществами Томска и Киева, а с 1939 года — с Москвой и Ленинградом. С 1944 года непосредственная связь между румынскими и советскими математиками развивается особенно широко [62].

В 1952 году Московское Математическое Общество получило все номера бюллетеня Румынского Математического Общества начиная с 1923 года, т. е. с момента выхода в свет отдельного бюллетеня секции математики Румынского Научного Общества. Одновременно библиотека Московского Математического Общества получает журнал „**Gazeta Matematică şi Fizică**“, являющийся также органом Румынского Математического Общества.

Кроме этого, в 1952 году, в марте месяце, в библиотеку Московского Математического Общества поступили все номера журнала „**Mathematica**“, издававшийся с 1929 года при Клужском университете.

В настоящее время в библиотеку Мовсковского Математического Общества поступают: 1) **Comunicările Academiei R. P. R., Bucureşti** (Сообщения Румынской Академии Наук, с 1951 г.) ; 2) **Studii şi cercetări Matematice, Acad. R. P. R. Bucureşti** (Труды и исследования, с 1952 г.); 3) **Buletin ştiinţific, Acad. R. P. R. Bucureşti** (Научный бюллетень, с 1951 г.); 4) **Revista Universităţii „C. I. Parhon“, Bucureşti** (Журнал университета им. К. И. Пархона, с 1952 г.) ; 5) **Revista Universităţii „Al. I. Cuza„ şi a Institutului Politehnic din Iaşi** (Журнал университета „Ал. И. Куза“ и Политехнического Института, Яссы, с 1954 г.); 6) **Gazeta Matematică şi Fizică** (Газета Математика и Физика); 7) **Analele ştiinţifice ale Universităţii din Iaşi** (Научные записки Ясского университета, старейший вузовский журнал Румынии, начавший выходить в свет с 1900 г.) ; 8) **Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi** (Известия Ясского политехнического института, с 1946 г., единственный в своем роде втузовский журнал, непрестанно привлекающий к сотрудничеству на его страницах, наряду с талантливой молодежью, множество советских и других зарубежных академиков и учёных мирового размаха)[4] и д. т.

Взамен в Румынскую Народную Республику направляются различные математические журналы и труды математических обществ Советского Союза.

Истекший, 1956 год принес новые факты, свидетельствующие об укреплении дружбы и сотрудничества румынских и советских математиков. 27-го мая-4-го июня, в Бухаресте состоялся четвертый конгресс румынских математиков [52], в котором приняли участие делегации семнадцати стран, а также и делегация Советского Союза, возглавленная членом-корреспондентом Академии Наук СССР, профессором И. Н. Векуа.

В работе третьего всесоюзного математического съезда состоящегося в июне-июле 1956 года в Москве, участвовала многочисленная делегация румынских математиков, в которую входили председатель Румынского Математического Общества Гр. Моисил, С. Стоилов, Г. Врынчану, Н. Теодореску и ряд других видных математиков Румынии.

Свое 60-ти летие Румынское Математическое Общество встречает в расцвете творческих сил, в напряженной работе на благо своего народа, в сплоченном единстве с математиками Советского Союза.

Заканчивая эту статью, представляющую собою расширенный вариант [64], оказывается возможным наметить пути углубления изучения новых граней, молодой, но уже весьма богатой идеями и плодотворными связями с русской и советской математической школой как и со школами других стран, истории математики РНР[5], полностью

---

4) Предполагается изложить в одной из последующих работ развитие румынских периодических изданий посвященных высшей математике, начиная, соответственно, с уже цитированных.

5) Имеющей своими вехами журнал „**Recreaţii Ştiinţifice**“ (Яссы, 1883 — 1888 гг) и первую оригинальную работу румынского инженера Д. Асаки, сына уже известного учёного и школьного деятеля Г. Асаки [63].

согласуясь с намеченными путями углубления научного сотрудничества и в области историко-математических исследований, высказанных в секции истории математики III Всесоюзного математического съезда в Москве (июнь—июль 1956 г.), такими авторитетами как акад. УССР Б. В. Гнеденко [65] или же проф. К. А. Рыбников А. П. Юшкевич, С. Я. Яновская и др. [66], [67]. Так, напр., в следующих исследованиях можно будет углубить данные и взаимосвязи касающиеся математических обществ РНР, или же математических секций научных обществ РНР, куда входит, в частности, Ясское научное общество, публикующее с 1900 г. известный научный журнал Научные Записки Ясского университета, имеющие ясно поставленные солидные вехи в статье акад. А. Миллера, проф. д-ра И. Попа и проф. д-ра Д. Манжерона [19].

Поступило 1 X 1957 г.

МГУ, им., „М. В. Ломоносова“,
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ionescu I., Gaz. Mat., **27**, 1931, 225-234.
2. * * * Bul St Mat. pure şi apl., 1923, 1-2.
3. Stoilov S., Gaz. Mat. şi Fiz., s. A., *8-9*, 1954, 341-347.
4. Calistru C., Chelarescu Al., Corlăţeanu V., Fărcaş Toma, Mangeron D., Ungureanu Gh., Bul. Inst. Polit. Iaşi, **1** (5), *1-2*, 1955, 547-555.
5. Bedreag C., Gaz. Mat. şi Fiz., **7**, s. A., 1953, 303-308.
6. Myller A., Rev. St. „V. Adamachi“, Iaşi, **4**, *1*, 1913, 1-4.
7. Bacaloglu E, Z. Math. Phys., 1859, 312-314.
8. * * * Bul. St. Mat. pure şi apl., 1925, 35-36.
9. Myller A., Gaz. Mat. **40**, *8*, 1935, 337-348.
10. Catalan E., Bull. Acad. Sci. Bruxelles, **34**, 1872.
11. Botesu N. St., *Proprietatea seriei armonice cu utilitatea ei ştiinţifică cercetată, dis-vălită şi demonstrată prin Analisa elementare*, Iaşi, 1872.
12. Myller A., Analele Acad. Romîne, Mem. Secţ St., (3), 16, mem. 21, 1941, 969-973; Studii şi Cercetări Şt. Acad. R. P. R., **1**, *2*, 1950, 1-15; Natura, **19**, 1930, 8-9.
13. Encyklopädie d. Math. Wiss., VI, 716.
14. Ţiţeica G. Ann. Ec. Norm. Sup., **16**, 1899.
15. Pompeiu D., Rend. Circ. Mat. Palermo, **33**, 1912.
16. Sergescu P., Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **31**, 1931.
17. — *Le développement des sciences mathématiques en Roumanie*, Buc., 1937, 17—22.
18. Cîmpan Fl., An. Acad. R P.R., **3**, mem. 30.
19. Myller A., Popa I, Mangeron D., *Istoricul matematicii la romîni*. Manuscris, elaborat din însărcinarea Institutului de Matematică al Acad. R.P.R., pentru Marea Enciclopedie Sovietică, Iaşi, 1950.
20. Sergescu P., Bull. du Comité Intern. Sci. hist., **19**, 1933
21. Livescu J., Studii şi Cerc. Şt., Iaşi, **1**, 1950, 1-24.
22. Buicliu G., Gaz. Mat. şi Fiz., **9**, 1955.
23. Ionescu I., Gaz. Mat, **21**, 1915.
24. Parteni C., Andreescu I., Congresul AGIR, Iaşi, 1936.
25. Egoroff D., C. r. Acad. Sci., Paris, **132**, 1901, 302-304.
26. — Ibidem, 1100-1102.
27. Creangă I., Wiss. Z. Univ. Greifswald, **6**, *3—4*, 1956/75, 141—143.
28. Pompeiu D. Ann. Sci. Univ. Toulouse, **7**, 1905.
29. Moisil Gr., Gaz. Mat. şi Fiz., s. A., *9*, 1953.
30. Голубев В. В., Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, Москва, 1916.
31. Denjoy A., C. r. Acad. Sci. Paris., **149**, 258.
32. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, М., 1951.
33. — Bull. Acad. Polonaise Sci. lettres, s. A., 1922, 57 — 62.
34. Nicolescu M., *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace*, Paris, 1923
35. Călugăreanu G., *Sur les fonctions polygènes*, Paris, 1928.
36. Teodorescu N., Gaz. Mat. şi Fiz., s. A., **6**, *8—9*, 1954.
37. Moisil Gr. C., C. r. Acad. Sci. Paris, **191**, 1930.

38. Iwanenko D., Nikolski C., J. Math. u. Phys., **63**, 1930, 129.
39. Teodorescu N., *La dérivée aréolaire et ses applications physiques*, Paris, 1931.
40. Федоров В. С., Мат. Сборн., **24**, 1949.
41. Векуа И. Н, Мат. Сборн., **31**, 1952.
42. Бицадзе А. В., ДАН СССР, **93**, *3*, 1953 ; **93**, *4*, 1953.
43. Angelescu A., Bul. Soc. Mat. Romîne, 1926.
44. Myller A., *Lista lucrărilor ştiinţifice*, Sem. Mat. Univ. Iaşi, 1935.
45. Hulubei D., Mathematica, Cluj, **2**, 1929, 109 — 112.
46. Myller A, Rev. St. „V. Adamachi", **21**, 1935, 3 — 9.
47. Popa I., Rev. St. „V. Adamachi", **21**, *2—3*, 1935, 1—2.
48. Călugăreanu G., Mathematica, Cluj, **19**, 1943, 139 — 147.
49. Mangeron D., Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, (4), **11**, 1932, 1 — 11.
50. — Giornale di mat., **71**, 1933, 1 — 51.
51. — Mathematica, Cluj, **14**, 1938, 31 — 35.
52. * * * Четвертый Конгресс Румынских Математиков, Доклады, I, Бухарест, 1956, стр. 205—208.
53. Mangeron D., Bull. Inst. Polyt. Jassy, **1**, *2*, 1946, 62 — 66.
54. Iacob Caius, *Introducere matematică în Mecanica fluidelor*. Ed. Acad. RPR, 1952, 838 pp.
55. Climescu Al. C., Ann. Sci. Univ. Jassy, **28**, *1*, 1942, 31—138.
56. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, **2** (**6**), *3—4*, 1956, 1—7.
57. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, **2** (**6**), *1—2*, 1956, 9—12.
58. Myller — Lebedev V. E., *Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwickelungen*. Inaugural Dissertation, Göttingen, 1906, 1 — 48.
59. Myller A., *Gevöhnliche Differentialgleichungen*. Inaugural Dissertation, Göttingen, 1906, 1 - 35.
60. Haimovici A., Gaz. Mat. şi Fizică, s. A., **6**, *8—9*, 1954.
61. Mihoc Gh., Gaz. Mat. şi Fiz., **6**, *8—9*, s. A., 1954.
62. Nicolescu Miron., Gaz. Mat. şi Fiz., s. A., **6**, *8—9*, 1954, 38.
63. Popa I., Însemnări ieşene, **4**, *2*, 4 pp.
64. Гливич А. Н., Историко-математические исследования, вып. 11, под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, Физматиздат, М., 1958, стр. 563—582.
65. Гнеденко Б. В., Ibidem, стр. 47—72.
66. Рыбников К. А., Ibidem, стр. 219—224.
67. Башмакова И. Г., Рыбников К. А., Юшкевич А. П., Яновская С.Я., Ibidem, стр. 185— 192.

SULLA STORIA DELLA SOCIETÀ ROMENA DI MATEMATICHE I LEGAMI TRA I MATEMATICI ROMENI, RUSSI E SOVIETICI

(Sunto)

L'A., svolgendo la Sua attività scientifica nel seno della vasta e florida Scuola di Storia delle Matematiche presso l'Università „M. V. Lomonosov" di Mosca, sintetizza una larga serie di dati concernenti la storia della Società Romena di Matematiche, all'occasione del suo sessantesimo compleanno (1897-1957) ed insiste in modo particolare sui promettenti legami del passato come pure sulla cospicua collaborazione odierna che si sviluppa rigogliosamente tra i matematici romeni ed i matematici russi e sovietici.

L'articolo si chiude con la formulazione di una serie di problemi che ne costituiranno il soggetto dei lavori futuri dell'A., che corrispondono tanto allo spirito delle comunicazioni recenti [65], [66], [67] esposti durante il III-o Congresso Unionale dei matematici (Giugno-Luglio 1956, Mosca), quanto alle linee fondamentali tracciate sull'argomento nel competente lavoro [19] concernente la Storia delle Matematiche nella Repubblica Popolare Romena.

DIN ISTORIA SOCIETĂŢII ROMÎNE DE MATEMATICI LEGĂTURILE DINTRE MATEMATICIENII ROMÎNI, RUŞI ŞI SOVIETICI

(Rezumat)

Autorul, lucrînd în cadrul vastei şi înfloritoarei şcoli de Istoria Matematicii ce-şi desfăşoară activitatea creatoare la Universitatea „M. V. Lomonosov" din Moscova, sintetizează o largă serie de date relative la Istoria Societăţii Romîne de Matematici, insistînd în deosebi asupra legăturilor promiţătoare din trecut şi deosebit de fructuoase astăzi, dintre matematicienii romîni, ruşi şi sovietici.

Articolul, scris cu ocazia împlinirii a 60 de ani de la înfiinţarea Societăţii, astăzi puternica şi bogata *Societate de Matematică şi Fizică din R. P. R.* (1897–1957), se încheie cu problematica unei serii de lucrări viitoare, interesînd, în particular dezvoltarea, periodicelor matematice (precum şi a acelor care inserează sistematic articole de matematici) romîneşti, schiţată în spiritul recentelor comunicări făcute la cel de al III-lea Congres Unional al matematicienilor (Moscova, iunie–iulie 1956) [65], [66], [67] şi jalonată după competenta şi clara succinta prezentare a istoriei matematicii romîneşti făcută în [19].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1—2, 1958

621-231

VIAŢA ACADEMICĂ INTERNAŢIONALĂ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

SCIENTIFIC INTERNATIONAL LIFE

A DOUA CONFERINŢĂ UNIONALĂ CONSACRATĂ PROBLEMELOR FUNDAMENTALE DE TEORIA MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR

(Moscova, 24 — 28 martie 1958)

DE

D. MANGERON şi RADU BOGDAN

Lucrările făuritoare de drumuri noi în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor datorite genialului matematician şi mecanician rus P. L. Cebîşev, îmbinîndu-se în mod fericit cu lucrările ulterioare ale corifeilor mecanicii ruse, reliefate atît de pregnant în cunoscuta carte recentă a prof. I. L. Gheronimus, precum şi cu remarcabila contribuţie a oamenilor de ştiinţă din alte ţări, ca, de pildă, Poncelet, Willis, Burmester, Releaux, Resal, Darboux, Mannheim, König, Poincaré ş. a., au constituit o bază solidă pentru noua şi înfloritoare disciplină la care şi-au dat aportul ulterior printr-o serie de cercetări adînci L. V. Assur şi „părintele aviaţiei ruse" N. E. Jukovski. Aceste lucrări au pus fundamentul unei şcoli strălucite sovietice de teoria mecanismelor şi maşinilor, care, disputîndu-şi cu succes întîietatea cu vechea şcoală germană, a ajuns într-un ritm rapid, ce nu este posibil de conceput decît în orînduirea socialistă, o şcoală de anvergură mondială, cu prestigiu şi autoritate incontestabile, astăzi în plină înflorire şi dezvoltare, caracterizată prin cultivarea multilaterală, unică în felul ei, a teoriei şi prin introducerea consecventă a acesteia în practică.

În lumina acestor fapte, subliniate strălucit şi convingător de acad. I. I. Artobolevski, precum şi de totalitatea reprezentanţilor de seamă din alte ţări, prezenţi la cea de a II-a Conferinţă Unională consacrată problemelor fundamentale de teoria mecanismelor şi maşinilor, şi-a deschis fructuoasele sale lucrări conferinţa.

Atmosfera, deosebit de propice pentru lucru, similară întru totul acelei, descrisă cu căldură şi convingere de numeroşi participanţi străini la Congresul Unional de Matematici din iunie 1955 de la Moscova, a contribuit din plin la făurirea legăturilor de colaborare ştiinţifică, de cunoaştere reciprocă, a permis adîncirea schimbului de experienţă, de idei şi de procedee experimentale. Înainte de a sublinia succint conţinutul bogat în rezultate deosebit de promiţătoare al conferinţei, nu se poate trece cu vederea un fapt ce-l credem inegalabil, remarcat de ansamblul celor aproape două mii de participanţi la şedinţele plenare. Este vorba de incomparabila energie creatoare şi competenţa multilaterală a preşedintelui comitetului de organizare, acad. I. I. Artobolevski, care a reuşit să participe activ la discuţii în cadrul bogatei totalităţi de manifestări ştiinţifico-tehnice asociate conferinţei.

Mai mult decît atît, acad. I. I. Artobolevski şi-a găsit întotdeauna timpul necesar să fie prezent în calitate de gazdă la toate conferinţele şi comunicările ţinute de spe-

ialiştii din alte ţări, antrenînd la discuţii, subliniind aportul şi anvergura ideilor de fond ale comunicărilor, indicînd căi eventuale de dezvoltare ulterioară multilaterală. Dacă la aceasta se mai adaugă şi faptul că atît d-sa cît şi Olga Nikolaevna Artobolevskaia au reuşit să permanentizeze ba chiar şi să amplifice atmosfera îmbregnată de calda şi delicata atenţie, din timpul lucrărilor propriu zise ale conferinţei, la restul variatelor şi bogatelor manifestări cultural-artistice asociate acestei perioade de lucru intens, a căror diapazon a variat începînd cu vizita şi îndelungatele convorbiri de neuitat cu tovarăşii muncitori de la uzina automată de rulmenţi „S. Ordjonikidze" şi terminînd cu participări la manifestaţii cu răsunet internaţional, desfăşurate simultan la Moscova, legate de marele şi binecunoscutul concurs muzical pentru tineretul lumii sau de decada artei gruzine sau de vizita la celebra expoziţie agricolă unională, în plină pregătire pentru sezonul de vară.

În cadrul deschiderii lucrărilor plenarei inaugurale a conferinţei, soldată printr-un volum în pregătire, consacrat lucrărilor ei precum şi printr-un volum dedicat rezultatelor celei de a doua consfătuiri unionale de teoria mecanismelor şi maşinilor, de sub redacţia acad. I. I. Artobolevski şi conţinînd concluziile lucrărilor desfăşurate în cadrul celor cinci secţii (secţia de *Analiza şi sinteza mecanismelor*, preşedinte, prof. dr. N. I. Levitski, secţia de *Dinamica maşinilor*, preşedinte, prof. dr. A. E. Kobrinski, secţia de *Teoria preciziei în construcţia de maşini şi aparate*, preşedinte, prof. dr G. G. Baranov, secţia de *Teoria maşinilor cu acţiune automată*, preşedinte, prof. dr. S. I. Artobolevski, secţia de *Teoria transmisiei în maşini*, preşedinte, prof. dr. V. A. Gavrilenko), descrisă de acad. I. I. Artoboleski şi prof. dr. A. P. Bessonov, inimosul şi competentul secretar ştiinţific al conferinţei, în cel de al doilea volum menţionat, se subliniază vasta participare activă (89 de conferinţe generale, referate şi comunicări) precum şi o largă prezenţă a specialiştilor din mai toate, atît de numeroase centre de studii şi cercetări din URSS şi din ţările de democraţie populară.

Plenara este consacrată marilor referate de sinteză ştiinţifică prezentate de: acad I. P. Bardin, vice-preşedinte al Academiei de ştiinţe a URSS (Problema de automatizare şi de mecanizare a producţiei), acad. A. A. Blagonravov, director al Institutului de maşini (Rolul teoriei maşinilor în problema automatizării proceselor de producţie), acad. I. I. Artobolevski (Starea actuală a teoriei mecanismelor şi maşinilor), acad. N. G. Bruevici (Tendinţele de bază în dezvoltarea construcţiei de maşini şi aparate), prof. dr. W. Lichtencheldt (Starea actuală a teoriei mecanismelor şi a maşinilor în RDG), prof. dr. D. Mangeron (Studii, cercetări şi perspective de dezvoltare a teoriei mecanismelor şi a maşinilor în Republica Populară Romînă, elaborat în colaborare cu conf. ing. Radu Bogdan, Director adjunct ştiinţific al Institutului de Mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei RPR). Urmează apoi adresele de salut, oferite conferinţei de către delegaţiile ţărilor participante.

În imposibilitate de a reproduce aici fie chiar şi succint conţinutul adînc al referatelor menţionate, se subliniază rolul diriguitor al referatului acad. I. I. Artobolevski, axat pe sarcina celei de a doua conferinţe unionale de TMM de a discuta rezultatele concrete, obţinute de oamenii de ştiinţă sovietici, din ţările de democraţie populară şi din toate celelalte ţări în domeniul acestei discipline fundamentale în perioada dintre cele două conferinţe (1954 — 1958), se atrage atenţia asupra marii răspunderi ce incumbă cercetătorilor din scumpa noastră patrie de a promova şi adînci multilateral studii de teoria mecanismelor şi maşinilor, deosebit de apreciate în toate fazele de desfăşurare ale conferinţei prin rezultatele elaborate pînă acum (în cadrul marelui referat al acad. I. I. Artobolevski realizările şcolii de TMM din R.P.R. sînt situate în locul al treilea, imediat după marile şcoli sovietică şi germană; în rapoartele preşedinţilor primilor două secţii citate, prezentate plenarei de închidere şi soldate prin aprobarea unanimă, sînt consacrate pasagii întregi lucrărilor susţinute la conferinţă de colectivele D. Mangeron, C. Drăgan şi R. Bogdan, Cr. Pelecudi, subliniindu-se interesul, importanţa şi noile căi ce se deschid în cadrul sintezei mecanismelor sau în acel al construirii transductorilor electromecanici, de aceste teme elaborate, iar bibliografia folosită de diferiţi specialişti sovietici pentru elaborarea lucrărilor expuse la conferinţă cuprinde, în afară de lucrările oamenilor de ştiinţă romîni deja citate şi lucrările recente ale lui O. Munteanu, E. Bugaevski, V. Svijevski ş. a.)

În vederea acestui din urmă fapt, de deosebită importanţă în cadrul ansamblului de eforturi menite a realiza cît mai repede cu putinţă fundamentalul proces de auto-

matizare a uzinelor și fabricilor din țara noastră, se transcrie în cele ce urmează hotărîrea plenarei de închidere, cristalizată în temele ce urmează, în jurul cărora trebuie concentrate eforturile imediate în domeniul teoriei mecanismelor și mașinilor:

1. Sistematizarea mecanismelor în vederea problemelor de sinteză a lor. 2. Dezvoltarea metodelor de sinteză a mecanismelor cu dispozitive hidraulice, pneumatice, foto-electronice. 3. Dezvoltarea metodelor de sinteză a mecanismelor plane cu cuple inferioare și elaborarea datelor informative menite să ușureze aplicarea unor atari metode. 4. Elaborarea metodelor de sinteză a mecanismelor spațiale. 5. Dezvoltarea teoriei mecanismelor cu came și a mecanismelor cu came și pîrghii și stabilirea schemelor raționale de prelucrare a profilelor. 6. Dezvoltarea metodelor de sinteză a mecanismelor plane cu cuple inferioare și elaborarea datelor informative menite a ușura aplicarea unor atari metode. 7. Elaborarea metodelor de studiu dinamic a mecanismelor spațiale. 8. Elaborarea metodelor de studiu dinamic a agregatelor de mașini și sisteme electromecanice concepute ca sisteme unice cu unul sau mai multe grade de libertate. 9. Elaborarea metodelor de studiu dinamic a mecanismelor cu organe elastice și jocuri mari în cuple cinematice. 10. Dezvoltarea lucrărilor de studiu a celor mai însemnate caracteristice dinamice a proceselor de lucru și a agregatelor de mașini. 11. Elaborarea bazelor științifice de sinteză a schemelor de mașini și aparate menite să asigure o precizie dată. 12. Dezvoltarea ulterioară a problemelor de precizie dinamică și de calculul de precizie a ansamblelor de mașini și aparate. 13. Elaborarea problemelor de precizie în teoria de proiectare a automatelor și a liniilor automate precum și în teoria proceselor de lucru. Studiul și generalizarea experienței de funcționare a liniilor automate existente și elaborarea problemelor de precizie a controlului automat în condițiile întreprinderilor automatizate. 14. Elaborarea ulterioară a problemelor de precizie dinamică a circuitelor electrice și electronice din sistemele automate, îndeosebi în cazul circuitelor cu impulsuri, semiconductori și parametri distribuiți. 15. Dezvoltarea teoriei de productivitate a mașinilor automate, ținîndu-se seamă de noi și perfecționate procese de lucru. 16. Elaborarea cu ajutorul mașinilor matematice a teoriei de conducere automată a mașinilor și a agregatelor lor. 17. Elaborarea teoriei noilor sisteme de automatizare cifrică, din care fac parte în particular sistemele de autoacordare și de calcul prealabil. 18. Dezvoltarea teoriei și a metodelor de proiectare a mecanismelor moderne și a dispozitivelor de reglare automată prevăzute cu organe rigide și cu dispozitive electronice, pneumatice, hidraulice și electrice. 19. Continuarea adîncirii teoriei și practicii noilor forme de angrenare din diferite domenii ale construcției de mașini. 20. Continuarea elaborării teoriei și perfecționarea metodelor de fabricație a roților conice, hipoidale și melcate. 21. Continuarea elaborării teoriei roților dințate necirculare precum și a metodelor lor de fabricație în calitate de prototipuri sau în număr restrîns.

Renunțînd la a da aici chiar și titlurile celor 16 conferințe și 7 comunicări ținute în cadrul secției de Analiză și sinteză a mecanismelor, a 12 conferințe și 10 comunicări prezentate la secția de Dinamica mașinilor și mecanismelor, la 10, respectiv, 11 și 17 lucrări expuse la celelalte trei secții avînd cercul de preocupări deja citat, ne propunem să dăm dezvoltarea cuvenită în două recenzii mai dezvoltate ce se vor publica cu un alt prilej, rapoartelor asupra rezultatelor lucrărilor primelor două secții, prezentate spre aprobare plenarei de închidere de către competenții specialiști N. I. Levitski și A. E. Kobrinski și publicate în volumul ITOGHI VTOROGO VSESOIUZNOGO SOVESCEANIA PO OSNOVNÎM PROBLEMAM TEORII MAȘIN I MEHANIZMOV (Institut Mașinovedenia AN SSSR, M., 1958, 51+33 pp.), apărut în momentul cînd această Notă a căpătat „bun de imprimat".

Amînarea publicării recenziilor menționate precum și extinderea eventuală a lor asupra conținutului referatelor și comunicărilor expuse în cadrul celorlalte trei secții de lucru din cadrul conferinței, se justifică pe deplin prin faptul că evaluarea importanței pentru știință și tehnică a rezultatelor scontate de fiecare lucrare prezentată, necesită, în afară de perspectivele de dezvoltare schițate, de interdependențe subliniate, de înrîuriri posibile în viitor, jalonate la conferință cu prilejul fructuoaselor și multilateralelor discuții purtate în secții, și elementul timp. În dorința vie de a împărtăși cercetătorilor din țara noastră o viziune de ansamblu cît mai completă a multiplelor probleme de anvergură legate de teoria mecanismelor și a mașinilor și deci și de totalitatea proceselor de automatizare de mîine, este prin urmare firesc să acordăm în rîndurile ce urmează, maximum de atenție conferinței generale elaborată de acad. I. I.

Artobolevski, consacrată trecerii în revistă a stării actuale a acestei discipline fundamentale. Îmbrăţişînd într-o sinteză pătrunzătoare ansamblul realizărilor din ultimii patru ani în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor obţinute ca rezultat al eforturilor oamenilor de ştiinţă de pe întregul glob pămîntesc, cristalizate în articole de revistă, înserate în numeroase publicaţii de specialitate şi recenzate, între altele, în ultimii doi ani, într-o revistă de bibliografie cu caracter internaţional, MECHANISMS, unica în felul său, destinată exclusiv referatelor asupra lucrărilor din cadrul acestei discipline, academ. I. I. Artobolevski a reuşit pe deplin să lumineze orizontul relativ la posibilităţile de dezvoltare actuală ale acestei ştiinţe. A reieşit totodată, cu o claritate remarcabilă, rolul ştiinţei sovietice, reprezentată prin I. I. Artobolevski, G. G. Baranov, V. V. Dobrovolski, V. V. Egorov, S. N. Kojevnikov, N. I. Merţalov, D. S. Tavhelidze precum şi prin alţi conducători de şcoli aflate într-o înflorire promiţătoare. S-a văzut limpede că vasta gamă de succese realizate de ştiinţa şi tehnica sovietică în cei aproape patru ani scurşi de la prima conferinţă Unională de TMM este caracterizată, după cum s-a observat şi se observă necontenit şi pentru alte domenii, printr-un ritm de dezvoltare deosebit de rapid, caracteristic ţărilor care construiesc socialismul. Ajunge să se citeze, în cadrul ansamblului de realizări uriaşe cu totul recente în care TMM a jucat şi joacă un rol de frunte, trecerea în mod strălucit a celui mai greu examen ştiinţific al tuturor timpurilor, exteriorizat, prin apariţia pe firmamentul ceresc, la 4 octombrie 1957, a celui dintîi satelit artificial al Pămîntului, lansat dintr-un punct al teritoriului URSS. Ajunge să se reamintească faptul că cel de al treilea satelit artificial sovietic, constituind un adevărat institut de calcul modern, furnizează omenirii fără încetare date preţioase ce se acumulează fructuos în cadrul Anului Geofizic Internaţional.

În acelaşi timp diferite colective de specialişti, printre care sînt numeroşi cercetători în domeniul TMM, ce se cultivă insistent şi strălucit de decenii, avînd la bază bogata tradiţie de cercetare ştiinţifică deja menţionată, în paginile renumitei reviste, unică în lume, TRUDÎ SEMINARA PO TEORII MEHANIZMOV I MAŞIN, publicată sub redacţia acad. I. I. Artobolevski, elaborează fără încetare studii noi menite să ducă la *realizarea celorlalte două viteze cosmice* şi la făurirea sistemelor planetare artificiale de mîine. Ajunge să se menţioneze succesele de lansare a rachetelor balistice, realizări de puternice avioane turboreactoare şi reactive, creări de noi tipuri de maşini şi aparate, deosebit de complexe, cristalizate în utilajul complet automatizat al fabricilor şi uzinelor etc. Acest larg diapazon de succese cu totul remarcabile, realizat printr-o conlucrare exemplară între reprezentanţii de seamă ai ştiinţelor teoretice şi minunata armată de practicieni, precum şi scontarea rezultatelor de mîine ce promit a fi şi mai strălucite, necesită permanenta şi entuziasta antrenare la cercetări profunde şi migăloase a matematicienilor, fizicienilor, mecanicienilor, metalurgiştilor, constructorilor de maşini, radiotehnicienilor, etc. etc. Înainte de a păşi la expunerea succintă a conţinutului conferinţei generale a acad. I. I. Artobolevski, ne permitem să subliniem înrîurirea la scară mondială a colaborării multilaterale, tradiţional practicată de cercetătorii sovietici din cele mai variate ramuri ale ştiinţei şi tehnicii. Exemplu al rolului mobilizator al conlucrării oamenilor de ştiinţă şi a tehnicienilor sovietici este reflectat în paginile fundamentalei reviste sovietice de bibliografie de specialitate cu caracter internaţional REFERATIVNÎI JURNAL ASTRONOMIA GHEODEZIA, *unica în lume* în felul său, editată, începînd cu 1953, de către Institutul de Informaţie ştiinţifică al Academiei de Ştiinţe a URSS. Pînă la lansarea de către URSS a celui dintîi satelit artificial al Pămîntului, ansamblul lucrărilor de specialitate de pe glob consacrate problemei comunicaţiilor interplanetare a putut fi cuprins într-o subdiviziune relativ redusă a revistei RJAG, ce îngloba referatele corespunzătoare, iar atare referate reflectau numeric faptul că în anii 1955 şi 1956, din totalitatea de circa 17000 lucrări publicate în lumea întreagă din domeniul astronomiei şi geodeziei, circa 1,8% erau dedicate acestei probleme. De îndată după lansarea cu succes la 4 octombrie 1957, a primului satelit artificial al Pămîntului, în RJAG s-a introdus, începînd cu nr. 1/1958, un capitol vast, întitulat *Comunicaţii interplanetare*, prevăzut cu subdiviziunile: 1. Probleme generale. Activitatea organizaţiilor. 2. Sateliţi artificiali ai Pămîntului, Rachete, Staţii interplanetare. 3. Probleme teoretice de astronavigaţie. Orbite ale vehiculelor interplanetare. 4. Probleme de biologie şi medicină, interesînd sborurile interplanetare, în care s-a reflectat pînă astăzi, mărginindu-ne şi aici numai la o simplă înregistrare numerică, un număr de referate

ce reprezintă 12% din totalitatea de circa 9000 lucrări publicate în intervalul de timp corespunzător, în comparație cu doar 4%, de referate relative la același domeniu din cele circa 10000 de lucrări, de astronomie și geodezie apărute în 1957 pe globul pămîntesc. Autorii acestei note vor fi fericiți să reușească de a împărtăși cercetătorilor din Republica noastră Populară, paralel cu schițarea unor domenii de cercetări ce le sînt deosebit de apropiate, din atmosfera celei de a doua Conferințe Unionale de TMM, catacterizată printr-o bună doză din acel entuziasm de admirat al oamenilor de știință sovietici, prin acea pasiune de a munci devenită tradiție, ce constituie însușirea care șade la obîrșia celor mai multe din lucrurile mari din lume.

Prima problemă pusă de conferința de TMM de la Moscova din 1954 consta în dezvoltarea metodelor de analiză și de sinteză cinematică și dinamică a mecanismelor plane și spațiale cu cuple inferioare și superioare.

Rezolvarea acestei probleme a fost căutată pe căi diferite.

În rezoluția celei dintîi conferințe de TMM s-a subliniat în mod deosebit necesitatea dezvoltării în cele mai variate direcții a problemelor de dinamica mașinilor și mecanismelor. Succesul deosebit al acestei recomandări este deosebit de vădit, dacă ne gîndim că în acest interval de timp s-a realizat prima serie de lucrări fundamentale ale colectivului condus de prof. dr. A. E. Kobrinski, din cadrul Institutului dirijat de acad. I. I. Artobolevski, cristalizată în reproducerea mișcărilor mîinii omenești prin folosirea dinamică a biocurenților. În literatura de popularizare a științei din țara noastră s-au scris de pe acum numeroase pasagii subliniind viitorul strălucit în aplicații al acestei îmbinări fericite între teorie și practică.

O altă categorie de preocupări importante ce se situiază în cadrul dinamicii mașinilor este fundamentala problemă a vibrațiilor, cristalizată în particular, în lucrările înserate în cunoscutul volum, apărut în editura AN SSSR și consacrat problemelor expuse la conferința din 1957 dedicată mecanicii și calculului mașinilor vibratoare.

Prima conferință a mai atras atenția și asupra necesității de a se dezvolta probleme de studiu experimental al mașinilor și mecanismelor. Atari probleme se expun astăzi, atrăgînd din ce în ce mai mulți cercetători, în URSS, într-un număr de reviste de specialitate, ca, de pildă, IZMERITELNAIA TEHNIKA, PRIBOROSTROIENIE, ZAVODSKAIA LABORATORIA și VESTNIK MAȘINOSTROIENIA, iar multe articole de seamă apărute în alte țări și relative la această ordine de idei se publică fără întîrziere în cunoscuta revistă MAȘINOSTROIENIE, editată de editura pentru literatură străină (IL). Aici se situiază și un număr de cărți consacrate problemelor de tehnica, măsurii, ca, de pildă, cunoscuta carte a lui I. I. Ioriș și numeroase fascicule din mult apreciata serie TRUDÎ INSTITUTA MAȘINOVEDENIA, SEMINAR PO TEORII MAȘIN I MEHANIZMOV, ca, de pildă, fasc. 59 (1955) și 61 (1957). Aici se situiază și adîncirea studiului folosirii diferiților transductori, cristalizată, în ceea ce privește cercetarea metodelor de măsură a mărimilor mecanice prin metode electrice, în cunoscuta carte a lui A. M. Turicin, apărută în 1954 în GOSENERGOIZDAT și, mai recent, în volumul consacrat aplicațiilor tehnice a transductorilor de sîrmă, redactat de A. M. Turicin și P. V. Noviţki, apărut în 1957 în aceeași editură, sau de C. C. Perry și H. L. Lissner, în 1955, în editura McGrow-Hill.

Lucrarea prof. dr. N. P. Raevski, înserată în fasc. 66 din TSTMM deja citată, consacrată problemelor de măsură a acceleraţiilor maximale, va servi fără îndoială în viitor și ca bază de studii experimentale relative la acceleraţii de ordin superior, a căror importanță se vădește astăzi în numeroase probleme de tehnică înaltă.

Probleme de structură și de clasificare a mecanismelor s-au studiat în acest interval de timp fiind considerate drept cale de găsire a metodelor de analiză și sinteză a lor. În această ordine de idei lucrările cercetătorilor sovietici, romîni și polonezi au elaborat diferite probleme de structură dezvoltînd ulterior grupurile lui Assur sau analoagele lor, pe cînd studiile cercetătorilor germani s-au bazat în deosebi pe ideile lui Grübler și Alt. Rezultate deosebit de extinse s-au obținut în perioada 1954–1958 în domeniul sintezei mecanismelor plane.

Metodele algebrice, bazate pe ideile lui Cebîșev și pe utilizarea numeroaselor procedee cristalizate astăzi într-un număr de tratate bine cunoscute de interpolare a funcțiilor, au fost folosite de numeroși cercetători sovietici la rezolvarea variatelor probleme de reproducere aproximativă a legilor de mișcare date. Metoda algebrică condusă în paralel cu folosirea ecuațiilor de sinteză transcrise sub forma complexă a

fost studiată în deosebi de unii cercetători germani din colectivul prof. dr. R. Beyer încă din perioada conferinţei de TMM din Stuttgart (1953)[1].

O dezvoltare deosebit de largă au căpătat metodele de sinteză a mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare bazate pe ideile lui L. Burmester şi H. Alt. Ele şi-au găsit expresia într-o serie de lucrări prezentate atît la congresul din 1957 de TMM de la Aachen, cît şi, cu totul recent la acel din Dresden (1958).

Au apărut puţine lucrări consacrate analizei şi sintezei mecanismelor malteze, în schimb s-a acordat o atenţie deosebită problemelor de analiză şi sinteză a diferitelor mecanisme complexe constituite din roţi dinţate şi pîrghii.

Numeroase lucrări au apărut în cadrul analizei şi sintezei mecanismelor directoare rectilinii, seria mai restrînsă a unor atari probleme relative doar la mecanisme patrulatere articulate fiind cristalizată în 1955 într-o cunoscută carte a lui R. Kraus[2].

Ţinînd seama de istoria dezvoltării ştiinţelor matematice şi în particular a rolului jucat în aceasta de teoria şi practica curbelor plane şi spaţiale şi luînd în consideraţie importanţa reproducerii în tehnica modernă a unor trasee date, apare deosebit de interesantă seria de lucrări duse în continuare de acad. I. I Artobolevski, relative la făurirea mecanismelor menite a reproduce diferite curbe plane algebrice şi transcendente.

Cunoscutul volum, publicat în 1957 sub auspiciile VDI (Forschungsheft 461), este consacrat problemei importante de proiectare a mecanismelor pe baza valorilor extremale ale raportului de transmisie între organele conducător şi condus.

O înrîurire deosebită asupra dezvoltării teoriei mecanismelor spaţiale a avut-o prefaţa acad. I. I. Artobolevski la cunoscuta carte a lui F. M. Dimentberg, apărută la Moscova în Editura AN SSSR în 1950, prin care se sublinia faptul că „una dintre cele mai grele probleme de teoria mecanismelor spaţiale este problema determinării poziţiilor organelor, adică a configuraţiilor lanţurilor cinematice şi a mecanismelor". În această ordine de idei trebuie menţionată larga dezvoltare a metodelor de analiză a mecanismelor spaţiale. Gama vastă a unor atari metode include astăzi calculul virial, metode de algebră complexă a şuruburilor, metoda notaţiilor simbolice, dezvoltată în deosebi de şcoala prof. dr. R. S. Hartenberg şi J. Denavit de la Purdue University, metoda calculului matricial şi tensorial şi variate metode analitice elaborate în cadrul şcolilor conduse de prof. dr. R. Beyer şi F. Altmann.

Rezultate importante au fost obţinute în rezolvarea problemelor de sinteză a mecanismelor spaţiale cu cuple inferioare, reprezentate în deosebi de lucrările şcolilor prof. dr. N. I. Levitski şi V. A. Zinoviev.

Rezultate de seamă s-au obţinut în studiul mecanismelor cu came. Avînd în vedere faptul că atari mecanisme se folosesc pe cale largă în maşini automate menite să reproducă diferite legi de mişcare a organelor de lucru a mecanismelor de execuţie, numeroşi cercetători au acordat o atenţie deosebită analizei legilor de mişcare periodică a organelor de lucru precum şi a legăturii ce există între aceste legi, structura mecanismelor cu came şi geometria profilelor acestora. Este fundamentală în această ordine de idei cunoscuta monografie a prof. dr. N. I. Levitski, METODÎ RASCETA KULACIKOVÎH MEHANIZMOV, apărută în editura MAŞGHIZ în 1954, precum şi importanta monografie a prof. dr. H. A. Rothbart.

În cadrul lucrărilor de geometrie şi sinteză a mecanismelor dinţate trebuie citată în primul rînd cunoscuta teză de doctorat din 1954 a lui M. L. Novikov, expusă în detaliu în conferinţa generală a prof. dr. G. G. Baranov la cea de a doua Conferinţă Unională de TMM căreia îi sînt consacrate aceste rînduri. Bineînţeles că aici se grupează o vastă serie de lucrări legate de rezistenţa diferitelor tipuri de angrenări. Era însă firesc ca acad. I. I. Artobolevski să nu se oprească asupra acestor subiecte.

Puţine lucrări au fost consacrate în această perioadă de timp teoriei mecanismelor cu organe elastice.

Prima Conferinţă Unională de TMM a atras atenţia asupra necesităţii de a se adînci teoria mecanismelor prevăzute cu dispozitive hidraulice şi pneumatice. Aplicarea largă a unor atari dispozitive în mecanismele strungurilor moderne precum şi în cadrul

---

1) A se vedea recenziile **154** şi **155** din acest *Buletin*, **2** (**6**), *3—4*, 1956, pp. 589—590.

2) A se vedea recenzia **156** din acest *Buletin*, **2** (**6**), *3—4*, 1956, pp, 590—591.

liniilor automate a făcut ca să apară mai multe lucrări consacrate studiului și clasificării dispozitivelor pneumatice sau teoriei și calculului unor atari dispozitive interesînd cele mai variate categorii de strunguri.

La sfîrșitul conferinței sale generale, acad. I. I. Artobolevski subliniază și seria de probleme care nu și-au găsit rezolvarea din punct de vedere al TMM în intervalul de timp analizat. Unele din atari probleme și-au găsit soluții substanțiale în cadrul conferinței, altele au fost incluse în șirul de recomandări finale, deja citat. Asfel, în domeniul analizei mecanismelor nu s-a acordat destulă importanță evaluării comparative a proprietăților cinematice, dinamice și de precizie, a mecanismelor de structură diferită, însă îndeplinind aceeași funcție. Metodele de sinteză a mecanismelor se expun într-o formă prea generală, nefiind însoțite de materiale de calcul efectiv Lipsesc aproape cu desăvîrșire studii de sinteză a mecanismelor, ținîndu-se seamă de caracteristicele dinamice. Nu se elaborează probleme de cinetostatică a mecanismelor plane și spațiale, ținîndu-se seamă de formă reală efectivă ce trebuie dată organelor și cuplelor cinematice. Lipsesc studii de dinamică generală a mecanismelor spațiale. Se cere acordarea unei atenții speciale dispozitivelor hidropneumatice în mașini de lucru actuale. Lipsesc studii de dinamica agregatelor de mașini în cazuri de regim tranzitoriu, precum și din punct de vedere al sistemelor dinamice cu mai multe grade de libertate. O atenție deosebită trebuie acordată studiului cinematicii și dinamicii mecanismelor cu organe elastice și jocuri mari în cuple cinematice. Este indispensabilă atragerea colectivelor largi de specialiști din a'te domenii pentru a elabora teoria a cît mai numeroase procese de lucru menite a conduce la alegerea schemei cît mai raționale a proceselor tehnologice pentru a fi transpuse apoi în teoria mașinilor și agregatelor automate corespunzătoare, ținîndu-se seamă de bogatul arsenal de metode de analiză și sinteză de care dispune TMM.

Expunerea rezultatelor de mai sus dă indicații extrem de succinte asupra conținutului primei părți a conferinței generale a acad. I. I. Artobolevski, bazată pe sute de lucrări analizate și centrată pe linia generală a teoriei mașinilor și mecanismelor, considerată ca știință de temelie a oricărui inginer și constructor legat de probleme de calcul și proiectare a mecanismelor. Conferința citată deschide însă și o vastă dîră de lumină asupra perspectivelor măreție pînă mai ieri nebănuite, ce se întrevăd în calea teoriei mecanismelor în cele mai variate ramuri ce se cristalizează astăzi în jurul noilor discipline, întitulate: teoria mașinilor automate, teoria liniilor automate, teoria programării cifrice sau electronice, etc. etc. Fără îndoială că într-un viitor apropiat se vor stabili legături trainice între TMM și Cibernetică (a se vedea lucrările elevului acad. I. I. Artobolevski, A. E. Kobrinski, deja citate).

Trecerea în revistă a rezultatelor dobîndite în domeniul TMM în ultimii 4 ani, cristalizate în mai toate țările lumii în introducerea unor cursuri speciale de TMM nu numai în institutele tehnice de învățămînt superior, ci și în universități[3]), precum și în apariția sistematică a seriilor de cărți și uneori și de veritabile tratate consacrate acestei discipline centenare aflată într-o incomparabilă înflorire, permite să se tragă un număr de concluzii obiective.

Interesul adînc față de cercetarea problemelor de TMM s-a întins în toate centrele URSS și continuă să se dezvolte cu același avînt tradițional în Germania. TMM s-a născut și se dezvoltă rapid în Republica noastră Populară, în R P Polonia, în R P Bulgaria și în R P Ungaria. R P Chineză și R P D Coreeană pun acum bazele acestei discipline promovînd cadre de specialiști în acest domeniu și creind primele laboratoare corespunzătoare.

O atenție deosebită a început să se acorde în Statele Unite ale Americii studiului TMM, inexistent pînă mai ieri în această țară, luînd ca bază de inspirație strălucita gamă de rezultate ale școlilor sovietică și germană. Încep să apară din ce în ce mai numeroase, lucrări de TMM în Anglia, Franța, Jugoslavia și în alte țări.

În lumina datelor cristalizate în importanta lucrare de sinteză a acad. I. I. Artobolevski, consacrată dezvoltării TMM în ultimii patru ani în toate țările lumii, expusă la conferință, și ținînd seamă de primele succese înregistrate la noi în țară în acest domeniu de o fundamentală valoare în întregul proces de automatizare a fabricilor și uzinelor, colectivele noastre de specialiști pot și trebuie să abordeze sistematic, ca

[3]) Unul din manualele de TMM folosite la Universitatea „M. V. Lomonosov" din Moscova este un volum, redactat special pentru universități de acad. I. I. Artobolevski

urmare a unei consfătuiri ce se impune, seriile de probleme trasate de plenara de închidere a celei de a doua Conferinţe Unionale a TMM şi expuse în corpul acestei Note, pentru a asigura cît mai repede cu putinţă o dezvoltare a teoriei maşinilor, care să permită în anii imediat următori o ridicare cu totul substanţială a nivelului de construcţii de maşini prin folosirea pe scară largă a automatizării proceselor de producţie.

În această privinţă ajutorul şi imboldul competent şi preţios acordat de conferinţă, grefat şi pe stabilirea de legături şi contacte personale de preţuire inegalabilă, la care se adaugă fără încetare şi seria de legături înfiripate pe calea schimbului de publicaţii de specialitate cu oamenii de ştiinţă din URSS, ţările de democraţie populară, ţările care au scuturat recent jugul colonialist precum şi din alte ţări, este cel mai important factor în problema dezvoltării rapide şi fructuoase a teoriei actuale a mecanismelor şi maşini or.

Primit la redacţie 1 VI 1958

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme,
Academia R. P. R.,
Institutul de Mecanică Aplicată „Traian Vuia"
Bucureşti

II ВСЕСОЮЗНОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО ОСНОВНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН, МОСКВА, 24—28 МАРТА 1958

(Резюме)

Авторы излагают некоторые данные касающиеся богатого содержанием Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории Механизмов и Машин, замечательно организованного председателем Оргкомитета акад. И. И. Артоболевским.

Останавливаясь более детально на содержании глубоко синтетизирующего доклада акад. И. И. Артоболевского касающегося развития ТММ за промежуток времени истекшим между первым и вторым совещанием, авторы подчёркивают важную роль этого ведущего совещания, о котором уже восторженно отозвались за этот короткий период специалисты недавне проведенных совещаний по ТММ в Дрездене (ГДР) и в Purdue University (США), представляющего собою важнейший фактор в деле обеспечения быстрого и плодотворного развития современной теории механизмов и машин.

THE SECOND USSR CONFERENCE ON THE THEORY OF MACHINES AND MECHANISMS, MOSCOW, MARCH 24—28, 1958

(Summary)

The authors gives some details concerned the Second USSR Conference on the Theory of Machines and Mechanisms, organized by the Institute for Machine Technology, a part of the Academy of Science of the USSR.

Its excellent organization is to be attributed to prof. dr. I. I. Artobolevski, Fellow of the Academy of Sciences of the USSR. Its theme was „The Fundamental Problems in the Theory of Machines and Mechanisms", with a total of 89 papers. The conference was organized in five sections: Section I: The Analysis and Synthesis of Mechanisms (23 papers); Section II: Machine Dynamics (22 papers); Section III: Theory and Accuracy in Machine and Apparatus Construction (10 papers); Section IV: Theory of Automatic Machines (11 papers); Section V: Theory of Machine Drives (17 papers).

There was six general conferences.

The high standard level of papers as well as personal contacts between the participants will be of valuable help in the future researches concerning the Fundamental Problems in the Theory of Machines and Mechanisms in the whole world.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 1–2, 1958

Lista dizertaţiilor de candidat în ştiinţe tehnice susţinute la Institutul Politehnic din Iaşi

Перечень кандидатских диссертаций защищенных в Ясском политехническом институте

List of theses accepted for higher degrees in the last time in the Polytechnic Institute of Jassy

Nr. crt.	Titlul dizertaţiei	Specialitatea	Numele candidatului	Numele conducătorului ştiinţific
1	Valorificarea baritinei indigene pentru prepararea sărurilor de bariu	Tehnologia substanţelor anorganice	C. Branişte	Prof. dr. Mihai Dima
2	Cercetarea obţinerii de cărbuni activi din reziduuri industriale şi coji de nucă. Comportarea acestora în fenomenele de sorbţie.	Tehnologia substanţelor anorganice	V. Ababi	Prof. dr. Mihai Dima
3	Contribuţii la studiul valorificării coajei de salcie din R. P. R. ca material tanant.	Pielărie şi materii grase	Aglaia Chiriţă	Prof. dr. Gheorghe Alexa
4	Studiul tăbăcirii combinate formol-crom-tanin.	Pielărie şi materii grase	Gh. Chiriţă	Prof. dr. Gheorghe Alexa
5	Cercetări în direcţia fracţionării celulozei.	Celuloză şi hîrtie	Elena Calistru	Prof. dr. Cr. Simionescu
6	Cercetări de chimie aplicată în tehnologia hîrtiei.	Celuloză şi hîrtie	Emanuel Poppel	Prof. dr. Cr. Simionescu
7	Contribuţii la studiul prehidrolizei stufului.	Celuloză şi hîrtie	Dorel Feldman	Prof. dr. Cr. Simionescu

Nr. crt.	Titlul dizertației	Specialitatea	Numele candidatului	Numele conducătorului științific
8	Influența uzurii asupra caracteristicilor de pulverizare ale sistemului de injecție al motorului de tractor KD-35; mijloace pentru mărirea rezistenței la uzură a elementului de pompă de injecție.	Motoare cu combustie internă	Mircea Zugrăvel	Prof. dr. Emil Gaiginschi
9	Studiul carboximetilcelulozei și al aplicațiilor sale în domeniul industriei de hîrtie.	Celuloză și hîrtie	N. Asandei	Prof. dr. Cr. Simionescu

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul IV (VIII)

FASC. 3 – 4

1958

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. ATANASIU D., conf. GOLGOȚIU TIBERIU, prof. MANGERON D.
prof. MATEI ILIE, membru corespondent al Academiei R. P. R.

Redactor responsabil: prof. SIMIONESCU CRISTOFOR, membru corespondent al Academiei R. P. R.

Secretar: lector ROSMAN HUGO

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
TOMUL IV (VIII), fasc. 3—4 1958

SUMAR

	Pag.
EDITORIALE	XV
AL. CLIMESCU, O clasă de inegalităţi	1
ARLEN BROWN, Asupra echivalenţei absolute a proiecţiilor	5
AL. CLIMESCU, Rezolvarea unui sistem de ecuaţii funcţionale	7
D. B. SEARS, Soluţii cu pătrat integrabil ale unei ecuaţii cu derivate parţiale	11
V. M. STARJINSKI, Asupra stabilităţii mişcărilor periodice (I)	19
ARNOLD N. LOWAN, Stabilitatea „schemei implicite cu direcţie alternată" în două dimensiuni	69
D. MANGERON, Noi clase de funcţii legate de ecuaţii cu „derivate totale"	73
GEORGES BOURION, Asupra prezentării teoriei suprafeţelor minime	75
VIOREL MURGESCU, Proprietăţi conforme ale spaţiilor Riemann generalizate (I)	77
S. N. SLUGHIN, Metoda aproximaţiilor succesive într-un spaţiu aproape ordonat	81
N. M. BORODACEV, Asupra determinării soluţiei generale a problemei dinamice din teoria elasticităţii, pentru semispaţiu, în cazul simetriei axiale	85
N. IRIMICIUC, Metoda reducerii maselor în cazul mişcării generale a solidului cu masa variabilă	89
J. RAMAKANTH, Deformaţia finită a corpurilor compuse şi aelotropice (I)	93
MAURICE JANET, Asupra sistemelor dinamice cu două grade de libertate	103
ALFRED BRAIER, Metodă grafică pentru studiul sistemelor neliniare în planul de fază	107
S. G. RÎJANOV, Fisiunea asimetrică a nucleelor grele	113
N. CALINICENCO, C. RUSCIOR şi CORNELIA CIOBANU, Studiul eroziunii prin descărcări între electrozi metalici diferiţi	119
LEKH VIR SUD şi P. S. GILL, Măsurarea radioactivităţii artificiale în apele de ploaie de la Gulmarg	127

Pag.

IRINA MIHUL şi GH. TACU, Arc electric cu electrozi din sticlă . 129

C. CALISTRU şi CORNELIA LEONTE, Contribuţii asupra studiului echilibrului în procesul carbonatării saramurii amoniacale . 135

I. N. CIOCHINĂ, ŞT. IVĂŞCANU, NICOLETA CIUREANU şi M. MARCU, Contribuţiuni la studiul condiţiilor optime pentru obţinerea bicromatului de sodiu pe cale electrolitică . . 141

V. G. KAŞIRSKI, Piroliza prafului de lignit romînesc în curentul vaporilor de apă 147

CONSTANTIN BRANIŞTE, DAVID PERETZ şi SILVIA ŞERBAN, Comportarea peliculelor de vopsea pe bază de galben de crom-negru de fum, în protecţia oţelului 153

TEODOR SĂVEANU, I. IBĂNESCU şi RADU TUDOSE, Contribuţii la studiul căderii de presiune în coloane cu umplutură . . 161

M. MARINESCU, şi FLORIN VĂLU, Transmisia căldurii în schimbătoare de căldură cu serpentină pentru lichide 167

ILIE MATEI şi ELENA COCEA, Un nou produs de condensare a benzoinei cu *p*-aminofenol 175

T. S. WHEELER, Problema lotoflavinei 181

ELENA COCEA, Poliesteri borici 191

GH. LUPUŞOR, Condensarea 2,4′ - dinitroclorbenzenului cu acidul 4,4′ - diaminostilben - 2,2′ - disulfonic 197

CRISTOFOR SIMIONESCU, Asupra cîtorva rezultate obţinute în studiul tumorilor vegetale 203

GH. ALEXA, GH. CHIRIŢĂ şi AGLAIA CHIRIŢĂ, Asupra stabilirii calităţilor chimico-tehnologice ale extractului de lemn de stejar indigen obţinut prin extracţie simplă şi extracţie sulfitică . 217

C. STRUB, IRINA IAROŞINSCHI-DRABIC şi CORNELIA MAGA, Cîteva observaţii asupra extractului de coajă de brad *(Abies pectinata)* şi a aceluia de coajă de molid *(Picea excelsa)* . . . 229

MIŞILIM GRINDEA, RITA ZEIDMAN şi FLORIN VĂLU, Un aspect puţin cercetat al „carbonizării lînei". Influenţa sulfatului de sodiu 237

EMIL LUCA, V. PETRESCU, N. REUS şi ILEANA BUDĂI-MIHUL, Determinarea energiei consumate pe ciclu în cazul oscilaţiilor de relaxare 243

I. BEJAN, GH. ŞERBAN şi V. CORLĂŢEANU, Influenţa armonicilor pare asupra principalilor parametri ai amplificatoarelor magnetice cu înfăşurările de lucru legate în serie 253

GH. ILIESCU, D. BĂRBULESCU, GH SAVIN şi V. PETRESCU, Studiul vîscozităţii magnetice la oţelurile carbon, în funcţie de oboseală 259

HUGO ROSMAN, Cîteva probleme privind funcţionarea liniilor omogene în regim permanent, periodic, nearmonic. . . . 263

Pag.

V. I. BELEȚKI, Calculul dimensiunilor minime ale mecanismelor cu came avînd organul conducător în translație 271

D. MANGERON și CORNELIU DRĂGAN, Studiul problemelor de sinteză a mecanismelor cu came plane prin metoda tensorială . 275

D. MANGERON, CORNELIU DRĂGAN, N. IRIMICIUC și OCTAV MUNTEANU, Asupra metodelor grafo-analitice de studiu a mecanismelor spațiale 287

CORNELIU DRĂGAN, Aplicarea tensorilor de poziție la studiul unor probleme de sinteză a mecanismelor cu came spațiale . . 291

OCTAVIAN MUNTEANU și GH. TUDOR, Asupra mecanismelor patrulatere fără legături pasive în sensul Reșetov . . . 297

N. IRIMICIUC, Asupra unor aspecte grafice ale distribuției vitezelor și accelerațiilor punctelor unui solid rigid în mișcare generală . 303

N. IRIMICIUC și IZU KLEPPER, Determinarea pe cale grafică a poziției centrelor de greutate la corpuri oarecare . . . 305

VITALIE BELOUS, Relații analitice pentru calculul rezistenței totale la deplasare a unui lanț cu role, greu, pe un ghidaj curbiliniu vertical 307

GÉRARD d'ALBON, C. CIOBANU, DAN URSESCU și MARCEL GUTMAN, O îmbunătățire a supapelor 315

GÉRARD d'ALBON, I. VRABIE și DAN URSESCU, Studiu analitic referitor la influența scurtării cursei la mașinile alternative . 321

AURELIAN SIMIONESCU, Nomograme pentru calculul arderii turbelor în focarele cazanelor de abur 333

I. CURIEVICI, M. MARINESCU și FLORIN VĂLU, Cercetări experimentale asupra evaporării picăturilor unor solvenți organici . 337

O. N. SAVINOV, Calculul ramelor spațiale prin metoda aproximațiilor succesive 345

ANTON ȘESAN, Asupra reducerii numărului de necunoscute în metoda deformațiilor 353

ANTON ȘESAN, Folosirea „momentelor factoriale" la determinarea liniilor de influență a sistemelor static nedeterminate . . 359

M. DIACONU și N. PREDA, Comportarea secțiunilor cu pereți subțiri dublu T, cu tălpi inegale, în stadiul elasto-plastic . . 363

ANTON ȘESAN, Asupra formei unitare a metodei forțelor și deformațiilor 375

AUREL CERNĂTESCU, GH. DIMA, VIOLETA ROTARU, FLORICA VASILESCU, DAN BRĂNICI și AVRAM SIMA, Consolidarea prin silicatare a terenurilor loessoide din Iași . . 381

N. PREDA, D. ATANASIU, ANTON ȘESAN și RADU VÎRLAN, Asupra necesității studierii problemelor rutiere în stațil-pilot . . 391

Pag.

VIRGIL FOCȘA, VLADIMIR BOGHIAN și GH. ANGHELACHE, Comportarea termotehnică a clădirilor din blocuri mari . . 399

IOSIF IONESCU-MUSCEL, I. VLAD, EMILIA VLAD, V. HANGANU, SEMERAD RĂDULESCU și EUFROSINA ȘTEFĂNESCU, Sortatorul de bumbac tip „D" 409

RECENZII 417

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том IV (VIII), выпуск 3—4 1958 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ОТ РЕДАКЦИИ	XV
А. КЛИМЕСКУ, Класс неравенств	1
АРЛЭН БРАУН, К абсолютной эквивалентности проекций	5
А. КЛИМЕСКУ, Решение некоторой системы функциональных уравнений	7
Д. В. СИРС, Решения класса L^2 уравнения в частных производных	11
В. М. СТАРЖИНСКИЙ, Об устойчивости периодических движений (I)	19
АРНОЛЬД Н. ЛАУЭН, Устойчивость „неявной схемы переменного направления“ в двух измерениях	69
Д. МАНЖЕРОН, Новые классы функций определяемых уравнениями в „полных производных“	73
ЖОРЖ БУРЬОН, К теории минимальных поверхностей	75
ВИОРЕЛ МУРДЖЕСКУ, Конформные свойства обобщенных риманновых пространств (I)	77
С. Н. СЛУГИН, Методы последовательных приближений в почти упорядоченном пространстве	81
Н. М. БОРОДАЧЕВ, О построении общего решения динамической задачи теории упругости для полупространства в случае осевой симметрии	85
Н. ИРИМИЧУК, Метод приведения масс в теории общего движения твердого тела переменной массы	89
Ж. РАМАКАНТ, Конечная деформация сложных и аэлотропных тел (I)	93
МОРИС ЖАНЕ, О динамических системах с двумя степенями свободы	103
АЛЬФРЕД БРАЙЕР, Графический метод для изучения нелинейных систем в фазовой плоскости	107
С. Г. РЫЖАНОВ, Асимметричное деление тяжелых атомных ядер	113
Н. КАЛИНИЧЕНКО, К. РУСЧОР, КОРНЕЛИЯ ЧОБАНУ, Эрозия, произведенная критическими разрядами, между разными металлическими электродами	119

стр.

ЛЕК ВИР СЕД и П. С. ДЖИЛЛ, Измерение радиоактивности дождевой воды в Гульмарке 127

ИРИНА МИХУЛ и Г. ТАКУ, Электрическая дуга с электродами из стекла 129

К. КАЛИСТРУ и КОРНЕЛИЯ ЛЕОНТЕ, К вопросу изучения равновесия в процессе карбонизации аммонизированного рассола . 135

И. Н. ЧОКИНЭ, ШТ. ИВЭШКАНУ, НИКОЛЕТА ЧУРЯНУ и М. МАРКУ, К изучению оптимальных условий получения бихромата натрия электролитическим путем 141

В. Г. КАШИРСКИЙ, Пиролиз пылевидного румынского лигнита в потоке водяного пара 147

КОНСТАНТИН БРАНИШТЕ, ДАВИД ПЕРЕЦ и СИЛЬВИЯ ШЕРБАН, Поведение пленок краски, на основе хромовокислый свинец—сажа, в защите стали 153

ТЕОДОР СЭВЯНУ, И. ИБЭНЕСКУ и РАДУ ТУДОСЕ, К вопросу о потери давления в насадочных колонках 161

М. МАРИНЕСКУ и ФЛОРИН ВЭЛУ, Теплопередача в змеевиковых теплообменниках для жидкостей 167

ИЛИЕ МАТЕЙ и ЕЛЕНА КОЧА, Новый продукт конденсации бензоина с п-аминофенолом. Реактив для дозировки меди . . 175

Т. С. ХВИЛЕР, О лотофлавине 181

ЕЛЕНА КОЧА, Борные полиэфира 191

Г. ЛУПУШОР, Конденсация 2,4′ — динитрохлорбензола с 4,4′—диаминостильбен — 2,2′—дисульфокислотой 197

КРИСТОФОР СИМИОНЕСКУ, К вопросу о некоторых данных, полученных при изучении растительных опухолей . . . 203

Г. АЛЕКСА, Г. КИРИЦЭ и АГЛАЯ КИРИЦЭ, К вопросу об установлении химикотехнологических показателей отечественного экстракта, полученного водной и сульфитной экстракциями . 217

К. ШТРУБ, ИРИНА ЯРОШИНСКИЙ-ДРАБИК и КОРНЕЛИЯ МАГА, О экстрактах из еловой и сосновой коры 229

МИШИЛИМ ГРИНДЯ, РИТА ЗЕЙДМАН и ФЛОРИН ВЭЛУ, Неисследованная сторона „карбонизации шерсти". Влияние сернокислого натрия 237

ЕМИЛ ЛУКА, В. ПЕТРЕСКУ, Н. РЕУС и ИЛЯНА БУДЭЙ МИХУЛ, Определение израсходованной энергии по циклу, при релаксационных колебаниях 243

И. БЕЖАН, Г. ШЕРБАН и В. КОРЛЭЦЯНУ, Влияние чётных гармоник на главные параметры магнитных усилителей с последовательно включёнными рабочими обмотками . . . 253

Г. ИЛИЕСКУ, Д. БЭРБУЛЕСКУ, Г. САВИН и В. ПЕТРЕСКУ, Исследование магнитной вязкости углеродистой стали подверженной усталости 259

ГУГО РОСМАН, Некоторые вопросы касающиеся работы гомогенных линий в установившемся периодическом негармоническом режиме . 263

стр.

В. Я. БЕЛЕЦКИЙ, К расчёту кулачковых механизмов наименьших размеров с поступательно движущимся ведомым звеном . . 271

Д. МАНЖЕРОН и КОРНЕЛИУ ДРЭГАН, Тензорный метод в задачах синтеза плоских механизмов 275

Д. МАНЖЕРОН, КОРНЕЛИУ ДРЭГАН, Н. ИРИМИЧУК и ОКТАВ МУНТЯНУ, К графо-аналитическим методам исследования пространственных механизмов 287

КОРНЕЛИУ ДРЭГАН, Применение тензоров положения к исследованию задач синтеза кулачковых пространственных механизмов . 291

ОКТАВИАН МУНТЯНУ и Г. ТУДОР, О четырехзвенных механизмах без пассивных связей 297

Н. ИРИМИЧУК, К графической задаче распределения скоростей и ускорений в пространственном движении твердых тел . . 303

Н. ИРИМИЧУК и ИЗУ КЛЕППЕР, Графическое определение положения центра масс 305

ВИТАЛИЕ БЕЛОУС, Аналитические уравнения сопротивлений движению по криволинейным вертикальным направляющим нагруженной роликовой цепи 307

ЖЕРАР Д'АЛБОН, К.- ЧОБАНУ, ДАН УРСЕСКУ и МАРЧЕЛ ГУТМАН, Об улучшении вентилей 315

ЖЕРАР Д'АЛБОН, И. ВРАБИЕ и ДАН УРСЕСКУ, Аналитическое исследование влияния укорачивания хода у машин переменного движения 321

АУРЕЛИАН СИМИОНЕСКУ, Номограммы расчёта сжигания торфа в топках паровых котлов 333

И. КУРЬЕВИЧ, М. МАРИНЕСКУ и ФЛОРИН ВЭЛУ, Экспериментальное изучение испарения капель некоторых органических растворителей 337

О. Н. САВИНОВ, Расчёт пространственных рам методом последовательных приближений 345

АНТОН ШЕСАН, О сокращении числа неизвестных в методе деформаций 353

АНТОН ШЕСА , Использование „факториальных моментов" к определению линий влияния статически неопределимых систем . 359

М. ДИАКОНУ и Н. ПРЕДА, Упруго-пластическая работа тонкостенных стержней двутаврового сечения с неравными поясами . 363

АНТОН ШЕСАН, Об единой форме метода сил и метода деформаций 375

АУРЕЛ ЧЕРНЭТЕСКУ, Г. ДИМА, ВИОЛЕТА РОТАРУ, ФЛОРИКА ВАСИЛЕСКУ, ДАН БРЭНИЧ и АВРАМ СИМА, Силикатизация лессовидных грунтов для искусственных оснований в г. Яссах 381

стр.

Н. ПРЕДА, Д. АТАНАСИУ, АНТОН ШЕСАН и РАДУ ВЫРЛАН, Необходимость изучения дорожных покрытий на лабораторных дорожках 391

ВИРДЖИЛ ФОКША, ВЛАДИМИР БОГЯН и Г. АНГЕЛАКЕ, Теплотехническое поведение здания из больших блоков . . . 399

ИОСИФ ИОНЕСКУ-МУСЧЕЛ, И. ВЛАД, ЕМИЛИЯ ВЛАД, В. ХАНГАНУ, СЕМЕРАД РЭДУЛЕСКУ и ЕФРОСИНА ШТЕФЭНЕСКУ, Сортирощик хлопчатобумажного волокна тип „Д“ . . 409

РЕЦЕНЗИИ 417

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
VOL. IV (VIII), fasc. 3—4 1958

CONTENTS

	Pag.
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENT	XV
AL. CLIMESCU, Une classe d'inégalités	1
ARLEN BROWN, On the absolute equivalence of projections	5
AL. CLIMESCU, Résolution d'un système d'équations fonctionnelles	7
D. B. SEARS, Integrable square solutions of a partial differential equation	11
V. M. STARJINSKY, On the stability of periodical movements (I).	19
ARNOLD N. LOWAN, On the stability of the two-dimensional „alternating direction implicit scheme"	69
D. MANGERON, New classes of functions related to the equations with „total derivatives"	73
GEORGES BOURION, Sur une présentation de la théorie des surfaces minima	75
VIOREL MURGESCU, Propriétés conformes des espaces de Riemann généralisés (I)	77
S. N. SLUGYN, Methods of successive approximations in almost ordered space	81
N. M. BORODATCHEV, On the construction of general solution of dynamic problem of elasticity for half-space in case of axisymmetry	85
N. IRIMICIUC, La méthode de la réduction des masses dans l'étude du mouvement général du solide dont la masse est variable	89
J. RAMAKANTH, Finite deformation of aelotropic and composite bodies (I)	93
MAURICE JANET, Sur les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté	103
ALFRED BRAIER, Méthode graphique pour l'étude des systèmes non linéaires dans le plan des phases	107
S. G. RYJANOV, Asymmetric fission of heavy nuclei	113
N. CALINICENCO, C. RUSCIOR et CORNELIA CIOBANU, L'étude de l'électroérosion par des décharges entre des électrodes métalliques différents	119

Pag.

LEKH VIR SUD and P. S. GILL, Measurement of artificial radioactivity in rainwater at Gulmarg 127

IRINA MIHUL et GH. TACU, L'arc électrique entre des électrodes en verre 129

C. CALISTRU et CORNELIA LEONTE, Contributions à l'étude de l'équilibre de la saumure amoniacale 135

I. N. CIOCHINĂ, ŞT. IVĂŞCANU, NICOLETA CIUREANU et M. MARCU, Contributions à l'étude des conditions les plus favorables pour l'obtention du bichromate de natrium par voie électrolytique 141

V. G. KASCHIRSKY, Pyrolisis of the fine powdered Rumania lignit performed in the superheated vapours 147

CONSTANTIN BRANIŞTE, DAVID PERETZ und SILVIA ŞERBAN, Das Verhalten von Farbanstrichen aus Chromgelb und Erdgas-Russ beim Korrosionsschutz des Eisens 153

TEODOR SĂVEANU, I. IBĂNESCU et RADU TUDOSE, Contributions à l'étude de la chute de pression dans les colonnes à remplissage 161

M. MARINESCU et FLORIN VĂLU, La transmission de la chaleur dans les échangeurs de chaleur en serpentine pour liquides . 167

ILIE MATEI und ELENA COCEA, Ein Kondensationsprodukt von Benzoin mit *p*-Aminophenol. Ein Reagenz zur quantitativen Bestimmung von Kupfer 175

T. S. WHEELER, The lotoflavin problem 181

ELENA COCEA, Borsäurepolyester 191

GH. LUPUŞOR, Die Kondensation von 2,4'-Dinitrochlorbenzol mit 4,4'-Diaminostilben-2,2'-Disulfonsäure 197

CRISTOFOR SIMIONESCU, Considerations on some results obtained in the study of vegetable cancer 203

GH. ALEXA, GH. CHIRIŢĂ et AGLAIA CHIRIŢĂ, Sur les qualités chimiques et technologiques des extraits de bois de chêne obtenus par extraction sulfitique et par extraction aqueuse . 217

C. STRUB, IRINA IAROŞINSCHI-DRABIC et CORNELIA MAGA, Quelques observations concernant l'extrait de l'écorce de sapin 229

MIŞILIM GRINDEA, RITA ZEIDMAN et FLORIN VĂLU, Un aspect non étudié du „carbonissage de la laine". Influence du sulphate de natrium 237

EMIL LUCA, V. PETRESCU, N. REUS et ILEANA BUDĂI-MIHUL, Sur la détermination de l'énergie consommée par cycle, dans le cas des oscillations de relaxation 243

I. BEJAN, GH. ŞERBAN et V. CORLĂŢEANU, L'influence des harmoniques de rang pair sur les principaux paramètres des amplificateurs magnétiques ayant les enroulements de travail connectés en série 253

Pag.

GH. ILIESCU, D. BĂRBULESCU, GH. SAVIN et V. PETRESCU, Sur la viscosité magnetique de l'acier-carbon soumis à la fatigue . 259

HUGO ROSMAN, Quelques problèmes concernant le fonctionnement des lignes homogènes en régime permanent, périodique, nonharmonique 263

V. I. BELETSKY, Calcolo delle dimensioni minime dei mecanismi a camme provvisti dall'organo motore in atto di moto translatorio 271

D. MANGERON and CORNELIU DRĂGAN, A new tensor method in the synthesis of two-dimensional cam mechanisms . . 275

D. MANGERON, CORNELIU DRĂGAN, I. IRIMICIUC i OCTAVIAN MUNTEARU, Sopra i metodi grafo-analitici concernenti lo studio dei meccanismi spaziali 287

CORNELIU DRĂGAN, Application d'une nouvelle méthode tensorielle à la synthèse des mécanismes aux cames de l'espace . . 291

OCTAVIAN MUNTEANU et GH. TUDOR, Sur les mécanismes quadrilatères sans liaisons passives 297

N. IRIMICIUC, Sul problema grafico di distribuzione spaziale delle velocita e delle accelerazioni nei corpi rigidi in atto di moto . 303

N. IRIMICIUC et IZU KLEPPER, La détermination graphique de la position des centres de masses des corps quelconques . 305

VITALIE BELOUS, Relations analytiques pour le calcul de la résistence totale au déplacement d'une chaîne à roles, chargée, sur guidages curvilignes verticales 307

GÉRARD d'ALBON, C. CIOBANU, DAN URSESCU and MARCEL GUTMAN, An amelioration of valves 315

GÉRARD d'ALBON, I. VRABIE and DAN URSESCU, Analytic study on the influence of the shortening of stroke . . . 321

AURELIAN SIMIONESCU, Nomogrammes pour le calcul de la combustion des tourbes dans les foyers des chaudières à vapeur . . 333

I. CURIEVICI, M. MARINESCU et FLORIN VĂLU, Études expérimentales sur l'évaporation des gouttes de certains solvents organiques 337

O. N. SAVYNOV, The succesive aproximations method of frame calculation 345

ANTON ŞESAN, Number reduction of unknowns in the slope deflexion method 353

ANTON ŞESAN, Use of „factorial moments" in the determination of influence lines in statically indeterminate structures . . 359

M. DIACONU et N. PREDA, Le comportement des section double T aux ailes inégales et parois minces au dela de la limite d'elasticité 363

ANTON ŞESAN, The methods of forces and deformations and their unity 375

AUREL CERNĂTESCU, GH. DIMA, VIOLETA ROTARU, FLORICA VASILESCU, DAN BRANICI et AVRAM SIMA, La consolidation par silicatisation des sols de fondation loëssöids de Jassy 381

Pag.

N. PREDA, D. ATANASIU, ANTON ŞESAN et RADU VÎRLAN, La necessité d'étudier les problèmes routiers sur pistes laboratoires 391

VIRGIL FOCŞA, VLADIMIR BOGHIAN und GH. ANGHELACHE, Über das thermische Verhalten eines Gebäudes aus Grossblocken 399

IOSIF IONESCU-MUSCEL, I. VLAD, EMILIA VLAD, V. HANGANU, SEMERAD RĂDULESCU and EUFROSINA ŞTEFĂNESCU, The Cotton Sortator type „D" 409

BOOKS REVIEWS 417

F1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul IV (VIII)

FASC. 3 – 4

1958

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

REDACŢIONALE[1]) ОТ РЕДАКЦИИ[2]) EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENT[3])

Articole ale colaboratorilor străini primite la redacţia „Buletinului Institutului Politehnic din Iaşi"

Статьи иностранных сотрудников полученные редакцией „Известий Ясского Политехнического Института"

Papers received from abroad by the Editorial Staff of the „Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy"

POPOFF K., (Académie Bulgare des Sciences, Sofia, R. P. Bulgare), *Sur la théorie des processus thermodynamiques irréversibles.*

ČECH E., (Académie des Sciences de la Republique Tchékhoslovaque), *Classe différentielle des courbes. Circles osculateurs et sphères osculatrices.*

ГНЕДЕНКО Б. В., (Академия Наук УССР, Киев, СССР), Несколько замечаний к двум работам Д. И. Баррера.

ЦЕНОВ И., (Болгарская Академия Наук, София, Н. Р. Болгария), Новые уравнения аналитической динамики.

КОЖЕВНИКОВ С. Н., СИЛИН А. Н., (Академия Наук УССР, Киев, СССР), Исследование механизма транслятора.

FRÉCHET M., (Académie des Sciences, Paris, France), *L'espace des courbes est-il un espace de Banach ?*

MÜLLER K. H., (Universität Saarbrücken, Deutsche Bundesrepublik), *Bemerkungen zu einer dynamischen Kosmologie.*

CHAMBERS Ll. G., (University College of North Walles, Bangor, England), *Relation between Schwinger's variational principle and Rayleigh's principle.*

KUCHIN V. D., (The Institute of Nuclear Physics in Tomsk, USSR), *The investigation of influence of temperature on electric strength of ionic cristals. I. One electron model.*

d'ORGEVAL B., (Université de Dijon, Faculté des Sciences, France), *À propos d'un théorème de Fenchel et Avacumovic.*

---

1) Listele cărţilor şi noilor articole originale primite la redacţia *Buletinului Institutului Politehnic din Iaşi*, precum şi noile serii de recenzii vor fi publicate în fasciculele imediat următoare ale revistei.

2) Списки книг и новых оригинальных статей поступивших в редакцию Известии Ясского Политехнического Института, а также и рецензий на полученные книги будут помещены в следующем выпуске нашего журнала.

3) List of books and original articles just received by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*, as well as a new series of book reviews will be published in the next issues of our periodical.

MEYER ZUR CAPELLEN W., (Technische Hochschule Aachen, Deutsche Bundesrepublik), *Die Fourierreihe für den Schleifenwinkel der zentrischen Kurbelschleife und verwandte Fourierreihen.*

ШЕЛЕСТ П. А., (Московское Высшее Техническое Училище имени Баумана, Москва СССР), Расчёт компрессора безвального генератора газов.

ХАРАЗОВ Д. Ф., (Тбилисский Государственный Университет им. И. В. Сталина, Тбилиси, СССР), О сходимости метода наискорейшего спуска для операторов квадратично зависящих от параметра.

ЦВЕТКОВ В. Н., (Московский Технологический Институт Легкой Промышленности, Москва, СССР) Схема нагружения низа обуви при ходьбе.

ЕФРЕМОВ Е. Д., (Ивановский Текстильный Институт, Иваново, СССР), О влиянии на натяжение нити при перемотке трения в винтовой канавке нитераскладчика.

ГЕРОНИМУС Я. Л., (Харьковский Политехнический Институт, Харьков, СССР), К геометрическому построению кривой Бурместра.

ЧЕРНОПЯТОВ Н., (Челябинский Институт Механизации и Электрификаций Сельского хозяйства, СССР), Симметрирование трехфазной асинхронной машины в однофазной сети напряжением.

WÖRLE H., (Technische Hochschule, München, Deutsche Bundesrepublik), *Getriebeanalytische und getriebesynthetische Unterlagen für den Entwurf zwangläufiger und übergeschlossener viergelenkiger Raumkurbelgetriebe.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

512.8

O CLASĂ DE INEGALITĂŢI

DE

AL. CLIMESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 28–29 iunie 1958

1. Identitatea $(b-a)^2(b^{n-1}+2ab^{n-2}+\cdots+na^{n-1})=na^{n+1}-(n+1)a^nb+b^{n+1}$ conduce imediat la rezultatul ($\wedge$, $\vee\rightarrow$, $\leftarrow\rightarrow$ fiind obişnuitele semne logice):

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a\geqslant 0\wedge b\geqslant 0\rightarrow na^{n+1}-(n+1)a^nb+b^{n+1}\geqslant 0,\\ &a=b\leftarrow\rightarrow na^{n+1}-(n+1)a^nb+b^{n+1}=0.\end{aligned}$$

2. Inegalitatea dintre mediile aritmetică şi geometrică, adică

$$(2)\qquad x_i\geqslant 0,\ (i=1,2,\ldots,n)\rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$$

cu precizarea

$$(2')\qquad x_1=x_2=\cdots=x_n\leftarrow\rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n=n\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$$

se poate demonstra inductiv cu ajutorul inegalităţii (1) în modul următor: Dacă $x_i=0$, (2) este evidentă. Să presupunem $x_i>0$, $(i=1,2,\ldots,n)$. Notăm $x_1x_2\ldots x_{n+1}=b^{n+1}$, $x_1x_2\ldots x_n=a^n$, de unde

$$(3)\quad x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}=x_1+x_2+\cdots+x_n+b^{n+1}/a^n=[(x_1+\cdots+x_n)a^n+b^{n+1}]/a^n.$$

Deoarece $a>0$, $b>0$, $x_1+x_2+\cdots+x_n>0$, avem în virtutea ipotezii inductive şi a inegalităţii (2)

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}&=[(x_1+\cdots+x_n)a^n+b^{n+1}]/a_n\geqslant\\ &\geqslant(na^{n+1}+b^{n+1})/a^n\geqslant(n+1)b=(n+1)\sqrt[n+1]{x_1\ldots x_{n+1}}\end{aligned}$$

adică

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_{n+1}}.$$

Cum (2) este evident valabilă pentru $n = 2$, ea este general valabilă. Semnul = în (4) înseamnă semnul = în (1) deci $a = b = x_{n+1}$ şi $x_1+x_2+\cdots+x_n+a=(n+1)a$ adică $x_1+x_2+\cdots+x_n=na=n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ ceea ce, în virtutea ipotezii inductive pentru (2') dă $x_1=x_2=\cdots=x_n=a=x_{n+1}$ adică (2') este general valabilă ($x_i > 0$).

Demonstraţia clasică este mult mai artificială, iar demonstraţia lui Strubecker [2, pp. 22...23] nu este mai simplă şi are de asemenea un caracter mai artificial. (1) şi (2) sînt de altfel inegalităţi echivalente; luînd în (2) $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = a^n$, $x_n = b^n$ obţinem (1).

3. Metoda întrebuinţată mai sus, pe lîngă avantajul de a pune în evidenţă echivalenţa dintre (2) şi cazul său particular (1), se poate extinde la o vastă clasă de inegalităţi.

Introducem următoarele clase de funcţii, numărul n al variabilelor fiind nespecificat şi oricît de mare.

(C_1) este clasa funcţiilor $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definite pentru $x_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, care satisfac la condiţiile:

I) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

II) $$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \longleftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

(C_2) este clasa funcţiilor $g(x_1, \ldots, x_n)$ definite pentru $x_i \geqslant 0$ care satisfac la condiţiile:

III) $$g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

IV) $$g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \longleftrightarrow x_i = 0 \text{ pentru cel puţin un indice } i.$$

(C_1) *este un spaţiu vectorial asupra scalarilor pozitivi. Subclasa formată din funcţiile care depind efectiv de un număr fix de variabile este un demigrup în raport cu adunarea şi un grup în raport cu înmulţirea.*

Singura proprietate neevidentă este aceea de grupalitate. Funcţia $e(x_1, \ldots, x_n)$ definită în modul următor: $e(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dacă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, $e(x_1, \ldots, x_n) = 1$ în toate celelalte cazuri este evident element neutru pentru înmulţire, iar f^{-1} se defineşte în modul următor: $f^{-1} = 0$ dacă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, $f^{-1} = 1/f$ în toate celelalte cazuri.

Clasa (C_2) *se bucură de proprietăţi similare.*

4. Fie $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ definite pentru $x_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. f se va zice mai tare decît g (simbolic fTg) dacă $f - g \in (C_1)$. T este un exemplu natural de relaţie binară total nereflexivă, total nesimetrică, dar tranzitivă (pentru proprietăţile relaţiilor v. [1, pp. 187...191]).

Lema I. $fTg \to (f + h)\,T\,(g + h)$ *oricare ar fi funcţia* h (evident).

Teorema I. *Dacă* $h_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *atunci* $fTg \to f(h_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_m)) \geqslant g(h_1(\ldots), \ldots, h_n(\ldots))$.

Demonstrația este evidentă ținînd seama de definiții și de proprietățile stabilite.

Teorema II. *Fie* $f(x_1,\dots,x_n)$, $g(x_1,\dots,x_n)$ *total monotone,* fTg *și* $h_i(y_1,\dots,y_m)\geqslant g_i(y_1,\dots,y_m)\geqslant 0$, $(i=1,2,\dots,n)$. *Dacă* $h_i-g_i=0\leftarrow\rightarrow$ $\leftarrow\rightarrow y_1=\dots=y_m$, $(i=1,2,\dots,n)$ *sau există un* $y_j=0$, *atunci* $f(h_1,\dots,h_n)\geqslant$ $\geqslant g(g_1,\dots,g_n)$.

Într-adevăr $f(h_1,\dots,h_n)\geqslant f(g_1,\dots,g_n)\geqslant g(g_1,\dots,g_n)$ prin monotonie și relația T. Semnul $=$ are loc numai dacă $h_i=g_i$, $(i=1,2,\dots,n)$, adică dacă un $y_j=0$ sau $y_1=y_2=\dots=y_m=0$.

Rezultate similare ar fi valabile dacă în definiția relației T s-ar înlocui clasa (C_1) prin clasa (C_2).

5. Combinînd diversele proprietăți indicate mai sus se poate obține un număr infinit de inegalități.

Să luăm de exemplu un polinom $P_0(x,y)$ definit prin

$$P_0(x,y)=(x-y)^2R_0(x,y)$$

unde R_0 are coeficienți >0. Evident $P_0\in(C_1)$. Fie apoi $P_1,\dots,P_n,Q_1,\dots,Q_n$, polinoame definite în modul următor:

$$P_i(x,y)=xy\,R_i(x,y),\qquad Q_i(x,y)=xy(x-y)^2S_i(x,y)$$

unde R_i, S_i, au coeficienți >0. Formăm șirul $U_0(x,y)=P_0(x,y)$, $U_1=$ $=P_0P_1+Q_1,\dots,U_n=P_{n-1}P_n+Q_n$. Evident $U_n\geqslant 0$ pentru $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ și $U_n(x,y)=0\rightarrow P_{n-1}P_n=0$ și $Q_n=0$ adică $x=0$, sau $y=0$, sau $x=y$. Scriind $U_n\geqslant 0$ sub forma $V_n\geqslant W_n$, unde V_n și W_n au coeficienți >0 și $U_n=V_n-W_n$ se aplică teorema II luînd, de exemplu toate h_i egale cu media aritmetică și toate g_i egale cu media geometrică.

Procedeul se poate varia în multe feluri. De exemplu: $P_0=(x-y)^2$, $P_1=\dots=P_n=x$, $Q_{n-1}=ny^{n-1}$, $U_n=P_nU_{n-1}+Q_{n-1}$, polinoamele U_n au aceleași proprietăți și $U_n\geqslant 0$ este tocmai inegalitatea (1).

6. Se poate pune un număr de probleme interesante, din care citățm următoarele două:

a) Problema echivalenței inegalităților.

b) Problema dacă orice inegalitate polinominală se poate obține pe cale recurentă.

Răspunsul la aceste probleme nu poate fi dat decît în urma unui studiu mai adîncit al spațiilor vectoriale introduse. Considerentele de mai sus par să indice că, în cazul studiului abstract al acestor spații este util de a se considera simultan mai multe spații cu relații între ele analoage relației T.

Institutul Politehnic Iași,
Catedra de Matematici

BIBLIOGRAFIE

1. Leblanc H., *An introduction to deductive logic*, N. Y. and London, 1955.
2. Strubecker K, *Einführung in die höhere Mathematik*, Bd. I, München, 1956.

КЛАСС НЕРАВЕНСТВ

(Резюме)

Доказывается неравенство между средними (арифметическим и геометрическим) посредством доказательства равносильности этого неравенства неравенству (1), (которое является частным случаем первого).

Способ доказательства, которым мы воспользовались, может быть обобщён. Действительный интерес этого способа заключается в том, что мы естественным путём приходим к рассмотрению одной алгебры с двумя действиями (сложением, являющимся законом коммутативной полугруппы, и умножением — дистрибутивным по отношению к сложению — являющимся законом коммутативной группы), являющейся одновременно векторным пространством на множестве действительных положительных чисел.

UNE CLASSE D'INÉGALITÉS

(Résumé)

On démontre l'inégalité entre les moyennes (arithmétique et géométrique) par la démonstration de l'équivalence de cette inégalité avec l'inégalité (1) (qui en est un cas particulier).

La méthode employée peut être généralisée. L'intérêt réel du procédé consiste en ce qu'on est naturellement conduit à la considération d'une algèbre à deux opérations (l'addition qui est une loi de demigroupe commutatif, la multiplication-distributive par rapport à l'addition-qui est une loi de groupe commutatif) qui est en même temps un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres réels positifs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

513.83

ON THE ABSOLUTE EQUIVALENCE OF PROJECTIONS

BY

ARLEN BROWN

Two projections E and F on a Hilbert space are said to be equivalent (in the sense of Murray-von Neumann [3]) with respect to a ring of operators if there is a partial isometry W in the ring such that $W^*W = E$, $WW^* = F$. Let us say that E and F are *absolutely equivalent* if they are equivalent with respect to the ring which they themselves generate, i.e., with respect to any ring containing them. v. Sz.-Nagy [4, § **1.3**] has shown that this relation holds, and that, indeed, an implementing partial isometry can be given explicitly as a continuous function of E and F, under the apparently quite restrictive hypothesis $\|E - F\| < 1$. (See below.). On the other hand, it is a consequence of Dixmier's analysis of the relative position of two subspaces [2] that a necessary and sufficient condition for absolute equivalence is that E and F be in relative position p'. (In the terminology of [2] E and F are in relative position p' if $E \wedge (1 - F) = F \wedge (1 - E) = 0$. They are in relative position p if $E \wedge (1 - F) = F \wedge (1 - E) = E \wedge F = (1 - E) \wedge (1 - F) = 0$). The purpose of this note is to clarify the relations between these two results. It turns out that the criterion of [4] is, in a sense, best possible, but that the explicit formula for the desired partial isometry can be retained in the general case at the expense of admitting an unbounded operator.

Theorem. *Let* E *and* F *be projections on a Hilbert space* $\mathcal{H}$. *A necessary and sufficient condition that they be absolutely equivalent is that they be in relative position* p'. *In this event a partial isometry implementing the equivalence is furnished by the function*

$$V = F\,(1 + E(F - E)\,E)^{-1/2}\,E$$

in the sense that this operator is densely defined and bounded and that its extension $\overline{\mathrm{V}}$ *to the whole of* $\mathcal{H}$ *satisfies* $\overline{\mathrm{V}}^*\,\overline{\mathrm{V}} = \mathrm{E}$, $\mathrm{V}\,\overline{\mathrm{V}}^* = \mathrm{F}$. *On the other hand this function (as it stands) it everywhere defined only under the additional restriction* $\|\mathrm{F} - \mathrm{E}\| < 1$ *(in which case, as noted above, it is even in the* C*-*ring generated by* E *and* F*).*

Proof. The condition is obviously necessary. Moreover, if $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ denote the ranges of E, F respectively then on the subspaces $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ and $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{S}) \cap (\mathcal{H} \ominus \mathcal{T})$ the operator V does what is desired of it so that we may as well work in the space $\mathcal{H} \ominus (\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2)$ or, equivalently, assume that E and F are in relative position p.

We use the machinery of [1, § **10**]. The ring generated by E and F can be represented on the C^*-algebra of continuous 2×2 matrix valued functions on a totally disconnected Hausdorff space X such that E and F correspond respectively with the constant function Diag. (1,0) and $\begin{pmatrix} a & c \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ where $c = (a - a^2)^{1/2}$ and a is a continuous function on X such that $0 \leqslant a \leqslant 1$. Moreover, a can assume the extreme values 0 and 1 only on nowhere dense sets and the closures of open subsets of X are open. The operator $K = (1 + E(F-E)E)^{1/2}$, represented by Diag. $(a^{1/2}, 1)$, is invertible if and only if a is bounded away from 0. Since $\| F - E \| = \sup_x (1 - a(x))^{1/2}$ (and since one sees that if K is not invertible its range cannot cover $\mathcal{S}$) this takes care of the last assertion of the theorem. In any event if $U_n = \{ x : a(x) > 1/n \}$ the sets $\bar{U}_n$ provide an increasing sequence of central subspaces spanning $\mathcal{H}$ on each of which K is invertible. It follows that $V = FK^{-1}E$ is densely defined; clearly the operator $\bar{V}$ represented by

$$\begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ (1-a)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

is a partially isometric extension of V and $\bar{V}^* \bar{V} = E$, $\bar{V} \bar{V}^* = F$.

Corollary. *In any ring of operators the equivalence of* E *and* F *follows from that of the orthogonal projections* $E \wedge (1 - F)$ *and* $F \wedge (1 - E)$. *(In a ring of finite class the condition is also necessary).*

Received 20 VIII 1958

The Rice Institute, Houston, Texas
U. S. A.

REFERENCES

1. Brown A., Amer. J. Math., 1954, **76**, pp. 414–434.
2. Dixmier J., Revue Sci., 1948, **86**, pp. 387–399.
3. Murray F. J. a. v. Neumann J., Ann. Math., 1936, **37**, pp. 116–229.
4. v. Sz.-Nagy B., Comm. Math. Helv., 1947, **19**, pp. 347–366.

К АБСОЛЮТНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОЕКЦИЙ

(Резюме)

Рассматривается соотношение между условием „взаимного положения“ [2] и функцией Нодь (Nagy) [4].

ASUPRA ECHIVALENŢEI ABSOLUTE A PROIECŢIILOR

(Rezumat)

Se dă interpretarea funcţiei lui Nagy [4] în cazul general abordat de Dixmier [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.918

REZOLVAREA UNUI SISTEM DE ECUAŢII FUNCŢIONALE

DE

AL. CLIMESCU

1. Pe lîngă ecuaţiile funcţionale clasice (diferenţiale, integrale, cu diferenţe, iterale sau mixte) în ultima vreme s-a redeşteptat interesul pentru alte tipuri de ecuaţii funcţionale, pentru unele din ele fiind în curs de constituire o teorie generală [1, passim]. De altfel multe din ele, departe de a fi simple curiozităţi, intervin în mod esenţial în variate probleme de geometrie, ori sînt furnizate de către teoria matricilor ori de către teoria proceselor stochastice. Problema principală pentru astfel de ecuaţii (sau sisteme) este găsirea tuturor soluţiilor sub un minim de ipoteze; metodologic este de remarcat tendinţa întrebuinţării metodelor directe şi cît mai elementare.

2. Ne propunem să rezolvăm complet un sistem recurent de ecuaţii funcţionale cu un număr finit însă oricît de mare de necunoscute, mărginindu-ne la determinarea soluţiilor reale care provin în ultimă analiză din soluţiile ecuaţiei lui Cauchy-Hamel.

Sistemul se obţine în modul următor: plecăm de la ecuaţia matricială $M(x)M(y) = M(xy)$, M fiind o matrice patratică de ordin n, şi urmărim să-i determinăm o clasă destul de generală de soluţii. Raţionamente simple şi teoreme cunoscute [2, pp. 144 ... 147] arată că obţinem o soluţie destul de generală dacă se presupune M de forma triunghiulară specială

$$M(x) = \begin{Vmatrix} a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_n(x) \\ 0 & a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_{n-1}(x) \\ 0 & 0 & a_0(x) & \dots & a_{n-2}(x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0(x) \end{Vmatrix}.$$

Ecuaţia matricială revine atunci la următorul sistem scalar recurent

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a_0(x)a_0(y) = a_0(xy),\\ &a_0(x)a_1(y) + a_1(x)a_0(y) = a_1(xy),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_0(x)a_n(y) + a_1(x)a_{n-1}(y) + \cdots + a_n(x)a_0(y) = a_n(xy). \end{aligned}$$

Prima ecuație a sistemului este una din ecuațiile clasice ale lui Cauchy [1, p. 5], despre care se afirmă că soluția ei generală este x^c. Cum această afirmație nu este tocmai precisă (dacă x este negativ) vom începe prin a o rezolva complet. Particularizări evidente dau relațiile: $a_0(0)[a_0(x) - 1] = 0$, $a_0(x)[a_0(1) - 1] = 0$, $[a_0(\sqrt{x})]^2 = a_0(x)$, $(x > 0)$, $a_0(x)a_0(y/x) = a_0(y)$, $(x \neq 0)$, de unde $a_0(0) = 0$ sau $a_0(x) \equiv 1$, $a_0(1) = 1$ sau $a_0(x) \equiv 0$, în fine $a_0(x) = 0$ pentru un $x \neq 0$ antrenează $a_0(x) \equiv 0$. Deci $a_0(x) \equiv 0$, sau $a_0(x) \equiv 1$, sau $a_0(0) = 0$ și $a_0(x) > 0$ pentru $x > 0$ și în particular $a_0(1) = 1$. Apoi $a_0^2(-1) = a_0(1) = 1$ deci $a_0(-1) = 1$ și atunci $a_0(-x) = a_0(x)a_0(-1) = a_0(x)$, sau $a_0(-1) = -1$ și atunci $a_0(-x) = -a_0(x)$. Este deci suficient a rezolva ecuația pentru $x > 0, y > 0$; prin logaritmare și schimbarea $x = \exp u$, $y = \exp v$, se vede că $\log a_0(\exp u)$ este o soluție a ecuației Cauchy-Hamel, deci are ca soluție utilă cu, adică $a_0(x) = x^c$. În rezumat soluția generală utilă a primei ecuații este

$$(2)\qquad a_0(x) \equiv 0 \text{ sau } a_0(x) \equiv 1$$

sau

$$(3)\qquad \begin{cases} a_0(x) = |x|^c,\ a_0(0) = 0, \text{ pentru cazul parității},\\ a_0(x) = x|x|^c,\ a_0(0) = 0, \text{ pentru cazul imparității}, \end{cases}$$

(dacă $c < 0$, este evident că 0 este un punct de discontinuitate pentru soluțiile (3)).

3. $a_0(x) \equiv 0$ implică pe rînd $a_1(x) \equiv 0, \ldots, a_n(x) \equiv 0$. Dacă $a_0(x) \equiv 1$ ecuația a doua devine $a_1(y) + a_1(x) = a_1(xy)$ de unde pentru $y = 0$, $a_1(x) \equiv 0$, apoi ecuația a treia devine $a_2(y) + a_2(x) = a_2(xy)$ de unde $a_2(x) \equiv 0$ și apoi pe rînd $a_3(x) \equiv 0, \ldots, a_n(0) \equiv 0$. Dacă $a_0(x) \not\equiv 0, 1$, obținem din a doua ecuație, pentru $y = 0$, $a_1(0)[a_0(x) - 1] = 0$, deci $a_1(0) = 0$; apoi similar $a_2(0)[a_0(x) - 1] = 0$ deci $a_2(0) = 0$, etc. și în general $a_p(0) = 0$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$. În singurul caz interesant este deci permis a nota $a_p(x) = a_0(x)b_p(x)$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$. Ținînd seama de ecuația la care satisface $a_0(x)$ obținem pentru $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$(4)\qquad \begin{cases} b_1(x) + b_1(y) = b_1(xy),\\ b_2(x) + b_1(x)b_1(y) + b_2(y) = b_2(xy),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_n(x) + b_{n-1}(x)b_1(y) + \cdots + b_1(x)b_{n-1}(y) + b_n(y) = b_n(xy). \end{cases}$$

$x = y = 1$ dă pe rînd $b_2(1) = 0$, $b_3(1) = 0, \ldots, b_n(1) = 0$, apoi $x = y = -1$ dă pe rînd $b_1(-1) = b_2(-1) = \ldots = b_n(-1) = 0$, de unde, pentru x oarecare și $y = -1$ se obține $b_p(-x) = b_p(x)$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$.

Este deci suficient a rezolva sistemul (4) pentru $x > 0$, $y > 0$, de unde punînd $b_p(\exp u) = a_p(x)$ obținem sistemul

$$(4') \quad \begin{cases} c_1(u) + c_1(v) = c_1(u+v), \\ c_2(u) + c_1(u)\,c_1(v) + c_2(v) = c_2(u+v), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n(u) + c_{n-1}(u)\,c_1(v) + \cdots + c_1(u)\,c_{n-1}(v) + c_n(v) = c_n(u+v). \end{cases}$$

Să considerăm funcția $F(u, z) = \exp[ug(z)]$, unde $g(z) = d_1 z + d_2 z^2 + \cdots$; evident $F(u, z) = 1 + a_1(u) z + \cdots + a_n(u) z^n + \cdots$ și $F(u, z) F(v, z) = F(u+v, z)$, deci $a_1(u), a_2(u), \ldots, a_n(u)$ sînt soluții ale sistemului (4').

Soluția generală a sistemului (4') *este dată de coeficienții seriei*

$$(5) \quad \begin{cases} \exp[(a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n)\,u] = \\ 1 + c_1(u)\,z + c_2(u)\,z^2 + \cdots + c_n(u)\,z^n + \cdots \end{cases}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sînt constante arbitrare.*

Afirmația este evidentă pentru $n = 1$. Dacă o presupunem inductiv adevărată pentru $1, 2, \ldots, n-1$, obținem o soluție pentru $c_n(u)$ luînd $c_n(u)$ egal cu coeficientul lui z^n în dezvoltarea funcției $\exp[u(a_1 z + \cdots a_{n-1} z^{n-1})]$. Dacă numim $d_n(u)$ o altă soluție pentru $c_1(u), c_2(u), \ldots, c_{n-1}(u)$ date avem

$$[c_n(u) - d_n(u)] + [c_n(v) - d_n(v)] = c_n(u+v) - d_n(u+v)$$

de unde

$$c_n(u) - d_n(u) = a_n u, \text{ adică } d_n(u) = c_n(u) + a_n u$$

și atunci este clar că $d_n(u)$ este chiar coeficientul lui z^n din dezvoltarea funcției $\exp[u(a_1 z + \ldots + a_n z^n)]$.

Rezultatul final se poate deci enunța astfel:

Sistemul (1) *are următoarele soluții continue (cu excepția eventuală a valorii zero):*

I) $a_p(x) \equiv 0$, $(p = 0, 1, 2, \ldots n)$;

II) $a_0(x) \equiv 1$, $a_p(x) \equiv 0$, $(p = 1, 2, \ldots n)$;

III) $a_p(x) = a_0(x)\,b_p(x)$ *unde* $a_0(x)$ *are una sau alta din formele* (3), $b_p(0) = 0$, *iar pentru* $x \neq 0$,

$$b_p(x) = c_p(\log|x|), \quad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

unde $c_1(u), c_2(u), \ldots, c_n(u)$ *sînt coeficienții seriei de puteri a funcției* $\exp[u(a_1 z + \cdots + a_n z^n)]$.

4. Metoda întrebuințată mai sus se extinde fără greutate și la rezolvarea altor sisteme de ecuații funcționale. De exemplu sistemul

$$a_0(x+y) + a_0(x-y) = 2a_0(x)\,a_0(y),$$
$$a_1(x+y) + a_1(x-y) = 2[a_0(x)\,a_1(y) + a_1(x)\,a_0(y)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n(x+y) + a_n(x-y) = 2[a_0(x)\,a_n(y) + \ldots + a_n(x)\,a_0(y)]$$

care generalizează ecuația funcțională a lui d'Alembert [1, p. 40] are ca funcții generatoare $\cos(\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_n z^n)x$ respectiv $\operatorname{ch}(\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_n z^n)x$

Institutul Politehnic Iași,
Catedra de Matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Ацель Я., УМН, 1956, **11**, *3*, стр. 3—68.
2. Мальцев А. И., **Основы линейной алгебры**., изд. второе, М., 1956.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

Решение системы (1) сводится к решению системы (4′), самое общее вещественное и непрерывное решение которой получается при помощи образующей функции (5). В конце концов, имеем следующий результат: самое общее вещественное и непрерывное решение (за исключением, быть может, для $x = 0$) имеет одну из следующих форм:

I) $a_p(x) \equiv 0, \quad (p = 0,1,\ldots,n)$;
II) $a_0(x) \equiv 1, \quad a_p(x) \equiv 0, \quad (p = 1,2,\ldots,n)$;
III) $a_p(x) = a_0(x)\,b_p(x)$,

где $a_p(0) = 0$, $a_0(x)$ имеет форму (3), а $b_p(x) = c_p(\log|x|), c_1(u), c_2(u),\ldots$ являются первыми коэффициентами степенного ряда функции $\exp[u(\alpha_1 z + \ldots \alpha_n z^n)]$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные.

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

(Résumé)

La résolution du système (1) est ramenée à la résolution du système (4′) dont on obtient la solution continue réelle la plus générale à l'aide de la fonction génératrice (5). En fin de compte on a le résultat suivant: *La solution réelle et continue (sauf peut-être pour* $x = 0$*) la plus générale a l'une des formes suivantes:*

I) $a_p(x) \equiv 0, \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$;
II) $a_0(x) \equiv 1, \; a_p(x) \equiv 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$;
III) $a_p(x) = a_0(x)\,b_p(x)$,

où $a_p(0) = 0, a_0(x)$ *est de la forme* (3) *et* $b_p(x) = c_p(\log|x|), c_1(u), c_2(u), \ldots,$ *étant les premiers coefficients de la série de puissances de la fonctions* $\exp[u(\alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n)]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *étant des constantes arbitraires.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.944

INTEGRABLE SQUARE SOLUTIONS OF A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

BY

D. B. SEARS

1. The differential equation is

$$\Delta w + \{\lambda - q(x, y)\} w = g(x, y) \tag{1.1}$$

where $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, over some plane domain D to be specified later, and λ is a parameter possibly complex, but independent of x and y. It is supposed that $q(x, y)$ is continuous over D, and satisfies one or more of the following conditions, $[r, \theta]$ being polar coordinates:

(I) $q(x, y) \geqslant -Q(r)$, *where* $Q(r) > \delta > 0$, *has continuous derivative, and as* $r \to \infty$, $\limsup |Q'(r)\{Q(r)\}^{-3/2}| < \infty$;

(II) $q(x, y) \geqslant -Q(r)$, *where* $Q(r)$ *is a positive nondecreasing function*;

(III) $\int_0^\infty \{Q(r)\}^{-1/2} \, dr = \infty$.

By a *solution* of (1.1) we mean a functional $f(x, y, \lambda, g)$ which does not vanish identically. For given g, f has partial derivatives of first order which are continuous, $\partial f/\partial x$ is an absolutely continuous function of x over any finite interval for each y, and similarly for $\partial f/\partial y$. When $g = 0$, (1.1) may possess a Green's function on D, but this will not be a solution in the above sense. The difference of two Green's functions over D will have the properties specified.

Some years ago I obtained the following results [1, theorem 2] for the homogeneous equation (1.1) (i.e. with $g = 0$) and D the complete plane:

Theorem 1. *Let* $f(x, y, \lambda)$ *be any solution of* (1.1) *with* $g = 0$, *which is in* $L^2(D)$. *Then, if either* (I) *or* (II) *is satisfied*:

$$\iint_D \{|f_x|^2 + |f_y|^2\}\{Q(\varepsilon r)\}^{-1} \, dx \, dy$$

is convergent. If (I) *is satisfied, the result holds with* $\epsilon = 1$, *but if* (II) *is satisfied, we must have* $\epsilon > 1$.

Theorem 2. *Suppose that* λ *is not real, and that* $q(x, y)$ *satisfies either* (I) *and* (III) *or* (II) *and* (III). *Then the equation* (1.1) *with* $g = 0$ *can have no solution in* $L^2(D)$. *In particular, the Green's function, if it exists, is unique.*

It should be noted that the formulation in [1] was misleading. The phrase „bounded second-order partial derivatives" occurring there referred to local boundedness, and thus a solution of the differential equation would be in the sense given above.

In the present paper I generalise these theorems, first by considering the more general equation (1.1), and also by considering in place of the complete plane the semi-infinite domain E (say) which is the set bounded by half-lines $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, where $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$. In order to make the paper self-contained, I do not use the analysis of [1]. Finally a formula from eigenfunction theory is proved for the domain E.

2. The present investigation was suggested by the following example, which shows that the assertions of theorem 2 cannot hold in general when $\theta_2 < 2\pi$. Let D be the quarter-plane $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, and consider the differential equation

$$\Delta w + \{\lambda - q_1(x) - q_2(y)\} w = 0 \tag{2.1}$$

which separates into

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \{\mu - q_1(x)\}\varphi = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} + \{\nu - q_2(y)\}\chi = 0 \tag{2.3}$$

when $\lambda = \mu + \nu$. If μ is not in the spectrum, the equation (2.2) possesses a solution $\Psi_1(x, \mu)$ of class $L^2(0, \infty)$, and there is a corresponding solution $\Psi_2(y, \nu)$ for (2.3). Accordingly, $f(x, y, \lambda) = \Psi_1(x, \mu)\ \Psi_2(y, \nu)$ satisfies (2.1) and is in $L^2(D)$, if μ, ν are not in the spectra of (2.2), (2.3) respectively, and $\lambda = \mu + \nu$. This will certainly be true if μ and ν are not real.

As an illustration of a general result to be established later, we calculate $\| f \|$. By the general theory of ordinary linear second-order equations [e.g. 2, Chapter II], to each real α corresponds a function $m(\mu)$ such that Ψ_1 satisfies the boundary conditions

$$\Psi_1(0, \mu) = \cos\alpha + m(\mu)\sin\alpha, \quad \partial\Psi_1(0, \mu)/\partial x = \sin\alpha - m(\mu)\cos\alpha,$$

and

$$\| \Psi_1 \|^2 = -\operatorname{im} m(\mu) / \operatorname{im}(\mu).$$

Similar results hold for Ψ_2, with α, m replaced by β, M say. It follows that

$$\overline{f}(x, 0) f_y(x, 0) = |\Psi_1|^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\beta\,(1 - |\overline{M}|)^2 + \overline{M} \sin^2\beta - M\cos^2\beta \right\},$$

$$\overline{f}(0, y) f_x(0, y) = |\Psi_2|^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha\,(1 - |m|^2) + \overline{m} \sin^2\alpha - m\cos^2\alpha \right\}.$$

It is now easily verified that

$$(2.4)\qquad (\operatorname{im}\lambda)\,\|f\|^2 = \operatorname{im}\int_0^\infty \bar{f}(x,0)\,f_y(x,0)\,dx + \operatorname{im}\int_0^\infty \bar{f}(0,y)\,f_x(0,y)\,dy.$$

3. We return now to the general problem of (1.1) over the domain E, with given θ_1, θ_2.

Theorem 3. *Let* q *satisfy condition* (I) *over* E, *and let* $f = f(x, y, \lambda, g)$ *be any solution of* (1.1) *which is in* $L^2(E)$. *Let*

$$(3.1)\qquad A(r) = \bar{f}[r,\theta_2]\,f_\theta[r,\theta_2] - \bar{f}[r,\theta_1]\,f_\theta[r,\theta_1],$$

$$(3.2)\qquad H(r) = -\operatorname{re}\left\{ r\int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{f}g\,d\theta - r^{-1}A(r)\right\},$$

and suppose also that $\int_0^\infty \{H(r)/Q(r)\}\,dr$ *is summable by Cesàro means of some positive order. Then*

$$\iint_E \{|f_x|^2 + |f_y|^2\}\{Q(r)\}^{-1}\,dx\,dy$$

is convergent.

Let $E(T)$ be the common part of the circle $r \leqslant T$ and the domain E. For suitable functions F, G, $\varphi = \varphi(r)$, we have by Green's theorem

$$(3.3)\qquad \begin{aligned}\iint_{E(T)} (T-r)^2 F\varphi\,(\Delta G)\,dx\,dy &= -\iint_{E(T)} (T-r^2)\,\varphi\,(F_x G_x + F_y G_y)\,dx\,dy + \\ &+ \iint_{E(T)} (T-r)\,FG_r\{2\varphi - (T-r)\,\varphi'\}\,dx\,dy + \int_0^T (T-r)^2\,\varphi\,[FG_\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}\,dr/r.\end{aligned}$$

Taking in (3.3) $\varphi = Q^{-1}$, $F = \bar{f}$, $G = f$, we obtain

$$\begin{aligned}&\operatorname{re}\iint_{E(T)} (T-r)^2\{Q(r)\}^{-1}\{(q-\lambda)\,|f|^2 + \bar{f}g\}\,dx\,dy = \\ &= -\iint_{E(T)} (T-r)^2\,Q^{-1}\{|f_x|^2 + |f_y|^2\}\,dx\,dy - \\ &- \iint_{E(T)} |f|^2\{(T-2r)\,Q^{-1} - r\,(T-r)\,Q'\,Q^{-2}\}\,dr\,d\theta + \\ &+ \operatorname{re}\iint_{E(T)} (T-r)^2\,Q'\,Q^{-2}\,\bar{f}\,f_r\,dx\,dy + \operatorname{re}\int_0^T (T-r)^2\,(rQ)^{-1}\,A(r)\,dr.\end{aligned}$$

Using the inequality

$$2|ff_rQ'Q^{-2}| \leqslant |f_r|^2 Q^{-1} + |f|^2 Q'^2 Q^{-3} \leqslant (|f_x|^2 + |f_y|^2) Q^{-1} + |f|^2 Q'^2 Q^{-3}$$

and the given conditions, we then have for some constant K,

$$\frac{1}{2}\iint_{E(T)} (T-r)^2 Q^{-1} (|f_x|^2 + |f_y|^2)\, dx\, dy \leqslant KT^2 + \int_0^T (T-r)^2 \{H(r)/Q(r)\}\, dr.$$

If the integral of H/Q is summable $(C, 2)$, the result will follow on dividing by T^2 and making $T \to \infty$. If the integral is summable (C, p) with $p > 2$, the result will follow similarly after integrating the equation with respect to T a sufficient number of times.

Theorem 4. *Let* q *satisfy condition* (II) *over* E, *and let* f, A, H *be defined as in the previous theorem. Let* H_+ *denote the non-negative part of* H, *and suppose that* $H_+(r)/Q(r)$ *is in* $L(0, \infty)$. *Then*

$$\iint_E \{|f_x|^2 + |f_y|^2\} \{Q(\varepsilon r)\}^{-1}\, dx\, dy$$

converges for every $\epsilon > 1$.

Taking $F = \bar{f}$, $G = f$, $\varphi = 1$ in (3.3) we obtain for some constant K,

$$\iint_{E(T)} (T-r)^3 (|f_x|^2 + |f_y|^2)\, dx\, dy \leqslant \iint_{E(T)} (T-r)^2 Q |f|^2\, dx\, dy +$$

$$+ \int_0^T (T-r)^2 H(r)\, dr + KT^2.$$

If $c = [\varepsilon/(\varepsilon - 1)]^2$, we have

$$\eta(T) = \iint_{E(T)} (|f_x|^2 + |f_y|^2)\, dx\, dy \leqslant c \iint_{E(\varepsilon T)} [1 - r/(\varepsilon T)]^2 (|f_x|^2 + |f_y|^2)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant c \iint_{E(\varepsilon T)} Q |f|^2\, dx\, dy + c \int_0^{\varepsilon T} H_+\, dr + cK = \xi(T)$$

say. It follows that

$$\iint_{E(T)} \{|f_x|^2 + |f_y|^2\} \{Q(\varepsilon r)\}^{-1}\, dx\, dy = \int_0^T \{Q(\varepsilon r)\}^{-1}\, d\eta(r) =$$

$$= \frac{\eta(T)}{Q(\varepsilon T)} + \int_0^T \eta(r)\, d\left\{-\frac{1}{Q(\varepsilon r)}\right\} \leqslant \frac{\xi(T)}{Q(\varepsilon T)} + \int_0^T \xi(r)\, d\left\{-\frac{1}{Q(\varepsilon r)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cK}{Q(0)} + \int_0^T \frac{d\xi(r)}{Q(\varepsilon r)} \leqslant \frac{cK}{Q(0)} + c\iint_{E(\varepsilon T)} |f|^2 \, dx\, dy + c\int_0^{\varepsilon T} \frac{H_+(r)}{Q(r)}\, dr.$$

This proves the result stated.

4. We now give the corresponding generalisation of theorem 2, and the general form of (2.4).

Theorem 5. *Let* q *satisfy over* E *either* (I) *or* (II), *and let* ϵ *be unity in the former case, and greater than unity in the latter. Let* $\lambda = u + iv$ *be not real, and let* f *be a solution of* (1.1) *which is in* $L^2(E)$. *With the notation of* (3.1), (3.2), *let* $H_+(r)/Q\,r$ *be in* $L(0, \infty)$, *and*

$$S(T) = \int_0^T \{Q(x)\}^{-1/2}\, dx \to \infty$$

as $T \to \infty$. *Then*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{v} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{S(T)} \int_0^T \{Q(\varepsilon x)\}^{-1/2}\, dx \int_0^x \mathcal{J}(r)\, dr,$$

where

$$\mathcal{J}(r) = \operatorname{im}\left\{ r\int_{\theta_1}^{\theta_2} f\bar{g}\, d\theta - r^{-1} A(r)\right\},$$

and

$$\liminf \int_0^x \mathcal{J}(r)\, dr \leqslant v\|f\|^2 \leqslant \limsup \int_0^x \mathcal{J}(r)\, dr.$$

In particular, if J(r) *is integrable over* $(0, \infty)$, *even conditionally, then*

$$v\|f\|^2 = \int_0^\infty \mathcal{J}(r)\, dr. \tag{4.1}$$

Using Green's theorem, we have

$$\iint_{E(R)} \{v|f|^2 + \operatorname{im}(f\bar{g})\}\, dx\, dy = \frac{1}{2i}\iint_{E(R)} (f\Delta\bar{f} - f\Delta f)\, dx\, dy =$$

$$= R\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{im}(f\bar{f}_r)_{r=R}\, d\theta + \int_0^R \operatorname{im}[f f_\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} r^{-1}\, dr.$$

Writing $S(r) = \{Q(\varepsilon r)\}^{-1/2}$, we then have

$$\int_0^T S(R)\, dR \iint_{E(h)} v|f|^2\, dx\, dy = \iint_{E(T)} rs(r) \operatorname{im}(f f_r)\, dr\, d\theta + \int_0^T S(R)\, dR \int_0^R \mathcal{J}(r)\, dr. \tag{4.2}$$

By the Schwarz inequality and the results of theorems 3 and 4 it follows that the first integral on the right is bounded as $T \to \infty$. Accordingly the results stated follow on dividing (4.2) by $S(T)$ and making $T \to \infty$; elementary arguments of Tauberian character are involved.

When $A(r) = 0$ for all r, (4.1) reduces to

$$v \| f \|^2 = \operatorname{im} \iint_E \bar{f} g \, dx \, dy \tag{4.3}$$

which is impossible when $g = 0$. More generally we have the following uniqueness theorem:

Theorem 6. *Let* q *satisfy the conditions of theorem* 5 *over* E, *and let* λ *be not real. Let* f_1, f_2 *be* L^2 *solutions of* (1.1) *to which correspond the functions* $A(r, f_1)$, $A(r, f_2)$ *of* (3.1), *and suppose that*

$$\operatorname{im} \int_0^\infty \{A(r, f_1) - A(r, f_2)\} r^{-1} \, dr = 0.$$

Then f_1 *and* f_2 *are identical. In particular, the Green's function of the homogeneous equation which satisfies specified boundary conditions is unique.*

It should be noted that $A(r) = 0$ for any solution which vanishes on the boundary, or whose normal derivative vanishes on the boundary, and that the homogeneous equation can have no solution which is in L^2 and for which $A(r) = 0$ for all r.

5. In this section we assume that q satisfies the conditions of theorem 6. By the analysis of [3] the equation (1.1) with $g = 0$ will have a Green's function $G(x, y, \xi, \eta, \lambda)$, for all λ not real, which vanishes on the finite boundary. The following theorem, which is a familiar type of result in eigenfunction theory, is given here for subsequent use.

Theorem 7. *Under the above conditions, let* f *be a solution of* (1.1) *which is of class* $L^2(E)$, *where* g *is in* $L^2(E)$ *and has continuous partial derivatives of first order. Suppose also that* f *vanishes on the finite boundary of* E. *Then*

$$f(x, y) = - \iint_E G(x, y, \xi, \eta, \lambda) \, g(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta. \tag{5.1}$$

Let

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \iint_E G(x, y, \xi, \eta, \lambda) \, g(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

By standard properties of Green's function [e. g. 3] which clearly extend to the present case, φ is in $L^2(E)$, $\Delta\varphi + \{\lambda - q\}\varphi = 0$, and φ vanishes on the boundary. By theorem 6, φ vanishes identically.

The equation (5.1) will be used in a subsequent paper as a basis for a detailed study of the separable equation (2.1) over a quarter-plane.

The analysis of § 3 leaves undecided the question of the integrability of $|G_r|^2 \{Q(\varepsilon r)\}^{-1}$, when q satisfies (I) or (II), or even when q

satisfies the condition of theorem 2. In the latter case, however, and with the notation of theorem 5, il will be shown that

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{S(T)} \iint_{E(T)} \{Q(\varepsilon r)\}^{-1/2} f(x, y)\, G_r(x, y, \xi, \eta, \lambda)\, dx\, dy = 0 \tag{5.2}$$

for all functions f satisfying the conditions ot theorem 7. For, by Green's theorem, $G = G(x, y, \xi, \eta, \lambda)$,

$$\iint_{E(R)} G\{(q-\lambda) f - \Delta f\}\, dx\, dy = \iint_{E(R)} (f \Delta G - G \Delta f)\, dx\, dy =$$

$$= f(\xi, \eta) + R \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f G_r - G f_r)_{=R}\, d\theta .$$

As in the proof of theorem 5,

$$\int_0^T s(R)\, dR \iint_{E(R)} G\{(q-\lambda) f - \Delta f\}\, dx\, dy = S(T) f(\xi, \eta) + \iint_{E(T)} s(r)(f G_r - G f_r)\, dx\, dy.$$

Now $s f_r$ is in $L^2(E)$ by theorems 3 and 4, so the limit of (5.2) with f, G interchanged is zero.

The result stated now follows from (5.1). It is clear also that

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (f G_r - G f_r)\, d\theta = c\left(\frac{1}{r}\right)$$

as $r \to \infty$.

Reçeived 1 X 1957

The Cape Town University,
South-Africa Union

REFERENCES

1. Sears D. B., Can J. of Math., 1950, **2**, pp. 314—325.
2. Titchmarsh E. C., *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, 1946, Oxford.
3. — Proc. London Math. Soc., 1951 (3), **1**, pp. 1—27.

РЕШЕНИЯ КЛАССА L^2 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Резюме)

Пусть $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, λ — параметр принимающий не действительные значения и f — решение класса L^2 (с интегрируемым квадратом) во всей плоскости уравнения

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

(1) $$\Delta w + \{\lambda - q(x, y)\} w = 0$$

В предыдущей работе [3] были установлены условия для функции $g(x, y)$, позволяющие функциям, содержащим частные производные, ($f \in L^2$). Были установлены также условия для функции $g(x, y)$, при которых функция Грина (1) единственна.

В настоящей заметке рассматриваются те же задачи в полубесконечных областях (x, y) или же (x, θ) ограниченных полупрямыми $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ где $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Доказывается, что теоремы требуют изменений при $\theta_2 < 2\pi$ и некоторые из них действительны для более общего уравнения

(2) $$\Delta w + \{\lambda - q(x, y)\} w = g(x, y).$$

SOLUŢII CU PĂTRAT INTEGRABIL ALE UNEI ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

(Rezumat)

Fie $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, λ — un parametru ce nu este real şi f — o soluţie cu pătrat integrabil, ($f \in L^2$), în tot planul (x, y), a ecuaţiei diferenţiale

(1) $$\Delta w + \{\lambda - q(x, y)\} w = 0.$$

Într-o lucrare anterioară [3] s-au obţinut condiţii pentru funcţia $q(x, y)$ care asigură ca funcţii ce conţin derivate parţiale ale funcţiei f să facă parte din L^2. S-au dedus şi condiţii pentru $q(x, y)$ care asigură unicitatea funcţiei lui Green a ecuaţiei (1).

În această lucrare se consideră aceleaşi probleme în domeniul variabilelor (x, y) sau (r, θ) constituită dintr-o regiune semiinfinită mărginită de semidreptele $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, în care $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$.

Se demonstrează că teoremele reclamă modificări pentru $\theta_2 < 2\pi$. Se constată totodată că unele din ele se aplică la ecuaţia mai generală

(2) $$\Delta w + \{\lambda - k(x, y)\} w = g(x, y).$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.934

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ (I)*)

В. М. СТАРЖИНСКИЙ

В статье рассматриваются способы эффективного определения устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Устойчивость тривиального решения в смысле Ляпунова для линейных систем равносильна ограниченности решений с любыми начальными условиями при $t \to +\infty$ (а для линейных систем канонического вида одновременно и при $t \to -\infty$). Рассматриваемый вопрос связан с устойчивостью периодических движений, когда коэффициентами уравнений возмущенного движения являются периодические функции времени.

Ряд вопросов не обсуждается. Сюда относятся: метод Хилла [2], [23], [34], [47], вместе с многочисленной литературой по уравнению Матье [27], [94], применение метода малого параметра [7], [25], [60], [83], [87] и метода усреднения [28] к исследованию устойчивости, исследования, связанные с динамической устойчивостью упругих систем [91].

Коэффициенты рассматриваемых систем или уравнений предполагаются действительными кусочно-непрерывными периодическими функциями действительного переменного t с периодом $\omega > 0$. Многие результаты остаются справедливыми и для суммируемых функций; мы не оговариваем этого. Некоторые из приведенных результатов имеют силу не только в случае периодических коэффициентов, это обстоятельство каждый раз отмечается.

Здесь в основном будут рассматриваться признаки устойчивости (неустойчивости) тривиального решения системы уравнений данного вида, которые могут быть выражены конечным числом неравенств

$$(*) \qquad F_i(J_1, \ldots, J_k) < 0, \quad (i = 1, \ldots, j),$$

где $J_1, \ldots, J_k$ суть некоторые функционалы от коэффициентов рассматриваемых систем уравнений, содержащие, быть может, постоянные, выбираемые из указываемых для них интервалов. Предполагая, что коэффициенты системы уравнений принадлежат определенному классу функций, такой признак именуется Л-критерием устойчивости (неустойчивости), если выполнено следующее условие: Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такие значения $J_1^0, \ldots, J_k^0$ рассматриваемых функционалов, удовлетворяющие неравенствам $F_i(J_1^0, \ldots, J_k^0) < \varepsilon$, $(i = 1, \ldots, j)$ и для которых нарушается хотя бы одно из неравенств (*), что найдется система коэффициентов, принадлежащих рассматриваемому классу функций со значениями функционалов, равными $J_1^0, \ldots, J_k^0$, для которой тривиальное решение будет неустойчивым (устойчивым). Сказанное относится и к случаю, когда в некоторых из неравенств (*) стоит знак $\leqslant$ вместо $<$.

Поясним указанное определение примером. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(0.1) \qquad \ddot{x} + p(t)\, x = 0,$$

*) Цитированная литература и резюме на французском и румынском языках будут помещены во второй части этой статьи, предназначенной к опубликованию в т. **V(IX)**, *1-2*, 1959 г. настоящего журнала.

где $p(t)$ — неотрицательная и не обращающаяся тождественно в нуль кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом ω. Пусть $k=1$ и $J_1=\int_0^\omega p(t)\,dt$.

Тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво, если

$$\omega J_1 - 4 \leqslant 0. \tag{0.2}$$

Указанный признак является Л-критерием, ибо (см. [6], [13]) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдутся функции $p_0(t)$ из рассматриваемого класса, удовлетворяющие неравенству

$$\omega J_1^0 - 4 < \varepsilon, \quad \left(J_1^0 = \int_0^\omega p_0(t)\,dt\right),$$

для которых тривиальное решение будет неустойчивым.

Этот классический результат Ляпунова, опубликованный в его знаменитой диссертации [5] (теорема II, § 49), явился первым из всех известных Л-критериев. Более простое геометрическое доказательство было дано Жуковским в статье [6]. Кроме того, в этой статье Жуковский впервые связал вопрос об устойчивости с расстоянием между последовательными нулями решений и получил следующий признак устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), также являющийся Л-критерием:

$$n^2\pi^2/\omega^2 \leqslant p(t) \leqslant (n+1)^2\pi^2/\omega^2, \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{0.3}$$

Л-критерий Жуковского требует, чтобы $\sqrt{\sup p(t)} - \sqrt{\inf p(t)} \leqslant \pi/\omega$.

После этого, Ляпунов в течение последующих десяти лет возвращался к исследованию устойчивости тривиального решения уравнения (0.1) и получил ряд основополагающих результатов. Эти результаты, к сожалению, в течение нескольких десятков лет не привлекали внимания. Более того, в работах Г. Гамеля [15], О. Гаупта [17], Г. Крамерса [29], Г. Швердтфегера [46], Л. Пайпса [102], результаты Ляпунова повторились, причем в частных предположениях.

В многочисленной литературе советских авторов, посвященной затрагиваемому кругу вопросов, используются разнообразные методы для получения признаков устойчивости. Сюда относятся чисто аналитические методы с привлечением теории аналитических и, в частности, целых функций, методы качественной теории дифференциальных уравнений, геометрические и топологические методы и методы, связанные с общей теорией краевых задач; приобретает значение также матричное исчисление и, в частности, теория некоторых новых специальных классов матриц.

Краткость изложения не позволила остановиться на существе методов получения Л-критериев устойчивости в работах ряда авторов, в частности: строение областей устойчивости и неустойчивости в функциональном пространстве коэффициентов в работах В. А. Якубовича [71], [93], [104], [116], И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского [118], сущность вариационных задач в работах Г. Борга и В. А. Якубовича [104], [116], свойства собственных значений краевых задач в работах М. Г. Крейна [80], [115] Однако общие результаты Ляпунова, являющиеся отправным пунктом значительной части современных исследований, нашли здесь освещение.

Мы стремились по возможности сравнить различные признаки и дать рекомендации для их применения. Такого рода сравнение было впервые выполнено в работах М. Г. Крейна [80], [115] и диссертации В. А. Якубовича [104]. Нами упомянуты не все работы включенные в список литературы, составленный в хронологическом порядке.

В тексте применяется обозначение $f_{\text{ср}}$ для средней величины периодической функции $f_{\text{ср}} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\,dt$ и обозначения $a_{\text{наим.}}$ и $a_{\text{наиб.}}$ для наименьшего и наибольшего значения функции или совокупности величин (для кусочно-непрерывных функций точнее было бы писать inf и sup).

Автор приносит глубокую благодарность своему учителю члену-корреспонденту Академии наук СССР Н. Г. Четаеву за многократное обсуждение содержания настоящей статьи.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Глава I. Обзор [111], [119]

В первых двух параграфах рассматривается уравнение (0.1), причем **§ 1** отводится обзору работ Ляпунова, а **§ 2** обзору последующих исследований. В **§ 3** рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{0.4}$$

описывающее, как известно, процессы в системе с одной степенью свободы при наличии диссипации энергии. В **§ 4** и **5** рассматривается система двух уравнений, причем **§ 4** отводится системе канонического вида.

§ 1. 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \lambda p(t)x = 0, \quad (p(t+\omega) = p(t)), \tag{1.1}$$

(λ-действительный параметр) и образуем два решения $f(t;\lambda)$ и $\varphi(t;\lambda)$ этого уравнения определяемые начальными условиями

$$f(0;\lambda) = 1, \quad \dot{f}(0;\lambda) = 0, \quad \varphi(0;\lambda) = 0, \quad \dot{\varphi}(0;\lambda) = 1.$$

Как известно из теории Флоке [1], если положить $A(\lambda) = \frac{1}{2}[f(\omega;\lambda) + \dot{\varphi}(\omega;\lambda)]$, то при условии $A^2(\lambda) < 1$ тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво, а при условии $A^2(\lambda) > 1$-неустойчиво. Среди различных методов вычисления $A(\lambda)$ метод, применяемый в [5], как отмечает Ляпунов в мемуаре [13], заслуживает особого внимания. Этот метод дает для функции $A(\lambda)$ представление

$$A(\lambda) = 1 - A_1\lambda + A_2\lambda^2 - \ldots, \quad \left(A_n = \frac{1}{2}[f_n(\omega) + \dot{\varphi}_n(\omega)]\right), \tag{1.2}$$

где $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ — функции, вычисляемые последовательно по формулам

$$f_n(t) = \int_0^t d\,t_1 \int_0^{t_1} p(t_2)\, f_{n-1}(t_2)\, d\,t_2, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t d\,t_1 \int_0^{t_1} p(t_2)\,\varphi_{n-1}(t_2)\, d\,t_2$$

в предположении, что $f_0(t) = 1$, $\varphi_0(t) = t$.

Ляпунов доказал [13], что, полагая $|p(t)| \leqslant L$, $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$ имеем

$$|A_n| \leqslant \omega^{2n} L^n/(2n)!, \quad (n = 1,2,\ldots)$$

и, следовательно, будем иметь

$$|A(\lambda)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{2n}(L|\lambda|)^n/(2n)! = \operatorname{ch}\left(\omega\sqrt{L|\lambda|}\right) < \exp\left(\omega\sqrt{L|\lambda|}^{1/2}\right).$$

Таким образом, $A(\lambda)$ является целой функцией с порядком роста $|\lambda|^{1/2}$.

2. Заметки Ляпунова [10], [11] посвящены изучению расположения корней уравнения $A^2(\lambda) = 1$. На рис. 1 схематически представлен график функции $A(\lambda)$ для $p(t) \geqslant 0$ и для знакопеременной функции p при $p_{cp} = 0$ и $p_{cp} > 0$. Заметим что при $p_{cp} = 0$, $A(0) = 1$ соответствует максимуму $A(\lambda)$. Вообще говоря, при $\lambda \neq 0$ график функции $A(\lambda)$ может касаться прямых $A(\lambda) = \pm 1$; это обстоятельство на графиках не отмечается.

В заметке [10] p предполагается неотрицательной функцией. Ограничимся изложением содержания заметки [11], в которой p может быть и знакопеременной функцией в предположении для определенности, что $p_{cp} \geqslant 0$ (если $p_{cp} < 0$, то в уравнении (1.1) заменяем λ на $-\lambda$ и $p(t)$ на $-p(t)$). В случае знакопеременной функции p,

$A^2(\lambda) = 1$, для всех членов неубывающей последовательности (и уходящей в обе стороны на бесконечность) ..., l_{-2}, Λ_{-2}, l_{-1}, Λ_{-1}, l_0, $\Lambda_0 = 0$, l_1, Λ_1, l_2, Λ_2,... причем для членов l_i, Λ_i с четным индексом имеем $A(\lambda) = 1$, а с нечетным индексом имеем $A(\lambda) = -1$. Иными словами, числа l_{2j}, Λ_{2j}, $(j = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ являются собственными значениями краевой задачи $\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0$, $x(0) = x(\omega)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(\omega)$ а числа l_{2j-1}, Λ_{2j-1}, $(j = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ — собственными значениями краевой задачи $\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0$, $x(0) = -x(\omega)$, $\dot{x}(0) = -\dot{x}(\omega)$.

В случае знакопостоянной функции p собственных значений противоположного знака нет. Если среди членов последовательности существуют числа, удовлетворяющие

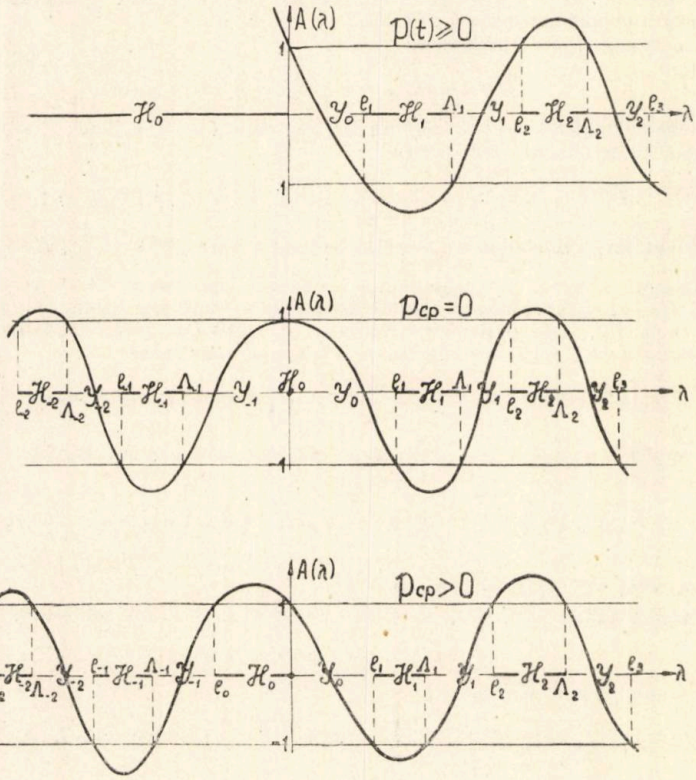


Рис. 1

равенствам $l_i = \Lambda_i$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, то это двойные корни уравнения $A^2(\lambda) = 1$, остальные всегда будут простыми корнями. Но во всех случаях будем иметь $\Lambda_i < l_{i+1}$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Вся действительная λ-ось разбивается на открытые интервалы $\mathcal{Y}_i$ (зоны устойчивости) (Λ_i, l_{i+1}), $(i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, (которые занумеруем по индексу левого конца интервала), в которых $A^2(\lambda) < 1$ и дополнительное множество $\mathcal{H}$, состоящее, вообще говоря, из точек и замкнутых интервалов (а в случае $p(t) \geqslant 0$ содержащее отрицательную полуось λ).

Замкнутые интервалы $\mathcal{K}_i$ (зоны неустойчивости) $[l_i, A_i]$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, также занумеруем по индексу левого конца интервала. Если λ принадлежит некоторой зоне устойчивости, то тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво. Если λ вместе с некоторой окрестностью принадлежит множеству $\mathcal{K}$, то $A^2(\lambda) > 1$ и тривиальное решение уравнения (1.1) неустойчиво.

Остается охарактеризовать значения λ, соответствующие концам замкнутых интервалов $\mathcal{K}_i$, т. е. предположить, что λ будет равно одному из корней уравнения $A^2(\lambda) = 1$. Если этот корень двойной, отличный от нуля, то все решения уравнения (1.1) являются периодическими или соответственно полупериодическими, т. е. удовлетворяют равенству $x(t + \omega) = \pm x(t)$, где следует брать тот из двух знаков, который принадлежит A. Если, напротив, этот корень простой, то одно из независимых решений будет удовлетворять предыдущему равенству, а второе будет неограниченным. Таким образом, если λ принадлежит замкнутому интервалу $\mathcal{K}_i$, то тривиальное решение уравнения (1.1) неустойчиво, если же замкнутый интервал $\mathcal{K}_i$ стянулся в точку (отличную от точки $\lambda = 0$), то при соответствующем λ тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво. Напомним, что при $p(t) \geqslant 0$ отрицательная полуось λ является нулевой зоной неустойчивости $\mathcal{K}_0$ ([5], теорема I, § **49**).

Выводы Ляпунова о расположении зон устойчивости и неустойчивости вытекают из следующего свойства функции $A(\lambda)$: в каждой точке максимума имеем $A(\lambda) \geqslant 1$ (и в каждой точке минимума $A(\lambda) \leqslant -1$). Кроме того, Ляпунов [10], [11] выяснил связь между корнями уравнения $A^2(\lambda) = 1$ и собственными значениями краевой задачи $\ddot{x} + \lambda p(t) x = 0$, $x(a) = x(a + \omega) = 0$.

Ляпунов не опубликовал доказательства полученных результатов. Эти доказательства были обнаружены в недавнее время (1956 г.) в архиве Ляпунова и, вероятно, будут опубликованы в последних томах собрания сочинений Ляпунова, издаваемого АН СССР. Доказательство свойств характеристической функции $A(\lambda)$ системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка канонического вида с периодическими коэффициентами (частным случаем которой является уравнение (1.1)) читатель найдет в статье М. Г. Крейна [131].

Через 20 лет Г. Гамель [15] и О. Гаупт [17], повидимому, не зная о результатах Ляпунова, повторили его исследования, но не в полном виде. Это обстоятельство было отмечено в заметке К. Р. Коваленко и М. Г. Крейна [72], где вместо уравнения (1.1) было рассмотрено несколько более общее уравнение [1])

$$\ddot{x} - q(t)x + \lambda p(t)x = 0 . \tag{1.3}$$

Доказательство результатов Ляпунова для этого обобщения было дано в диссертации К. Р. Коваленко [69]. В этой диссертации выясняется важность исследований Ляпунова, относящихся к случаю знакопеременной функции p, в вопросах динамической устойчивости стержней. Теория зон устойчивости Ляпунова играет важную роль в теории параметрического резонанса, некоторых вопросах квантовой механики (движение электрона в периодическом поле) и других.

3. Задачу статьи [8] Ляпунов формулирует следующим образом : Так как невозможно указать какой-либо метод, который позволял бы всегда при помощи конечного числа действий узнавать, имеем ли мы дело с одним из двух случаев ($A^2 < 1$ или $A^2 > 1$), то желательно по крайней мере знать возможно большее число признаков, достаточных для каждого из этих случаев. Два таких признака указаны Ляпуновым ([5], теоремы I и II, § **49**). Другой признак неравенства $A^2 < 1$ был указан потом Жуковским [6]. Указанные признаки относятся лишь к случаям, когда функция p является знакопостоянной Поэтому, исследование в статье [8] основывается на таких преобразованиях уравнения (0.1), со знакопеременным коэффициентом $p(t)$, для которых коэффициент в преобразованном уравнении был бы знакопостоянным.

---

1) В заметке [72] показано, как уравнение (1.3) при $p(t) \equiv 1$ может быть преобразовано в уравнение (1.1) с положительным и дважды дифференцируемым коэффициентом. В силу этого преобразования, результаты Г. Гамеля [15], О. Гаупта [17], Г. Крамерса [29] и Г. Швердтфегера [46], относящиеся к уравнению $\ddot{x} + [\lambda - q(t)] x = 0$ являются простыми следствиями того, что было опубликовано Ляпуновым в заметке [10] в 1899г.

Именно, пусть $x = wy$, где w — положительная периодическая функция t с периодом ω, обладающая непрерывной второй производной $\ddot{w}$, и $\tau = \int_0^t w^{-2}(t_1)\,dt_1$, новое независимое переменное. Тогда уравнение (0.1) преобразуется к виду $\frac{d^2y}{d\tau^2} + q(\tau)\,y = 0$, $(q(\tau) = w^3[\ddot{w} + pw]_{t=t(\tau)})$.

Здесь q — периодическая функция τ с периодом $T = \int_0^\omega w^{-2}(t)\,dt$, и величина A, для преобразованного уравнения не изменится.

Первое преобразование приведено в [8, пп. **3 ... 14**]. Определение w сводится к нахождению периодических решений уравнений вида $\ddot{w} + hw = h - p(t)$, где h — некоторая постоянная. Результаты исследования подробно разбираются на примере

$$\ddot{x} + \lambda(1 - \varepsilon \sin^n t)\,x = 0 \tag{1.4}$$

и для p, являющейся нечетной функцией с нулями через полупериод.

Второе преобразование излагается в [8, пп. **15...24**]. Функция w берется в виде $w = \exp\left[-\int v(t)\,dt\right]$ где v – периодическая функция периода ω с непрерывной производной $\dot{v}$, удовлетворяющая условию $v_{ср} = 0$. При этом имеем $q = (p - \dot{v} + v^2)\exp\left(-4\int v\,dt\right)$.

Ляпунов показывает, что, положив в случае $p_{ср} \geqslant 0$ $v = \int (p - p_{ср})\,dt$ будем иметь $q = (p_{ср} + v^2)\exp(-4\int dt) \geqslant 0$.

Заметим, что в случае $p_{ср} < 0$, при условии $v^2 \leqslant -p_{ср}$, будем иметь $q \leqslant 0$.

После анализа отдельных примеров вида (1.4), даются общие заключения относительно устойчивости тривиального решения уравнения

$$\ddot{x} + \lambda p(t)\,x = 0, \quad (\lambda > 0). \tag{1.5}$$

Именно, если обозначить

$$M = \frac{1}{\omega}\left|\int_0^\omega [p(t_1 + t) - p_{ср}]\,t_1\,dt_1\right|_{\text{наиб.}},$$

то тогда:

а) если $p_{ср} < 0$, то при $\lambda \leqslant -p_{ср}/M^2$ будем иметь $A(\lambda) > 1$ и тривиальное решение уравнения (1.5) неустойчиво (λ принадлежит нулевой зоне неустойчивости);

б) если $p_{ср} \geqslant 0$, то при $\lambda \leqslant \zeta/(M\omega)$, где ζ - положительный корень уравнения $(\omega p_{ср}/M + \zeta)(e^\zeta - 1)^2/\zeta = \pi^2$, будем иметь $A^2(\lambda) < 1$ и тривиальное решение уравнения (1.5) устойчиво (λ принадлежит нулевой зоне устойчивости).

В частности, если в уравнении (0.1) функция p такова, что $p_{ср} = 0$ и

$$\left|\int_0^\omega p(t_1 + t)\,t_1\,dt_1\right| \leqslant \ln(1 + \pi),$$

то будем иметь $A^2 < 1$ и тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

Отметим, что к моменту написания статьи [8] Ляпунов располагал лишь тремя указанными выше признаками устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнения (0.1). Поэтому может оказаться полезным применение к преобразованным уравнениям последующих признаков как Ляпунова, так и других авторов.

4. В заметке [9] рассматривается уравнение (0.1) с нечетным коэффициентом $p(t)$. Ряд (1.2) при $\lambda = 1$ в этом случае сведется к следующему: $A = 1 + A_2 + A_4 + \ldots$ где

$$A_{2n} = (-2)^n \int_0^{\omega/2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-1}} (P_1 - P_2)^2 (P_3 - P_4)^2 \ldots (P_{2n-1} - P_{2n})^2 \, dt_{2n}.$$

Здесь $P(t)$ есть то из значений первообразной функции для $p(t)$, для которого $P_{ср} = 0$ и $P_i \equiv P(t_i)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$|A_{2m+2n}| < m!\, n!\, |A_{2m}|\, |A_{2n}| / (m+n)!$$

и как его следствие $|A_{2n}| < |A_2|\, |A_{2n-n}| / n$.

Отсюда следует, что если $\omega \int_0^{\omega} P^2(t)\, dt \leqslant 4$ то будем иметь $A^2 < 1$ и тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

5. В обширном мемуаре [13] исследуется ряд (1.2) при $\lambda = 1$ в предположении $p(t) \geqslant 0$. В главной части мемуара Ляпунов устанавливает два неравенства для отношения двух соседних членов этого ряда при $n \geqslant 2$:

$$A_n / A_{n-1} < A_1 / n^2, \tag{1.6}$$

$$A_{n+1} / A_n < (n-1)\, A_n / (n\, A_{n-1}). \tag{1.7}$$

Неравенство (1.6) более сильное, чем неравенство, установленное ранее [15]

$$A_n / A_{n-1} < A_1 / n.$$

Если неравенство (1.6) показывает, что граница сверху для отношения A_n / A_{n-1} постоянно убывает, то неравенство (1.7) обнаруживает, что само отношение A_n / A_{n-1} постоянно убывает с ростом n, т. е. если для какого-нибудь значения n имеем $A_n \leqslant A_{n-1}$, то будем, конечно, иметь $A_n > A_{n+1} > \cdots$.

Как сообщил М. Г. Крейн, неравенство (1.7) является непосредственным следствием следующего общего предложения:

Если целая функция $F(\lambda) = a_0 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 - \ldots$ допускает представление

$$F(\lambda) = a_0 \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda / \lambda_j), \quad (0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots), \tag{*}$$

то будем иметь $a_{j+1} / a_j < j\, a_j / [(j+1)\, a_{j-1}]$, $(j = 1, 2, \ldots)$.

Указанное общее предложение моментально следует из теоремы Ньютона о том что если корни многочлена $a_0 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 - \ldots + (-1)^n a_n \lambda^n$ все положительны, то выполняются неравенства $a_{j+1} / a_j < j(n-j)\, a_j / [(j+1)(n-j+1)\, a_{j-1}]$, $(j = 1, \ldots, n-1)$.

Чтобы получить отсюда неравенство (1.7), следует применять это предложение к целой функции $[1 - A(\lambda)]/\lambda = A_1 - A_2 \lambda + A_3 \lambda^2 - \ldots$, все нули которой положительны, как установил Ляпунов [10]. Кроме того, как это доказал Ляпунов, функция $A(\lambda)$ является целой функцией с порядком роста $|\lambda|^{1/2}$, а для целых функций с порядком роста меньше единицы справедливо разложение (*). В замечании М. Г. Крейна должен быть обоснован предельный переход (см. [114]).

Основное предложение формулируется Ляпуновым следующим образом: Каждый раз, когда для какого-нибудь значения n из последовательности $1, 2, 3 \ldots$ и для любого α, удовлетворяющего неравенствам $-5 \leqslant \alpha \leqslant 1$

находят $1 - \alpha - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + A_{2n} \leqslant 0$, то будут иметь $A < \alpha$;

находят $1 - \alpha - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots - A_{2n-1} \geqslant 0$, то будут иметь $A > \alpha$.

При исследовании уравнения (0.1) нас интересует знак величины $A^2 - 1$ и поэтому Ляпунов полагает в предыдущих неравенствах $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$. Тогда это пре-

дложение приводит к методу, позволяющему решить, находится ли A в интервале $(-1,1)$ или вне его. Если $A_1 \leqslant 2$, то будет достоверно, что $A^2 < 1$.

Если $A_1 > 2$, то вычисляют A_2 и будут различать следующие три случая которые могут представиться:

$$1)\ A_2 \leqslant A_1 - 2,\quad 2)\ A_1 - 2 < A_2 \leqslant A_1,\quad 3)\ A_2 > A_1.$$

В первом случае $A < -1$, и вопрос решен. Во втором случае будем иметь только $A < 1$ и надо решить, будет ли $A > -1$, или $A < -1$. Для этого вычисляют A_3 и если находят, что $A_3 \leqslant A_2 - A_1 + 2$, то заключают, что $A > -1$. В противоположном случае вычисляют A_4 и будут продолжать последовательно до тех пор, пока не достигнут неравенств вида $A_n \leqslant A_{n-1} - A_{n-2} + \ldots \pm A_1 \mp 2$, которое не приминет представиться, если A не равно -1. Тогда, если n - четное число, будем иметь $A < -1$. а если n-нечетное число, будем иметь $A > -1$.

В третьем случае надо будет вычислять A_3 и различать три следующих возможных случая:

$$1)\ A_3 \leqslant A_2 - A_1,\quad 2)\ A_2 - A_1 < A_3 \leqslant A_2 - A_1 + 2,\quad 3)\ A_3 > A_2 - A_1 + 2.$$

В первом случае $A > 1$, и вопрос решен. Если находятся во втором случае, то можно только вывести, что $A > -1$ и надо решить, будет ли $A < 1$, или $A > 1$. Для этого будут продолжать последовательно до тех пор, пока не достигнут неравенств вида $A_n \leqslant A_{n-1} - A_{n-2} + \ldots \pm A_2 \mp A_1$, что не преминет случиться, если A не равно 1. Тогда, если n — четное число, будут иметь $A < 1$, а если n - нечетное число, будут иметь $A > 1$. Что касается третьего случая, то его подразделяют на три случая, различных по значению A_4.

Очевидно, что можно очутиться в третьем случае не всегда и что кончат тем, что попадут к одному из первых случаев, когда вопрос решается немедленно, либо к одному из вторых случаев, который будут исследовать так, как было показано. Метод не приведет к цели, только если $A = \mp 1$; случай, в котором вычисления могут продолжаться бесконечно и не дают окончательного заключения. Но, как заключает Ляпунов, это то, что есть в природе вещей, так как метод в конце концов есть только ряд последовательных приближений. Краткое изложение существа метода дано в заметке [12], предшествовавшей мемуару [13]. Заметка [9] позволяет распространить метод Ляпунова для случая, когда функция p является нечетной.

В некоторых случаях вычисления упрощаются, если использовать верхние пределы для A_3. Именно, в силу каждого из неравенств

$$A_2^2 - 2A_1 A_2 + 2A_1 (A_1 - 2) \leqslant 0,\quad A_2 \geqslant (A_1^3 + A_1 - 2)/90,$$
$$[1 - (\pi^2 - 9) A_1/(5\pi^2)] A_2 \geqslant (15 - \pi^2) A_1^3/(60\pi^2) + A_1 - 2,$$

будем иметь, что $A^2 < 1$. Ляпунов отмечает, что было бы важно иметь для A_3 точный верхний предел, соответствующий данным значениям A_1, A_2, но отыскание этого предела, очевидно, является весьма трудной задачей.

Приведем самые простые из формул для вычисления A_1, A_2, A_3, выведенные Ляпуновым [13]. Представим функцию p в виде $p(t) = p_{\text{ср}} + \dot{\Phi}(t)$, где периодическая функция Φ удовлетворяет условию $\Phi_{\text{ср}} = 0$. Тогда,

$$A_1 = \frac{1}{2}\omega^2 p_{\text{ср}},\quad A_2 = \frac{1}{24}\omega^4 p_{\text{ср}}^2 - \frac{\omega}{2}\int_0^{\omega} \dot{\Phi}^2\, dt,$$

$$A_3 = \frac{1}{720}\omega^6 p_{\text{ср}}^3 - \frac{1}{12}\omega^3 p_{\text{ср}} \int_0^{\omega} \dot{\Phi}^2\, dt + 2\omega p_{\text{ср}} \int_0^{\omega} \Phi^2\, dt - \omega \int_0^{\omega} \Phi \dot{\Phi}^2\, dt.$$

Мемуар [13] заканчивается детальным исследованием двух примеров:

$$\ddot{x} + C(1 + \lambda\cos t + \mu\cos 2t)x = 0, \quad \ddot{x} + \lambda\cos^{2n} tx = 0.$$

§ 2. 1. Одними из первых ученых, обратившихся к исследованию ограниченности решений уравнения (0.1) после Ляпунова и Жуковского, являются Н. В. Адамов [24], [30], [31], [32], [50] и М. И. Ельшин [36], [40], [48]. Их исследования тесно связаны с вопросом о колебаниях решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Краткий обзор результатов Н. В. Адамова и М. И. Ельшина читатель найдет в [103], [116].

2. В 1944 г. шведский математик Г. Борг, в результате решения вариационных задач получил [42] некоторые условия устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), которые можно формулировать в виде Л-критериев. Г. Борг вводит параметры α и β:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{\pi^2} p_{\text{ср}}, \quad |\beta| = \frac{\omega^2}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\omega}\left[\int_0^{\omega} |p(t) - p_{\text{ср}}|^r\, dt\right]\right\}^{1/r}.$$

I. В случае $r = 1$ области устойчивости в плоскости параметров $\alpha\beta$ ограничены кривыми

$$\beta = \pm\frac{4}{\pi}(n+1)\sqrt{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{2(n+1)}, \quad n^2 \leqslant \alpha \leqslant (n+1)^2, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\beta = \pm 2(\alpha - n\sqrt{\alpha}), \quad \alpha > 1, \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \alpha = 0, \quad (n = 0)$$

и при этом области содержат внутри себя отрезок оси α [2]).

Иначе говоря, если для некоторого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства $n^2\pi^2/\omega^2 \leqslant p_{\text{ср}} \leqslant (n+1)^2\pi^2/\omega^2$ и

$$(2.1)\qquad \int_0^{\omega} |p(t) - p_{\text{ср}}|\, dt < \left[2\sqrt{p_{\text{ср}}}(\omega p_{\text{ср}} - n\pi),\ 4(n+1)\sqrt{p_{\text{ср}}}\operatorname{ctg}\frac{\omega\sqrt{p_{\text{ср}}}}{2(n+1)}\right]_{\text{наим.}},$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости [3]).

II. В случае $r=2$ области устойчивости ограничены кривыми

$$\beta = \pm\, 8(n+1)^2 K\sqrt{(k^2-1)K^2 + 2(2-k^2)KE - 3E^2}/(\sqrt{3}\pi^2)$$

$$\alpha = 4(n+1)^2[(k^2-1)K^2 + 2KE]/\pi^2, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \ \alpha > 0$$

и содержат внутри себя отрезок оси α.

Здесь $K = K(k)$ и $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Как частный случай получается следующее условие устойчивости:

$$p(t) \geqslant 0, \quad \int_0^{\omega} p^2(t)\, dt < 63{,}03/\omega^3.$$

III. В случае $r = \infty$, области устойчивости ограничены кривыми

$$\sqrt{\alpha+\beta}\operatorname{tg}\left\{\pi\sqrt{\alpha+\beta}/[4(n+1)]\right\} = \sqrt{\alpha-\beta}\operatorname{ctg}\left\{\pi\sqrt{\alpha-\beta}/[4(n+1)]\right\}, (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

2) Иначе говоря, образуется сетка кривых указанного вида, и областями устойчивости будут те ячейки этой сетки, которые содержат отрезок оси α.

3) „$p(t)$ в уравнении (0.1) принадлежит n-й зоне устойчивости“ означает, что $\lambda = 1$ в уравнении (1.1) принадлежит n-й зоне устойчивости $\mathfrak{Y}_n$ (см. § 4).

и содержат внутри себя отрезок оси α. Если корень мнимый, то переходят к соответствующим гиперболическим функциям. При $r=\infty$, $\beta=\omega^2 |p(t)-p_{ср}|_{наиб.}/\pi^2$.

В заметке [61] Г. Борг распространяет Л-критерий Ляпунова (0.2) на знакопеременную функцию $p(t)$. Сформулируем Л-критерий Г. Борга. Если $p_{ср}\geqslant 0$ и

$$\omega\int_0^{\omega}|p(t)|\,dt\leqslant 4 \tag{2.2}$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. Отметим, что замечание Г. Борга о том, что этот результат завершает критерий Ляпунова, представляется непонятным. Ниже мы укажем, что результат более сильный, чем (2.2), получен М. Г. Крейном [80].

3. Как показала Р. С. Гусарова, содержание заметки С. Валлаха [51] сводится к ошибочному доказательству предложения, являющегося не чем иным, как критерием Жуковского (0.3).

В 1949...1950 гг. Р. С. Гусарова получила условия устойчивости тривиального решения уравнения (0.1) : теоремы 3 и 4 [65] и теорема [68]. В этих работах критерий Ляпунова (0.2) впервые был распространен на последующие зоны устойчивости. Однако эти условия не являются Л-критериями в принятом здесь смысле, как показали В. А. Якубович и М. Г. Крейн, получив критерии более сильные, чем условия Р. С. Гусаровой.

4. Перейдем к обзору результатов В. А. Якубовича [71], [104]. Основываясь на анализе геометрического содержания результатов Флоке [1] и качественного поведения решений, В. А. Якубович доказывает теорему о строении функционального пространства коэффициентов канонической системы второго порядка (см. § 4 настоящего обзора), выделяя в нем подпространство функций-коэффициентов уравнения (0.1). Эта теорема, в применении к уравнению (0.1), позволяет упорядочить отыскание критериев устойчивости. В. А. Якубовичем доказаны следующие Л-критерии :

Критерий 1. Пусть $r_1(t)>0$, $r_2(t)>0$—дважды дифференцируемые периодические функции, нормированные условиями $\int_0^{\omega} r_1^{-2}(t)\,dt=\int_0^{\omega} r_2^{-2}(t)\,dt=1$.

Если для некоторого $n=0, 1, 2\ldots$ выполнены неравенства :

$$n^2\pi^2 r_1^{-4}(t)-\ddot{r}_1(t)r_1^{-1}(t)\underset{\not\equiv}{\leqslant}p(t)\underset{\not\equiv}{\leqslant}(n+1)^2\pi^2 r_2^{-4}(t)-\ddot{r}_2(t)r_2^{-1}(t),$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости[4]).

Отметим, что при любом $n=0, 1, 2, \ldots$ имеются функции p с отрицательными и сколь-угодно большим по модулю средним значенем $p_{ср}$, удовлетворяющие критерию 1. Это обстоятельство представляется нам весьма важным. Положив в критерии 1, $r_1(t)=r_2(t)=1/\sqrt{\omega}$, получим критерий Жуковского (0.3).

Как следствие критерия 1 (см. § 4 настоящего обзора). В. А. Якубович получает следующий критерий :

---

4) „$p(t)$ в уравнении (0.1) принадлежит n-й зоне устойчивости“ означает, что при $p_{ср}\geqslant 0$, точка $\lambda=1$ в уравнении (1.1) принадлежит n-й зоне устойчивости $\mathfrak{Y}_n$ (см. рис. 1). Если $p_{ср}<0$, то в уравнении (1.1) заменяем λ на $-\lambda$ и $p(t)$ на $-p(t)$. В формулировке критериев 1 . . . 6, приводимой В. А. Якубовичем, „$p(t)$ принадлежит n-й области устойчивости“. Определение областей устойчивости и неустойчивости в функциональном пространстве коэффициентов системы второго порядка канонического вида, дано в [71], [104], [116]. Уравнение (0.1) записывается как система канонического вида $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$, $\frac{d\dot{x}}{dt}=-p(t)x$.

Критерий 2. Пусть $n\pi/\omega < c < (n+1)\pi/\omega$ и

$$p_c^+(t)=c^2+[p(t)-c^2+|p(t)-c^2|]/2,\quad p_c^-(t)=c^2-[c^2-p(t)+|p(t)-c^2|]/2.$$

Если выполнены неравенства

$$n\pi < \frac{1}{c}\int_0^\omega p_c^-(t)\,dt \leqslant \frac{1}{c}\int_0^\omega p_c^+(t)\,dt < (n+1)\pi,$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости, $(n = 0, 1, 2,...)$.

Для получения следующих критериев устойчивости, В. А. Якубович применяет метод, основанный на установлении меры отклонения функции p от постоянной. С целью определения точных констант, фигурирующих в критериях 3, 4 и 5, решается ряд вариационных задач, основываясь на результатах Г. Борга [42], однако более общих, чем у Г. Борга.

Критерий 3. Пусть c_1 и c_2 — постоянные, удовлетворяющие неравенствам $n\pi/\omega < c_1$, $c_2 < (n+1)\pi/\omega$, $(n = 0, 1, 2,...)$.

Если выполнены неравенства

$$(2,3)\qquad \int_0^\omega |p(t)-c_1^2|\,dt < c_1(\omega c_1 - n\pi),\quad \int_0^\omega |p(t)-c_2^2|\,dt \leqslant 2c_2(n+1)\operatorname{ctg}\frac{\omega c_2}{2(n+1)},$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости.

Если в критерии 3 положить $c_1 = c_2 = \sqrt{p_{ср}}$, то правые части неравенств (2.3) будут в два раза меньше, чем правые части неравенств (2.1) Г. Борга. Поэтому в критерии 3 не следует брать $c_1 = c_2 = \sqrt{p_{ср}}$, а сначала испытывать функцию по критерию Г. Борга (2.1), и если желаемого ответа нет, то проверить, например, по критерию 3, но за c_1^2 и c_2^2 брать не среднее значение, а величину, близкую к минимуму или максимуму функции.

Критерий 4. Пусть $p(t) \underset{\equiv/\equiv}{\geqslant} n^2\pi^2/\omega^2$, $n\pi/\omega \leqslant c < (n+1)\pi/\omega$.

Если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |p(t)-c^2|\,dt \leqslant 2c(n+1)\operatorname{ctg}\frac{\omega c}{2(n+1)},$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости, $(n = 0, 1, 2,...)$. При $n = 0$ условие $p(t) \geqslant 0$ можно заменить условиями: $p(t) \not\equiv 0$, $p_{ср} \geqslant 0$.

При $c = n\pi/\omega$ получается частный вид критерия 4, определяющий устойчивость при выполнении условий

$$p(t) \underset{\equiv/\equiv}{\geqslant} n^2\pi^2/\omega^2,\quad \omega\int_0^\omega p(t)\,dt \leqslant n^2\pi^2 + 2\pi n(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)},\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

что при $n = 0$ переходит в критерий (0.2) Ляпунова. Для сравнения точных констант В. А. Якубовича $C_n = n^2\pi^2 + 2\pi n(n+1)\operatorname{tg}\{\pi/[2(n+1)]\}$, $(n = 0, 1, 2,...)$ и констант теоремы Р. С. Гусаровой [68] $C_n' = n^2\pi^2/2 + 4(n^2+n+1)$, $(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, приведены их численные значения (см. таблицу 1).

Таблица 1

n	0	1	2	3	4	5	6
C_n	4	22,44	61,24	120,06	198,75	297,25	415,54
C'_n	4	16,93	47,74	96,41	162,96	247,37	—

Как видно, все константы частного вида критерия 4, больше констант достаточного условия устойчивости, доставляемого теоремой Р. С. Гусаровой [68].

Критерий 5. Пусть $p(t) \leqslant (n+1)^2 \pi^2/\omega^2$, $n\pi/\omega < c \leqslant (n+1)\pi/\omega$.
$\equiv$

Если для некоторого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\int_0^\omega | p(t) - c^2 | \, dt \leqslant c(\omega c - n\pi),$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости.

В качестве c в критериях 4 и 5, так же как и в критерии 3, рекомендуется брать $p_{\text{наим.}}$ и $p_{\text{наиб.}}$ Полагая в критерии 5, $c = (n+1)\pi/\omega$, получим критерий 5а:

Если выполнены неравенства

$$p(t) \leqslant n^2\pi^2/\omega^2, \quad \omega \int_0^\omega [n^2\pi^2/\omega^2 - p(t)] \, dt \leqslant n\pi^2, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит $(n-1)$-й зоне устойчивости. Критерий 5а при $n = 1$ является улучшением теоремы 3 Р. С. Гусаровой [65].

Как указывает В. А. Якубович, в критериях 4 или 5, вместо условий $p(t) \geqslant n^2\pi^2/\omega^2$ или $p(t) \leqslant (n+1)^2\pi^2/\omega^2$, можно требовать соответственно выполнение условий:

$$p(t) \geqslant n^2\pi^2 r^{-4}(t) - \ddot{r}(t) r^{-1}(t) \quad \text{или} \quad p(t) \leqslant (n+1)^2\pi^2 r^{-4}(t) - \ddot{r}(t) r^{-1}(t),$$

где $r(t)$ - произвольная положительная, дважды дифференцируемая функция периода ω нормированная условием $\int_0^\omega r^{-2}(t)\, dt = 1$.

Критерий 6. Пусть $p_{\text{ср}} \geqslant 0$ и $p_{\text{наим.}} = -a^2 < 0$, тогда при выполнении условия

$$p_{\text{ср}} \leqslant \frac{2a}{\omega} \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2} - a^2$$

тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит нулевой зоне устойчивости.

Отметим, что критерии 1, 2, 3, 5 и 6 В. А. Якубовича могут применяться для знакопеременных функций. Как следствие из критериев 4 и 5 В. А. Якубовича получаются критерии 1 и 2 Ф. Шефке [103], опубликованные позже. Достоинством работы Ф. Шефке является простота доказательства.

В статье [114] В. А. Якубович распространил метод Ляпунова на случай знакопеременной функции p в уравнении (0.1). Основная идея заключается в рассмотрении для функций $p(t) \geqslant -a^2$ вместо уравнения (1.1) уравнения $\ddot{x} - a^2 x + \lambda [p(t) + a^2] x = 0$

и вычислении характеристической постоянной $A(\lambda)$ этого уравнения. Существенно, что для $A(\lambda)$ получается знакопеременный ряд. Используя замечание М. Г. Крейна удается доказать неравенство для отношения двух соседних членов этого ряда и после этого, применить анализ устойчивости, следуя мемуару Ляпунова [13]. Некоторые дополнения, которые полезно использовать при анализе устойчивости по способу В. А. Якубовича [114], мы приведем в § **38.**

В. А. Якубович [93], [104] поставил также следующую задачу: Пусть относительно функции p в уравнении (0.1) неизвестно ничего, кроме $p_{\text{наиб.}}$ (или $p_{\text{наим.}}$) и $p_{\text{ср}}$. Каковы должны быть эти числа, чтобы была справедлива оценка $\chi\{x\} \geqslant -\mu$, $(\mu>0)$, где $\chi\{x\}$ — характеристичное число решений уравнения (0.1) в смысле Ляпунова. Решение этой задачи может быть применено при выборе параметров регулируемой системы. Ответом (дающим точные условия) служат следующие теоремы В. А. Якубовича:

Теорема 1. Пусть $p(t) \leqslant a^2$ и $n\pi/\omega < a \leqslant (n+1)\pi/\omega$, $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ Если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega [a^2 - p(t)]\,dt \leqslant \min_{k=0,1,\ldots,n} a\left(a\omega - k\pi + \frac{\mu^2\omega^2}{a\omega - k\pi}\right),$$

то имеем $\chi\{x\} \geqslant -\mu$ (μ — положительное число). При $p(t) \leqslant 0$ будем иметь $\chi\{x\} \geqslant -\sqrt{-p_{\text{ср}}}$.

Теорема 2. Пусть $p(t) \geqslant B$, определим целое неотрицательное число n условиями: $n=0$ при $B \leqslant 0$, при $B > 0$ должно быть выполнено неравенство $n\pi/\omega \leqslant \sqrt{B} < (n+1)\pi/\omega$ и пусть μ — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $\mu^2 + B > 0$. Тогда если выполнено неравенство [5])

$$\int_0^\omega [p(t) - B]\,dt \leqslant \min_{k \geqslant n+1} \left\{2k\sqrt{B}\left[\operatorname{ch}(\mu\omega/k) + \cos(\omega\sqrt{B}/k)\right]/\sin(\omega\sqrt{B}/k)\right\},$$

то имеем $\chi\{x\} > -\mu$.

В частности, из теоремы 2 получается следующее дополнение к критерию (0, 2) Ляпунова. Пусть $p(t) \geqslant 0$ и $p_{\text{ср}} > 4/\omega^2$. Тогда имеем

$$\chi\{x\} > -\frac{2}{\omega} \max\left(k \operatorname{Arch} \frac{\omega}{2k}\sqrt{p_{\text{ср}}}\right),$$

где максимум берется по всем целым k, удовлетворяющим неравенству $1 \leqslant k < \omega\sqrt{p_{\text{ср}}}/2$.

5. Содержание статьи [99] М. Зламала сводится к доказательству двух теорем:

Теорема 1. Если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |p(t) - c^2|\,dt < 2c \min\{|\sin(c\omega/2)|, |\cos(c\omega/2)|\}, \tag{2.4}$$

где $n\pi/\omega < c < (n+1)\pi/\omega$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то все решения уравнения (0.1) ограничены $(-\infty < t < \infty)$.

Теорема 1 не является точным критерием устойчивости. В самом деле, положим в критерии 3 В. А. Якубовича $c_1 = c_2 = c$. Тогда, если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |p(t) - c^2|\,dt < 2c \min\left[c(c\omega - n\pi)/2,\ (n+1)\operatorname{ctg}\frac{c\omega}{2(n+1)}\right], \tag{2.5}$$

5) В заметке [93] в формулировке теоремы 2 имеется опечатка (пропущен множитель $2k\sqrt{B}$ в наших обозначениях). Заметим также, что при $B < 0$ следует перейти к гиперболическим функциям.

где $n\pi/\omega < c < (n+1)\pi/\omega$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то все решения уравнения (0.1) ограничены $(-\infty < t < \infty)$.

При четном n каждая из двух величин в правой части неравенства (2.5) больше соответственно расположенной величины в правой части неравенства (2.4), а при нечетном n, первая величина в правой части неравенства (2.5) больше второй величины в правой части неравенства (2.4) и соответственно, вторая величина больше первой.

Теорема 2. Пусть $p(t) \geqslant c^2 > 0$ и выполнено неравенство

$$\int_0^\omega p(t)\,dt < c^2\omega + 2c\,|\cos(c\omega/2)|, \tag{2.6}$$

где $2n\pi/\omega \leqslant c < (2n+1)\pi/\omega$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, или неравенство

$$\int_0^\omega p(t)\,dt < c^2\omega + 2c\,|\sin(c\omega/2)| \tag{2.7}$$

где $(2n+1)\pi/\omega \leqslant c < (2n+2)\pi/\omega$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$, то все решения уравнения (0.1) ограничены $(-\infty < t < \infty)$.

Теорема 2 также не является точным критерием устойчивости. Соответствующее точное условие следует из критерия 4 В. А. Якубовича. Именно, положим в последнем $p(t) \geqslant c^2$. Тогда, если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega p(t)\,dt < c^2\omega + 2c\,(k+1)\operatorname{ctg}\frac{c\omega}{2(k+1)}, \tag{2.8}$$

где $k\pi/\omega \leqslant c < (k+1)\pi/\omega$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$, то все решения уравнения (0.1) ограничены $(-\infty < t < \infty)$.

При $k=2n$ правая часть неравенства (2.8) больше правой части неравенства (2.6), а при $k=2n+1$ правая часть неравенства (2.8) больше правой части неравенства (2.7).

6. М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидский [79] установили следующий Л-критерий: Пусть $a^2 \leqslant p(t) \leqslant b^2$, $n\pi/\omega \leqslant a \leqslant (n+1)\pi/\omega$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$, тогда, если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega [p(t) - a^2]\,dt < 2(n+1)(b^2 - a^2)v_0$$

где v_0 — наименьший положительный корень уравнения $a\operatorname{ctg}\{a\omega/[2(n+1)] - av\} = b\operatorname{tg} bv$, то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

Частный вид критерия при $b^2 = \infty$ получается из критерия 4 В. А. Якубовича. Поскольку применение критерия М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского требует решения трансцендентного уравнения, то при достаточно больших b предпочтительнее применять критерий 4 В. А. Якубовича.

7. В статье [80] М. Г. Крейна развиваются методы получения Л-критериев устойчивости тривиального решения уравнения (0.1), основанные на работах Ляпунова о λ-зонах устойчивости. В этой статье впервые выяснено значение определения границ λ-зон устойчивости через собственные значения периодической и полупериодической краевых задач. Для получения Л-критериев приходится устанавливать оценки собственных значений, что проделывается на основе минимаксимальных свойств. М. Г. Крейн рассматривает краевую задачу $\ddot{x} + \lambda p(t)x = 0$, $x(0) = x(\omega) = 0$ и из оценки первого собственного значения получает следующий Л-критерий:

Критерий 1. Обозначим $p^+(t)=[p(t)+|p(t)|]/2$. Если $p(t)\leqslant H$, $p_{ср}\geqslant 0$ и $\varkappa(p^+_{ср}/H)>)(\omega p^+_{ср})^2/(4H)$, где $\varkappa(\tau)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{\varkappa}\ \mathrm{tg}\ \sqrt{\varkappa}=\tau/(1-\tau)$, $(0\leqslant\tau\leqslant 1)$, то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит нулевой зоне устойчивости. При достаточно малых τ функция $\varkappa(\tau)$ изображается рядом $\varkappa=\tau+2\tau^2/3+19\tau^3/45+236\tau^4/945+\ldots$

Таблица значений функции $\varkappa(\tau)$, приведена в [110].

Как следствие критерия 1, М. Г. Крейн указал критерий 1а. Если $p_{ср}\geqslant 0$ и $\omega\int_0^\omega p^+(t)\,dt\leqslant 4$, то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. Критерий 1а более сильный, чем критерий (2.4) Г. Борга, и, естественно, точнее, чем теорема 4, Р. С. Гусаровой [65], не являющаяся Л-критерием.

Условие А. М. Гольдин [81], представляющее одно из возможных расширений критерия (0.2) Ляпунова на класс неотрицательных периодических функций $p(t)$ с заданным $p_{наиб.}$, само не является Л-критерием [110]. Именно, если

$$p_{ср}\geqslant 0,\quad \int_0^\omega p^+(t)\,dt\leqslant 4+9{,}51/(\omega^2 p_{наиб.}),$$

тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво.

Критерий 2. Функция p предполагается неотрицательной $(0\leqslant h\leqslant p(t)\leqslant H)$ и вводятся обозначения $d=\omega(p_{ср}-h)/(H-h)$, $D=\omega(H-p_{ср})/(H-h)$, тогда если выполнены неравенства

$$\frac{4n^2}{hD^2}\Psi^2\left(\frac{H}{h},\frac{d}{D}\right)<1<\frac{4(n+1)^2}{Hd^2}\Psi^2\left(\frac{h}{H},\frac{D}{d}\right),\quad (n=0,1\,2,\ldots),$$

где $\Psi(s,\tau)$ - наименьший положительный корень уравнения $\mathrm{tg}\,\Psi=\sqrt{s}\ \mathrm{ctg}\ (\Psi\tau\sqrt{s})$, то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво и $p(t)$ принадлежит n-й зоне устойчивости.

Результаты М. Г. Крейна пересекаются с результатами В. А. Якубовича, В. Б. Лидского и М. Г. Нейгауз.

8. В заметке [105] В. И. Бурдина установила следующий Л-критерий[6]: Пусть $i_1,\ldots,i_s$ — точки максимумов, а $j_1,\ldots,j_s$ — точки минимумов функции $p(t)$, $(0\leqslant t<\omega)$. Если для некоторого $k=0,1,2,\ldots$ выполнены неравенства

$$k\pi<\int_0^\omega\sqrt{p(t)}\,dt-\frac{1}{2}\ln\frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)},\quad \int_0^\omega\sqrt{p(t)}\,dt+\frac{1}{2}\ln\frac{p(i_1)\ldots p(i_s)}{p(j_1)\ldots p(j_s)}<(k+1)\pi,$$

то тривиальное решение уравнения (0.1) устойчиво. В §4 будет показано, как получается этот критерий из критерия I, В. А. Якубовича.

§ 3. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0,\quad p(t+\omega)=p(t),\quad q(t+\omega)=q(t). \tag{0.4}$$

I. Известная подстановка $x=z\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t p(t_1)\,dt_1\right]$ приводит уравнение (0,4) к виду

6) В формулировке критерия в [105] все неравенства надлежит записать открытыми и коэффициент 1/4 в обоих неравенствах должен быть заменен на 1/2.

(3.1) $$\ddot{z}+p^*(t)z=0 \quad , \quad (p^*=q-p^2/4-\dot{p}/2).$$

Поскольку характеристичные числа связаны равенством $\chi\{x\}=\chi\{z\}+p_{ср}/2$, то при $\chi\{z\}>-p_{ср}/2$ тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, а при $\chi\{z\}<-p_{ср}/2$ неустойчиво. Известно [5], что $\chi\{z\}=-\omega^{-1}\operatorname{Re}\ln|\varrho|_{наиб.}$, где ϱ — корни квадратного уравнения $\varrho^2-2A^*\varrho+1=0$, а постоянная A^* соответствует уравнению (3.1). Поэтому при $p_{ср}<0$ тривиальное решение уравнения (0.4) неустойчиво, а при $p_{ср}>0$ тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, если $|A^*|>\operatorname{ch}(\omega p_{ср}/2)$ и неустойчиво, если знак неравенства будет обратным.

Если функция p^* неотрицательна, то анализ устойчивости можно провести, следуя Ляпунову [13] и учитывая сдвиг пределов для A^*.

При $p_{ср}=0$, устойчивость тривиального решения уравнения (0.4) равносильна устойчивости тривиального решения уравнения (3.1) и любое условие устойчивости или неустойчивости для уравнения (3.1) распространяется и на уравнение (0.4).

После этих замечаний перейдем к обзору достаточных условий устойчивости тривиального решения уравнения (0.4).

. 2. В статье [49] М. Я. Леонов установил, что при условиях $q(t)>0$, $p(t)>-q(t)/[2q(t)]$, тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво. При этом функции p и q могут и не быть периодическими. Это же условие иным путем было позднее получено и в статьях [62], [88], авторы которых не обратили внимания на результат М. Я. Леонова.

Заменой независимого переменного $\theta=\int_0^t\sqrt{q(t_1)}\,dt_1$ уравнение (0.4) при $q(t)>0$ может быть приведено к виду

(3.2) $$\frac{d^2x}{d\theta^2}+2\gamma(\theta)\frac{dx}{d\theta}+x=0,\quad\left(\gamma(\theta)=\left[\frac{p(t)}{\sqrt{q(t)}}+\frac{\dot{q}(t)}{2q(t)\sqrt{q(t)}}\right]_{t=t(\theta)}\right),$$

где γ — периодическая функция θ с периодом $L=\int_0^\infty\sqrt{q(t)}\,dt$.

Исследование устойчивости тривиального решения уравнения (3.2) содержится в работах М. Я. Леонова [54], [56], [57], [63], [98].

В заметке [63], функция γ предполагается нечетной. Тогда, если $\varphi_1(\theta)$ есть решение уравнения

(3.3) $$\frac{d\varphi}{d\theta}=1+\gamma(\theta)\sin 2\varphi$$

отвечающее начальному условию $\varphi_1(0)=0$, а функция Φ определяется формулой $\Phi(\theta)=\exp\left[-2\int_0^\theta\gamma(\theta_1)\cos 2\varphi_1(\theta_1)d\theta_1\right]$, то при условии $\sqrt{\Phi(L)}\cos\varphi_1(L)<1$, тривиальное решение уравнения (3.2) устойчиво, а при условии $\sqrt{\Phi(L)}\cos\varphi_1(L)>1$ неустойчиво. Приближенная формула для функции φ_1

$$\varphi_1(\theta)\approx\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{2}\,\psi(\theta)\int_0^\theta\gamma(\theta_1)\psi^{-1}(\theta_1)\sin 2\theta_1\,d\theta_1\right],$$

где $\psi(\theta)=\exp[2\int\gamma(\theta)\cos 2\theta\,d\theta]$.

Эта формула дает довольно точное приближение для функции $\varphi_1(\theta)$, когда

$$\left[\int_0^{\theta}\gamma(\theta_1)\,d\theta_1\right]_{\text{наиб.}} \leqslant \frac{1}{4}\ln 10 + \left[\int_0^{\theta}\gamma(\theta_1)\,d\theta_1\right]_{\text{наим.}},$$

что показано в статье [49]. Однако было важно сформулировать условия устойчивости, исходя из приближенной формулы для функции φ_1.

В заметке [98] М. Я. Леонов установил, что общий интеграл уравнения (3.2) может быть представлен в виде

$$x = [Av\sin\varphi^* + B(F\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)/v]\exp\left(-\int\gamma\,d\theta\right),\ (A,\ B = \text{const}),$$

где $\varphi^*(\theta)$ — частное решение уравнения (3.3), а

$$v(\theta) = \exp\left(-\int_0^{\theta}\gamma\cos^2\varphi^*d\theta\right),\quad F(\theta) = 2v^2\int_0^{\theta}\gamma v^{-2}\sin 2\varphi^*\,d\theta.$$

В этой же заметке даны приближенное решение уравнения (3.3) и приближенное вычисление функций v и F.

3. Основываясь на оценке характеристичного числа решений уравнения (3.1) (теоремы 1 и 2, § 2), В. А. Якубович получил [93], [104] следующие Л-критерии устойчивости тривиального решения уравнения (0.4) при $p_{\text{ср}} > 0$:

Первый критерий. а) Пусть $p^*(t) \leqslant 0$, тогда тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, если $p_{\text{ср}} > 2\sqrt{-p^*_{\text{ср}}}$.

б) Пусть $p^*(t) \leqslant a^2$ и $n\pi/\omega < a \leqslant (n+1)\pi/\omega$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, тогда тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво, если

$$\int_0^{\infty}[a^2 - p^*(t)]\,dt < \min_{k=0,1,\ldots,n}\left[a(a\omega - k\pi) + \frac{\omega^2 p^2_{\text{ср}}}{4(a\omega - k\pi)}\right].$$

Второй критерий. а) Пусть $p^*(t) \geqslant b^2$ и $n\pi/\omega \leqslant b \leqslant (n+1)\pi/\omega$, $(n=0, 1\ldots)$. Если

$$p^*_{\text{ср}} \leqslant b^2 + \frac{1}{\omega}\min_{k\geqq n+1}\frac{2bk}{\sin(b\omega/k)}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega p_{\text{ср}}}{2k} + \cos\frac{b\omega}{k}\right),$$

то тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво.

б) Пусть $p^*(t) \geqslant 0$. Если

$$p^*_{\text{ср}} \leqslant \min_{k\geqq 1}\frac{4}{\omega^2}k^2\operatorname{ch}^2\frac{\omega p_{\text{ср}}}{4k} = \begin{cases}\dfrac{4}{\omega^2}\operatorname{ch}^2\dfrac{\omega p_{\text{ср}}}{4} & \text{при } \omega p_{\text{ср}} \leqslant 4{,}795,\\ 0{,}5518\,p^2_{\text{ср}} & \text{при } \omega p_{\text{ср}} \geqslant 4{,}796,\end{cases}$$

то тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво.

в) Пусть $p^*(t) \geqslant -b^2$. Если $p_{\text{ср}} > 2b$ и

$$p^*_{\text{ср}} \leqslant -b^2 + \frac{1}{\omega}\min_{k\geqq 1}\frac{2bk}{\operatorname{sh}(b\omega/k)}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega p_{\text{ср}}}{2k} + \operatorname{ch}\frac{b\omega}{k}\right),$$

то тривиальное решение уравнения (0.4) асимптотически устойчиво.

§ 4. Перейдем к обзору работ по устойчивости тривиального решения системы второго порядка канонического вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = h_{12}(t)\,x_1 + h_{22}(t)\,x_2\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\,h_{11}(t)\,x_1 - h_{12}(t)\,x_2$$

или в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = J\,H(t)\,x$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; H(t+\omega) = H(t) = \| h_{ij}(t) \|_1^2, \; (h_{21} = h_{12}), \; J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

I. В заметке [70] М. Г. Крейн впервые выделил класс систем канонического вида положительного типа, характеризующийся тем, что их матрицам-функциям отвечает неотрицательная квадратичная форма $(H(t)\,a, a)$ (a — постоянный вектор), т. е.

$$h_{11}(t) \geqslant 0\,, \; h_{11}(t)\,h_{22}(t) - [h_{12}(t)]^2 \geqslant 0\,, \; (0 \leqslant t < \omega)\,,$$

положительная в среднем, т. е.

$$\int_0^\omega h_{11}(t)\,dt > 0\,, \int_0^\omega h_{11}(t)\,dt \int_0^\omega h_{22}(t)\,dt - \left[\int_0^\omega h_{12}(t)\,dt\right]^2 > 0.$$

Мы будем также говорить, что матрица-функция $H(t)$ неотрицательна и соответственно положительна в среднем [7]). Оказалось, что на системы канонического вида положительного типа переносятся основные из результатов Ляпунова для уравнений (0.1) и (1.1) при $p(t) \geqslant 0$. Эти исследования мы изложим в **§ 7**, а здесь приведем следующий Л-критерий М. Г. Крейна.:

Критерий I_2 [115]. Пусть матрица $H(t)$ неотрицательна и положительна в среднем. Тогда, если выполнено неравенство

$$\int_0^\omega |h_{12}(t)|\,dt + \sqrt{\int_0^\omega h_{11}(t)\,dt \int_0^\omega h_{22}(t)\,dt} < 2,$$

то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво. Критерий I_2 для уравнения (0.1) переходит в критерий (0.2) Ляпунова.

---

7) Система (4.1) ортогональным преобразованием может быть приведена к системе, у которой матрица $H(t)$ неотрицательна и положительна в среднем, причем устойчивость тривиального решения первоначальной системы равносильна устойчивости преобразованной системы. Именно, замена

$$y = \exp(\theta\,t\,J).x, \quad \left(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \; \theta = k\pi/\omega, \; k = 1, 2, \ldots\right)$$

приведет систему (4.1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = J\,H_1(t)\,y\,,$$

где периодическая симметрическая матрица $H_1(t)$ имеет вид:

$$H_1(t) = k\pi\,I/\omega + \exp(\theta\,t\,J)\,H(t)\exp(-\theta\,t\,J), \quad \left(I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right).$$

Поскольку собственные значения h_μ и $h_\mu^{(1)}$ матриц H и H_1 связаны соотношением $h_\mu^{(1)} = k\pi/\omega + h_\mu$, $(\mu = 1, 2)$, то при достаточно большом k, матрица $H_1(t)$ будет неотрицательна и положительна в среднем. Утверждение справедливо для линейной системы канонического вида с периодическими коэффициентами произвольного порядка.

2. Перейдем к обзору результатов В. А. Якубовича [71], [76], [104], [116]. Им проведен тонкий анализ топологической структуры множества троек периодических функций $h_{22}(t)$, $h_{12}(t)$, $h_{11}(t)$ (т.е. множества матриц $\mathbf{H}(t)$). Установлено, что множество матриц $\mathbf{H}(t)$, для которых все решения системы (4.1) органичены (не органичены) при $t \to \pm\infty$ распадается на счетное число открытых связных подмножеств — „областей устойчивости“ $\mathcal{O}_k$ („областей неустойчивости“ $\mathcal{K}_k$), $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ На границах располагаются матрицы $\mathbf{H}(t)$, для которых имеются периодические или полупериодические решения периода ω.

Обозначим φ_ξ угол поворота за время ω вектора — решения ξ системы (4.1) с компонентами x_2 и x_1. Из качественного поведения решений для различных областей устойчивости и неустойчивости, В. А. Якубович устанавливает следующее:

Для того чтобы $\mathbf{H}(t)$ принадлежало $\mathcal{O}_k$, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений $k\pi < \varphi_\xi < (k+1)\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для того чтобы $\mathbf{H}(t)$ принадлежало $\mathcal{K}_k$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись два решения ξ_1 и ξ_2 с углами поворота $\varphi_{\xi_1} > k\pi$, $\varphi_{\xi_2} < k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Из теоремы сравнения [76], [104], доказанной в [104] для линейной системы второго порядка без предположения периодичности коэффициентов системы, и сформулированного выше утверждения относительно углов поворота решений, вытекает следующая теорема:

Пусть $\mathbf{H}_1 \geqslant \mathbf{H}_2$ будет обозначать, что для любого постоянного вектора a, имеем $(\mathbf{H}_1 a, a) \geqslant (\mathbf{H}_2 a, a)$, т.е. квадратичная форма $((\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) a, a)$ неотрицательна.

Если выполнены неравенства $\mathbf{H}_1(t) \leqslant \mathbf{H}(t) \leqslant \mathbf{H}_2(t)$, $(0 \leqslant t < \omega)$, и матрицы $\mathbf{H}_1(t)$ и $\mathbf{H}_2(t)$ принадлежат k-й области устойчивости $\mathcal{O}_k$ (неустойчивости $\mathcal{K}_k$), то и матрица $\mathbf{H}$ принадлежит той же области устойчивости (неустойчивости).

В. А. Якубовичем доказываются следующие Л-критерии устойчивости и неустойчивости тривиального решения системы (4.1):

Критерий I. Пусть взята матрица $\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{Vmatrix}$, где α_0, β_0, γ_0—произвольные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0\gamma_0 - \beta_0^2 = 1$ и $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$—наименьший и наибольший корни уравнения $\det(\mathbf{H}(t) - h\mathbf{H}_0) = 0$. Если для некоторого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ выполнения неравенства

$$k\pi < \int_0^\omega h_{\min}(t)\,dt \leqslant \int_0^\omega h_{\max}(t)\,dt < (k+1)\pi,$$

то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво и $\mathbf{H}(t)$ принадлежит $\mathcal{O}_k$.

В частности, если $\alpha_0 = \gamma_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, то $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ суть наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $\mathbf{H}(t)$:

$$h_{\min}(t) = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2},$$

$$h_{\max}(t) = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2}.$$

Покажем, как из критерия I получается критерий В. И. Бурдиной (§ 2). Запишем уравнение (0.1) в виде системы

$$\frac{dy}{dt} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{Vmatrix} y, \quad \left(y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}\right). \tag{4.2}$$

Преобразование $z = \begin{Vmatrix} f & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} \end{Vmatrix} y$, $(f(t+\omega) = f(t) > 0)$, переведет систему (4.2) в систему

$$\frac{dz}{dt} = J H(t) z, \quad H(t) = \begin{Vmatrix} \frac{p}{f^2} & \frac{\dot{f}}{f} \\ \frac{\dot{f}}{f} & f^2 \end{Vmatrix}, \tag{4.3}$$

причем устойчивость тривиального решения обеих систем равносильна. Пусть $f(t) = p^{1/4}(t)$ тогда имеем

$$h_{\min}(t) = \sqrt{p} - \frac{1}{p^{1/4}} \left| \frac{d p^{1/4}}{dt} \right|, \quad h_{\max}(t) = \sqrt{p} + \frac{1}{p^{1/4}} \left| \frac{d p^{1/4}}{dt} \right|.$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty \frac{1}{p^{1/4}} \left| \frac{d p^{1/4}}{dt} \right| dt = \frac{1}{2} \ln \frac{p(i_1) \dots p(i_s)}{p(j_1) \dots p(j_s)},$$

где $i_1, \dots, i_s$ — точки максимумов, а $j_1, \dots, j_s$ — точки минимумов функции $p(t) > 0$ и применяя критерий I к системе (4.3), получим критерий В. И. Бурдиной [105].

Критерий II. Пусть матрица $H(t)$ неотрицательна. Обозначим $g(t) = \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 - 4h_{12}^2}$ и подсчитаем константы

$$A_{ij}^{\pm} = \int_0^\infty h_{ij}(t) \exp\left[\pm \int_0^\infty g(t_1)\, dt_1 \right] dt, \quad (i, j = 1, 2),$$

$$M^{\pm} = \frac{1}{2}(A_{11}^{\pm} + A_{22}^{\pm}) + \frac{1}{2}\sqrt{(A_{11}^{\pm} - A_{22}^{\pm})^2 + 4(A_{12}^{\pm})^2},$$

$$m^{\pm} = \frac{1}{2}(A_{11}^{\pm} + A_{22}^{\pm}) - \frac{1}{2}\sqrt{(A_{11}^{\pm} - A_{22}^{\pm})^2 + 4(A_{12}^{\pm})^2}.$$

Если для некоторого $k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ выполнены неравенства $k\pi < m^- \leqslant M^+ < (k+1)\pi$, то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво и $H(t)$ принадлежит $\mathcal{O}_k$, а если выполнены неравенства $M^- > k\pi$, $m^+ < k\pi$, то тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво и $H(t)$ принадлежит $\mathcal{H}_k$.

В случае неположительной матрицы $H(t)$, в предыдущих неравенствах следует заменить $M^{\pm}$ на $M^{\mp}$, $m^{\pm}$ на $m^{\mp}$.

В. А. Якубовичем [104], [116] предложен метод определения устойчивости тривиального решения системы (4.1), близкий по идее к методу М. И. Ельшина [40] для уравнения (0.1). Этот метод основывается на сравнении данной системы (1.1) с системой, у которой коэффициенты являются кусочно-постоянными функциями. Первый шаг предложенного метода приводит к следующему критерию:

Критерий III. Обозначим

$$\delta(t) = \int_0^t [h_{12}(t_1) - (h_{12})_{\text{ср}}]\, dt_1,$$

$$\alpha^+ = \sup\{h_{22}(t)\exp[-2\delta(t)]\},\quad \alpha^- = \inf\{h_{22}(t)\exp[-2\delta(t)]\},$$

$$\gamma^+ = \sup\{h_{11}(t)\exp[2\delta(t)]\},\quad \gamma^- = \inf\{h_{11}(t)\exp[2\delta(t)]\}.$$

Если $h_{22}(t)\exp[-2\delta(t)]$ или $h_{11}(t)\exp[2\delta(t)]$ не тождественные постоянные (иначе система (4.1) интегрируется в явной форме) и выполнены неравенства

$$k^2\pi^2/\omega^2 \leqslant \alpha^-\gamma^- - (h_{12})^2_{\text{ср}} \leqslant \alpha^+\gamma^+ - (h_{12})^2_{\text{ср}} \leqslant (k+1)^2\pi^2/\omega^2$$

и при этом суммы $\alpha^+ + \gamma^+$ и $\alpha^- + \gamma^-$ одинакового знака, то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво и $\mathbf{H}(t)$ принадлежит либо $\mathcal{O}_k$, если указанные суммы положительны, либо $\mathcal{O}_{-k-1}$, если отрицательны.

Если $\alpha^{\pm}\gamma^{\pm} - (h_{12})^2_{\text{ср}} < 0$, то тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво и $\mathbf{H}(t)$ принадлежит $\mathcal{H}_0$.

§ 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\,x_1 + p_{12}(t)\,x_2,\quad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\,x_1 + p_{22}(t)\,x_2. \tag{5.1}$$

В заметке [101] методами, близкими к применяемым В. А. Якубовичем [82], [104], В. И. Бурдина установила следующий критерий устойчивости тривиального решения системы (5.1): Обозначим

$$\mu_0 = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\omega}[p_{11}(t) + p_{22}(t)]\, dt,$$

а через $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы

$$\begin{Vmatrix} -p_{21} & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{22}) \\ \frac{1}{2}(p_{11}-p_{22}) & p_{12} \end{Vmatrix}.$$

Если при $\mu_0 < 0$ хотя бы для одного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, имеют место неравенства

$$k\pi - \int_0^{\omega} h_{\min}(t)\, dt \leqslant \arccos\frac{1 - \operatorname{ch}\mu_0\omega\cos\beta}{\operatorname{ch}\mu_0\omega - \cos\beta},$$

$$\int_0^{\omega} h_{\max}(t)\, dt + k\pi \leqslant \arccos\frac{1 - \operatorname{ch}\mu_0\omega\cos\beta}{\operatorname{ch}\mu_0\omega + \cos\beta},$$

то тривиальное решение системы (5.1) устойчиво. Полагая $\beta = 0$ или $\beta = \pi$ и совершая предельный переход при $\mu_0 \to 0$ и заменяя знаки $\leqslant$ на $<$, получим критерий I В. А. Якубовича (§ 4).

Глава II. Применение прямого метод Ляпунова к исследованию устойчивости [88], [117]

§ 6. А. М. Ляпунов [5] и Н. Г. Четаев [44] при исследовании устойчивости неустановившихся движений, рассматривали знакоопределенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами, полная производная по времени от которых, взятая в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения, представляла знакоопределенную функцию противоположного знака. Этот прием был применен в статьях Ш. Нугмановой [43] и М. А. Айзермана [74]. Здесь используется второй метод Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости по Ляпунову механической системы, описываемой линейным[8]) дифференциальным уравнением второго порядка с положительными ограниченными (не обязательно периодическими) коэффициентами.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{6.1}$$

где функции p и q — кусочно-непрерывные и вещественные для всех значений t, не меньших некоторого предела. Заменим уравнение (6.1) системой $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -q(t)x - p(t)y$. Зададимся определенно положительной квадратичной формой $V = (Ax^2 + 2xy + Cy^2)/2$, $(A > 0,\ AC > 1)$

Производная от V в силу исходной системы уравнений имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = -q(t)x^2 - [p(t) + Cq(t) - A]xy - [Cp(t) - 1]y^2$$

и будет определенно отрицательна в смысле Ляпунова, если $q(t) \geqslant m > 0$,

$$p^2(t) - 2Cp(t)q(t) + C^2q^2(t) - 2Ap(t) - 2(AC-2)q(t) + A^2 + \varepsilon C^2 \leqslant 0,\ (\varepsilon > 0).$$

Рассмотрим ε - параболу: $p^2 - 2Cpq + C^2q^2 - 2Ap - 2(AC-2)q + A^2 + \varepsilon C^2 = 0$. Вершина ε - параболы находится в точке

$$p_0 = (C^3 + A + 2C)/(1 + C^2)^2 + \varepsilon C^3/[4(AC-1)],$$

$$q_0 = C^2(AC-1)/(1 + C^2)^2 + \varepsilon C^2/[4(AC-1)],$$

а ось симметрий наклонена к оси p под углом $\alpha = \operatorname{arcctg} C$.

Рассматриваемая ε - парабола касается прямой $q = 0{,}25\,\varepsilon C^2(AC-1)^{-1}$ в точке $p = A + 0{,}25\,\varepsilon C^3(AC-1)^{-1}$ и прямой $p = C^{-1} + 0{,}25\,\varepsilon C^3(AC-1)^{-1}$ в точке $q = (AC-1)C^{-2} + 0{,}25\,\varepsilon C^2(AC-1)^{-1}$.

Условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости будут выполнены если точка с координатами $(p(t), q(t))$ не выйдет, начиная с некоторого момента времени, из ε - параболы.

Допустим, функции p и q таковы, что с некоторого момента времени:

$$0 < l \leqslant p(t) \leqslant L,\ 0 < m \leqslant q(t) \leqslant M. \tag{6.2}$$

Прямоугольник $(l, L; m, M)$ будет находиться внутри или на границе ε - параболы, если

$$l^2 - 2(A + mC)l + (A - mC)^2 + 4m + \varepsilon C^2 \leqslant 0, \tag{6.3}$$

$$L^2 - 2(A + mC)L + (A - mC)^2 + 4m + \varepsilon C^2 \leqslant 0, \tag{6.4}$$

---

8) Как заметил Д. Р. Меркин [112], рассматриваемое уравнение может быть и нелинейным, т. е. $p = p(t, x, \dot{x})$, $q = q(t, x, \dot{x})$. В этом случае будем считать, что в области $t \geqslant t_0$, $x^2 + \dot{x}^2 \leqslant H$ выполнены условия существования и единственности решения и условия (6.2).

$$l^2 - 2(A + MC)\,l + (A - MC)^2 + 4M + \varepsilon C^2 \leqslant 0. \tag{6.5}$$

Найдем точки пересечения ε - параболы с прямой $q = Q$

$$p_{1,2} = A + QC \mp \sqrt{4Q(AC - 1) - \varepsilon C^2}. \tag{6.6}$$

Будем предполагать, что положительные числа A и C выбраны таким образом, что $A \geqslant C^{-1} + 0{,}25\,\varepsilon C m^{-1}$. Тогда, разрешая неравенства (6.3)...(6.5) относительно l и L, получим соответственно

$$A + mC - \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant l, \tag{6.7}$$

$$L \leqslant A + mC + \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2}, \tag{6.8}$$

$$A + MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant l. \tag{6.9}$$

а) Выберем числа A и C таким образом, чтобы

$$mC - \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2}$$

или

$$4(AC - 1) \leqslant C\left[\sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} + \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2}\right].$$

Возведя последнее неравенство в квадрат, получим

$$8(AC - 1)^2 - 2(M + m)(AC - 1)C^2 + \varepsilon C^4 \leqslant$$

$$\leqslant C^2\sqrt{16Mm(AC - 1)^2 - 4(M + m)(AC - 1)\varepsilon C^2 + \varepsilon^2 C^4}.$$

Это неравенство можно возводить в квадрат при условии непротиворечивости неравенств (6.8) и (6.9), откуда следует

$$16(AC - 1)^2 - 8(M + m)(AC - 1)C^2 + (M - m)^2 C^4 + 4\varepsilon C^4 \leqslant 0,$$

что может быть записано в виде

$$A = 1/C + \left[M + m + 2(2\varkappa - 1)\sqrt{Mm - \varepsilon}\right]C/4, \quad (0 \leqslant \varkappa \leqslant 1). \tag{6.10}$$

Тогда

$$A + MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} = 1/C + [f(\varkappa, m) + \varepsilon/M]\,C/4,$$

где

$$f(\varkappa, Q) = \left[2\sqrt{Q} - \sqrt{(M + m) + 2(2\varkappa - 1)\sqrt{Mm - \varepsilon} - \varepsilon/Q}\right]^2.$$

Наименьшее значение левой части неравенства (6.9) достигается при $\varkappa = 1$, $C = 2[f(1, M) + \varepsilon M^{-1}]^{-1/2}$ и составляет

$$\left[A + MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2}\right]_{\text{наим.}} = \sqrt{f(1, M) + \varepsilon/M}/2 + f(1, M)/\left[2\sqrt{f(1, M) + \varepsilon/M}\right].$$

При достаточно малом ε, эта величина сколь угодно близка к $\sqrt{M} - \sqrt{m}$.

б) Выберем числа A и C таким образом, чтобы

$$MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant mC - \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2}.$$

Поступая аналогично а), придем к неравенству

$$16(AC - 1)^2 - 8(M + m)(AC - 1)C^2 + (M - m)^2 C^4 + 4\varepsilon C^4 \geqslant 0.$$

Разрешая его относительно A, получим

$$AC-1\leqslant\left[M+m-2\sqrt{Mm}-\varepsilon\right]C^2/4,\quad\left[M+m+2\sqrt{Mm}-\varepsilon\right]C^2/4\leqslant AC-1.$$

Положив $\varepsilon=0$, можно убедиться в том, что первое из двух последних неравенств является лишним. Таким образом, мы получаем для A выражение (6.10), но при условии $\varkappa\geqslant 1$. Тогда

$$A+mC-\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}=1/C+[f(\varkappa,m)+\varepsilon/m]\,C/4.$$

Наименьшее значение левой части неравенства (6.7) достигается при $\varkappa=1$, $C=2\left[f(1,m)+\varepsilon m^{-1}\right]^{-1/2}$ и составляет

$$\left[A+mC-\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}\right]_{\text{наим.}}=\sqrt{f(1,m)+\varepsilon/m}/2+f(1,m)/\left[2\sqrt{f(1,m)+\varepsilon/m}\right].$$

При достаточно малом ε эта величина сколь угодно близка к $\sqrt{M}-\sqrt{m}$.

Вычислим правую часть неравенства (6.8), подставив A из выражения (6.10):

$$A+mC+\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}=$$
$$=1/C+\left\{\left[2\sqrt{m}+\sqrt{M+m+2(2\varkappa-1)\sqrt{Mm}-\varepsilon}-\varepsilon/m\right]^2+\varepsilon/m\right\}C/4.$$

При $\varkappa=1$ и $C=2\left[f(1,M)+\varepsilon M^{-1}\right]^{-1/2}$ или $C=2\left[f(1,m)+\varepsilon m^{-1}\right]^{-1/2}$, эта величина при достаточно малом ε сколько угодно близка к $(M+2\sqrt{Mm}+5m)/(\sqrt{M}-\sqrt{m})$.

Таким образом, достаточное условие асимптотической устойчивости по Ляпунову механической системы, описываемой уравнением (6.1), где функции p и q удовлетворяют условиям (6.2), а число L условию

$$L<(M+2\sqrt{Mm}+5m)/(\sqrt{M}-\sqrt{m}) \tag{6.11}$$

есть

$$l>\sqrt{M}-\sqrt{m} \tag{6.12}$$

Для устойчивости неравенства (6.11) и (6.12) могут выполняться и со знаком равенства.

Граница снизу для l не может быть уменьшена, если для установления достаточных условий устойчивости, используется знакоопределенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами и на функции p и q не накладывается никаких иных условий, кроме (6.2) и (6.11).

Рассмотрим случаи, когда одна из функций в уравнении (6.1) постоянна.

1. Пусть $p(t)\equiv P$, $0<m\leqslant q(t)\leqslant M$; тогда условие (6.12) принимает вид

$$P>\sqrt{M}-\sqrt{m}. \tag{6.13}$$

Если ограничиться устойчивостью, то можно рассматривать $p(t)\equiv P$, $0\leqslant q(t)\leqslant M$; тогда условие неположительности $\dfrac{dV}{dt}$ будучи разрешено относительно $q(t)$, даст

$$\left[(A+P)C-2-2\sqrt{(AC-1)(PC-1)}\right]/C^2\leqslant q(t)\leqslant\left[(A+P)C-2+2\sqrt{(AC-1)(PC-1)}\right]/C^2.$$

Левая часть неравенства обращается в нуль только при $A=P$ и тогда наибольшая величина правой части неравенства достигается при $C=2/P$ и равна P^2. Отсюда заключаем, что при $P\geqslant\sqrt{M}$ выполнены условия теоремы Ляпунова об устойчивости.

2. Пусть $q(t)\equiv Q>0$, $l\leqslant p(t)\leqslant L$; тогда условие (6.12) принимает вид

$$l>0. \tag{6.14}$$

При $q(t)\equiv Q$ выбранное нами значение C неограниченно возрастает при сколь угодно малом ε, в чем можно убедиться непосредственно. При $q(t)\equiv Q>0$ условие определенной отрицательности $\dfrac{dV}{dt}$ может быть записано в виде (см. (6.6))

$$A + QC - \sqrt{4Q(AC-1) - \varepsilon C^2} \leqslant p(t) \leqslant A + QC + \sqrt{4Q(AC-1) - \varepsilon C^2}.$$

Покажем, что при любом $Q > 0$ левая часть неравенства может быть сделана сколь угодно малой, а правая часть неравенства сколь угодно большой (при одних и тех же $C > 0$, $A > C^{-1} + 0{,}25\,\varepsilon C Q^{-1}$). Положим $A = QC$, тогда

$$A + QC \mp \sqrt{4Q(AC-1) - \varepsilon C^2} = 2QC\left[1 \mp \sqrt{1 - 1/(QC^2) - \varepsilon/(4Q^2)}\right].$$

Таким образом, при достаточно большом C и достаточно малом ε, производная $\frac{dV}{dt}$ определенно отрицательна при любой ограниченной сверху и снизу положительной функции p и при любом $Q > 0$.

Вернемся к общему случаю при условии

$$L > (M + 2\sqrt{Mm} + 5m)/(\sqrt{M} - \sqrt{m}) \tag{6.15}$$

и проведем вычисления для устойчивости (т. е. при $\varepsilon = 0$). Заметим, что $\varkappa = 1$ соответствует тому, что неравенства (6.3) и (6.5) выполняются со знаком равенства.

Тогда, вычитая из равенства (6.5) равенство (6.3), получим $l^* = (M + m)C/2 - A + 2/C$.

Из соотношения (6.10), при $\varkappa = 1$ и $\varepsilon = 0$, $A = 1/C + (\sqrt{M} + \sqrt{m})^2 C/4$, следовательно,

$$l^* = (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2 C/4 + 1/C. \tag{6.16}$$

Вычитая из неравенства (6.8) равенство (6.7) и подставляя выражение для A, получим $L \leqslant 1/C + (M + 6\sqrt{Mm} + 9m)C/4$.

Пусть $L = (M + 2\sqrt{Mm} + 5m)/(\sqrt{M} - \sqrt{m}) + \Delta L$.

Тогда, если последнее неравенство выполняется со знаком равенства, получаем квадратное уравнение для C:

$$(M + 6\sqrt{Mm} + 9m)C^2/4 - [(M + 2\sqrt{Mm} + 5m)/(\sqrt{M} - \sqrt{m}) + \Delta L]C + 1 = 0. \tag{6.17}$$

Легко проверить, что при $\Delta L = 0$ больший корень уравнения (6.17) равен $2/(\sqrt{M} - \sqrt{m})$, что дает по формуле (6.16) $l^* = \sqrt{M} - \sqrt{m}$. При $\Delta L > 0$ граница снизу для l получается из формулы (6.16), куда вместо C надлежит подставить больший корень уравнения (6.17). Таким образом, при условиях (6.2) и (6.15) достаточное условие устойчивости принимает вид $l \geqslant l^*$.

§ 7. В качестве примера, иллюстрирующего первый частный случай **§ 6**, рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + [1 + q\cos(2t/\mu)]x = 0, \quad (a > 0,\ 0 < q < 1). \tag{7.1}$$

Это уравнение изучалось в связи с исследованием параметрического резонанса и разработкой теории электрических машин с параметрическим возбуждением [20]. К уравнению такого вида приводится ряд задач по динамической устойчивости упругих систем с учетом трения, пропорционального скорости [91].

Здесь $m = 1 - q$, $M = 1 + q$ и условие (6.13) дает для асимптотической устойчивости

$$a > \sqrt{1+q} - \sqrt{1-q}. \tag{7.2}$$

При этом область устойчивости на плоскости $a\,q$ больше области, указанной в [74], в частности, при q стремящемся к единице, граница для a стремится не к бесконечности, а к $\sqrt{2}$.

Покажем, что граница для a может быть уменьшена для некоторых значений параметров системы, если за функцию Ляпунова примем определенно-положительную форму, явно зависящую от времени.

Положим $V = x^2 + y^2 / q(t)$, $0 < q(t) \leqslant M$.
Производная от V в силу исходной системы уравнений (6.1) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{q(t)}\left[\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + 2p(t)\right]y$$

и будет неположительна, если

$$2p(t) \geqslant -\dot{q}(t)/q(t), \quad (t > t_0). \tag{7.3}$$

Условие устойчивости (7.3) было получено другим путем М. Я. Леоновым в статье [49].

Рассматриваемая нами функция Ляпунова связана с нормированной энергией E системы, а именно: $V = 2E/q(t)$. Покажем, что условие ограниченности сверху для функции $q(t)$ может быть в некоторых случаях снято. Замена независимого переменного $\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{q(\xi)}\, d\xi$, приводит уравнение (6.1) к виду:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + p^*(\tau)\frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad p^*(\tau) = \left[\frac{p(t)}{\sqrt{q(t)}} + \frac{\dot{q}(t)}{2q(t)\sqrt{q(t)}}\right]_{t=t(\tau)}.$$

Если $\mathcal{J} = \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{q(\xi)}\, d\xi$ сходится, то для устойчивости достаточно ограниченности $p^*(\tau)$, поскольку бесконечный промежуток $[t_0, \infty)$ на оси t переходит в конечный отрезок $[0, J]$ на оси τ. Если же $J = \infty$, то в силу (6.14) достаточными условиями асимптотической устойчивости являются $0 < l' \leqslant p^*(\tau) \leqslant L'$ а для устойчивости достаточно чтобы

$$p(t) + \dot{q}(t)/[2q(t)] \geqslant 0, \quad p(t)/\sqrt{q(t)} + \dot{q}(t)/[2q(t)\sqrt{q(t)}] \leqslant L', \quad (t > t_0).$$

Первое из двух последних неравенств совпадает с (7.3).

Достаточное условие устойчивости (7.3) для рассматриваемого нами примера запишется в виде $a \geqslant q \sin(2t/\mu)/\{\mu[1 + q\cos(2t/\mu)]\}$, что приводит после определения наибольшей величины правой части неравенства к условию

$$a \geqslant q/[\mu\sqrt{1-q^2}]. \tag{7.4}$$

Сравнивая неравенства (7.2) и (7.4), получим, что граница снизу для a, доставляемая неравенством (7.4), меньше границы снизу для a, доставляемой неравенством (7.2) только для

$$\mu > q/[\sqrt{1-q^2}(\sqrt{1+q} - \sqrt{1-q})] > 1.$$

2. Сделаем одно отступление, нужное для п. 4 этого параграфа. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{y} + b_1\dot{y} + b_2 y = 0, \quad (b_1 > 0,\ b_2 > 0).$$

Если начальное значение y отлично от нуля, то, не нарушая общности, можно считать его равным 1 (иначе бы мы ввели $\eta = y/y_0$), т. е. $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Введем новое независимое переменное $\tau = \sqrt{b_2}\, t$, тогда уравнение запишется в виде:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\beta\frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad \left(\beta = b_1/(2\sqrt{b_2}) > 0\right). \tag{7.5}$$

При начальных условиях $y_0=1$, $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)_0 = k = \frac{y_0}{\sqrt{b_2}}$, решение уравнения (7.5) может быть записано в виде:

$$y = (\beta + K)(1-\beta^2)^{-1/2} \exp(-\beta\tau) \sin\sqrt{1-\beta^2}\,\tau + \exp(-\beta\tau)\cos\sqrt{1-\beta^2}\,\tau, \quad (\beta \neq 1).$$

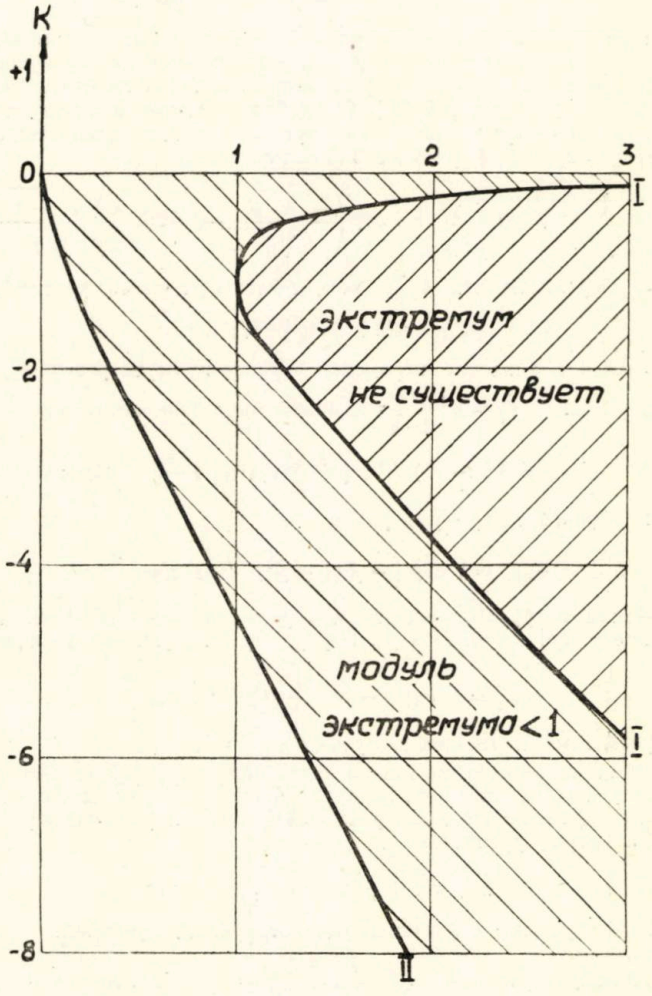


Рис. 2

Приравнивая нулю величину производной, можно найти первый экстремум для y:

$$(7.6) \qquad |y_{\text{экстр}}| = \sqrt{2\beta k + k^2 + 1}\,\exp\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\operatorname{arctg}\frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{\beta k + 1}\right), \quad (\beta \neq 1).$$

Нетрудно показать, что первый экстремум по модулю больше всех последующих экстремумов, если таковые существуют. Эклтремума не существует, если $2\beta k + k^2 + 1 < 0$, что соответствует точкам плоскости βk, лежащим внутри ветви гиперболы I–I (рис. 2).

Определим значения β и k, для которых $|y_{extr}|=1$; эти значения должны удовлетворять трансцендентному уравнению:

$$\sqrt{2\beta k+k^2+1}\,\exp\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{arctg}\frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{\beta k+1}\right)=1,$$

все корни которого расположены на кривой 0-II (см. рис. 2), имеющей асимптоту $k=-4\beta$. Таким образом, для значений β и k, заключенных между кривыми I-I и 0–II, первое экстремальное значение по модулю меньше начального значения. В незаштрихованной части полуплоскости βk ($\beta>0$) наибольшее значение модуля решения рассматриваемого уравнения при единичном начальном значении, определяется формулой (7.6). При $\beta>1$ формулу (7.6) удобнее записать в виде:

$$|y_{extr}|=\sqrt{2\beta k+k^2+1}\,\exp\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}\operatorname{Arth}\frac{k\sqrt{\beta^2-1}}{\beta k+1}\right). \tag{7.7}$$

При $\beta=1$ выражение для $|y_{extr}|$ может быть определено предельным переходом:

$$|y_{extr}|=(k+1)\exp[-k/(k+1)].$$

Если начальное значение переменного равно нулю, то решение уравнения (7.5) при начальных условиях $y_0=0$, $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)_0=k$ может быть записано в виде:

$$y=k(1-\beta^2)^{-1/2}\exp(-\beta\tau)\sin\sqrt{1-\beta^2}\,\tau,\quad(\beta\neq1).$$

Величина первого экстремума равна

$$y_{extr}=k\exp\left[-\beta(1-\beta^2)^{-1/2}\arccos\beta\right]. \tag{7.8}$$

Опять — таки нетрудно показать, что формула (7.8) определяет наибольшее по модулю значение y при $y_0=0$. При $\beta>1$ формулу (7.8) удобнее записать в виде:

$$y_{extr}=k\exp\left[-\beta(1-\beta^2)^{-1/2}\operatorname{Arch}\beta\right], \tag{7.9}$$

а при $\beta=1$ предельным переходом получим: $y_{extr}=k/e$.

3. Применяя теоремы о сравнении (см., например, [35]) и используя формулы п. 2, можно получить оценки наибольшего значения модуля решения для некоторых типов линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x}+a\dot{x}+q(t)x=0,\quad(a>0), \tag{7.10}$$

где $q(t)$ кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условиям: $0<m\leqslant q(t)\leqslant M$ при $0\leqslant t<\infty$.

Пусть начальные условия $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0>0$. Рассмотрим решение уравнения

$$\ddot{Y}+a\dot{Y}+mY=0 \tag{7.11}$$

при тех же начальных условиях. Из уравнений (7.10) и (7.11) следует:

$$\frac{dZ}{dt}+aZ=[q(t)-m]Yx,\quad(Z=\dot{Y}x-Y\dot{x}).$$

Поскольку $Z(0)=0$, решение последнего уравнения имеет вид:

$$Z = \exp(-at)\int_0^t \exp(at_1)\,[q(t_1)-m]\,Y(t_1)\,x(t_1)\,dt_1 .$$

Очевидно, при $a > 2\sqrt{m}$ функция Y положительна при $t > 0$, а функция x положительна на некотором интервале $(0, T)$. На этом интервале допустимо разделить выражение для Z на произведение Yx: $\dot{Y}/Y - \dot{x}/x = Z/(Yx)$, откуда следует, что $\frac{d}{dt}\ln(Y/x) > 0$, $(0 < t < T)$.

Следовательно, функция Y/x — возрастающая функция t, и так как $\lim\limits_{t\to 0} Y/x = 1$, то имеем $x < Y$ для всех $t > 0$.

Аналогично, рассматривая решение уравнения $\ddot{y} + a\dot{y} + My = 0$ при тех же начальных условиях, получим, что при $a > 2\sqrt{M}$ неравенство $x > y$ справедливо для всех $t > 0$.

Пусть теперь начальные условия $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Тогда, сохраняя за уравнениями сравнения те же обозначения, получим при начальных условиях $Y(0) = 1$, $\dot{Y}(0) = \dot{x}_0$ и при условии $a > 2\sqrt{m}$

$$Y = \exp(-at/2)\left[\operatorname{ch}\sqrt{a^2/4 - m}\,t + (2\dot{x}_0 + a)\cdot(a^2 - 4m)^{-1/2}\operatorname{sh}\sqrt{a^2/4 - m}\,t\right].$$

При условии $\dot{x}_0 \geqslant -(a + \sqrt{a^2 - 4m})/2$, функция Y положительна для $t \geqslant 0$. Применяя теорему о сравнении, получим $x < Y$ на интервале $(0, \infty)$. Аналогично, при начальных условиях $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = \dot{x}_0$ и при условии $a > 2\sqrt{M}$ имеем

$$y = \exp(-at/2)\left[\operatorname{ch}\sqrt{a^2/4 - M}\,t + (2\dot{x}_0 + a)(a^2 - 4M)^{-1/2}\operatorname{sh}\sqrt{a^2/4 - M}\,t\right].$$

При условии $\dot{x}_0 \geqslant -(a + \sqrt{a^2 - 4M})/2$, функция y положительна для $t \geqslant 0$ и $x > y$ на интервале $(0, \infty)$.

4. Вернемся к уравнению (7.1). Уравнения сравнения имеют вид:

$$\ddot{Y} + a\dot{Y} + (1-q)Y = 0, \quad \left(\beta = a/(2\sqrt{1-q}),\ k = \dot{x}_0/\sqrt{1-q}\right),$$

$$\ddot{y} + a\dot{y} + (1+q)y = 0, \quad \left(\beta = a/(2\sqrt{1+q}),\ k = \dot{x}_0/\sqrt{1+q}\right).$$

Применяя формулу (7.9), получим, что для случая $x_0 = 0$ и при $a > 2\sqrt{1-q}$

$$|x|_{\text{наиб.}} < \frac{|\dot{x}_0|}{\sqrt{1-q}}\exp\left[-\frac{a}{\sqrt{a^2 - 4(1-q)}}\operatorname{Arch}\frac{a}{2\sqrt{1-q}}\right],$$

а при $a > 2\sqrt{1+q}$ имеем, кроме того,

$$|x|_{\text{наиб.}} > \frac{|\dot{x}_0|}{\sqrt{1+q}}\exp\left[-\frac{a}{\sqrt{a^2 - 4(1+q)}}\operatorname{Arch}\frac{a}{2\sqrt{1+q}}\right].$$

При начальных условиях $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 > 0$ при $a > 2\sqrt{1-q}$, имеем по формуле (7.7)

$$x_{\text{наиб.}} < \sqrt{\frac{a\dot{x}_0 + \dot{x}_0^2}{1-q} + 1}\,\exp\left[-\frac{a}{\sqrt{a^2 - 4(1-q)}}\operatorname{Arth}\frac{\dot{x}_0\sqrt{a^2 - 4(1-q)}}{a\dot{x}_0 + 2(1-q)}\right],$$

а при $a > 2\sqrt{1+q}$, кроме того, также:

$$x_{\text{наиб.}} > \sqrt{\frac{a\dot{x}_0 + \dot{x}_0^2}{1+q} + 1}\ \exp\left[-\frac{a}{\sqrt{a^2-4(1+q)}}\ \operatorname{Arth}\frac{\dot{x}_0\sqrt{a^2-4(1+q)}}{a\dot{x}_0 + 2(1+q)}\right].$$

5. В заключение рассмотрим уравнение Ламе в алгебраической форме (см. [67], стр. 660):

$$(7.12)\quad \ddot{x} + \left[1/(t-a_1)+1/(t-a_2)+1/(t-a_3)\right]\dot{x}/2 + (At+B)\,x/\left[4(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\right] = 0,$$

где a_1, a_2, a_3, A, B — действительные числа. Начиная с достаточно большого момента времени, условие $0 < q(t) \leqslant M$ выполнено при $A > 0$. Условие (7.3) можно представить в виде $2p(t) + \frac{d}{dt}\ln q(t) \geqslant 0$ что в нашем примере означает $A/(At+B) \geqslant 0$.

Следовательно, при $A > 0$ тривиальное решение уравнения (7.12) устойчиво. В, силу п. 2, § 3, гл. I, эта устойчивость—асимптотическая.

Глава III. Распространение метода Ляпунова оценки характеристической постоянной на общий случай системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами [106], [97], [120], [134]

Докторская диссертация Ляпунова [5] и статья Жуковского [6] вызвали целый ряд работ по устойчивости периодических движений, когда уравнения возмущенного движения имеют коэффициенты, являющиеся периодическими функциями времени. Завершающие исследования Ляпунова по вопросам устойчивости, связанным с уравнением $y'' + p(x)y = 0$, ($p(x)$ — периодическая), опубликованы в заметке [12], мемуаре [13] и статье [8]. Некоторые технические задачи, приводящиеся к линейному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, и библиография до 1952 г., приведены в книге И Г. Малкина [83] и статье Е. А. Бейлина и Г. Ю. Джанелидзе [91]. В этой главе некоторые из результатов Ляпунова распространяются на систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

§ 8. Пусть уравнения первого приближения возмущенного движения динамической системы даны в виде

$$(8.1)\qquad \frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\,x_1 + p_{12}(t)\,x_2,\quad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\,x_1 + p_{22}(t)\,x_2,$$

где p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — кусочно-непрерывные, действительные, периодические функции действительного переменного t с периодом ω, при этом функции p_{12} и p_{21} знакопостоянны [9]), хотя и могут обращаться в нуль в конечном числе точек отрезка $[0, \omega]$.

---

9) Заметим, что любая система уравнений (8.1) ортогональным преобразованием с периодическими коэффициентами может быть приведена к виду, когда функции на побочной диагонали матрицы коэффициентов знакопостоянны. Запишем системы (8.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x,\quad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ P(t+\omega) = P(t) = \| p_{ij}(t) \|_1^2\right)$$

и выполним подстановку

Обозначим $\int_0^\omega p_{11}\,dt = \alpha$, $\int_0^\omega p_{22}\,dt = \beta$ и, не нарушая общности, предположим $\alpha \geqslant \beta$.

Подстановками

$$x_1 = x\,\exp\left[\int_0^t p_{11}(t_1)\,dt_1\right],\quad x_2 = y\exp\left\{\int_0^t\left[p_{22}(t_1) + \frac{\alpha-\beta}{\omega}\right]dt_1\right\},$$

система (8.1) преобразуется к виду

$$\frac{dx}{dt} = Py\,,\quad \frac{dy}{dt} = Qx - ay\,,\ (a = (\alpha-\beta)/\omega \geqslant 0)\,, \tag{8.2}$$

где через P и Q обозначены знакопостоянные периодические функции

$$P(t) = p_{12}(t)\exp\left\{\int_0^t\left[p_{22}(t_1) - p_{11}(t_1) + a\right]dt_1\right\},$$

$$Q(t) = p_{21}(t)\exp\left\{\int_0^t\left[p_{11}(t_1) - p_{22}(t_1) - a\right]dt_1\right\}.$$

Так как экспоненты, входящие в выражения для x_1 и x_2, удовлетворяют условиям леммы VII ([5] п. **6**), то характеристичные числа решений исходной системы (8.1) и преобразованной системы (8.2) связаны равенством $\chi\{x_1, x_2\} = \chi\{x, y\} - \alpha/\omega$.

Поскольку система уравнений с периодическими коэффициентами является правильной, то при $\chi\{x, y\} > \alpha/\omega$ невозмущенное движение устойчиво, а при $\chi\{x, y\} < \alpha/\omega$ неустойчиво ([5], п. **13**). После этого замечания будем рассматривать системы (8.2) и лишь при анализе устойчивости вернемся к исходной системе (8.1).

Обозначим через $x^{(1)}(t)$, $y^{(1)}(t)$ решение системы (8.2), определяемое начальными условиями $x^{(1)}(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = 0$, и через $x^{(2)}(t)$, $y^{(2)}(t)$ — определяемое начальными условиями $x^{(2)}(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 1$. Тогда уравнение для характеристичного показателя ϱ системы запишется в виде (см. [5], пп. **46, 48**):

$$\varrho^2 - [1+\exp(-a\omega)]A\varrho + \exp(-a\omega) = 0\,,\ \left(A = [x^{(1)}(\omega) + y^{(2)}(\omega)]\right)/[1+\exp(-a\omega)]\,. \tag{8.3}$$

Для вычисления характеристической постоянной A, следуя Ляпунову, вместо системы (8.2), рассмотрим систему $\frac{dx}{dt} = Py$, $\frac{dy}{dt} = -\varepsilon Qx - ay$.

Ляпунов доказал ([5], п. **48**) что всякое решение последней системы, определяемое начальными условиями, не зависящими от ε, может быть разложено по возраста-

---

$$y = \exp(2k\pi t J/\omega)\,x\,,\quad \left(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$$

В новых переменных, система уравнений принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = R(t)\,y\,,\quad R(t) = \|r_{ij}(t)\|_1^2 = 2k\pi J/\omega + \exp(2k\pi t J/\omega)\,P(t)\exp(-2k\pi t J/\omega).$$

Матрица-функция $R(t)$ периодическая и при достаточно большом по модулю k функции r_{12} и r_{21} знакопостоянны.

ющим целым и положительным степеням ε, что приводит к абсолютно сходящемуся ряду, каково бы ни было t и каково бы ни было ε. Запишем решение в виде

$$x = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots, \quad y = y_0 + y_1\varepsilon + y_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{8.4}$$

подставим в последную систему и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{dx_0}{dt} = Py_0, \quad \frac{dy_0}{dt} = -ay_0, \tag{8.5}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = Py_n, \quad \frac{dy_n}{dt} = -Qx_{n-1} - ay_n, \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{8.6}$$

Интегрируя системы уравнений (8.6) при начальных условиях $x_n(0) = y_n(0) = 0$ получим

$$x_n(t) = \int_0^t P_1 y_n(t_1)\,dt_1, \quad y_n(t) = -e^{-at}\int_0^t e^{at_1} Q_1 x_{n-1}(t_1)\,dt_1, (n = 1,2,\ldots), \tag{8.7}$$

условившись в обозначениях $P_i = P(t_i)$, $Q_i = Q(t_i)$. Интегрируя систему (8.5) при начальных условиях $x_0^{(1)}(0) = 1$, $y_0^{(1)}(0) = 0$ и при начальных условиях $x_0^{(2)}(0) = 0$, $y_0^{(2)}(0) = 1$, будем иметь также

$$x_0^{(1)}(t) = 1, \quad y_0^{(1)}(t) = t; \; x_0^{(2)}(t) = \int_0^t e^{-at_1} P_1\,dt_1, \; y_0^{(2)}(t) = e^{-at}.$$

Таким образом, интересующие нас выражения $x_n^{(1)}(\omega)$ и $y_n^{(2)}(\omega)$ запишутся в виде:

$$x_n^{(1)}(\omega) = (-1)^n \int_0^{\omega} e^{-at_1} P_1\,dt_1 \int_0^{t_1} e^{at_2} Q_2\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-2}} e^{-at_{2n-1}} P_{2n-1}\,dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} e^{at_{2n}} Q_{2n}\,dt_{2n},$$

$$y_n^{(2)}(\omega) = (-1)^n e^{-a\omega} \int_0^{\omega} e^{at_1} Q_1\,dt_1 \int_0^{t_1} e^{-at_2} P_2\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-2}} e^{at_{2n-1}} Q_{2n-1}\,dt_{2n-1} \int_0^{t_{2n-1}} e^{-at_{2n}} P_{2n}\,dt_{2n}.$$

Положив в разложениях (8.4) $t = \omega$, $\varepsilon = -1$, для характеристической постоянной A получим из (8.3) бесконечный ряд

$$A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n, \quad (A_n = [x_n^{(1)}(\omega) + y_n^{(2)}(\omega)] / [1 + \exp(-a\omega)]). \tag{8.8}$$

Можно получить оценки для A_n, исходя из верхней и нижней границ функций P и Q, которые дают представление о быстроте сходимости ряда (8.8). Однако этого проделывать не будем, поскольку нам предстоит отыскать оценку сверху для отношения двух соседних членов ряда, что будем называть основным неравенством. Предварительно проведем некоторые преобразования выражения A_n.

§ 9. Начнем с преобразования выражения

$$(9.1)\qquad A_1 = -(1+e^{-a\omega})^{-1}\left(\int_0^{\omega} e^{-at_1} P_1\,dt_1 \int_0^{t_1} e^{at_2} Q_2\,dt_2 + e^{-a\omega}\int_0^{\omega} e^{at_1} Q_1\,dt_1 \int_0^{t_1} e^{-at_2} P_2\,dt_2\right).$$

Изменив порядок интегрирования в первом интеграле и введя функцию $\psi(t) = \int_0^t e^{-at_1} P_1\,dt_1$ запишем выражение (9.1) в виде ($\psi_i \equiv \psi(t_i)$)

$$A_1 = -(1+e^{-a\omega})^{-1}\int_0^{\omega} e^{at_1}\,[\psi(\omega)-(1-e^{-a\omega})\,\psi_1]\,Q_1\,dt_1.$$

Перейдем к преобразованию выражений $x_n^{(1)}(\omega)$ и $y_n^{(2)}(\omega)$. Считая, что переменные $t_1, .., t_{2n}$ удовлетворяют неравенствам $\omega > t_1 > \ldots > t_{2n} > 0$, проведем интегрирование для $x_n^{(1)}(\omega)$ относительно переменных $t_1, t_3, ..., t_{2n-1}$ и для $y_n^{(2)}(\omega)$ — относительно переменных $t_2, t_4, ..., t_{2n}$. Тогда, вводя для n оставшихся переменных обозначения $t_1, ..., t_n$, получим

$$x_n^{(1)}(\omega)=(-1)^n\int_0^{\omega} dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{at_1}\,[\psi(\omega)-\psi_1]e^{at_2}(\psi_1-\psi_2)\ldots e^{at_n}(\psi_{n-1}-\varphi_n)\,Q_1\ldots Q_n\,dt_n,$$

$$y_n^{(2)}(\omega)=(-1)^n\int_0^{\omega} dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{-a\omega}\,e^{at_1}\,e^{at_2}(\psi_1-\psi_2)\,e^{at_3}(\psi_2-\psi_3)$$

$$\ldots e^{at_n}(\psi_{n-1}-\psi_n)\,\Psi_n\,Q_1\ldots Q_n\,dt_n,\ (\psi_i\equiv\psi(t_i)).$$

Следовательно, будем иметь

$$A_n=(-1)^n(1+e^{-a\omega})^{-1}\int_0^{\omega} dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{at_1}(\psi_1-\psi_2)\ldots$$

$$\ldots e^{at_{n-1}}(\psi_{n-1}-\psi_n)\,e^{at_n}[\psi(\omega)-\psi_1+\psi_n e^{-a\omega}]\,Q_1\ldots Q_n\,dt_n.$$

Следуя Ляпунову ([13], пп. **5,6**) и сохраняя его обозначения, рассмотрим $n+1$ переменное $t_1, \ldots, t_{n+1}$ и, обозначая через $j_1, \ldots, j_k$ какие-нибудь числа последовательности $1, \ldots, n+1$, положим вообще

$$\exp(at_{j_1})(\psi_{j_1}-\psi_{j_2})\,Q_{j_1}\ldots\exp(at_{j_{k-1}})(\psi_{j_{k-1}}-\psi_{j_k})\,Q_{j_{k-1}}\times$$

$$\times\exp(at_{j_k})[\psi(\omega)-\psi_{j_1}+\psi_{j_k}e^{-a\omega}]\,Q_{j_k}=[j_1,\ldots,j_k].$$

Выражения для A_n и A_1 примут теперь вид

$$A_n = (-1)^n (1 + e^{-a\omega})^{-1} \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} [1, \ldots, n]\, dt_n ,$$

$$A_1 = -(1 + e^{-a\omega})^{-1} \int_0^{\omega} [n+1]\, dt_{n+1} . \tag{9.2}$$

Отсюда для произведения $(-1)^{n+1}(1 + e^{-a\omega})^2 A_n A_1$ имеем выражение

$$\int \ldots \int [1, \ldots, n]\,[n+1]\, dt_1 \ldots dt_{n+1} .$$

Кратный интеграл $(n+1)$-го порядка распространен на все значения переменных $t_1, \ldots, t_{n+1}$, удовлетворяющие неравенствам $\omega > t_1 \ldots > t_n > 0$, $\omega > t_{n+1} > 0$. Этот интеграл равен сумме интегралов одинакового вида, которые получаются, если предположить, что переменное t_{n+1} находится в одном из промежутков $(0, t_n), (t_n, t_{n-1}), \ldots, (t_2, t_1), (t_1, \omega)$, т. е.

$$(-1)^{n+1}(1 + e^{-a\omega})^2 A_n A_1 = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_n} [1, \ldots, n]\,[n+1]\, dt_{n+1} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \int_{t_\nu}^{t_\nu - 1} [1, \ldots, n]\,[n+1]\, dt_{n+1}, \qquad (t_0 \equiv \omega).$$

Рассматривая один из интегралов под знаком суммы, произведем круговую перестановку обозначений переменных от t_ν до t_{n+1}, будем иметь тогда для этого интеграла выражение

$$\int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{\nu-2}} dt_{\nu-1} \int_0^{t_{\nu-1}} dt_{\nu+1} \int_0^{t_{\nu+1}} dt_{\nu+2} \ldots \int_0^{t_n} dt_{n+1} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} [1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \nu+2, \ldots, n+1]\,[\nu]\, dt_\nu$$

и, изменив порядок интегрирования, запишем его в виде

$$\int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_n} [1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \nu+2, \ldots, n+1]\,[\nu]\, dt_{n+1} .$$

Таким образом, для рассматриваемого произведения, будем иметь

$$(-1)^{n+1}(1 + e^{-a\omega})^2 A_n A_1 = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_n} \sum_{\nu=1}^{n+1} [j_1 \ldots, j_n]\,[\nu]\, dt_{n+1} ,$$

где $j_1, \ldots, j_n$ — числа последовательности $1, \ldots, n+1$ за исключением числа ν, расположенные в порядке возрастания. Для дальнейших преобразований суммы, являющейся подинтегральной функцией в предыдущей формуле, и для некоторых упрощений

чисто формального вида вместо этой суммы рассмотрим ее отношение к выражению $[1, \ldots, n+1]$, положив $\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{[j_1, \ldots, j_n][\nu]}{[1, \ldots, n+1]} = S$. Тогда имеем

$$(9.3) \qquad (-1)^{n+1}\left(1+e^{-a\omega}\right)^2 A_n A_1 = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_n} [1, \ldots, n+1]\, S\, dt_{n+1}$$

и выпишем развернутое выражение для S:

$$(9.4) \quad S = \frac{\psi(\omega)-\psi_2+\psi_{n+1}e^{-a\omega}}{\psi(\omega)-\psi_1+\psi_{n+1}e^{-a\omega}} \cdot \frac{\psi(\omega)-\psi_1\left(1-e^{-a\omega}\right)}{\psi_1-\psi_2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\psi_{i-1}-\psi_{i+1}}{\psi_{i-1}-\psi_i} \cdot \frac{\psi(\omega)-\psi_i\left(1-e^{-a\omega}\right)}{\psi_i-\psi_{i+1}} +$$
$$+ \frac{\psi(\omega)-\psi_{n+1}\left(1-e^{-a\omega}\right)}{\psi_n-\psi_{n+1}} \cdot \frac{\psi(\omega)-\psi_1+\psi_n e^{-a\omega}}{\psi(\omega)-\psi_1+\psi_{n+1}e^{-a\omega}}.$$

Основное неравенство для членов ряда (8.8) будет получено из оценки выражения (9.4). Сначала рассмотрим частный случай и убедимся, что для него указанная оценка получится лучшей, чем в общем случае.

§ 10. Допустим сначала, что $P(t) \equiv 1$. В этом случае $\psi(t) = [1 - \exp(-at)]/a$ и выражение (9.4) запишется в виде

$$S = [1 - \exp(-a\omega)] \sum_{i=1}^{n+1} \{1 - \exp[-(\xi_{i-1}+\xi_i)]\} / \{[1-\exp(-\xi_{i-1})][1-\exp(-\xi_i)]\},$$

где обозначено $a(t_1-t_2) = \xi_1, \ldots, a(t_n-t_{n+1}) = \xi_n, a(\omega-t_1+t_{n+1}) = \xi_{n+1}, (\xi_0 \equiv \xi_{n+1})$.

Заметим, что сумма положительных величин $\xi_1 + \ldots + \xi_{n+1} = a\omega$.

Найдем минимум $S/[1 - \exp(-a\omega)]$, для чего составим

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = S/[1 - \exp(-a\omega)] + \lambda(\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1} - a\omega)$$

и вычислим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\nu} = -2\exp(-\xi_\nu)/[1-\exp(-\xi_\nu)]^2 + \lambda, \quad (\nu = 1, \ldots, n+1).$$

Поскольку все $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\nu}$ выражаются одинаковым образом, то будем иметь $\xi_\nu = a\omega/(n+1)$. Отсюда находим

$$\left(S/[1-\exp(-a\omega)]\right)_{\text{наим.}} = (n+1)\operatorname{cth}\{a\omega/[2(n+1)]\}.$$

Обращаясь к равенству (9.3) и замечая, что в силу (9.2) имеем

$$A_{n+1} = (-1)^{n+1}[1+\exp(-a\omega)]^{-1} \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_n} [1, \ldots, n+1]\, dt_{n+1},$$

приходим к неравенству

$$[1+\exp(-a\omega)]\,|A_n|\,|A_1| > (n+1)[1-\exp(-a\omega)]\,|A_{n+1}|\operatorname{cth}\{a\omega/[2(n+1)]\}.$$

Заменяя $n+1$ на n, запишем последнее неравенство в виде

$$|A_n| < \operatorname{cth}(a\omega/2)\operatorname{th}[a\omega/(2n)]\,|A_1|\,|A_{n-1}|/n,\ (n \geqslant 2). \tag{10.1}$$

Заметим, что при $0 \leqslant a < \infty$ имеем $1/n \leqslant \operatorname{cth}(a\omega/2)\ \operatorname{th}[a\omega/(2n)] < 1$.
В пределе при $a=0$ неравенство (0.1) обращается в неравенство (26) Ляпунова [13].

§ 11. В общем случае заметим, что Ψ и $\dot{\Psi}$ имеют знак, совпадающий со знаком P, а значит, и со знаком p_{12}. Так как значения независимого переменного убывают с возрастанием номера, то каждая из дробей в выражении (9.4) больше единицы; следовательно, $S > n+1$.
Обращаясь к равенству (9.3), получим $[1 + \exp(-a\omega)]\,|A_n|\,|A_1| > (n+1)\,|A_{n+1}|$.
Заменяя $n+1$ на n, запишем последнее неравенство в виде

$$|A_n|\,[1 + \exp(-a\omega)]\,|A_1|\,|A_{n-1}|/n,\quad (n \geqslant 2). \tag{11.1}$$

Впрочем, можно получить результат, в некоторых случаях более точный. Заметим, что

$$\frac{\psi(\omega) - \psi_2 + \psi_{n+1}\exp(-a\omega)}{\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_{n+1}\exp(-a\omega)} \geqslant \frac{\psi(\omega) - \psi_2 + \psi_{n+1}}{\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_{n+1}},$$

$$\frac{\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_n \exp(-a\omega)}{\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_{n+1}\exp(-a\omega)}\{\psi(\omega) - \psi_{n+1}[1 - \exp(-a\omega)]\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_n}{\psi(\omega) - \psi_1 + \psi_{n+1}}\psi(\omega)\exp(-a\omega),$$

$$\psi(\omega) - \psi_i[1 - \exp(-a\omega)] \geqslant \psi(\omega)\exp(-a\omega),\ (i = 1,\ldots,n+1),$$

где знак равенства возможен только при $a=0$. Обозначим

$$\psi_1 - \psi_2 = \eta_1, \ldots, \psi_n - \psi_{n+1} = \eta_n, \psi(\omega) - \psi_1 + \psi_{n+1} = \eta_{n+1}$$

и заметим, что $\eta_1 + \ldots + \eta_{n+1} = \psi(\omega)$. Обращаясь к выражению (9.4), получим

$$S \quad \psi(\omega)\,e^{-a\omega}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\eta_{i-1}+\eta_i}{\eta_{i-1}\eta_i},\quad (\eta_0 \equiv \eta_{n+1}).$$

Для определения минимума правой части составим

$$F(\eta_1,\ldots,\eta_{n+1}) = \psi(\omega)\,e^{-a\omega}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\eta_{i-1}+\eta_i}{\eta_{i-1}\eta_i} + \lambda[\eta_1 + \cdots + \eta_{n+1} - \psi(\omega)]$$

и вычислим $\dfrac{\partial F}{\partial \eta_\nu} = -\dfrac{2\psi(\omega)\exp(-a\omega)}{\eta_\nu^2} + \lambda,\ (\nu = 1,\ldots,n+1)$.

Опять-таки все $\dfrac{\partial F}{\partial \eta_\nu}$, выражаются одинаковым образом и поэтому будем иметь $\eta_\nu = \psi(\omega)/(n+1)$. Отсюда находим $S \geqslant 2(n+1)^2\exp(-a\omega)$ и в силу равенства (9.3), получим

$$[1 + \exp(-a\omega)]\,|A_n|\,|A_1| > 2(n+1)^2 \exp(-a\omega)\,|A_{n+1}|.$$

Заменяя $n+1$ на n, запишем последнее неравенство в виде

$$|A_n| < [1 + \exp(-a\omega)]\,|A_1|\,|A_{n-1}|/(2n^2), \quad (n \geqslant 2). \tag{11.2}$$

При $a = 0$ неравенство (11.2) обращается в неравенство (26) Ляпунова [13]. Неравенство (11.2) сильнее неравенства (11.1) при $n > [\exp(a\omega)]/2$, что всегда выполнено для $a\omega < \ln 4$.

§ **12.** Проведем сначала анализ устойчивости при $a = 0$. В этом случае можно непосредственно применить результаты А. М. Ляпунова [5], [13], на что, повидимому, не обратили внимания А. В. Юровский [55] и С. М. Макаров [73]. Именно, введем новое независимое переменное $\tau = \int_0^t P_1\,dt_1$.

Тогда система уравнений (8.2) запишется в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + p(\tau)\,x = 0, \quad \left(p(\tau) = -\left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]_{t=t(\tau)}\right).$$

Можно показать, что обращение функции $P(t)$ в нуль в отдельных точках отрезка $[0, \omega]$ не существенно. В этом случае ($a = 0$) можно повторить все рассуждения Ляпунова ([13], пп. **3...19**), исходя из системы (8.2). Поэтому, для простоты изложения, будем считать функцию $P(t)$ знакоопределенной, а следовательно, функцию $p(\tau)$ — знакопостоянной. При $a = 0$ корни характеристичного уравнения (8.3) равны $\varrho_{1,2} = A \mp \sqrt{A^2 - 1}$.

Если $|A| < 1$, то корни комплексные и $|\varrho_{1,2}| = 1$, если же $|A| \geqslant 1$, то корни действительные и $|\varrho|_{\text{наиб.}} = |A| + \sqrt{A^2 - 1}$. Характеристичное число решений системы (1.2) равно ([5], п. **46**) $\chi\{x,y\} = -\omega^{-1}\,\mathrm{Re}\,\ln|\varrho|_{\text{наиб.}}$.

Если $|A| < 1$, то $\ln|\varrho_{1,2}| = 0$ и при $a < 0$ невозмущенное движение устойчиво, а при $a > 0$ — неустойчиво. При $a = 0$ невозмущенное движение устойчиво в первом приближении.

Если $|A| > 1$, то при условии $\ln\left(|A| + \sqrt{A^2 - 1}\right) < -a$ или $a < 0$, $|A| < \operatorname{ch} a$ невозмущенное движение устойчиво. При условии $\ln\left(|A| + \sqrt{A^2 - 1}\right) > -a$, что всегда выполнено для $a \geqslant 0$ и приводит к условию $|A| > \operatorname{ch} a$ для $a < 0$ — невозмущенное движение неустойчиво.

§ **13.** Переходим к определению областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров системы при $a = 0$. При $a > 0$ невозмущенное движение неустойчиво. При $a \leqslant 0$ рассмотрим два возможных случая:

а) Допустим функции p_{12} и p_{21} разных знаков. Тогда $A_n > 0, (n = 1,2,...)$ и ряд (8·8) является знакопеременным. Из неравенства (11.2) следует, что если $A_1 \leqslant n^2$, то непременно будем иметь $A_{n-1} > A_n > A_{n+1} > \ldots$.

1. Если $A_1 \leqslant 4$, то имеем $1 - A_1 < A < 1$ и при $1 - A_1 \geqslant -\operatorname{ch} a$ будем иметь $A > -\operatorname{ch} a$. Таким образом, неравенство

$$A_1 \leqslant (4;\ 1 + \operatorname{ch} a)_{\text{наим.}} \tag{13.1}$$

определяет первую область устойчивости.

2. Если $A_1 \leqslant 9$, то имеем $1 - A_1 < A < 1 - A_1 + A_2$ и при $1 - A_1 + A_2 \leqslant \operatorname{ch} a$, будем иметь $A < \operatorname{ch} a$. Поэтому условия $A_2 - (\operatorname{ch} a - 1) \leqslant A_1 \leqslant (9;\ +1 \operatorname{ch} a)_{\text{наим.}}$ могут, вообще говоря, расширить первую область устойчивости.

3. Если $A_1 \leqslant 16$, то имеем $1 - A_1 + A_2 - A_3 < A < 1 - A_1 + A_2$. При $1 - A_1 + A_2 \leqslant -\operatorname{ch}\alpha$ будем иметь $A < -\operatorname{ch}\alpha$ и неравенства

$$A_1 \leqslant 16\,,\quad A_2 \leqslant A_1 - 1 - \operatorname{ch}\alpha \tag{13.2}$$

определяют первую область неустойчивости. Основываясь на исследованиях Ляпунова ([13], п. **12**), можно показать, что при $\operatorname{ch}\alpha \leqslant 5$ условие $A_1 \leqslant 16$ является лишним.

При $1 - A_1 + A_2 - A_3 \geqslant -\operatorname{ch}\alpha$ будем иметь $A > -\operatorname{ch}\alpha$, а при $1 - A_1 + A_2 \leqslant \operatorname{ch}\alpha$ также и $A < \operatorname{ch}\alpha$. Поэтому неравенства

$$(4\,;\ 1 + \operatorname{ch}\alpha)_{\text{наим.}} < A_1 \leqslant 16,\quad A_2 \leqslant A_1 + \operatorname{ch}\alpha - 1,\quad A_3 \leqslant 1 + \operatorname{ch}\alpha - A_1 + A_2 \tag{13.3}$$

определяют вторую область устойчивости.

4. Если $A_1 \leqslant 25$, то имеем $1 - A_1 + A_2 - A_3 < A < 1 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4$. При $1 - A_1 + A_2 - A_3 \geqslant \operatorname{ch}\alpha$ будем иметь $A > \operatorname{ch}\alpha$, и неравенства

$$A_1 \leqslant 25\,,\quad A_2 \geqslant \operatorname{ch}\alpha - 1 + A_1 + A_3 \tag{13.4}$$

определяют вторую область неустойчивости. Для дальнейшего построения областей устойчивости и неустойчивости потребуются члены ряда (8.7), следующие за A_3. Заметим, что при $\alpha = 0$ предпочтительнее пользоваться непосредственно анализом Ляпунова, сформулированным в ([13], пп. **13, 14**) в законченном виде.

б) Допустим функции p_{12} и p_{21} одинаковых знаков. В этом случае $\operatorname{sign} A_n = (-1)^n$ и ряд (8.8) — знакоположительный.

Следовательно, $A > 1$ и невозмущенное движение неустойчиво не только при $\alpha > 0$, но и при $\alpha = 0$. При $\alpha < 0$ невозмущенное движение устойчиво, если $A < \operatorname{ch}\alpha$ и неустойчиво, если $A > \operatorname{ch}\alpha$.

В силу неравенства (11.2) имеем

$$A_2 < A_1^2/4\,,\ |A_3| < |A_1|A_2/9 < |A_1|^3/36, \ldots, |A_n| < |A_1|^n/(n!)^2$$

и, следовательно, будем иметь $A < \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} |A_1|^n$.

Неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} |A_1|^n \leqslant \operatorname{ch}\alpha \tag{13.5}$$

определяет первую область устойчивости.

С другой стороны, $A > 1 + |A_1|$ и поэтому неравенство

$$|A_1| \geqslant \operatorname{ch}\alpha - 1 \tag{13.6}$$

определяет первую область неустойчивости.

Если применять неравенство (11.2), начиная с члена A_3, то имеем

$$|A_3| < |A_1|A_2/9,\ A_4 < A_1A_3/16 < A_1^2A_2/144, \ldots, |A_n| < 4A_2|A_1|^{n-2}/(n!)^2$$

и, следовательно, неравенство $1 + |A_1| + 4A_2 \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} |A_1|^{n-2} \leqslant \operatorname{ch}\alpha$, определяет вторую область устойчивости.

С другой стороны, $A > 1 + |A_1| + A_2$ и поэтому неравенство

$$A_2 \geqslant \operatorname{ch}\alpha - 1 - |A_1| \tag{13.7}$$

определяет вторую область неустойчивости. Дальнейшее построение областей устойчивости и неустойчивости очевидно.

§ 14. Пусть уравнения первого приближения возмущенного движения приводятся к одному уравнению второго порядка $\ddot{x} + \delta \sin t\, \dot{x} + \gamma x = 0$, $(\delta > 0,\ \gamma > 0)$.

Сделав замену независимого переменного $\tau = \int_0^t \exp\left[\delta\,(\cos t_1 - 1)\right] dt_1$, запишем уравнение в виде $x'' + p(\tau)\, x = 0$, $(p(\tau) = \gamma \exp\left\{-2\delta\,[\cos t(\tau) - 1]\right\})$, (штрихи обозначают дифференцирование по τ).

Ляпунов вывел ([13], п. **19**) самые простые формулы для вычисления A_1, A_2, A_3 для случая двучленного уравнения, когда известно разложение функции p в ряд Фурье. Именно, представим функцию p в виде $p = C + \Phi''(\tau)$, где C — некоторая постоянная и $\Phi''(\tau)$ — производная второго порядка периодической функции $\Phi(\tau)$, удовлетворяющей условию $\int_0^T \Phi(\tau)\, d(\tau) = 0$ (T — период функции p). Тогда будем иметь

$$A_1 = \frac{1}{2} CT^2, \quad A_2 = \frac{1}{24} C^2 T^4 - \frac{1}{2} T \int_0^T \Phi'^2\, d\tau,$$

$$A_3 = \frac{1}{720} C^3 T^6 - \frac{1}{12} CT^3 \int_0^T \Phi'^2\, d\tau + 2CT \int_0^T \Phi^2\, d\tau - T \int_0^T \Phi\Phi'^2\, d\tau.$$

В нашем примере $C = \gamma \exp(2\delta)$, $\Phi'' = \gamma \exp(2\delta)\left\{\exp\left[2\delta \cos t(\tau)\right] - 1\right\}$. Разложим функцию $\exp(\delta \cos t)$ в ряд Фурье: $\exp(\delta \cos t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt$, где коэффициенты a_k определяются степенными рядами по δ

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1 + \delta^2/4 + \delta^4/64 + \delta^6/2304 + \delta^8/147456 + \ldots,\\
&a_1 = \delta + \delta^3/8 + \delta^5/192 + \delta^7/9216 + \ldots,\\
&a_2 = \delta^2/4 + \delta^4/48 + \delta^6/1536 + \delta^8/92160 + \ldots,\\
&a_3 = \delta^3/24 + \delta^5/384 + \delta^7/15360 + \ldots,\ a_4 = \delta^4/192 + \delta^6/3840 + \delta^8/184320 + \ldots,\\
&a_5 = \delta^5/1920 + \delta^7/46080 + \ldots,\ a_6 = \delta^6/23040 + \delta^8/645120 + \ldots,\\
&a_7 = \delta^7/322560 + \ldots,\ a_8 = \delta^8/5160960 + \ldots
\end{aligned} \tag{14.1}$$

Тогда имеем

$$\Phi' = \int_0^\tau \Phi''(\tau)\, d\tau = \int_0^t \Phi''[\tau(t)] \frac{d\tau}{dt}\, dt = -2\gamma \exp\delta \cdot \sum_{\varkappa = 1,3,\ldots} \frac{a_\varkappa}{\varkappa} \sin \varkappa t.$$

Аналогично, вычисляя функцию Φ, получим следующее выражение:

$$\Phi = \gamma \sum_{\varkappa = 1,3,\ldots} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_\varkappa a_k}{\varkappa(\varkappa + k)} \cos[(\varkappa + k)t - 1] - \gamma \sum_{\substack{\varkappa = 1,3,\ldots \\ \varkappa \neq k}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_\varkappa a_k}{\varkappa(\varkappa - k)} [\cos(\varkappa - k)t - 1].$$

Выпишем выражения для A_1 и A_2: $A_1 = 2\pi^2 a_0^2 \gamma$,

$$A_2 = \frac{2}{3}\pi^4 a_0^4 \gamma^2 - 4\pi^2 a_0 \gamma^2 \left[\sum_{\varkappa=1,3,\ldots} \frac{a_\varkappa^2}{\varkappa^2} \left(a_0 - \frac{a_{2\varkappa}}{2} \right) + \sum_{\lambda=3,5,\ldots} \sum_{\substack{\varkappa=1,3,\ldots \\ \lambda>\varkappa}} \frac{a_\varkappa a_\lambda}{\varkappa\lambda} (a_{\lambda-\varkappa} - a_{\lambda+\varkappa}) \right].$$

Первая область неустойчивости в плоскости $\gamma\delta$, определяемая неравенством (13.2) заштрихована на рис. 3. Для определения областей устойчивости полезно также привести рассматриваемое уравнение к двучленному известной заменой искомой функции.

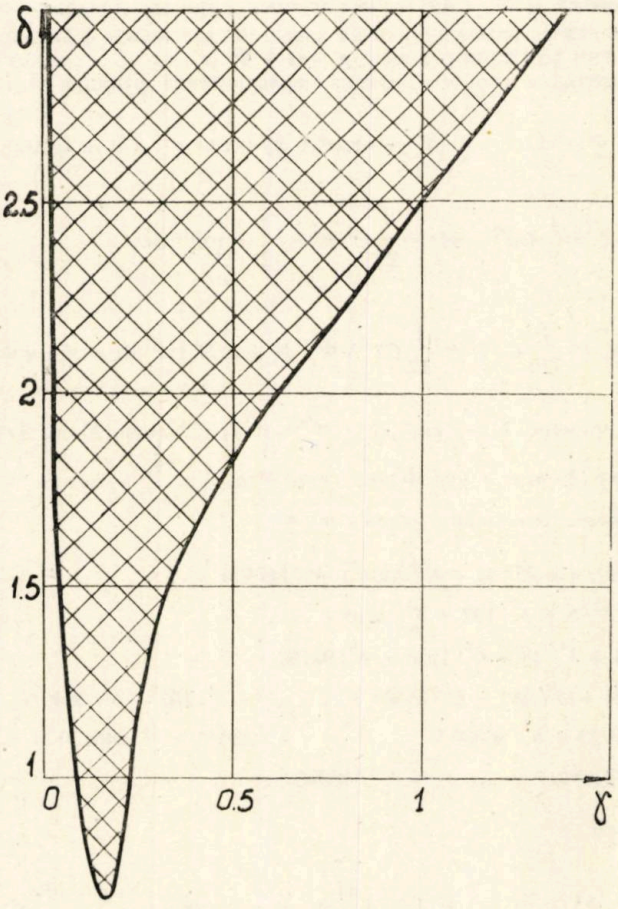


Рис. 3.

§ 15. Рассмотрим диссипативную механическую систему с одной степенью свободы с постоянной диссипацией энергии и периодической восстанавливающей силой.

Возмущенное движение названной системы описывается уравнением, получаемым из (8.2) при $P(t) \equiv 1$, $\ddot{x} + a\dot{x} + p(t)\,x = 0$, $(p(t) = -Q(t) \geqslant 0)$.

Корни характеристичного уравнения будут по абсолютной величине меньше единицы только тогда, когда $|A| < 1$. При этом условии невозмущенное движение асимп-

тотически устойчиво ([5], теорема I, п. **55**), если же $|A| > 1$, то один из корней по абсолютной величине больше единицы и невозмущенное движение неустойчиво ([44], п.**72**).

При последовательном вычислении $A_1, A_2, A_3, \ldots$ удобнее исходить не из формулы (9.2), а из формул (8.7), которые после интегрирования по частям дают

$$x_n(t) = \frac{1}{a}\int_0^t p_1 x_{n-1}(t_1)\,dt_1 - \frac{1}{a}e^{-at}\int_0^t e^{at_1} p_1 x_{n-1}(t_1)\,dt_1;$$

$$y_n(t) = e^{-at}\int_0^t e^{-at_1} p_1\,dt_1 \int_0^t y_{n-1}(t_2)\,dt_2.$$

Отсюда, в силу (8.8), имеем

$$A_n = \frac{1}{(1+e^{-a\omega})\,a}\left[\int_0^\omega p_1 x_{n-1}(t_1)\,dt_1 - e^{-a\omega}\int_0^\omega e^{at_1} p_1 x_{n-1}(t_1)\,dt_1 + \right.$$

$$\left. + a\,e^{-a\omega}\int_0^\omega e^{at_1} p_1\,dt_1 \int_0^{t_1} y_{n-1}(t_2)\,dt_2\right].$$

Укажем выражения для первых трех членов ряда (8.8):

$$A_1 = \frac{1}{a}\operatorname{th}\frac{a\omega}{2}\int_0^\omega p\,dt, \quad A_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\int_0^\omega p\,dt\right)^2 - \frac{e^{-a\omega}}{(1+e^{-a\omega})\,a^2}\int_0^\omega e^{-at} p\,dt\int_0^\omega e^{at} p\,dt -$$

$$(15.1) \qquad - \frac{1}{a^2}\operatorname{th}\frac{a\omega}{2}\int_0^\omega e^{-at} p\,dt\int_0^t e^{at_1} p_1\,dt_1,$$

$$A_3 = \frac{1}{a^3}\operatorname{th}\frac{a\omega}{2}\int_0^\omega p\,dt\int_0^t p_1\,dt_1\int_0^{t_1} p_2\,dt_2 + \frac{1}{(1+e^{-a\omega})a^3}\left[-K_1(p;\omega,a) + e^{-a\omega}K_1(p;\omega,a) + \right.$$

$$\left. + K_2(p;\omega,a) - e^{-a\omega}K_2(p;\omega,-a) - K_3(p;\omega,a) + e^{-a\omega}K_3(p;\omega,-a)\right]$$

где $p_i \equiv p(t_i), (i = 1,2)$ и

$$K_1(p;\omega,a) = \int_0^\omega p\,dt\int_0^t e^{-at_1} p_1\,dt_1\int_0^{t_1} e^{at_2} p_2\,dt_2, \quad K_2(p;\omega,a) = \int_0^\omega e^{-at} p\,dt\int_0^t p_1\,dt_1\int_0^{t_1} e^{at_2} p_2\,dt_2,$$

$$K_3(p;\omega,a) = \int_0^\omega e^{-at} p\,dt\int_0^t e^{at_1} p_1\,dt_1\int_0^{t_1} p_2\,dt_2.$$

Неравенство (10.1) запишется теперь в виде

$$A_n < \frac{A_{n-1}}{na} \operatorname{th} \frac{a\omega}{2n} \int_0^\omega p\,dt, \quad (n \geqslant 2). \tag{15.2}$$

Неравенство (15.2) дает для отношения A_n / A_{n-1} верхний предел, более точный чем неравенство (3.1) [97]. Поэтому применение неравенства (15.2) при исследовании условий $|A| < 1$ и $|A| > 1$ позволяет уточнить указанные в § **3** [97] области устойчивости и неустойчивости. Из (15.2) следует, что если $\int_0^\omega p\,dt \leqslant na \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2n}$, то непременно будем иметь $A_{n-1} > A_n > A_{n+1} > \ldots$ и условия (3.3) ... (3.5) [97] запишутся в уточненном виде. Именно, неравенства

$$\int_0^\omega p\,dt \leqslant 4a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{8}, \quad A_2 \leqslant A_1 - 2, \tag{15.3}$$

определяют первую область неустойчивости; неравенства

$$2a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{2} < \int_0^\omega p\,dt \leqslant 4a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{8}, \quad A_2 \leqslant A_1, \quad A_3 \leqslant 2 - A_1 + A_2, \tag{15.4}$$

определяют вторую область устойчивости и неравенства

$$\int_0^\omega p\,dt \leqslant 5a \operatorname{cth} \frac{a\omega}{10}, \quad A_2 \geqslant A_1 + A_3, \tag{15.5}$$

определяют вторую область неустойчивости. Дальнейший анализ можно провести лишь с рассмотрением членов, следующих за A_3.

Что касается неравенства, определяющего первую область устойчивости, то оно имеет вид

$$\operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \int_0^\omega p\,dt \leqslant 2a \tag{15.6}$$

и было получено впервые Р. Эйнауди; этим и заканчивается его статья [35] (см. также [97]).

§ 16. 1. Рассмотрим в качестве примера уравнение (7.1)

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + [1 + \lambda \cos(2\pi t/\omega)]\, y = 0, \quad (\alpha > 0,\ 0 < \lambda < 1). \tag{16.1}$$

Если ввести новое независимое переменное $\tau = 2\pi t/\omega$, то уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + a\frac{dy}{d\tau} + C(1 + \lambda \cos\tau)\, y = 0, \quad \left(a = \frac{\omega}{2\pi}\alpha, \quad C = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\right).$$

Первые три члена ряда (8.8), вычисленные по формулам (15.1), будут

$$A_1 = \frac{2\pi C}{a}\,\mathrm{th}\,\pi a, \quad A_2 = \frac{2\pi^2 C^2}{a^2} - \frac{\pi C^2}{a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right)\mathrm{th}\,\pi a,$$

$$A_3 = -\frac{2\pi^2 C^3}{a^2}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right) +$$

$$+\frac{2\pi C^3}{a}\left[\frac{2}{a^4} + \frac{2\pi^2}{3a^2} + \frac{2\lambda^2}{a^2(1+a^2)} - \frac{\lambda^2}{a^2(1+a^2)^2} + \frac{\lambda^2}{(1+a^2)^2}\right]\mathrm{th}\,\pi a.$$

Первая область устойчивости в пространстве параметров (C, a, λ) определяется неравенством (15.6)

(16.2) $$\pi C \leqslant a\,\mathrm{cth}\,\pi a.$$

Вторая область устойчивости определяется неравенствами (15.4)

(16.3) $$a\,\mathrm{cth}\,\pi a < \pi C \leqslant 2a\,\mathrm{cth}\,(\pi a/4),$$

(16.4) $$\frac{\pi C}{a} - \left[1 + \left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right)\frac{C}{2}\right]\mathrm{th}\,\pi a \leqslant 0,$$

(16.5) $$\left\{1 + \left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right)\frac{C}{2} + \left[\frac{2}{a^4} + \frac{2\pi^2}{3a^2} + \frac{2\lambda^2}{a^2(1+a^2)} - \frac{\lambda^2}{a^2(1+a^2)^2} + \frac{\lambda^2}{(1+a^2)^2}\right]C^2\right\}\mathrm{th}\,\pi a - \frac{a}{\pi C} - \frac{\pi C}{a} - \frac{\pi C^2}{a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right) \leqslant 0.$$

Можно убедиться, что условия (15.3) и (15.5) невозможны в нашем случае, т. е. если для рассматриваемого примера имеем $A < -1$, или $A > 1$, то это можно было бы установить только рассмотрением членов ряда (8.8), следующих за A_3.

В § **6** были установлены два достаточных условия устойчивости. Для уравнения (16.1) эти условия имеют вид (см. (7.2) и (7.4):

(16.6) $$a \geqslant \sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda},$$

(16.7) $$a \geqslant \pi\lambda/\left(\omega\sqrt{1-\lambda^2}\right).$$

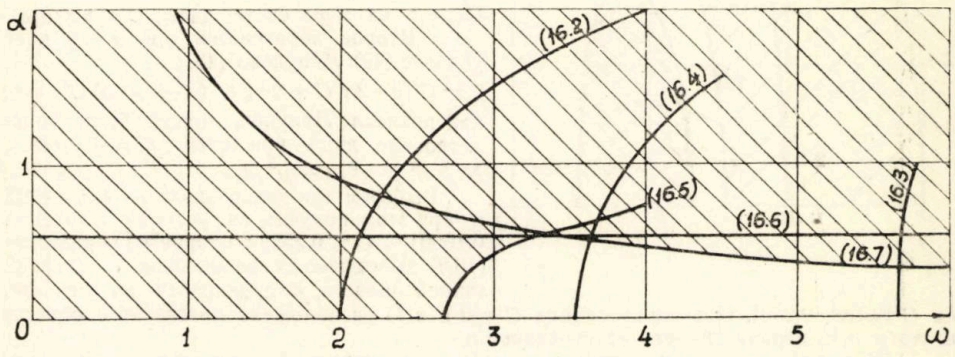


Рис. 4.

На рис. 4 построены кривые, определяемые уравнениями (16.2) ... (16.7) при $\lambda = 0{,}5$ на плоскости ωa. Результирующая область устойчивости заштрихована.

2. Приложим развернутый в § **15** анализ к примеру

$$\ddot{x} + a\dot{x} + C(1 + \lambda \cos t + \mu \cos 2t)\, x = 0,\ (a \geqslant 0,\ C > 0).$$

При $a = 0$ это уравнение рассмотрено Ляпуновым ([13], пп. **20...24**). Ляпунов показал, что условия неотрицательности $p(t)$ в данном случае могут быть выражены неравенствами (48) [13]

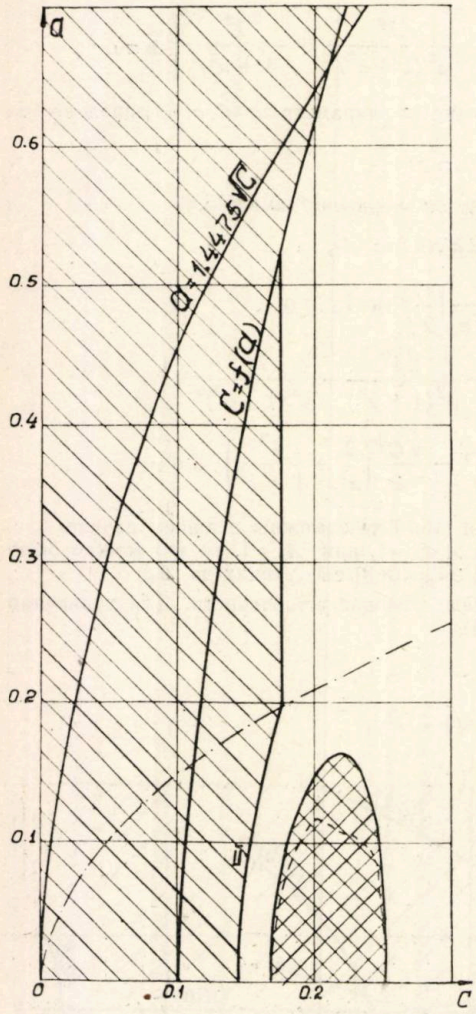


Рис. 5.

$$-1 \leqslant \mu \leqslant 1,\ \lambda^2 \leqslant N,\ N = \begin{cases} (1+\mu)^2, \left(\mu \leqslant \dfrac{1}{3}\right), \\ 8\mu(1-\mu), \left(\mu \geqslant \dfrac{1}{3}\right). \end{cases}$$

Допуская эти неравенства, исследуем условия, получающиеся из рассмотрения первых двух членов ряда (8.8). Приведем выражения для них, вычисленные по формулам (15.1)

$$A_1 = \frac{2\pi C}{a} \operatorname{th} \pi a,\ A_2 = \frac{2\pi^2 C^2}{a^2} - \frac{\pi C^2}{a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2} + \frac{\mu^2}{4+a^2}\right) \operatorname{th} \pi a.$$

Граница первой области устойчивости определяется в плоскости Ca кривой $A_1 = 2$, т. е. $C = a/(\pi \operatorname{th} \pi a)$. Эта кривая обозначена на рис. 5, $C = f(a)$. Первая область неустойчивости определяется неравенствами, получаемыми из (15.3)

$$C \leqslant \frac{2a}{\pi} \operatorname{cth} \frac{\pi a}{4},\ \pi^2 C^2 + a^2 \leqslant \tag{16.8}$$

$$\leqslant \pi Ca\left[1 + \frac{C}{2}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2} + \frac{\mu^2}{4+a^2}\right)\right] \operatorname{th} \pi a.$$

Первое из неравенств дает $C \leqslant 8f(a/4)$.

Второе неравенство при $a = 0$ дает условие (49) Ляпунова [13]: $2\pi^4 C^2/3 - 2\pi^2 C + 2 \leqslant \pi^2(\lambda^2 + \mu^2/4) C^2$, что, как показал Ляпунов, может быть удовлетворено лишь при $0{,}275... \leqslant \mu \leqslant 0{,}748...$, $N \geqslant \lambda^2 \geqslant \pi^2/6 - \mu^2/4$.

Выберем для дальнейшего $\lambda = 4/3$, $\mu = 1/2$ и при этом получим из условия Ляпунова $0{,}16901 \leqslant C \leqslant 0{,}25299$. Второе из неравенств (16.8) выполнено в ограниченной пунктирной линией области, опирающейся на отрезок, оси C [0,169, 0,253]. Поскольку кривая $C = 8f(a/4)$ расположена правее этой области то это и есть первая область неустойчивости.

Применим к рассматриваемому примеру два достаточные условия устойчивости установленные в **§ 6.** Первое из них запишется в виде $a > \sqrt{M} - \sqrt{m}$, где M и m — соответственно верхняя и нижняя границы функции p. При $\lambda = 4/3$, $\mu = 1/2$ имеем $M = 17C/6$, $m = C/18$ и первое условие запишется в виде $a \geqslant 1{,}4475\sqrt{C}$. Второе из них имеет бид $a \geqslant -\dot{p}/2p$. При $\lambda = 3/4$, $\mu = 1/2$, имеем

$$-\dot{p}(t)/[2p(t)] = (4\sin t + 3\sin 2t)/(6 + 8\cos t + 3\cos 2t).$$

Экстремумы этой функции определяются из уравнения

$$12\cos^3 t + 36\cos^2 t + 30\cos t + 7 = 0.$$

Отсюда получем $(\cos t)_1 = -0{,}39885$ и $(\cos t)_2 = -0{,}82205$ и для наибольшего значения $\{-\dot{p}(t)/[2p(t)]\}_{\text{наиб.}} = 1{,}92935$.

Кривая $a = 1{,}4475\sqrt{C}$ изображена на рис. 5.

Сделаем одно замечание, представляющееся нам важным. Известная подстановка $x = \exp(-at/2).z$ приводит рассматриваемое уравнение к двучленному

$$\ddot{z} + p^*(t)\,z = 0, \quad \left(p^*(t) = -\frac{a^2}{4} + C\left(1 + \frac{4}{3}\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\right).$$

Поскольку характеристичные числа связаны равенством $\chi\{x\} = \chi\{z\} + a/2$ то при $\chi\{z\} > -a/2$ тривиальное решение исходного уравнения устойчиво, а при $\chi\{z\} < -a/2$ — неустойчиво. В силу результатов **§ 12**, при $|A^*| < \operatorname{ch}\pi a$ получаем устойчивость, а при $|A^*| > \operatorname{ch}\pi a$ — неустойчивость (здесь постоянная относится к двучленному уравнению). При определении областей устойчивости и неустойчивости непосредственно по Ляпунову [13] следует учесть сдвиг границы для $|A^*|$ и добавить условие неотрицательности $p^*(t)$. В рассматриваемом примере последнее дает $C \geqslant 4{,}5a^2$. Кривая $C = 4{,}5a^2$ изображена на рис. 5 штриховой линией.

Граница для первой области неустойчивости показана на рис. 5 сплошной линией, опирающейся на отрезок оси C [0,169, 0,253] и уточненная первая область неустойчивости заштрихована двойной штриховкой. Границей второй области устойчивости является кривая II, проведенная до пересечения с кривой $C = 4{,}5a^2$. Результирующая область устойчивости заштрихована.

Отметим, что, помимо возможных уточнений (ухудшаемых добавочным условием неотрицательности), непосредственное вычисление по Ляпунову [13] значительно проще.

§ 17. Проведем анализ устойчивости при $a > 0$. Выпишем корни характеристичного уравнения (8.3)

$$\varrho_{1,2} = \left\{[1 + \exp(-a\omega)]\,A \mp \sqrt{[1 + \exp(-a\omega)]^2 A^2 - 4\exp(-a\omega)}\right\}/2.$$

При $|A| < \operatorname{sch}(a\omega/2)$ корни комплексные и $|\varrho_{1,2}| = \exp(-a\omega/2)$.

При $|A| \geqslant \operatorname{sch}(a\omega/2)$ корни действительные и наибольший по абсолютной величине корень

$$|\varrho|_{\text{наиб.}} = \left\{[1 + \exp(-a\omega)]\,|A| + \sqrt{[1 + \exp(-a\omega)]^2 A^2 - 4\exp(-a\omega)}\right\}/2.$$

Если $|A| < \operatorname{sch}(a\omega/2)$, то имеем $\ln|\varrho_{1,2}| = -a\omega/2$ и при $\alpha + \beta < 0$ невозмущенное движение устойчиво, а при $\alpha + \beta > 0$ невозмущенное движение неустойчиво. Случай $\alpha + \beta = 0$ требует при этом особого рассмотрения.

Если $|A| > \operatorname{sch}(a\omega/2)$, то при условии

$$\ln\left\{[1 + \exp(-a\omega)]\,|A| + \sqrt{[1 + \exp(-a\omega)]^2 A^2 - 4\exp(-a\omega)}\right\}/2 < -\alpha,$$

невозмущенное движение устойчиво. Последнее неравенство может быть записано в виде

$$\sqrt{[1 + \exp(-a\omega)]^2 A^2 - 4\exp(-a\omega)} < 2\exp(-\alpha) - [1 + \exp(-a\omega)]\,|A| \tag{17.1}$$

и для его осуществления необходимо $|A| < 2\exp(-\alpha)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$.

Последнее условие не противоречит рассматриваемому случаю только при $\alpha + \beta < 0$. Заметим, что поскольку $a > 0$, то $\alpha > \beta$ и условие $\alpha + \beta < 0$ возможно лишь при $\beta < 0$.

При указанных условиях можно возвести неравенство (17.1) в квадрат, и, разрешая его относительно $|A|$, получим

$$|A| < [\exp(-\alpha) + \exp\beta] / [1 + \exp(\beta - \alpha)], \quad (\alpha + \beta < 0). \tag{17.2}$$

Правая часть последнего неравенства не превосходит величины

$$2\exp(-\alpha)/[1 + \exp(\beta - \alpha)].$$

Таким образом, при условиях (17.2) невозмущенное движение устойчиво. При условии

$$\sqrt{[1 + \exp(-a\omega)]^2 A^2 - 4\exp(-a\omega)} > 2\exp(-\alpha) - [1 + \exp(-a\omega)]|A|, \tag{17.3}$$

невозмущенное движение неустойчиво.

Последнее неравенство заведомо выполнено при $|A| \geqslant 2\exp(-\alpha)/[1+\exp(\beta-\alpha)]$, что в рассматриваемом случае всегда осуществляется при $\alpha + \beta \geqslant 0$.

Предполагая $\alpha + \beta < 0$ и $|A| < 2\exp(-\alpha)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$, возведем неравенство (17.3) в квадрат и, разрешая его относительно $|A|$, получим

$$|A| > [\exp(-\alpha) + \exp\beta] / [1 + \exp(\beta - \alpha)].$$

Таким образом, при условиях: $\alpha + \beta \geqslant 0$, $|A| > \operatorname{sch}(a\omega/2)$; $\alpha + \beta < 0$, $|A| > [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$, невозмущенное движение неустойчиво. Что касается величины $[\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$, то при $\alpha + \beta < 0$ (следовательно, при $\beta < 0$) она не меньше единицы при $\alpha \leqslant 0$ и меньше единицы при $\alpha > 0$.

§ 18. Перейдем к определению областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров системы при $a > 0$. При $\alpha + \beta > 0$ невозмущенное движение неустойчиво. При $\alpha + \beta = 0$ невозмущенное движение неустойчиво при условии $|A| > \operatorname{sch}(a\omega/2)$, а промежуток $|A| < \operatorname{sch}(a\omega/2)$ требует особого рассмотрения. Поэтому определение областей устойчивости и неустойчивости проведем для $\alpha + \beta < 0$, замечая, что области неустойчивости распространяются и на случай $\alpha + \beta = 0$.

а) Допустим функции p_{12} и p_{21} разных знаков. Тогда $A_n > 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$ и ряд (8.8) является знакопеременным.

Из неравенств (11.1) и (11.2) следует, что если

$$A_1 \leqslant \{n/[1 + \exp(\beta - \alpha)], 2n^2/[1 + \exp(\alpha - \beta)]\}_{\text{наиб.}},$$

то непременно будем иметь $A_{n-1} > A_n > A_{n+1} > \ldots$.

Если выполнено неравенство $A_1 \leqslant \{2/[1 + \exp(\beta - \alpha)], 8/[1 + \exp(\alpha - \beta)]\}_{\text{наиб.}}$ то имеем $1 - A_1 < A < 1$.

При условии $1 \leqslant [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$, что выполнено только при $\alpha \leqslant 0$, будем иметь $A < [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$, а при условии

$$-[\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)] \leqslant 1 - A_1$$

или

$$A_1 \leqslant [1 + \exp(-\alpha)](1 + \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$$

будем иметь также $A > -[\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$.

Неравенства, определяющие первую область устойчивости, могут быть записаны в виде

$$\alpha \leqslant 0, A_1 \leqslant \{\{2/[1 + \exp(\beta - \alpha)]; 8/[1 + \exp(\alpha - \beta)]\}_{\text{наиб.}}; \tag{18.1}$$
$$[1 + \exp(-\alpha)](1 + \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]\}_{\text{наим.}}.$$

Верхнюю границу для A_1 надлежит выбирать возможно наибольшей. Поэтому, при условии

$$8/[1 + \exp(\alpha - \beta)] \geqslant [1 + \exp(-\alpha)](1 + \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$$

последнее из неравенств (18.1) запишется в виде

$$A_1 \leqslant [1 + \exp(-\alpha)](1 + \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$$

а при условии

$$8/[1 + \exp(\alpha - \beta)] \leqslant [1 + \exp(-\alpha)](1 + \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)],$$

последнее из неравенств (18.1) может быть записано в виде

$$A_I \leqslant \begin{cases} 8/[1+\exp(\alpha-\beta)] \text{ при } \alpha-\beta \leqslant \ln 4, \\ 2/[1+\exp(\beta-\alpha)] \text{ при } \alpha-\beta \geqslant \ln 4. \end{cases}$$

С другой стороны, если имеем $1-A_1 \geqslant [\exp(-\alpha)+\exp\beta]/[1+\exp(\beta-\alpha)]$, то будем иметь также $A > [\exp(-\alpha)+\exp\beta]/[1+\exp(\beta-\alpha)]$.

Поэтому неравенство $A_1 \leqslant [1-\exp(-\alpha)](1-\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)]$ (что может быть выполнено, только при $\alpha > 0$), определяет нулевую область неустойчивости.

Поскольку дальнейший ход рассуждений ясен, то приведем окончательные результаты. Условия

$$A_2 - [\exp(-\alpha)-1](1-\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)] \leqslant A_1 \leqslant$$
$$\leqslant \{[3/[1+\exp(\beta-\alpha)];\ [1+\exp(-\alpha)](1+\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)]\}_{\text{наим.}}$$

или условия

$$A_2 - [\exp(-\alpha)-1](1-\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)] \leqslant A_1 \leqslant$$
$$\leqslant \{[18/[1+\exp(\alpha-\beta)];\ [1+\exp(-\alpha)](1+\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)]\}_{\text{наим.}}$$

могут, вообще говоря, расширить первую область устойчивости. Неравенства

$$(18.2)\qquad \begin{aligned} A_1 &\leqslant \{4/[1+\exp(\beta-\alpha)];\ 32/[1+\exp(\alpha-\beta)]\}_{\text{наиб.}}, \\ A_2 &\leqslant A_1 - [1+\exp(-\alpha)](1+\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)] \end{aligned}$$

определяют первую область неустойчивости. Вторая область устойчивости определяется неравенствами

$$(18.3)\qquad \begin{aligned} A_1 &\leqslant \{4/[1+\exp(\beta-\alpha)];\ 32/[1+\exp(\alpha-\beta)]\}_{\text{наиб.}}, \\ A_2 &\leqslant A_1 + [\exp(-\alpha)-1](1-\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)], \\ A_3 &\leqslant [1+\exp(-\alpha)](1+\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)] - A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Ограничиваясь рассмотрением первых трех членов ряда (8.8), можно выписать, наконец, неравенства, определяющие вторую область неустойчивости

$$(18.4)\qquad \begin{aligned} A_1 &\leqslant \{5/[1+\exp(\beta-\alpha)];\ 50/[1+\exp(\alpha-\beta)]\}_{\text{наиб.}}, \\ A_2 &\geqslant [\exp(-\alpha)-1](1-\exp\beta)/[1+\exp(\beta-\alpha)] + A_1 + A_3. \end{aligned}$$

Теперь остановимся на случае $\alpha+\beta=0$. Напомним, что все изложение главы III (кроме **§ 20**) проводится для устойчивости невозмущенного движения динамической системы, когда уравнения первого приближения даны в виде (8.1). В случае $\alpha+\beta=0$, включающем в себя и случай систем (8.1) канонического вида ($p_{22}(t) \equiv -p_{11}(t)$), устойчивость тривиального решения системы (8.1) не может иметь асимптотического характера и тем самым гарантировать устойчивость невозмущенного движения.

Если мы обозначим через $U(t)$ фундаментальную матрицу системы (8.1), нормированную единичным начальным условием $U(0)=I_2$, то уравнение для характеристического показателя ϱ^* системы (8.1) запишется в виде (см. [5], п. **46**): $\varrho^{*2} - 2A^*\varrho^* + 1 = 0$ ($2A^* = \operatorname{sp} U(\omega)$), ибо при $\alpha+\beta=0$ имеем, что $\det U(\omega)=1$ в силу формулы Лиувилля.

При $|A^*| < 1$ корни последнего уравнения комплексные, различные, и по модулю равны единице, что и означает устойчивость тривиального решения системы (8.1). Однако при применении метода Ляпунова оценки характеристической постоянной значительно удобнее вычислять характеристическую постоянную A системы (8.2), чем A^*. Обе эти постоянные связаны простой зависимостью. Действительно, из подстановок начала **§ 8** следует, что в случае $\alpha+\beta=0$

$$U(\omega) = \begin{Vmatrix} \exp\int_0^\omega p_{11}(t)\,dt & 0 \\ 0 & \exp\int_0^\omega [p_{22}(t)+2\alpha/\omega]dt \end{Vmatrix} Z(\omega) = \exp\alpha\, Z(\omega),$$

где $Z(\omega)$-фундаментальная матрица системы (8.2), $(Z(0) = I_2)$.

Вспоминая (8.3) и то, что при $\alpha = \beta$ имеем $\alpha\omega = 2\alpha$, найдем

$$2A^* = \operatorname{sp} U(\omega) = \exp\alpha . \operatorname{sp} Z(\omega) = \exp\alpha . [1 + \exp(-2\alpha)] A, \text{ т.е. } A^* = A \operatorname{ch}\alpha.$$

Условие $|A^*| < 1$ равносильно условию $|A| < \operatorname{sch}\alpha$ и, следовательно, при условиях $\alpha + \beta = 0$, $|A| < \operatorname{sch}\alpha$ тривиальное решение системы (8.1) устойчиво. Теперь мы видим, что полученные критерии устойчивости распространяются и на случай $\alpha + \beta = 0$, но уже не для устойчивости невозмущенного движения, а для устойчивости тривиального решения системы (8.1).

б) Допустим функции p_{12} и p_{21} одинаковых знаков. Тогда все члены ряда (8.8) положительны. Следовательно, $A > 1$ и невозмущенное движение неустойчиво при $\alpha + \beta \geqslant 0$, а при $\alpha + \beta < 0$ при условии $\alpha \geqslant 0$.

Остается рассмотреть случай $\beta < \alpha < 0$. При этом невозмущенное движение устойчиво, если $A < [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$ и неустойчиво, если

$$A > [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)].$$

В силу неравенства (4.1) имеем

$$|A_2| < [1 + \exp(\beta - \alpha)] A_1^2 / 2,$$

$$|A_3| < [1 + \exp(\beta - \alpha)] |A_1| A_2 / 3 < [1 + \exp(\beta - \alpha)]^2 |A_1|^3 / 6,$$

. . . . . .

$$|A_n| < [1 + \exp(\beta - \alpha)]^{n-1} |A_1|^n / n!,$$

следовательно, будем иметь

$$A < 1 + |A_1| + \frac{1}{1 + \exp(\beta - \alpha)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [1 + \exp(\beta - \alpha)]^n |A_1|^n =$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(\beta - \alpha)} + \exp\{[1 + \exp(\beta - \alpha)] |A_1|\}.$$

Первая область устойчивости определится из неравенства

$$\exp(\beta - \alpha)/[1 + \exp(\beta - \alpha)] + \exp\{[1 + \exp(\beta - \alpha)] |A_1|\} \leqslant [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)].$$

Отсюда

$$|A_1| \leqslant [1 + \exp(\beta - \alpha)]^{-1} \ln\{[\exp(-\alpha) + \exp\beta - \exp(\beta - \alpha)]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]\}.$$

Применим теперь для проделанных оценок неравенство (11.2). В результате получим для первой области устойчивости неравенство

$$(18.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left[\frac{1 + \exp(\beta - \alpha)}{2} |A_1|\right]^n \leqslant \frac{1 + \exp(\beta - \alpha)}{2} \operatorname{th}\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\exp(-\alpha) + \exp\beta}{2}.$$

Последнее неравенство заведомо предпочтительнее при $\alpha - \beta < \ln 4$.

С другой стороны, $A > 1 + |A_1|$ и поэтому при $1 + |A_1| \geqslant [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$ будем иметь также $A > [\exp(-\alpha) + \exp\beta]/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$.

Таким образом, неравенство

$$(18.6) \quad |A_1| \geqslant [\exp(-\alpha) - 1](1 - \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)]$$

определяет первую область неустойчивости. Аналогично, приняв $A > 1 + |A_1| + A_2$, получим неравенство, определяющее вторую область неустойчивости

$$(18.7) \quad A_2 \geqslant [\exp(-\alpha) - 1](1 - \exp\beta)/[1 + \exp(\beta - \alpha)] - |A_1|.$$

Для определения второй области устойчивости нужно оценку для членов ряда начинать с A_3. Дальнейшее определение областей устойчивости и неустойчивости очевидно.

§ 19. Пусть уравнения первого приближения возмущенного движения записаны в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\gamma x_1 - a(1+\delta\cos t)x_2, \quad (\gamma > 0,\ a > 0, \delta > 0).$$

Мы имеем

$$\alpha = 0,\ \beta = -2\pi a,\ P(t) = \exp(-\delta\sin t),\ Q(t) = -\gamma\exp(\delta\sin t).$$

Разложим функции P и Q в ряд Фурье

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[a_{2k}\cos 2kt - a_{2k+1}\sin(2k+1)t],$$

$$Q(t) = -\gamma\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[a_{2k}\cos 2kt + a_{2k+1}\sin(2k+1)t]$$

где коэффициенты a_k определяются степенными рядами (14.1) по δ.

Вычислим A_1 по формуле (9.1)

$$A_1 = \pi a\gamma\sigma\,\mathrm{th}\,\pi a,\ \left(\sigma = \frac{2a_0^2}{a^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_{2k-1}^2}{a^2-(2k-1)^2} - \frac{a_{2k}^2}{a^2-4k^2}\right]\right).$$

Первая область устойчивости определяется неравенствами, получаемыми из (18.1)

$$\gamma \leqslant \frac{2}{\pi a\sigma\,\mathrm{th}\,\pi a} \text{ при } a \leqslant \frac{\ln 3}{2\pi},$$

$$\gamma \leqslant \frac{8}{\pi a\sigma[1+\exp(2\pi a)]\,\mathrm{th}\,\pi a} \text{ при } \frac{\ln 3}{2\pi} \leqslant a \leqslant \frac{\ln 4}{2\pi},$$

$$\gamma \leqslant \frac{2}{\pi a\sigma[1+\exp(-2\pi a)]\,\mathrm{th}\,\pi a} \text{ при } a \geqslant \frac{\ln 4}{2\pi}.$$

Поскольку рассматриваемая система уравнений может быть записана в виде $\ddot{x}_1 + a(1+\delta\cos t)\dot{x}_1 + \gamma x_1 = 0$, то, применяя к рассматриваемому примеру достаточное условие устойчивости (6.14), получим условие $\delta < 1$.

§ 20. Покажем, что исследование устойчивости тривиального решения системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения двучленного уравнения с неотрицательным периодическим коэффициентом. Таким образом, в указанном случае можно применить метод анализа устойчивости, предложенный Ляпуновым в мемуаре [13].

Ортогональным преобразованием с периодическими коэффициентами система (8.1) может быть приведена к виду, когда функции на побочной диагонали матрицы $\mathrm{P}(t)$ коэффициентов разных знаков и нижние грани их абсолютных величин сколь-угодно велики. Запишем систему (8.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{P}(t)\,x,\ \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\ \mathrm{P}(t) = \|p_{ij}(t)\|_1^2\right)$$

и выполним подстановку[10])

$$y = \left(\mathrm{I}\cos\frac{k\pi}{\omega}t + \mathrm{J}\sin\frac{k\pi}{\omega}t\right)x\ \left(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \mathrm{J} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\right),$$

(k — натуральное число). В новых переменных система уравнений принимает вид:

[10]) Эту подстановку сообщил автору В. А. Якубович.

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)\,y, \tag{20.1}$$

$$Q(t) = \| q_{ij}(t) \|_1^2 = k\pi\, J/\omega + [I\cos(k\pi t/\omega) + J\sin(k\pi t/\omega)]\, P(t)[I\cos k\pi t/\omega) - J\sin(k\pi t/\omega)].$$

Матрица-функция Q периодическая с периодом ω и при достаточно большом k имеем $q_{12}(t) > 0$ и $q_{21}(t) < 0$, причем $\inf q_{12}(t)$ и $\inf |q_{21}(t)|$ сколь-угодно велики, а $q_{11}(t)$ и $q_{22}(t)$ остаются ограниченными. Устойчивость тривиального решения системы (20.1) равносильна устойчивости тривиального решения системы (8.1).

Приведем систему (20.1) к одному уравнению, например, относительно y_1, предполагая, что функции q_{11} и q_{12} обладают кусочно-непрерывными производными. Будем иметь уравнение

$$\ddot{y}_1 - (q_{11} + q_{22} + \dot{q}_{12}/q_{12})\,\dot{y}_1 + (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} - \dot{q}_{11} + q_{11}\dot{q}_{12}/q_{12})\,y_1 = 0. \tag{20.2}$$

Известная подстановка $y_1 = z \exp\left[\frac{1}{2}\int (q_{11} + q_{22} + \dot{q}_{12}/q_{12})\,dt\right]$ приводит уравнение к двучленному

$$\ddot{z} + p(t)\,z = 0 \tag{20.3}$$

где

$$p(t) = -q_{12}q_{21} + [-(q_{11} - q_{12})^2 - 2\dot{q}_{11} + 2\dot{q}_{22} + 2(q_{11} - q_{22})\dot{q}_{12}/q_{12} + 2 + \ddot{q}_{12}/q_{12} - 3(\dot{q}_{12}/q_{12})^2]/4,$$

(предполагается, что производные $\dot{q}_{22}$ и $\ddot{q}_{12}$ кусочно-непрерывны).

При достаточно большом k выражение в квадратной скобе будет порядка $k\|P\|$ где $\|P\|$—норма матрицы $P(t)$; знак $p(t)$ определяется положительной величиной $-q_{12}q_{21}$ нижняя грань которой порядка k^2, что и доказывает сформулированное в начале параграфа предложение. При использовании для анализа устойчивости метода Ляпунова [13] следует учитывать возможный сдвиг границ для характеристической постоянной A Ляпунова уравнения (20.3). Именно, поскольку характеристичные числа решений уравнений (20.2) и (20.3) связаны равенством $\chi\{y_1\} = \chi\{z\} - (q_{11} + q_{22})_{ср}/2$, то при $(q_{11} + q_{22})_{ср} > 0$ тривиальное решение уравнения (20.2) (а следовательно и исходной системы) неустойчиво, а при $(q_{11} + q_{22})_{ср} \leqslant 0$ устойчиво, если $|A| < \mathrm{ch}[\omega(q_{11} + q_{22})_{ср}/2]$ и неустойчиво, если знак неравенства будет обратным.

Легко видеть, что $q_{11}(t) + q_{22}(t) \equiv p_{11}(t) + p_{22}(t)$.

В заключение заметим следующее:

1. В частности, можно применить анализ устойчивости по методу Ляпунова [13] и для двучленного уравнения со знакопеременным периодическим коэффициентом, исходя из представления уравнения в виде системы (8.1).

2. Если исходная система (8.1) канонического вида, то устойчивость тривиального решения уравнения (20.3) равносильна устойчивости тривиального решения исходной системы. Для анализа устойчивости можно применить как метод Ляпунова [13], так и любой из критериев, относящихся к уравнению (20.3).

3. В этой главе были предложены различные распространения метода Ляпунова [13] на более общие случаи линейных систем и уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, чем двучленное уравнение с неотрицательным периодическим коэффициентом (см. также [114]). Сравнение этих способов с предлагаемым здесь способом непосредственного применения метода Ляпунова в общем виде представляется нам весьма затруднительным. Повидимому, лишь на отдельных характерных примерах можно оценить достоинства различных указанных способов.

Поступило 25 VII 1958

Институт Механики АН СССР,
Москва

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.934

ON THE STABILITY OF THE TWO-DIMENSIONAL „ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT SCHEME"

BY
ARNOLD N. LOWAN

In a recent article Jim Douglas, Jr., [1] discussed the problem of stability of the two-dimensional „alternating direction implicit scheme" for the transient problem of heat conduction in a square, which had previously been devised by Douglas [2] and by Peaceman and Rachford [3]. Douglas's method depends on the knowledge of the eigenvalues of a certain matrix-operator associated with the square.

It is the purpose of the present article to discuss the stability of the Douglas-Peaceman-Rachford scheme for an arbitrary two-dimensional region bounded by lattice lines, in a manner not predicated upon the knowledge of the explicit expression of the eigenvalues of the matrix operator appropriate to the given region.

The Peaceman-Rachford difference scheme is represented by the following equations:

$$U_{h,k,2n+1} = U_{h,k,2n} + \alpha\,(U_{h-1,k,2n+1} - 2U_{h,k,2n+1} + U_{h+1,k,2n+1}) + \beta\,(U_{h,k-1,2n} - 2U_{h,k,2n} + U_{h,k+1,2n}), \tag{1}$$

$$U_{h,k,2n+2} = U_{h,k,2n+1} + \alpha\,(U_{h-1,k,2n+1} - 2U_{h,k,2n+1} + U_{h+1,k,2n+1}) + \beta\,(U_{h,k-1,2n+2} - 2U_{h,k,2n+2} + U_{h,k+1,2n+2}), \tag{2}$$

or, in matrix-vector notation

$$(I - A)\,\vec{U}_{2n+1} = (I + B)\,\vec{U}_{2n}, \tag{3}$$

$$(I - B)\,\vec{U}_{2n+2} = (I + A)\,\vec{U}_{2n+1}. \tag{4}$$

In the last two equations, $\vec{U}$ denotes an N-dimensional vector, where N is the number of interior lattice points in the given two-dimensional region. Furthermore, A and B denote the matrices of the two systems of N linear equations

$$U^*_{h,k} = \alpha\,(U_{h-1,k} - 2U_{h,k} + U_{h+1,k}), \tag{5}$$

$$V^*_{h,k} = \beta\,(U_{h,k-1} - 2U_{h,k} + U_{h,k+1}), \tag{6}$$

where h and k take on the values appropriate to the interior points of the given region.

From (3) and (4) it follows that

$$\vec{U}_{2n+2} = (I - B)^{-1}(I + A)\,\vec{U}_{n+1} = \tag{6}$$

$$= (I - B)^{-1}(I + A)(I - A)^{-1}(I + B)\,\vec{U}_{2n} = C\vec{U}_{2n} \text{ (say)},$$

whence ultimately

$$\vec{U}_{2n} = C^n\,\vec{U}_0. \tag{8}$$

If $\vec{E}_0$ and $\vec{E}_{2n}$ denote the initial error vector and the error vector at time $2n\,\Delta t$, then

$$\vec{E}_{2n} = C^n\,\vec{E}_0. \tag{9}$$

In addition $\vec{E}_{2n}$ vanishes on the boundary of the given region (if the temperature is prescribed on the boundary). To prove the stability of the difference scheme consisting of equations (1) and (2), we must prove that C^n tends to the zero matrix as $n \to \infty$. For this purpose we make use of the following theorem:

If

$$C = \text{Max}\sqrt{\frac{(C\vec{x}, C\vec{x})}{(\vec{x}, \vec{x})}}, \tag{10}$$

then $C^n \to 0$ if $\|C\| < 1$. (See, e. g., Bodewig's *Matrix Calculus*, pp. 36...38).

From the above definition of the norm it follows that if F, G and H are matrices and $F = GH$, then $\|F\| < \|G\| \cdot \|H\|$. Accordingly it follows from the definition of C that

$$\|C\| \leqslant \|(I - B^{-1})\| \cdot \|(I + A^{-1})\| \cdot \|I + A\| \cdot \|I + B\|. \tag{11}$$

Consider now a matrix W whose eigenvalues are $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ and let $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_p$ be the corresponding normalized eigenvectors. If we put

$$\vec{x} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + \cdots + a_p\vec{w}_p, \tag{12}$$

then

$$\|W\| = \text{Max}\sqrt{\frac{(W\vec{x}, W\vec{x})}{(\vec{x}, \vec{x})}} = \text{Max}\,\frac{(a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2 + \cdots + a_p^2\lambda_p^2)^{1/2}}{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

If λ^* is the largest of the moduli of the eigenvalues, is clear that

$$(a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2 + \cdots + a_p^2\lambda_p^2)^{1/2} < \lambda^*\,a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2)^{1/2}. \tag{14}$$

From (13) and (14) it follows that

$$\|W\| = \lambda^*. \tag{15}$$

In words, the definition (10) has led to the conclusion that the norm of a matrix is equal to the largest of the moduli of its eigenvalues.

From (12) we get $(W^{-1}\vec{x}, W^{-1}\vec{x}) = [(a_1/\lambda_1)^2 + (a_2/\lambda_2)^2 + \cdots + (a_p/\lambda_p)^2]^{1/2}$ and therefore,

$$\|W^{-1}\| = \operatorname{Max}\sqrt{\frac{(W^{-1}\vec{x}, W^{-1}\vec{x})}{(\vec{x}, \vec{x})}} = \operatorname{Max}\frac{[(a_1/\lambda_1)^2+(a_2/\lambda_2)^2+\cdots+(a_p/\lambda_p)^2]^{1/2}}{(a_1^2 + a_2^2 +\cdots+ a_p^2)^{1/2}}, \tag{16}$$

whence

$$\|W^{-1}\| = 1/\lambda^*, \tag{17}$$

where λ^* is the smallest of the moduli of the eigenvalues. We have thus reached the important result that the norm of the inverse of a matrix W is equal to the reciprocal of the smallest of the moduli of the eigenvalues of W. We now proceed to obtain the bounds of the eigenvalues of the matrices $I \pm A$ and $I \pm B$.

It may be shown that for any region bounded by lattice lines the matrices $I \pm A$ and $I \pm B$ have identical structure. Specifically $I \pm A$ are matrices whose elements on the principal diagonal are $= 1 \mp 2a$, and whose elements of the principal diagonal in both directions are $= \pm 2a$, all other elements being $= 0$. Similarly $I \pm B$ are „block-matrices" whose „elements" on the principal diagonal are $= (1 \mp 2\beta) I_3$ and whose elements of the principal diagonal in both directions are $= \pm 2\beta I_3$, where I_3 is the unit matrix of order 3, all other elements being $= 0$.

Consider now the matrix $I + A$. By Brauer's theorem, the eigenvalues of a matrix Q whose elements q_{hk} lie in the intervals defined by the inequalities

$$\|\lambda - q_{kk}\| < p_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \|q_{ki}\|, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{20}$$

In the case of $I + A$, (20) yields the following *two* inequalities:

$$-2a < \lambda - 1 + 2a; \quad -a < \lambda - 1 + 2a < a, \tag{21}$$

from which it is clear that the eigenvalues of $I + A$ lie in the interval $[1 - 4a, 1]$. In entirely similar manner, it is shown that the eigenvalues of $I + B$ lie in the interval $[1 - 4\beta, 1]$.

Consider now the matrix $I - A$. In this case (20) yields the inequalities

$$-2a < \lambda - 1 - 2a < 2a; \quad -a < \lambda - 1 - 2a < a, \tag{22}$$

from which it is clear that the eigenvalues of $I - A$ lie in the interval $[1, 1 + 4a]$.

In entirely similar manner we obtain the results that the eigenvalues of $I - B$ lie in the interval $[1, 1 + 4\beta]$. In view of these results the inequality (11) readily yields

$$\|C\| < 1. \tag{23}$$

By virtute of the theorem above mentioned, $C^n \to 0$ as $n \to \infty$, which proves the unconditional stability of the difference scheme under consideration.

Received 1 VII 1958

University of California,
Radiation Laboratory (Livermore)
and Yeshiva University, USA

REFERENCES

1. Douglas Jr., J. Proc., Amer. Math. Soc., 1957, **8**, pp. 408–412.
2. Douglas J., J. Soc. Ind. Appl. Math., 1955, **3**, pp. 42–65.
3. Peaceman D. W. a. Rachford H. H., J. Soc. Ind. Appl. Math., 1955, **3**, pp. 28–41.

УСТОЙЧИВОСТЬ „НЕЯВНОЙ СХЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ" В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

(Резюме)

Автор исследует задачу устойчивости схемы [1], [2], [3] для любой двухмерной сетчатой области, не делая предположений о явных выражениях собственных чисел матричного оператора соответствующего данной области.

STABILITATEA „SCHEMEI IMPLICITE CU DIRECȚIE ALTERNATĂ" ÎN DOUĂ DIMENSIUNI

(Rezumat)

Autorul discută problema stabilității schemei elaborată în [1], [2], [3] pentru o regiune bidimensională arbitrară prevăzută cu structură reticulată, fără a implica asupra cunoașterii explicite a valorilor proprii ale operatorului matricial corespunzător regiunii date.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.944.4

NEW CLASSES OF FUNCTIONS RELATED TO THE EQUATIONS WITH „TOTAL DERIVATIVES"

BY

D. MANGERON

Abstract of Communication presented at the Scientific Session in the Polytechnic Institute of Jassy, May 19—21, 1956

In a number of papers concerning the boundary value problems

$$[A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda [B(x)u' + C(x\ u] = 0, \tag{1}$$

or

$$\sum_{i=1}^{n} D^i (Q(x) D^i u) + (\lambda A + p) u = 0, \tag{2}$$

on R, with the *novel aspects* of the theorems lying in the interpretation of R as a $2n$-dimensional rectangular domain and the symbol $'$ (or D) as designating *total differentiation* in the Picone's sense that

$$u' \equiv Du = \partial^{2n}/\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{2n}, \quad D^i = D(D^{i-1}), \tag{3}$$

the author has studied the uniquenes and the existence of the solutions, the relations between the caracteristic values and the minimum values of the functional

$$F(f) = \int_R A(x) f'^2(x)\, dx \tag{4}$$

subject to the conditions that

$$H(f) = \int_R (2Bff' + Cf^2\, dx = \pm 1, \tag{5}$$

and $f = 0$ on the boundary of R, and so on, [1]...[4]. This problems was successfully continued in various directions by different authors [5]...[9].

In view to extend a number of classical problems with the novel aspects indicated above, concerning expansions of functions and others, the differential equations

$$u'' + x^{-1}u' + (1 - \nu^2 x^{-2})u = 0, \tag{6}$$

$$(1 - x^2)u'' - 2^l xu' + k^l(1 + k)^l u = 0, \quad \varkappa = k^l(k + 1)^l, \tag{7}$$

$$(1 - x^2)u'' - 2^l xu' + [k^l(k + 1)^l - p(1 - x) - q(1 + x)]u = 0, \tag{8}$$

and similar ones will be considered for real values of the variables $x = x_1 x_2 \dots x_l$ and for unrestricted values of ν, p, q and integers k and l. Particular solutions of this equations give rise to the definitions of new classes of functions

$$(9)\quad \mathcal{J}_{0,l} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \left[2^l 4^l \dots (2k)^l (1+1^l)(1+3^l)\dots(1+(2k-1)^l)\right]^{-1},$$

$$(10)\quad \mathcal{J}_{\nu(m),l} = x^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \left[2^l 4^l \dots (2k)^l (1+2m^l+1^l)(1+2m^l+3^l)\dots \right.$$
$$\left. \dots (1+2m^l+(2k+1)^l)\right]^{-1},$$

$$(11)\quad P_{\varkappa,l} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} (2n!)^{-l} (2^l 1^l + 2^l 2^l - \varkappa) \dots (2^l (2n-2)^l + (2n-2)^l (2n-3)^l - \varkappa),$$

where $x = x_1 x_2 \dots x_l$ and many others.

For instance, (9) are for $l = 1$ the well-known Bessel-functions. Some of the properties and relations between these generalized functions, related also with the recent results established by J. Delsarte [10], will be published in one of the author's next short communications.

Polytechnic Institute of Jassy,
Dept. of Mechanics and Mechanisms

REFERENCES

1. Mangeron D., Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, (4), **2**, 1932, pp. 29–40.
2. — C. r. Acad. Sci., Paris, **204**, 1937, pp. 94—96.
3. — Bull. Inst. Polyt. Jassy, **3**, *1*, 1948, pp. 153—155.
4. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, s. n., **2** (**6**), 1956, pp. 21–27.
5. Rosenblatt A., C. r. Acad. Sci. Paris, **197**, 1933, pp. 1278—1280.
6. Salvadori M., Annali Sc. Norm. Sup., Pisa, (2), **5**, 1936, pp. 51–72.
7. Manaresi F., Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **22**, 1954, pp. 163–213.
8. Stampacchia G., Giornale di Matematiche, **78**, 1948-49, pp. 1–16.
9. De Giorgi E., *Scritti Matematici offerti a Mauro Picone nel Suo* LXX *compleanno*, Bologna, Azzoguidi, 1955, pp. 781—787.
10. Delsarte J., *Premier Colloque sur les équations aux dérivées partie les,* Centre Belge de Recherches Mathématiques, G. Thône, Liège; Masson & Cie, Paris, 1954, pp. 35–62.

НОВЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ В „ПОЛНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ“

(Резюме)

Автор, исходя из некоторых дифференциальных систем уравнений в „полных производных“ вида (1), (2), (3), представляющих собой основу обширного ряда новых граничных задач, исследованных в [1]...[4] и продолженных затем многими авторами [5]...[9], определяет широкий класс новых функций, как напр., (9), (10), (11), в целях последующего использования их в задачах разложения и др.

NOI CLASE DE FUNCŢII LEGATE DE ECUAŢII CU „DERIVATE TOTALE“

(Rezumat)

Autorul, luînd ca model unele dintre sistemele diferenţiale (1), (2), (3), ce stau la baza problemelor pe contur de tip nou, studiate în [1] ... [4] şi continuate apoi şi de numeroşi alti cercetători [5] ... [9], determină o vastă clasă de funcţii noi, ca, de pildă, (9), (10), (11), în vederea folosirii lor, în particular, în diferite probleme de dezvoltări în serii de funcţiuni de o clasă dată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

513.736.36

SUR UNE PRÉSENTATION DE LA THÉORIE DES SURFACES MINIMA

PAR
GEORGES BOURION

Il est bien connu que la théorie des surfaces minima peut être faite en supposant seulement que les surfaces considérées sont régulières et de classe C_2 [1]), ces hypothèses suffisant à prouver après coup leur caractère analytique. Radó [1] utilise la représentation $z=z(x, y)$, toujours admissible localement, et l'équation de Lagrange $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$. On obtient plus directement les propriétés fondamentales des surfaces minima par l'utilisation systématique de la propriété ci-dessous, et je me propose de donner les grandes lignes d'une présentation des surfaces minima traitée dans cet esprit.

1. Il est commode de prendre comme *définition* des surfaces minima la propriété à laquelle on se trouve conduit si l'on exprime la condition d'extremum de l'aire pour une surfaces donnée en paramètres généraux ; on l'utilisera sous la forme : $\vec{N} \wedge d\vec{M}$ est une différentielle exacte, qui met en évidence son indépendance du choix des paramètres, ou bien sous la forme équivalente $\partial\vec{N}/\partial\beta \wedge \partial\vec{M}/\partial\alpha = \partial\vec{N}/\partial\alpha \wedge \partial\vec{M}/\partial\beta$. On retrouve alors la définition usuelle par la courbure moyenne nulle en rapportant la surface aux lignes de courbure [2]) et en faisant appel à la formule d'Olinde Rodrigues.

2. Bornons-nous dans la suite à l'étude d'une surface minima S au voisinage d'un point M_0 qui n'est pas un ombilic. Si l'on rapporte aux lignes de courbure, la relation

$$dN^2 = \varrho_1^2 M_\alpha'^2 \, d\alpha^2 + \varrho_2^2 M_\beta'^2 \, d\beta^2 = \varrho_1^2 \, dM^2 \text{ avec } \varrho_1 \neq 0$$

montre que la correspondance entre S et son image sphérique est conforme ; ceci prouve, sans qu'il soit besoin de faire appel aux théorèmes

1) M est supposé deux fois continuement dérivable par rapport aux paramètres α et β, $\vec{M}'_\alpha$ et $\vec{M}'_\beta$ étant linéairement indépendants. Dans la suite, $\vec{N}$ désigne le vecteur unitaire de la normale.

2) Pour interpréter cette condition au point M_0 sans exclure *a priori* le cas d'un ombilic, il suffit de rapporter le voisinage de M_0 à des paramètres α et β tels que M'_α et M'_β donnent en M_0 deux directions principales distinctes, (donc, en général, les deux directions principales, et deux directions différentes quelconques si M_0 est un ombilic).

généraux, l'existence de représentations conformes de S sur le plan, donc l'existence de paramètres isothermes.

3. La condition de Weierstrass, caractérisant les surfaces, se déduit simplement de la définition introduite dans **1**; en effet, si $ds^2 = E(du^2+dv^2)$, $\vec{M}'_u$ et $\vec{M}'_v$ sont perpendiculaires et de longuer égale; si $\vec{N}$ est orienté comme $\vec{M}'_u \wedge \vec{M}'_v$, on a $\vec{N} \wedge \vec{M}'_u = \vec{M}'_v$, $\vec{N} \wedge \vec{M}'_v = -\vec{M}'_u$, donc

$$\vec{N} \wedge d\vec{M} = \vec{M}'_v \, du - \vec{M}'_u \, dv \tag{1}$$

et la condition d'intégrabilité est $\partial^2 \vec{M}/\partial u^2 + \partial^2 \vec{M}/\partial v^2 = 0$; les coordonnées de M par rapport à un repère quelconque sont ainsi des fonctions harmoniques, et par suite analytiques, des paramètres u et v.

4. Le rapprochement des deux paragraphes précédents montre que toute surface minima est analytique; on peut alors, si on le veut, reprendre l'exposé classique tel qu'il est donné par Darboux.

5. En prenant des paramètres isothermes u et v et en introduisant à côté des coordonnées x_1, x_2, x_3 de M les composantes y_1, y_2, y_3 d'une primitive $\int \vec{N} \wedge d\vec{M}$, la relation (1) montre que $x_1 - i y_1$, $x_2 - i y_2$, $x_3 - i y_3$ sont des fonctions holomorphes de $u + i v$. La dérivée $\partial x_1/\partial u - i \, \partial x_1/\partial v$ de $x_1 - i y_1$ ne s'annule que pour les points où la normale est parallèle à Ox_1. Au voisinage d'un point où ce parallélisme n'a pas lieu, $u+iv$ est une fonction holomorphe de $x_1 - i y_1$ et on peut prendre x_1 et y_1 comme nouveaux paramètres, nécessairement isothermes. Ceci donne le théorème de Weierstrass: les courbes de niveau $x_1 = \text{const.}$ font partie d'un réseau isotherme.

6. L'introduction de la surface adjointe, lieu du point (y_1, y_2, y_3) et l'étude de ses relations avec S se présentent naturellement.

7. On obtient en particulier un système de paramètres isothermes u et v en faisant correspondre au vecteur $\vec{N}$ une variable complexe $u+iv$ par projection stéréographique de la sphère unité; on est ainsi amené aux formules de Weierstrass.

Reçu le 14 II 1958 *Université d'Alger*

BIBLIOGRAPHIE

1. Radò T., *On the problem of Plateau*, Ergebnisse der Mathematik, II, 2 (Berlin, 1933), chapitre II.

К ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Резюме)

Приводятся некоторые комментарии относящиеся к введению минимальных поверхностей, независимо от гипотезы аналитичности.

ASUPRA PREZENTĂRII TEORIEI SUPRAFEŢELOR MINIME

(Rezumat)

Se fac unele observaţii relative la introducerea suprafeţelor minime fără a se apela la ipoteze de analiticitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

513.82

PROPRIÉTÉS CONFORMES DES ESPACES DE RIEMANN GÉNÉRALISÉS (I)

PAR
VIOREL MURGESCU

Note présenté à la sesion scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 26–29 Juin 1958

Soient G_n et $\overset{*}{G}_n$ deux espaces de Riemann généralisés et g_{ij}, $\overset{*}{g}_{ij}$, respectivement, leurs tenseurs fondamentaux. On dit, habituellement, qu'il existe une correspondance conforme entre ces deux espaces si

$$\overset{*}{g}_{ij} = 2\sigma g_{ij}, \tag{1}$$

où $\sigma = \sigma(x^k)$ est une fonction du point.

En gardant les notations d'Eisenhart [1], on obtient pour la partie symétrique et antisymétrique de g_{ij} des relations semblables aux relations (1):

$$\overset{*}{g}_{\underline{ij}} = 2\sigma g_{\underline{ij}} \tag{2'}$$

et

$$\overset{*}{g}_{\underset{\vee}{ij}} = 2\sigma g_{\underset{\vee}{ij}}. \tag{2''}$$

Si on suppose $|g_{\underline{ij}}| \neq 0$, on peut définir le tenseur contravariant $g^{\underline{ij}}$, qui, évidemment, ne représente pas la partie symétrique de g^{ij}; alors, on peut constater que les relations

$$\overset{*}{g}^{\underline{ij}} = \frac{1}{2\sigma} g^{\underline{ij}} \tag{3}$$

ont lieu.

Par contraction, on peut constater encore que les quantités tensorielles

$$g_{\underline{ij}} g^{\underline{kl}}; \quad g_{\underset{\vee}{ij}} g^{\underline{kl}}; \quad g_{ij} g^{\underline{kl}}, \tag{4}$$

sont des invariants conformes. De même, $g_{ij} g^{kl}$, si g^{kl} est défini.

Si on construit les symboles de Christoffel de première espèce, correspondants à ces deux espaces

(5) $$\Delta_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}), \qquad \overset{*}{\Delta}_{ijk} = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{ik,j} + \overset{*}{g}_{kj,i} - \overset{*}{g}_{ij,k}),$$ [1]

par la dérivation ordinaire des relations (1), on obtient

(6) $$\overset{*}{\Delta}_{ijk} = 2\sigma\Delta_{ijk} + (g_{ik}\sigma_{,j} + g_{kj}\sigma_{,i} - g_{ij}\sigma_{,k}).$$

En séparant ici la partie symétrique et la partie antisymétrique, on a

(7) $$\begin{cases} \overset{*}{\underset{\vee}{\Delta}}_{ijk} = 2\sigma\underset{\vee}{\Delta}_{ijk} + (\underset{\vee}{g}_{ik}\sigma_{,j} + \underset{\vee}{g}_{kj}\sigma_{,i} - \underset{\vee}{g}_{ij}\sigma_{,k}), \\ \overset{*}{\underset{\wedge}{\Delta}}_{ijk} = 2\sigma\underset{\wedge}{\Delta}_{ijk} + (\underset{\wedge}{g}_{ik}\sigma_{,j} + \underset{\wedge}{g}_{kj}\sigma_{,i} - \underset{\wedge}{g}_{ij}\sigma_{,k}). \end{cases}$$

Par contraction avec le tenseur $\overset{*}{g}^{\underline{kh}}$ et tenant compte des relations (2′) et (2″), on obtient

(8) $$\begin{cases} \overset{*}{\Delta}{}^{h}_{\underline{ij}} = \Delta^{h}_{\underline{ij}} + (\sigma_i\delta^h_j + \sigma_j\delta^h_i - \sigma_k g_{\underline{ij}}\, g^{\underline{kh}}), \\ \overset{*}{\underset{\vee}{\Delta}}_{ij}{}^{h} = \underset{\vee}{\Delta}_{ij}{}^{h} + (\sigma_t\, \underset{\vee}{g}_{kj}\, g^{\underline{kh}} + \sigma_j\, \underset{\vee}{g}_{ik}\, g^{\underline{kh}} - \sigma_k\, \underset{\vee}{g}_{ij}\, g^{\underline{kh}}), \end{cases}$$

où

(9) $$\sigma_k = \frac{\partial \log\sqrt{\sigma}}{\partial x^k}.$$

D'une même manière, par contraction avec les composantes $\overset{*}{g}^{\underline{kh}}$, et compte tenu de la notation précédente, les relations (6) deviennent

(10) $$\overset{*}{\Delta}_{ij}{}^{h} = \Delta_{ij}{}^{h} + (\sigma_i\, g_{kj}\, g^{\underline{kh}} + \sigma_j\, g_{ik}\, g^{\underline{kh}} - \sigma_k g_{ij}\, g^{\underline{kh}}).$$

En faisant dans les premières relations de (8), $h = j$, on a

(11) $$\sigma_k = \frac{1}{n}(\overset{*}{\Delta}{}^{h}_{\underline{kh}} - \Delta^{h}_{\underline{kh}}).$$

Si on répète l'opération sur les dernières relations de (8), on obtient

$$\sigma_i\, \underset{\wedge}{g}_{hk}\, g^{\underline{hk}} = 0.$$

Mais, puisque $\sigma_i \neq 0$, il en résulte les conditions

(12) $$\underset{\wedge}{g}_{hk}\, g^{\underline{hk}} = 0.$$

Évidemment, ces relations ne sont pas des conséquences imposées par les conditions (1) car on peut constater aisément qu'elles sont identiquement satisfaites.

Si on substitue l'expression de σ_k de (11) dans les relations (10), on a :

1) La virgule marque la dérivation ordinaire par rapport aux variables x^k dont l'indice suit après la virgule.

$$\overset{*}{\Delta}_{ij}^{h} - \frac{1}{n}\left(\overset{*}{\Delta}_{i\underline{\alpha}}^{\alpha}\overset{*}{g}_{kj}\overset{*}{g}^{\underline{hk}} + \overset{*}{\Delta}_{j\underline{\alpha}}^{\alpha}\overset{*}{g}_{ik}\overset{*}{g}^{\underline{hk}} - \overset{*}{\Delta}_{\underline{k\alpha}}^{\alpha}\overset{*}{g}_{ij}\overset{*}{g}^{\underline{hk}}\right) =$$

(13)

$$= \Delta_{ij}^{h} - \frac{1}{n}\left(\Delta_{i\underline{\alpha}}^{\alpha} g_{kj} g^{\underline{hk}} + \Delta_{j\underline{\alpha}}^{\alpha} g_{ik} g^{\underline{hk}} - \Delta_{\underline{k\alpha}}^{\alpha} g_{ij} g^{\underline{hk}}\right).$$

Ainsi on a obtenu un objet à trois indices qui a la même valeur dans les points correspondants des espaces G_n et $\overset{*}{G}_n$, et par conséquent, on nomme les quantités

$$C_{ij}^{h} = \Delta_{ij}^{h} - \frac{1}{n}\left(\Delta_{i\underline{\alpha}}^{\alpha} g_{kj} g^{\underline{hk}} + \Delta_{j\underline{\alpha}}^{\alpha} g_{ik} g^{\underline{hk}} - \Delta_{\underline{k\alpha}}^{\alpha} g_{ij} g^{\underline{hk}}\right), \tag{14}$$

les *coefficients de la connexion conforme* des espaces G_n et $\overset{*}{G}_n$.

En séparant dans les relations précédentes la partie symétrique et la partie antisymétrique, on a

$$C_{\underline{ij}}^{h} = \Delta_{\underline{ij}}^{h} - \frac{1}{n}\left(\delta_i^h \Delta_{j\underline{\alpha}}^{\alpha} + \delta_j^h \Delta_{i\underline{\alpha}}^{\alpha} - \Delta_{\underline{k\alpha}}^{\alpha} g_{ij} g^{\underline{hk}}\right), \tag{15}$$

et

$$C_{\underset{\vee}{ij}}^{h} = \Delta_{\underset{\vee}{ij}}^{h} - \frac{1}{n}\left(\Delta_{i\underline{\alpha}}^{\alpha} g_{\underset{\vee}{kj}} g^{\underline{hk}} + \Delta_{j\underline{\alpha}}^{\alpha} g_{\underset{\vee}{ik}} g^{\underline{hk}} - \Delta_{\underline{k\alpha}}^{\alpha} g_{\underset{\vee}{ij}} g^{\underline{hk}}\right). \tag{16}$$

Les relations (15) conduisent, par contraction, aux relations

$$C_{\underline{h\alpha}}^{h} = C_{\underline{\alpha h}}^{h} = 0. \tag{17}$$

D'une même manière, vu que $\Delta_{\underset{\vee}{ih}}^{h} = 0$, les relations (16) conduisent aux relations

$$C_{\underset{\vee}{ih}}^{h} = 0. \tag{18}$$

Donc, compte tenu, simultanément, des formules (17) et (18), il résulte que *le vecteur de la connexion conforme* est nul:

$$C_{ih}^{h} = 0.$$

Si on désigne par g le déterminant $|g_{ij}|$, et vu que $\Delta_{ij}^{h} = \left\{{h \atop ij}\right\}$, il s'ensuit que

$$\Delta_{j\underline{\alpha}}^{\alpha} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^j}. \tag{19}$$

Nous nous proposons encore de déterminer la loi de transformation de la connexion conforme ci-dessus construite, lorsqu'on fait un changement de coordonnées $x^i = x^i(x'^j)$. Bien entendu, on suppose premièrement

$$\det\left\|\frac{\partial x}{\partial x'}\right\| \neq 0.$$

En notant avec accent les expressions transformées, on a

$$\sqrt{\underline{g'}} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{\underline{g}}\ , \tag{20}$$

et

$$\frac{1}{n}\,\underline{\Delta^{m}_{im}} = \frac{1}{n}\,\underline{\Delta'^{m}_{\alpha m}}\,\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{i}} - \psi_i\,, \tag{21}$$

où

$$\psi_i = \frac{1}{n}\,\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\log\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\right). \tag{22}$$

Alors, les coefficients de la connexion conforme subissent la transformation

$$C^{h}_{ij}\,\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{h}} = C'^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial^{2} x'^{\gamma}}{\partial x^{i}\,\partial x^{j}} + \left(\psi_j\, g_{ik}\,\underline{g^{hk}} + \psi_i\, g_{kj}\,\underline{g^{hk}} - \psi_k\, g_{ij}\,\underline{g^{hk}}\right)\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{h}}\,. \tag{23}$$

Si on sépare la partie symétrique,

$$C^{h}_{\underset{\vee}{ij}}\,\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{h}} = C'^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial^{2} x'^{\gamma}}{\partial x^{i}\,\partial x^{j}} + \left(\delta^{h}_{i}\,\psi_j + \delta^{h}_{j}\,\psi_i - \psi_k\, g_{\underset{\vee}{ij}}\,\underline{g^{hk}}\right)\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{h}}\,, \tag{24}$$

on constate qu'elle est identique à celle obtenue dans le cas d'un tenseur fondamental symétrique [3]. Enfin, la partie antisymétrique de C^{h}_{ij} se transforme de la manière suivante:

$$C^{h}_{\underset{\vee}{ij}}\,\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{h}} = C'^{\gamma}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\,\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{j}} + \left(\psi_j\, g_{\underset{\vee}{ik}}\,\underline{g^{hk}} + \psi_i\, g_{\underset{\vee}{kj}}\,\underline{g^{hk}} - \psi_k\, g_{\underset{\vee}{ij}}\,\underline{g^{hk}}\right)\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{h}}\,. \tag{25}$$

Les conditions d'intégrabilité des quantités (14) et d'autres conséquences seront traitées dans un numero prochain de ce Bulletin.

Institut Politechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Eisenhart L. P., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1951, **37**, p. 311.
2. — *Riemannian geometry*, Princeton Univ. Press, 1926.
3. Thomas J. M., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1925, **12**, p. 352.

КОНФОРМНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ (I)

(Резюме)

В этой заметке автор занимается построением конформной связности для обобщённых римановых пространств, которые были рассмотрены Эйзенгартом в 1951 году. Коэффициенты связности имеют форму (14). При преобразовании координат они изменяются по формулам (23).

PROPRIETĂŢI CONFORME ALE SPAŢIILOR RIEMANN GENERALIZATE (I)

(Rezumat)

În această notă se construieşte o conexiune conformă pentru spaţii Riemann generalizate, care au fost considerate de Eisenhart în 1951. Coeficienţii conexiunii au forma (14). La o schimbare de coordonate aceşti coeficienţi se transformă după formulele (23).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.948

МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПОЧТИ УПОРЯДОЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. Н. СЛУГИН

При построении методов приближений, охватывающих искомое решение функционального уравнения сверху и снизу и дающих поэтому эффективную оценку погрешности приближения, обычно используется К-пространство [1]...[3] или КВ-линеал [4]. В этих множествах соотношение неравенства определено лишь для некоторых элементов и связано определённым образом с соотношением предельного перехода. Но для применимости методов двусторонних приближений к уравнениям, заданным на некоторых множествах, требования, предъявляемые к этим множествам, можно ослабить и рассматривать более общие объекты.

Так, например, в полном линейном нормированном пространстве (типа (В)) вместо дополнительных аксиом порядка [1] можно взять более слабое условие.

Пространство типа (В) назовем **почти упорядоченным** нормированным, если для некоторых его элементов определено соотношение неравенства, причем из соотношений $x_n > x_{n+1} \to 0$ $(n \to \infty$, сходимость по норме) следует $x_n > 0$.

Эта аксиома **сравнимости с пределом** выполняется, в частности, для КВ-линеала ([4], лемма 1). Примером, отличным от КВ-линеала, служит пространство непрерывных функций $x = x(t), a \leqslant t \leqslant b, \|x\| = \max |x(t)|$, если под неравенством $x > 0$ понимать $\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t > 0$. Это же пространство также становится почти упорядоченным, если под $x > 0$ понимать $\int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s \geqslant 0$ в обычном смысле на $[a, b]$ (но равенство не тождественно).

Рассматриваем уравнение $x = U(x)$, заданное на определённом выше пространстве X.

Пусть a) на некотором множестве $G \subset X$, $\| U(x+\Delta x) - U(x) \| \leqslant V \| \Delta x \|$, где V — аддитивный непрерывный оператор и $\sum_{k=0}^{\infty} V^k z$ сходится (здесь $V^k z = V V^{k-1} z$).

Пусть, далее, выполняется хотя бы одно из условий b):

(1) $$x_0 < U(x_0),\ y_0 > U(y_0),$$

$U(x+\Delta x) - U(x) > 0$ при $\Delta x > 0$, и G содержит „шары“

(2) $$\| x - x_0 \| \leqslant R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} V^k \| x_0 - U(x_0) \|,$$

(3) $$\| y - y_0 \| \leqslant R_2 = \sum_{k=0}^{\infty} V^k \| y_0 - U(y_0) \|,$$

$$\| x \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} V^k \| x_0 - y_0 \|,$$

или c)

$$0 > U(x+\Delta x) - U(x) > -\Delta x,$$

и справедливо хотя бы одно из неравенств (1), а G содержит, соответственно, один из „шаров“ (2), (3).

Тогда, при выполнении условий a), b) приближения

(4) $$x_{n+1} = U(x_n),\ y_{n+1} = U(y_n),\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

сходятся (x_n снизу, y_n сверху) на пересечении „шаров“ (2), (3) и „отрезка“ $[x_0, y_0]$ к единственному решению x^* уравнения $x = U(x)$ со скоростью $\| x_n - x^* \| \leqslant V^n R_1$, $\| y_n - y^* \| \leqslant V^n R_2$.

В условиях же a), c) один из алгорифмов (4) определяет чередующиеся верхние и нижние приближения:

$$x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1},\ y_{2n+1} < y_{2n+3} < y_{2n+2} < y_{2n},$$

сходящиеся к x^* на пересечении отрезка $[x_0, x_1]$ и „шара“ (2), либо $[y_1, y_0]$ и (3) с прежней скоростью.

Сравнимость x_n, y_n с x^* следует из аксиомы сравнимости с пределом.

Доказательство сходимости процесса и единственности решения основано на известной схеме принципа мажорант для полного пространства. Центральным пунктом рассуждения здесь является установление неравенства вида

$$\| x_{n+m+1} - x_n \| \leqslant V^n \sum_{k=0}^{m} V^k \| x_0 - U(x_0) \|.$$

Следует учесть, что оператор V монотонно возрастает в силу его положительности и аддитивности по условию a).

Монотонность приближений легко установить индукцией. Так при условии b) из предположения $x_n < U(x_n)$ следует $x_n < x_{n+1}$, $U(x_{n+1}) >$

$> U(x_n) = x_{n+1}$. А при условии c) из предположения $x_{2n} < U(x_{2n})$ следует $x_{2n} < x_{2n+1}$, $0 > U(x_{2n+1}) - U(x_{2n}) > x_{2n} - x_{2n+1}$ т. е. $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$, $x_{2n+1} = U(x_{2n}) > U(x_{2n+1})$ и т. д.

Для практики вычислений в качестве x_{n+1} лучше брать не $U(x_n)$, а подбирать более простое выражение, находящееся между x_n и $U(x_n)$ $(n \geqslant 0)$ при условии b) и между x_{n-1} и $U(x_n)$ $(n \geqslant 1)$ при условии c). Вычисления при этом заметно упрощаются, и сохраняется монотонность приближений — основное преимущество указанных методов перед методом последовательных приближений вообще.

Принятие аксиомы сравнимости с пределом вместо аксиом порядка расширяет по сравнению с [2]...[4] класс функциональных уравнений, допускающих применение указанных методов, т. к. во введённом здесь пространстве не предполагается обязательное существование точной грани ограниченного множества.

Поступило 30 VI 1958

Казанский Государственный
Университет
им. В. И. Ульянова — Ленина,
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М., 1950 г.
2. Балуев А. Н., ДАН СССР, 1952, **83**, *6*, стр. 781–784.
3. Слугин С. Н., ИАН, серия матем., 1957, **21**, *1*, стр. 117–124.
4. Азбелев Н. В. и Цалюк З. Б., Укр. матем. журн., 1958, **10**, *1*, стр. 3–11.

METHODS OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS IN ALMOST ORDERED SPACE

(Summary)

For the first time the concept of *almost ordered* and normalized space is introduced here — Banach's space where the correlation of unequality for *some* elements is defined, but from correlations $x_n > x_{n+1} \to 0$ it follows that $x_n > 0$. L. V. Kantorovitsh's full semiordered and normalized „linial" is a particular case of this space.

The methods of calculation of upper and lower successive approximations to a solution of the functional equation are constructed. The tendency of this process to the solution is proved by the principle of majorantes, but the fact that approximations are monotonous and comparable with the solution follows from definition of this space.

METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE ÎNTR-UN SPAŢIU APROAPE ORDONAT

(Rezumat)

Autorul introduce aici noţiunea de spaţiu normalizat şi *aproape ordonat.* Este vorba de un spaţiu Banach în care este definită corelaţia de inegalitate pentru *unele* elemente cu condiţia ca din corelaţiile $x_n > x_{n+1} \to 0$ să urmeze $x_n > 0$. „Linialul" complet semiordonat şi normalizat al lui L. V. Kantorovici este un caz particular al acestui spaţiu.

Se elaborează metode de calcul a aproximaţiilor succesive, superioară şi inferioară, pentru soluţia ecuaţiei funcţionale $x=U(x)$. Modul de convergenţă al procesului către soluţie se demonstrează pe baza principiului majorantelor, însă faptul că aproximaţiile sînt monotone şi comparabile cu soluţia se deduce din definiţia spaţiului introdus.

Monotonia aproximaţiilor constituie avantajul metodelor elaborate faţă de metodele de aproximaţii succesive, în general.

Admiterea axiomelor de comparaţie cu limită în loc de axiomele de ordine, lărgesc faţă de [2]...[4] clasa de ecuaţii funcţionale pentru care se aplică metodele elaborate. Aceasta, întrucît în spaţiul introdus aici nu se presupune existenţa obligatorie a unei margini precise pentru o mulţime mărginită

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

539.31

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Н. М. БОРОДАЧЕВ

В настоящей работе приводится общее решение задачи о неустановившихся колебаниях упругого полупространства в случае осевой симметрии, полученное при помощи метода интегральных преобразований.

Для решения задач связанных с неустановившимися колебаниями упругого полупространства в настоящее время используются в основном метод функционально-инвариантных решений и метод контурных интегралов. Обоснование метода функционально-инвариантных решений и его применение к решению динамических задач для упругого полупространства в плоском случае и в случае осевой симметрии содержится в работах [1]. Применению же метода контурных интегралов к решению задачи о неустановившихся колебаниях упругого полупространства в случае осевой симметрии посвящена работа [2]. Однако, как метод функционально-инвариантных решений так и метод контурных интегралов обладают некоторыми недостатками, а именно:

а) при помощи этих методов нельзя получить общее решение задачи о неустановившихся колебаниях упругого полупространства в случае осевой симметрии, так как для построения решения этими методами необходимо предварительно задаваться граничными условиями, вследствие чего для каждого типа граничных условий необходимо строить своё решение;

б) эти методы требуют большой изобретательности при выборе правильной формы решения.

Применение метода интегральных преобразований к решению динамической задачи теории упругости для полупространства в случае осевой симметрии позволяет в значительной мере освободиться от перечисленных выше недостатков.

Воспользуемся цилиндрической системой координат (r, φ, z), ось z которой перпендикулярна к границе полупространства. Уравнения движения изотропной упругой среды в случае осевой симметрии при отсутствии объемных сил имеют вид

$$(1)\quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+2\mu\frac{\partial\omega}{\partial z}=\varrho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}-2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega)=\varrho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

где u_r, u_z — проекции вектора перемещения на оси r, z, ϱ — плотность материала; λ, μ — постоянные Ламе; $\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_z}{\partial z}$, $2\omega=\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}$.

ϑ и ω удовлетворяют соответственно уравнениям

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2},$$

где $c_1^2=(\lambda+2\mu)/\varrho$, $c_2^2=\mu/\varrho$.

Рассмотрим задачу о колебаниях упругого изотропного полупространства $z\geqslant 0$ при условии, что при $t\leqslant 0$ полупространство находилось в покое, а в момент времени $t=0$ на границе полупространства начинает действовать некоторый источник упругих возмущений не зависящий от φ.

Так как рассматривается случай нулевых начальных условий, то необходимо положить, что

$$(3)\qquad u_r\Big|_{t=0}=0,\quad u_z\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u_r}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u_z}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

Предположим, далее, что при $r\to\infty$ или $z\to\infty$ все компоненты вектора перемещения и тензора напряжений стремятся к нулю.

Для решения поставленной задачи применим к уравнениям (1) и (2) последовательно преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Ханкеля [3] по переменной r, а также учтем начальные условия (3) и условия на бесконечности.

В результате найдем, что

$$(4)\qquad \begin{cases} u_r(r,z,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}\,dp\int_0^\infty \xi^2 I_1(\xi r)\cdot(Ae^{-k_1 z}+Be^{-k_2 z})\,d\xi,\\[2ex] u_z(r,z,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}\,dp\int_0^\infty \xi I_0(\xi r)\cdot\left(Ak_1 e^{-k_1 z}+B\frac{\xi^2}{k_2}e^{-k_2 z}\right)d\xi, \end{cases}$$

где $I_n(r)$ — бесселева функция первого рода, $A(\xi,p)$ и $B(\xi,p)$ — функции определяемые из граничных условий, $k_1=\sqrt{\xi^2+p^2/c_1^2}$, $k_2=\sqrt{\xi^2+p^2/c_2^2}$.

Формулы (4) полностью решают в общем виде задачу о неустановившихся колебаниях упругого полупространства $z\geqslant 0$ при условии, что при $t\leqslant 0$ полупространство находилось в покое, а в момент времени $t=0$ на границе полупространства начинает действовать некоторый источник упругих возмущений не зависящий от координаты φ. Эти общие формулы необходимо использовать при решении частных задач. Решение какой-либо частной задачи, вообще говоря, будет найдено если будут определены функции $A(\xi,p)$ и $B(\xi,p)$ соответствующие граничным условиям этой задачи.

Рассмотрим теперь коротко вопрос связанный с определением функций A и B. На границе полупространства (при $z=0$) могут быть заданы две из следующих функций: u_r, u_z, σ_z, τ_{rz}. Следовательно, при решении частных задач могут встретиться различные случаи, в зависи-

мости от того какие из компонент смещения и напряжения будут заданы на границе. Для определения A и B после несложных вычислений получим такие уравнения:

$$(5)\quad \begin{cases} \bar{u}_{r(1)}(\xi, 0, p) = \xi (A + B), \quad \bar{u}_{z(0)}(\xi, 0, p) = k_1 A + \xi^2 B / k_2, \\ \bar{G}_{z(0)}(\xi, 0, p) = -2\mu \{[\xi^2 + p^2/(2c_2^2)] A + \xi^2 B\}, \\ \bar{\tau}_{rz(1)}(\xi, 0, p) = -2\mu\xi \{k_1 k_2 A + [\xi^2 + p^2/(2c_2^2)] B\} / k_2, \end{cases}$$

где, например,

$$\bar{u}_{r(1)}(\xi, 0, p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^\infty r\, I_1(\xi r)\, u_r(r, 0, t)\, dr,$$

$$\bar{u}_{z(0)}(\xi, 0, p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^\infty r\, I_0(\xi r)\, u_z(r, 0, t)\, dr, \text{ и т. д.}$$

На основании формул (5) вопрос об определении функций A и B сводится к решению системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Так, например, пусть на границе полупространства заданы $\sigma_z(r, 0, t)$ и $\tau_{rz}(r, 0, t)$.

Тогда, применяя к этим функциям последовательно преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Ханкеля по переменной r, можно считать что известны $\bar{\sigma}_{z(0)}(\xi, 0, p)$ и $\bar{\tau}_{rz(1)}(\xi, 0, p)$. Затем, решая систему из двух последних уравнений (5), найдем искомые выражения для $A(\xi, p)$ и $B(\xi, p)$. Подобным же образом могут быть найдены соответствующие выражения для A и B и при других типах граничных условий.

Найденные выражения для A и B (соответствующие какой-либо граничной задаче) необходимо подставить в (4); после вычисления интегралов будем иметь окончательные формулы для определения компонент смещения u_r, u_z, соответствующие этой граничной задаче.

Поступило 20 III 1958

Куйбышевский Инженерно-Строительный Институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. и Соболев С. Л., Труды Сейсмолог. института АН СССР, 1932, *20*; 1933, *29*.
2. Огурцов К. И. и Петрашень Г. И., Уч. зап. ЛГУ, 1951, *14*.
8. Снеддон И., **Преобразования Фурье**, ИЛ, М., 1955.

ON THE CONSTRUCTION OF GENERAL SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR HALF-SPACE IN CASE OF AXISYMMETRY

(Summary)

In this paper a general solution is presented for the oscillations of a elastic isotropic half space $z \geqslant 0$, on condition that at $t \leqslant 0$ the half-space was motionless and at the moment when $t = 0$ some source of an elastic perturbation independent of φ starts

functioning on plane boundary of the half-space (using cylindrical coordinates (r, φ, z), the axis of z is drawn into the body).

This solution is obtained with the help of Laplace and Henkel transforms.

The application of obtained general solution to solving the particular boundary problems is also considered in this paper.

ASUPRA DETERMINĂRII SOLUȚIEI GENERALE A PROBLEMEI DINAMICE DIN TEORIA ELASTICITĂȚII, PENTRU SEMISPAȚIU, ÎN CAZUL SIMETRIEI AXIALE

(Rezumat)

Autorul determină soluția generală pentru oscilațiile unui semispațiu izotrop $z \geqslant 0$, cu condiția ca pentru $t \leqslant 0$ semispațiul considerat să se afle în repaus și la momentul $t = 0$ să înceapă să funcționeze un număr de surse perturbatoare situate la frontiera plană a semispațiului, independente de φ. (Folosind coordonatele cilindrice (r, φ, z), axa z se găsește în interiorul corpului).

Soluția se obține cu ajutorul transformatelor lui Laplace și Hankel. Articolul se încheie cu aplicarea soluției generale la o problemă particulară pe contur.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

531.314.2

METODA REDUCERII MASELOR ÎN STUDIUL MIŞCĂRII GENERALE A SOLIDULUI CU MASA VARIABILĂ

DE

N. IRIMICIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 25–27 iunie 1958

Într-una din lucrările sale, [1], V. S. Novoselov stabileşte ecuaţiile lui Lagrange pentru solidul cu masă variabilă, sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma + P_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

P_σ numindu-se aici forţe suplimentare şi avînd expresiile:

$$P_\sigma = \int_V \left[\left(\bar{F}_R + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}\bar{v} \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\sigma} - \frac{1}{2}\bar{v}^2 \frac{\partial \varrho}{\partial q_\sigma} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\bar{v}^2 \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right] \mathrm{d}V, \tag{2}$$

$\bar{F}_R$ fiind forţele reactive elementare, iar $\varrho = \varrho(x_1, x_2, x_3, q, \dot{q}, t)$ fiind densitatea în punctul de coordonate (x_1, x_2, x_3) al corpului.

În lucrarea de faţă se arată posibilitatea înlocuirii sistemului de mai sus, în baza extinderii cunoscutei metode a reducerii masei unui solid în mişcare plan-paralelă, cu un alt sistem de ecuaţii lagrangiene, corespunzător unui sistem echivalent de puncte cu mase variabile, cu acelaşi număr de grade de libertate.

Se menţin ipotezele care au condus la reducerea ecuaţiilor (1) relative la invariabilitatea volumului solidului, la rigiditatea lui (ceea ce înseamnă că în cazul solidului liber numărul gradelor de libertate este egal cu 6), precum şi ipoteza asupra formei generale de variaţie a masei, funcţie considerată cunoscută, de coordonatele lagrangiene, de vitezele generalizate şi de timp, explicit.

De asemenea, vor fi considerate funcţii cunoscute de q, $\dot{q}$ şi t, elementele care caracterizează repartiţia statică şi dinamică a mesei, adică vectorul de poziţie $\bar{r}_C$ al centrului de masă al solidului faţă de reperul invariabil legat de acesta, precum şi momentele de inerţie şi centrifugale faţă de axele acelui reper.

Metoda reducerii masei unui solid, utilizată pentru cazul plan, în teoria mecanismelor [2] şi extinsă aici, pentru cazul general în spaţiu, constă în a considera masa solidului concentrată într-un număr n, finit, de puncte, determinate fiecare prin vectorii de poziţie $\bar{r}_\gamma$, în raport cu reperul invariabil legat de solid şi avînd fiecare masele m_γ ce urmează a fi determinate, cele $3n$ coordonate şi cele n mase fiind legate între ele prin următoarele relaţii, reprezentînd:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{a) condiţiile de repartiţie statică a masei : } m_1 + m_2 + \cdots + m_n = M,\ m_i \bar{r}_i = M \bar{r}_C; \\ \text{b) condiţiile de repartiţie dinamică a masei: } m_i (\delta_{\sigma\varrho}\, x_{ij}\, x_{ij} - x_{i\sigma}\, x_{i\varrho}) = \mathcal{J}_{\sigma\varrho}, \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ j, \sigma, \varrho = 1, 2, 3), \end{cases}$$

$\delta_{\sigma\varrho}$ fiind cunoscutul simbol al lui Kronecker, iar i şi j, indici muţi de sumare.

În cazul mişcării generale a solidului, numărul acestor relaţii este de zece, el putînd fi redus în cazul unor mişcări particulare.

De obicei se fixează punctele de reducere a masei în puncte cunoscute în solid, puncte importante din puncte de vedere dinamic (în cazul de faţă în punctele care emit sau anexează particule, precum şi în punctele de aplicaţie ale forţelor active ce acţionează asupra solidului). De asemenea, mai pot fi lăsate nefixate un număr de coordonate, astfel încît numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuaţiilor.

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii (3) se obţin atît masele necunoscute cît şi coordonatele ce eventual au fost fixate, ca funcţii de argumentele q, $\dot{q}$ şi t. În modul acesta solidul a fost înlocuit printr-un sistem, echivalent din punct de vedere dinamic, de puncte cu mase variabile, putîndu-se scrie pentru studiul dinamic al mişcării acestuia, ecuaţiile lui Lagrange.

Datorită faptului că diferiţii termeni care intră în ecuaţiile lagrangiene vor trebui exprimaţi ca funcţii de parametrii dinamici şi statici ce caracterizează solidul, de coordonatele generalizate, (în cazul solidului liber cele trei coordonate carteziene ale polului invariabil legat de solid şi cele trei unghiuri ale lui Euler), de vitezele generalizate şi de timp, se vor scrie ecuaţiile lui Lagrange sub o formă întrucîtva deosebită atît de forma (1) cît şi de cea dată de autor într-o lucrare anterioară [3].

În ecuaţia simbolică a dinamicii se va înlocui de la început viteza reactivă absolută prin componentele ei, viteza de transport (egală cu viteza punctului bază) şi viteza reactivă relativă $\bar{v}_{Rr_\nu}$ egală cu viteza faţă de punctul bază a particulelor reactive.

Efectuînd reducerile corespunzătoare, ecuaţia simbolică a dinamicii va lua forma :

$$(4)\quad \left[m_i \dot{\bar{v}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} - \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} - \bar{v}_{Rr_i} \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Dezvoltarea primului termen, ţinînd seama de relaţiile lui Lagrange şi folosind notaţia $\frac{1}{2} \bar{v}_\nu^2 = T_\nu$, conduce la următoarea expresie :

$$(5)\quad m_i \dot{\bar{v}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} \right] - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} T_i \right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_j} T_i \right] - \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Al doilea grup de termeni reprezintă, după cum se ştie, forţele generalizate ;

$$(6)\quad \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = Q_j.$$

Ultimul grup de termeni va fi lăsat sub forma în care se găseşte.

Introducînd (5) şi (6) în ecuaţia (4) şi egalînd cu zero coeficienţii lui δq_j, se obţin ecuaţiile lui Lagrange pentru sistemul echivalent, sub forma :

$$(7)\quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_\sigma} \right] - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_\sigma} T_i \right) - \frac{\partial m_i}{\partial q_\sigma} T_i \right] - \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_\sigma} + \bar{v}_{Rr_i} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \right] = Q_\sigma,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

În continuare, vor fi scrise expresiile diferiţilor termeni ce intră în aceste ecuaţii ca funcţii de coordonatele generalizate alese şi de derivatele lor în raport cu timpul, în ipoteza că centrele de reducere alcătuiesc un sistem rigid.

1. Expresia energiei cinetice

Ţinînd seama de faptul că punctele bază ale sistemului echivalent aparţin solidului, rezultă pentru energia cinetică expresia:

$$E_c = \frac{1}{2} M\bar{v}_0^2 + M\bar{v}_0 (\bar{\omega} \times \bar{r}_G) + \frac{1}{2} m_i [\bar{\omega}^2 \bar{r}_i^2 - (\bar{\omega}\, \bar{r}_i)^2], \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{8}$$

care, dezvoltată analitic, raportînd primii doi termeni la reperul fix, iar ultimul termen la reperul invariabil legat de solid, mai poate fi scrisă sub forma:

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}'_{0j} \dot{x}'_{0j} + \delta_{jkl} M \dot{x}'_{0j} \omega'_k a_{lh} x_{Ch} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{jl} \omega_j \omega_l, \tag{9}$$

$$(i = 1, 2, ..., n;\ h, j, k, l = 1, 2, 3),$$

a_{lh} fiind cosinuşii directori ai reperului mobil în raport cu cel fix, putînd fi exprimaţi, după cum se ştie, cu ajutorul unghiurilor lui Euler (de altfel ca şi proiecţiile pe axele ambelor repere ale vectorului viteză unghiulară), iar δ_{jkl} fiind simbolul lui Levi-Civita.

2. Expresia sumei: $\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_\sigma} T_i$

Prin dezvoltarea acestei sume se ajunge la următoarea expresie:

$$\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_\sigma} T_i = \frac{1}{2} \dot{x}'_{0j} \dot{x}'_{0j} \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_\sigma} + \delta_{jkl} \dot{x}'_{0j} \omega'_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} \left(M x_{Ch} a_{lh} \right) + \frac{1}{2} \omega_j \omega_l \frac{\partial \mathcal{J}_{jl}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \tag{10}$$

$$- \delta_{jkl} \dot{x}'_{0j} \omega'_k M x_{Ch} \frac{\partial a_{lh}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (i = 1, 2, ..., n;\ h, j k, l = 1, 2, 3),$$

care, prin intermediul mărimilor M, a_{lh}, $\bar{\omega}$, $\bar{r}_c$ şi $\bar{v}_0$, va fi funcţie de q, $\dot{q}$ şi t.

3. Expresia sumei: $\frac{\partial m_i}{\partial q_\sigma} T_i$

Prin dezvoltarea acestei sume se ajunge la următoarea expresie:

$$\frac{\partial m_i}{\partial q_\sigma} T_i = \frac{1}{2} \dot{x}'_{0j} \dot{x}'_{0j} \frac{\partial M}{\partial q_\sigma} + \delta_{jkl} \dot{x}'_{0j} \omega'_k \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left(M x_{Ch} a_{lh} \right) + \frac{1}{2} \omega_j \omega_l \frac{\partial \mathcal{J}_{jl}}{\partial q_\sigma} - \tag{11}$$

$$- \delta_{jkl} \dot{x}'_{0j} \omega'_k M x_{Ch} \frac{\partial a_{lh}}{\partial q_\sigma}, \quad (i = 1, 2, ..., n;\ h, j, k, l = 1, 2, 3),$$

funcţie de q, $\dot{q}$ şi t, prin intermediul aceloraşi mărimi ca mai sus.

4. Expresia sumei: $\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_\sigma}$

După o serie de dezvoltări, se poate pune suma sub următoarea formă finală:

$$\frac{dm_i}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_\sigma} = \ddot{x}_{0\sigma}\frac{dM}{dt} - \frac{d}{dt}\left(Mx_{Ch}\alpha_{lh}\right)\left(\delta_{\sigma kl}\omega'_k + \delta_{jkl}\ddot{x}_{0j}\frac{\partial \omega'_k}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) +$$

$$+ \delta_{jkl}\ddot{x}_{0j}\omega'_k\frac{d}{dt}\left(Mx_{Ch}\right)\frac{\partial \alpha_{lh}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \omega_j\alpha_{rl}\frac{\partial(\omega_h\alpha_{rh})}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{d\mathfrak{J}_{jl}}{dt} + \omega_j\alpha_{lk}\frac{\partial \alpha_{lh}}{\partial \dot{q}_\sigma}\left(\omega_j\frac{d\mathfrak{J}_{kh}}{dt}\right. \tag{12}$$

$$\left. - \omega_k\frac{d\mathfrak{J}_{jh}}{dt}\right) - \delta_{\sigma kl}M\omega'_k\ddot{x}_{0l} - \delta_{prl}M\omega'_p x_{Ch}\alpha_{rh}\left(\delta_{\sigma kl}\omega'_k + \delta_{jkl}\ddot{x}_{0j}\frac{\partial \omega'_k}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) -$$

$$- \delta_{jkl}M\ddot{x}_{0j}\ddot{x}_{0l}\frac{\partial \omega'_k}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ h, j, k, l, p, r = 1, 2, 3;\ \sigma = 1, 2, \ldots, m).$$

5. Expresia sumei : $\dfrac{dm_i}{dt} - v_{Rr_i}\dfrac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_\sigma}$

Şi această sumă va putea fi dezvoltată, ajungîndu-se la expresia :

$$\frac{dm_i}{dt} - v_{Rr_i}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{dm_i}{dt}v_{Rr_j}\alpha_{\sigma j} + \delta_{jkl}\frac{\partial \omega'_j}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{dm_i}{dt}x_{ih}\alpha_{kh}\alpha_{lp}v_{R'_{ip}} + \tag{13}$$

$$+ \delta_{jkl}\frac{dm_i}{dt}\omega'_j x_{ih}v_{Rr_{ip}}\alpha_{lp}\frac{\partial \alpha_{kh}}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ h, j, k, l = 1, 2, 3).$$

În concluzie toţi termenii care figurează în ecuaţiile (1) pot fi exprimaţi ca funcţii de coordonatele lagrangagiene alese, (coordonatele polului invariabil legat de solid şi unghiurile lui Euler), de derivatele lor în raport cu timpul şi de timp, explicit.

Se menţionează că expresiile (9)...(13) pot suferi simplificări substanţiale în cazul cînd polul invariabil legat de solid poate fi ales în centrul de masă al solidului şi cînd axele de coordonate invariabil legate de solid coincid cu axele centrale de inerţie.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Новоселов В. С., Вестник ЛГУ, 1957, *1*, стр. 130–140.
2. Artobolevski I. I., *Teoria mecanismelor şi maşinilor*, Ed. tehnică, Buc., 1955, (trad. din l. rusă).
3. Irimiciuc N., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1958, **4** (**8**), *1–2*, pp. 99–101.

МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ МАСС В ТЕОРИИ ОБШЕГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАСС

(Резюме)

Устанавливаются уравнения Лагранжа для системы точек переменной массы динамически эквивалентной твёрдому телу и указывается их равносильность со системой уравнения (1), выведеных В. С. Новоселовым [1].

LA MÉTHODE DE LA RÉDUCTION DES MASSES DANS L'ÉTUDE DU MOUVEMENT GÉNÉRAL DU SOLIDE DONT LA MASSE EST VARIABLE

(Résumé)

L'Auteur indique dans cette Note la posibilité de remplacer le système d'équations (1) déduites par V. S. Novoselov [1] pour un solide dont la masse est variable, par un système d'équations lagrangiennes (7), écrites pour un système de points matériaux dont les masses sont variables, équivalent au point de vue dynamique au solide. Cette opération est basée sur l'extension pour le cas spatial, de la méthode de la réduction des masses, connue pour le cas plan.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

539.37

FINITE DEFORMATION OF AELOTROPIC AND COMPOSITE BODIES (I)

DE

J. RAMAKANTH

1. Introduction

Although several problems of Elasticity were solved when the body consists of a single isotropic or aelotropic material, the problems of composite bodies excited little attention. For the first time some such problems were solved by Muskhelishvili N. I. (1932) [1], when the different materials composing the body, were isotropic. Payne L. W. (1950) [2] extended the theory to the case when the interior one of the two materials composing the beam, was orthotropic, Ramakanth J. (1955) [3] has considered the case when both the materials composing the beam were orthotropic.

No systematic approach has yet been made to solve the problems of finite deformation of composite bodies. Only recently Ramakanth J. (1955) [6] has solved the problem of torsion of an aelotropic and composite cylinder. In this series it is proposed to solve some problems of finite deformation of composite bodies.

The problem of a rectangular plate bent by terminal couples into the form a right circular cylinder with two edges as generators was solved by Seth B. R., when the body was isotropic (1935) [4] and when it had hexagonal type of aelotropy (1945) [5]. In this paper the problem of a composite rectangular plate consisting of two different rhombohedral materials is solved: 1) when the extension in the direction of the axis of the cylinder is prevented by the application of necessary force, 2) when the extension is allowed. If the plate is homogeneous there is no extension and both the cases are not distinct. Solutions are also derived when the materials are isotropic.

2. Components of displacements

We suppose that an initially plane composite rectangular plate is bent into the form of a circular cylinder with the two edges as generators. The two faces of the plate and the common surface get bent into cylindrical surfaces of inner radius a, outer radius c and the radius of the common surface b. Let the z axis be taken as the axis of the cylinder. The terminating planes at which the couples are applied become the axial planes and are given by $\vartheta = \pm$ a constant.

Case 1. Let us further suppose that the length of the parallel to the axis of z is kept constant by suitable force. From the symmetrical manner in which the plate is strained, we may assume the displacement to be given by

$$(1.1)\qquad u_i = x - \beta_i, \qquad (1.2)\qquad v_i = y - A\vartheta, \qquad (1.3)\qquad w_i = 0,$$

where $i=1$ corresponds to the material in $a<r<b$ whose elastic constants are c_{rs} and $i=2$ to the material in $b<r<c$ whose elastic constants are d_{rs}, β_i are functions of $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ and A, a constant to be determined.

3. Components of strain and stress

As stressed by B. R. Seth in a number of papers the strain components should re referred to the deformed state. They are given by such expressions as

$$(2.1)\qquad e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$(2.2)\qquad e_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Substituting the values of displacements, we have,

$$(3.1)\qquad e_{xx_i}=\frac{1}{2}(1-\beta_i'^2 x^2/r^2-A^2y^2/r^4),$$

$$(3.2)\qquad e_{yy_i}=\frac{1}{2}(1-\beta_i'^2 y^2/r^2-A^2x^2/r^4),$$

$$(3.3)\qquad e_{xy_i}=-(\beta_i'^2 xy/r^2-A^2xy/r^4),$$

$$(3.4)\qquad e_{zz_i}=0,\quad e_{xz_i}=0,\quad e_{yz_i}=0.$$

Although the strains are large they are such that, for practical purposes we kan take the stress-strain relations to be linear. They are of the type

$$(4)\qquad \widehat{xx}_1=c_{11}e_{xx_1}+c_{12}e_{yy_1}+c_{13}e_{zz_1}+c_{14}e_{yz_1}+c_{15}e_{zx_1}+c_{16}e_{xy_1}.$$

Substituting the values of strain components and transforming into cylindrical coordinate system, we have

$$(5.1)\qquad \widehat{rr}_1=\frac{1}{2}c_{11}(2-\beta_1'^2-A^2/r^2)-c_{66}(1-A^2/r^2),$$

$$(5.2)\qquad \widehat{\vartheta\vartheta}_1=\frac{1}{2}c_{11}(2-\beta_1'^2-A^2/r^2)-c_{66}(1-\beta_1'^2),$$

$$(5.3)\qquad \widehat{zz}_1=\frac{1}{2}c_{13}(2-\beta_1'^2-A^2/r^2),$$

$$(5.4)\qquad \widehat{r\vartheta}_i=0,\quad \widehat{rz}_i=0,\quad \widehat{\vartheta z}_i=0.$$

$\widehat{rr}_2$, $\widehat{\vartheta\vartheta}_2$ and $\widehat{zz}_2$ are given by replacing c_{rs} by d_{rs} and β_1 by β_2 in (5).

It is required to find out A and β_i satisfyng the equations of equilibrium and the boundary conditions.

4. Satisfaction of the equations of equilibrium

The equations of equilibrium to be satisfied by the stresses are

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{rr}_i+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\widehat{r\vartheta}_i+\frac{\partial}{\partial z}\widehat{rz}_i+\frac{1}{r}(\widehat{rr}_i-\widehat{\vartheta\vartheta}_i)=0, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{r\vartheta}_i+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\widehat{\vartheta\vartheta}_i+\frac{\partial}{\partial z}\widehat{\vartheta z}_i+\frac{2}{r}\widehat{r\vartheta}_i=0, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{rz}_i+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\widehat{\vartheta z}_i+\frac{\partial}{\partial z}\widehat{zz}_i+\frac{1}{r}\widehat{rz}_i=0. \tag{6.3}$$

(6.1) gives [5]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\beta_i'^2)+\frac{k_i}{r}(\beta_i'^2)+(k_i-2)\frac{A^2}{r^2}=0 \tag{7}$$

where

$$k_1=2c_{66}/c_{11},\quad k_2=2d_{66}/d_{11}. \tag{8}$$

Its solution is

$$\beta_i'^2=B_i/r^{k_i}-A^2/r^2, \tag{9}$$

where B_i are constants to be determined. (6.2), (6.3) are satisfied identically.

5. Satisfaction of the boundary conditions

The boundary conditions require that:

i) The displacements should be continuous across the common boundary. In other words

$$\beta_1=\beta_2 \quad \text{on} \quad r=b. \tag{10}$$

Whatever be the values of A and B_i this conditions can always be satisfied by a proper choice of the constant obtained during the evaluation of β_i from (9).

ii) The stresses should be continuous across the common boundary. This will be case if $\widehat{rr}_1=\widehat{rr}_2$ on $r=b$. That is

$$c_{11}(2-B_1/b^{k_1})-2c_{66}(1-A^2/b^2)=d_{11}(2-B_2/b^{k_2})-2d_{66}(1-A^2/b^2). \tag{11}$$

iii) The normal tractions on the free surfaces should vanish. This will be satified if $\widehat{rr}_1=0$ on $r=a$ and $\widehat{rr}_1=0$ on $r=c$, that is

$$c_{11}(2-B_1/a^{k_1})-2c_{66}(1-A^2/a^2)=0, \tag{12.1}$$

$$d_{11}(2-B_2/c^{k_2})-2d_{66}(1-A^2/c^2)=0. \tag{12.2}$$

The three equations (11), (12.1), (12.2) are necessary and sufficient to determine A, B_1, B_2.

6. Evaluation of the constants

The constants A, B_1 and B_2 are given by

$$A^2 d = a^2 b^2 c^2 (d_1 t_2 b^{k_1} - c_1 t_1 b^{k_2}), \tag{13.1}$$

$$B_1 d = a^{k_1} b^{k_1} \{k_1 d_1 t_2 b^2 c^2 - c_1 [k_1 c^2 b^{k_2} (b^2 - a^2) - 2d' T_2 a^2]\}, \tag{13.2}$$

$$B_2 d = b^{k_2} c^{k_2} \{d_1 [2c' T_1 c^2 + k_2 a^2 b^{k_1} (b^2 - c^2)] - a^2 b^2 c_1 k_2 t_1\}, \tag{13.3}$$

where

$$d = c_{66} c^2 T_1 b^{k_2} + d_{66} a^2 T_2 b^{k_1}, \tag{14.1}$$

$$c' = c_{66}/d_{11}, \quad d' = d_{66}/c_{11}, \tag{14.2}$$

$$c_1 = c_{11} - c_{66}, \quad d_1 = d_{11} - d_{66}, \tag{14.3}$$

$$t_1 = b^{k_1} - a^{k_1}, \quad t_2 = b^{k_2} - c^{k_2}, \tag{14.4}$$

$$T_1 = a^2 b^{k_1} - b^2 a^{k_1}, \quad T_2 = b^2 c^{k_2} - c^2 b^{k_2}. \tag{14.5}$$

7. The forces and couples acting on the plate

The force required to keep the length of the plate constant in the z direction is given by

$$\int_a^b r \widehat{zz}_1 \, dr + \int_b^c r \widehat{zz}_2 \, dr = F \text{ (say)} \tag{15.1}$$

$$2F = c_{13} b^2 - a^2) + d_{13} (c^2 - b^2) + c_{13} B_1 T_1 / [(2 - k_1) a^{k_1} b^{k_1}] + \\ + d_{13} B_2 T_2 / [(2 - k_2) b^{k_2} c^{k_2}], \tag{15.2}$$

or otherwise given by

$$2d c_1 d_1 F = (c_1 d_{66} a^2 t_1 T_2 + c_{66} d_1 c^2 t_2 T_1) (c_{13} d_1 - d_{13} c_1). \tag{15.3}$$

This will be zero if $c_{rs} = d_{rs}$, agreeing with the results of Seth.

The moment of the couple in the axial plane between ϑ and $\vartheta + d\vartheta$ is given by

$$\int_a^b r^2 \widehat{zz}_1 \, dr + \int_c^b r^2 \widehat{zz}_2 \, dr = - M_2 \text{ (say)} \tag{16.1}$$

$$2M_2 = c_{13} T_3 B_1 / [(3 - k_1) a^4 b^{k_1}] + d_{13} T_4 B_2 / [(3 - k_2) b^{k_2} c^{k_2}] - \\ - 2c_{13} (b^3 - a^3)/3 - 2d_{13} (c^3 - b^3)/3, \tag{16.2}$$

or ortherwise as,

$$- 3 c_{11} d_{11} d (3 - k_1)(3 - k_2) M_2 =$$

$$= c_{13} c_{66} d_{11} T_3 (3 - k_2) \{d_{66} T_2 a^2 + t_2 b^2 c^2 [d_{66} - d_{11} (3 - k_2)]\} + \tag{16.3}$$

$$+ d_{13} d_{66} c_{11} T_1 (3 - k_1) \{c_{66} T_1 c^2 + t_1 a^2 b^2 [c_{11} (3 - k_1) - c_{66}]\},$$

where

$$T_3 = b^3 a^{k_1} - a^3 b^{k_1}, \quad T_4 = c^3 b^{k_2} - b^3 c^{k_2}. \tag{17}$$

The moment of the couple bending the plate is given by

$$\int_a^b r \widehat{\vartheta\vartheta}_1 \, dr + \int_b^c r \widehat{\vartheta\vartheta}_2 \, dr = M_1 (\text{say}), \tag{18.1}$$

$$2M_1 = c_1 (b^2 - a^2) + d_1 (c^2 - b^2) + c_{12} T_1 B_1 / [(2 - k_1) a^{k_1} b^{k_1}] - \tag{18.2}$$

$$- d_{12} T_2 B_2 / [(2 - k_2) b^{k_2} c^{k_2}] - T,$$

or otherwise given as

$$- 2c_1 d_1 d M_1 = d_{66}^2 c_1^2 t_1 T_2 a^2 b^2 + \tag{18.3}$$

$$+ c_1 d_1 [d_{66}^2 T_2 a^2 b^{k_1} (c^2 - b^2) - c_{66} d_{66} T_1 T_2 (c^2 + a^2) + c_{66}^2 T_1 c^2 b^{k_2} (b^2 - a^2)] -$$

$$- d_1^2 c_{66}^2 t_2 T_1 b^2 c^2 - c_1 d_1 T,$$

where

$$T = 2 A^2 [c_{66} \log (b/a) + d_{66} \log (c/b)]. \tag{19}$$

The total force on the two axial planes $\vartheta = \pm$ constant is given by

$$\int_a^b \widehat{\vartheta\vartheta}_1 \, dr + \int_b^c \widehat{\vartheta\vartheta}_2 \, dr. \tag{20}$$

This vanishes as it should. The neutral surface is given by $r = a$.

8. Isotropic cylinder

With the same dimensions for the plate, the displacements and strains are given by (1) and (3). Using the stress-strain relations of the type

$$\widehat{xx}_i = \lambda_i (e_{xx_i} + e_{yy_i} + e_{zz_i}) + 2\mu_i e_{xx_i}, \tag{21.1}$$

$$\widehat{xy}_i = \mu_i e_{xy_i} \tag{21.2}$$

and transforming into cylindrical coordinate system, we have

$$\widehat{rr}_i = \frac{1}{2}\left[\lambda_i(2-\beta_i'^2 - A^2/r^2) + 2\mu_i(1-\beta_i'^2)\right]' \tag{22.1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_i = \frac{1}{2}\left[\lambda_i(2-\beta_i'^2 - A^2/r^2) + 2\mu_i(1-A^2/r^2)\right], \tag{22.2}$$

$$\widehat{zz}_i = \frac{1}{2}\left[\lambda_i(2-\beta_i'^2 - A^2/r^2)\right], \tag{22.3}$$

$$\widehat{r\vartheta}_i = 0, \quad \widehat{\vartheta z}_i = 0, \quad \widehat{zr}_i = 0. \tag{22.4}$$

The equations of equilibrium are all satisfied except (6.1). This gives (7), the equations β_i should satisfy, if we put

$$k_i = 2\mu_i/(\lambda_i + 2\mu_i). \tag{23}$$

The solution is then given by (9).

The boundary conditions are the same as given in § 5. The equations governing the constants are obtained as

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + 2\mu_1)(2 - B_1/b^{k_1}) - 2\mu_1(1 - A^2/b^2) = \\ = (\lambda_2 + 2\mu_2)(2 - B_2/b^{k_2}) - 2\mu_2(1 - A^2/b^2),\end{aligned} \tag{24.1}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)(2 - B_1/a^{k_1}) - 2\mu_1(1 - A^2/a^2) = 0, \tag{24.2}$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2)(2 - B_2/c^{k_2}) - 2\mu_2(1 - A^2/c^2) = 0. \tag{24.3}$$

The equations (24) differ from (11) and (12) in having

(25.1) $(\lambda_1 + 2\mu_1)$ and μ_1 in place of c_{11} and c_{66},

(25.2) $(\lambda_2 + 2\mu_2)$ and μ_2 in place of d_{11} and d_{66}.

Hence the constants are given by (13) and (14) using (23) and (25).

The forces and couples acting on the plate are given by the same expressions as in § 7; we replace

26) c_{13} and c_{33} by λ_1 and $\lambda_1 + 2\mu_1$ and d_{13} and d_{33} by λ_2 and $\lambda_2 + 2\mu_2$.

The values of A, B_1, B_2, F, M_1 and M_2 are calculated for the plate containing 1) Beryl and Apatite, 2) Wrought-iron and copper and are listed in tables 1 and 2 respectively.

The elastic constants of Beryl are:

$$c_{11} = 2781, \quad c_{33} = 2430, \quad c_{44} = 661, \quad c_{12} = 1001, \quad c_{13} = 677;$$

and those of Apatite are:

$$d_{11} = 1667, \quad d_{33} = 1396, \quad d_{44} = 663, \quad d_{12} = 181, \quad d_{13} = 655.$$

Taking $a = 1$ and $b = 2$ we have:

Table 1

c	A	B_1	B_2	F	M_2	M_1
3	1.616	3.0316	3.7068	172	— 624	653
3.5	1.7184	3.2502	4.126	230	— 1229	1143
4	1.8167	3.4724	4.5519	349	— 1937	1787

The elastic constants of wrought iron are $\lambda_1 = 9.301$, $\mu_1 = 8$; and those of copper are $\lambda_2 = 6.9$, $\mu_2 = 4.6$.

Taking $a = 1$ and $b = 2$ we have:

Table 2

c	A	B_1	B_2	F	M_1	M_2
3	1.579	3.7862	2.3487	—1.213	3.8243	13.4128
3.5	1.659	4.1235	2.5222	.065	8.6901	30.6454
4	1.736	4.7574	2.6946	—.0071	13.2736	30.2513

Case 2. Let the plate be allowed to extend paralle to z axis. The extension is uniform say $= \alpha$.

9. Components of displacements, strains and stresses

Let the dimensions of the plate be the same as in case *1*. From the symmetric manner in which the plate is strained the displacement may be assumed to be given by

$$u_i = x - \beta_i, \qquad v_i = y - A\vartheta, \qquad w_i = \alpha z. \tag{27}$$

Using (2), the components of displacements in cylindrical coordinates are given by

$$e_{rr_i} = \frac{1}{2}(1 - \beta_i'^2), \tag{28.1}$$

$$e_{\theta\theta_i} = \frac{1}{2}(1 - A^2/r^2), \tag{28.2}$$

$$e_{zz_i} = \frac{1}{2}(2\alpha - \alpha^2), \tag{28.3}$$

$$e_{\theta z_i} = 0, e_{zr_i} = 0, \ e_{r\theta i} = 0. \tag{28.4}$$

Assuming the stress — strain relations to be linear, the stress are obtained as

$$\widehat{rr}_1 = \frac{1}{2}c_{11}(2 - \beta_1'^2 - A^2/r^2) - c_{66}(1 - A^2/r^2) + c_{13}(\alpha - \alpha^2/2), \tag{29.1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_1 = \frac{1}{2}c_{11}(2 - \beta_1'^2 - A^2/r^2) - c_{66}(1 - \beta_1'^2) + c_{13}(\alpha - \alpha^2/2), \tag{29.2}$$

(29.3) $$\widehat{zz}_1 = \frac{1}{2} c_{13} (2 - \beta_1'^2 - A^2/r^2) + c_{33} (\alpha - \alpha^2/2),$$

(29.3) $$\widehat{r\vartheta}_i = \widehat{rz}_i = \widehat{\vartheta z}_i = 0.$$

$\widehat{rr}_2$, $\widehat{\vartheta\vartheta}_2$ and $\widehat{zz}_2$ are given by replacing c_{rs} by d_{rs} and β_1 by β_2 in (29).

10. Satisfaction of the equilibrium and the boundary conditions

The stresses have to satisfy the equations of equilibrium (6); (6.1) gives (7); (6.2) and (6.3) are identically satisfied. The solution is thus given by (9).

The boundary conditions (§ 5) are satisfied if

(30.1) $$c_{11}(2 - B_1/b^{k_1}) - 2c_{66}(1 - A^2/b^2) + c_{13}(2\alpha - \alpha^2) = d_{11}(2 - B_2/b^{k_2}) - 2d_{66}(1 - A^2/b^2) + d_{13}(2\alpha - \alpha^2),$$

(30·2) $$c_{11}(2 - B_1/a^{k_1}) - 2c_{66}(1 - A^2/a^2) + c_{13}(2\alpha - \alpha^2) = 0,$$

(30.3) $$d_{11}(2 - B_2/c^{k_2}) - 2d_{66}(1 - A^2/c^2) + c_{13}d_{13}(2\alpha - \alpha^2) = 0.$$

In addition it is also necesary that the total force on the plane ends $z = \pm$ constant, should vanish· This requires

(31.1) $$\int_a^b r\,\widehat{zz}_1\,dr + \int_b^c r\,\widehat{zz}_2\,dr = 0,$$

(31.2) $$c_{13}(b^2 - a^2) + d_{13}(c^2 - b^2) + c_{13}T_1B_1/[(2 - k_1)a^{k_1}b^{k_1}] + d_{13}T_2B_2[(2 - k_2)b^{k_2}c^{k_2}] + \frac{1}{2}(2\alpha - \alpha^2)[c_{33}(b^2 - a^2) + d_{33}(c^2 - b^2)] = 0.$$

11. Evaluation of the constants

The four equations (30) and (31) are necessary and sufficient to determine A, B_1, B_2 and α.

Some values of these constants evaluated for a plate containing Beryl and Apatite are tabulated below (table 3), let $p = (1 - \alpha)^2$. Taking $a = 1$, $b = 2$ we have:

Table 3

c	A^2	B_1	B_2	p
3	.6825	.9720	−.5025	4.3883
3.5	1.2706	1.4818	.1825	3.8407
4	1.5291	1.6882	.4172	3.6726

12. The isotropic cylinder

With the same dimensions for the plate, the displacements and strains are given by (27) and (23). The stress are given by

$$\widehat{rr}_i = \frac{1}{2}[\lambda_i(2-\beta_i'^2 - A^2/r^2 + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_i(1-\beta_i'^2)], \tag{32.1}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_i = \frac{1}{2}[\lambda_i(2-\beta_i'^2 - A^2/r^2 + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_i(1-A^2/r^2)], \tag{32.2}$$

$$\widehat{zz}_i = \frac{1}{2}[\lambda_i(2-\beta_i'^2 - A^2/r^2 + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_i(2\alpha-\alpha^2)], \tag{32.3}$$

$$\widehat{r\vartheta}_i = 0, \quad \widehat{rz}_i = 0, \quad \widehat{\vartheta z}_i = 0. \tag{32.4}$$

The equations of equilibrium are all satisfied except (6.1) which gives (7) if (23) is used. Solution is then the same as (9,.

The boundary conditions (§5) are satisfied if

$$\lambda_1(2 - B_1/b^{k_1} + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_1(1 - B_1/b^{k_1} + A^2/b^2) = \tag{33.1}$$

$$= \lambda_2(2 - B_2/b^{k_2} + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_2(1 - B_2/b^{k_2} + A^2/b^2),$$

$$\lambda_1(2 - B_1/a^{k_1} + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_2(1 - B_1/a^{k_1} + A^2/a^2) = 0, \tag{33.2}$$

$$\lambda_2(2 - B_2/c^{k_2} + 2\alpha - \alpha^2) + 2\mu_2(1 - B_2 c^{k_2} + A^2/c^2) = 0. \tag{33.3}$$

The total force on the plane ends vanishes if

$$\lambda_1(b^2 - a^2) + \lambda_2(c^2 - b^2) + \lambda_1 T_1 B_1/[(2-k_1)a^{k_1}b^{k_1}] + \lambda_2 T_2 B_2/[(2-k_2)b^{k_2}c^{k_2}] +$$

$$+ \frac{1}{2}(2\alpha-\alpha^2)[(\lambda_1+2\mu_1)(b^2-a^2) + (\lambda_2+2\mu_2)(c^2-b^2)]. \tag{33.4}$$

The total force on the axial planes vanishes as it should.

Some values of the constants, evaluated for a plate containing wrought iron and copper are listed below (table 4).

Taking $a = 1$ and $b = 2$, we have:

Table 4

c	A^2	B_1	B_2	p
3	.0126	.0588	−.1858	4.5666
3 5	.1637	.1957	−.0986	4.4642
4	.3384	.3311	−.0228	4.3856

The possibility of the extension of these results to the plate containing more than two different materials, is obvious.

I would like to thank Prof. V. P. Venkatachari for his valauble gluidance.

Received the 17 XI 1957

Osmania University, Hyderabad, India

REFERENCES

1. Muskhelishvili N. I., Bull. Ac. Sc. U. R. S. S., 1932, ser. VII, **7**, pp. 907–945.
2. Payne L. E., Thesis Iowa State College, 1950.
3. Ramakanth J., Indian Science Congress, 1955.
4. Seth B. R., Phil. Trans., 1935, **234**, pp. 231-264.
5. — Bull. Cal. Math. Soc., 1945, **37**.
6. Ramakanth J., Z. A. M. M., 1955, **35**, *12*, S. 453-450.

КОНЕЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СЛОЖНЫХ И АЕЛОТРОПНЫХ ТЕЛ (I)

(Резюме)

Прямоугольная пластинка состоящая из двух различных ромбоэдральных материалов исследуется автором с точки зрения теории упругости в следующих двух случаях : 1) растяжению по оси цилиндра препятствует некоторая приложенная сила ; 2) растяжение допустимо.

Оба случая совпадают для однородной пластинки. В случае изотропных материалов полученные результаты переходят в уже известные.

DEFORMAŢIA FINITĂ A CORPURILOR COMPUSE ŞI AELOTROPICE (I)

(Rezumat)

Considerînd o placă dreptunghiulară constituită din două materiale romboedrale diferite, autorul studiază problema fundamentală a elasticităţii în cazurile cînd : 1) întinderea este împiedicată de-a lungul axei cilindrului prin aplicarea unei forţe convenabile ; 2) întinderea este permisă. Cele două cazuri coincid pentru placa omogenă. Prin particularizare rezultă soluţia corespunzătoare unor materiale izotrope.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.934

SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

PAR
MAURICE JANET

1. Un système dynamique [1]) à deux degrés de liberté est régi, si l'on choisit convenablement [1] les variables x, y, t [2]), par les équations qui définissent les extrémales de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + u \right\} dt,$$

où α, β, u sont des fonctions données de (x, y), autrement dit par le système différentiel : $x'' + ay' = u_x$, $y'' - ax' = u_y$, où $a = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}$, système qui admet l'intégrale première évidente (dite de Jacobi) $\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - u = h$.

2. Bornons-nous d'abord aux solutions pour lesquelles la valeur numérique constante de cette fonction est donnée ; cette valeur pourra être supposée nulle, en ajoutant au besoin une constante à la fonction donnée u. Le système d'ordre 3 ainsi obtenu s'écrit très simplement en introduisant une variable z telle que $x' = b\cos z$, $y' = b\sin z$, où b^2 représente la fonction $2u$ après la transformation dont on vient de parler, à savoir $x' = b\cos z$, $y' = b\sin z$, $z' = a + b_y\cos z - b_x \sin z$.

Nous désignerons pour abréger par w la fonction de x, y, z, $w = a + b_x\cos z - b_y \sin z$ et par w_x, w_y, w_z ses trois dérivées partielles, à savoir $w_x = a_x + b_{xy}\cos z - b_{x^2}\sin z$, $w_y = a_y + b_{y^2}\cos z - b_{xy}\sin z$, $w_z = -b_y \sin z - b_x \cos z$.

Le système „aux variations" ξ, η, ζ correspondant est

$$\xi' = (b_x\xi + b_y\eta)\cos z - \zeta b \sin z, \quad \eta' = (b_x\xi + b_y\eta)\sin z - \zeta b\cos z,$$
$$\zeta' = w_x\xi + w_y\eta + w_z\zeta.$$

Nous allons montrer que l'expression $\varphi \equiv \xi\sin z - \eta\cos z$ satisfait à une équation différentielle linéaire de la forme très simple $\varphi'' + c\varphi = 0$,

[1]) conservatif.
[2]) On prendra donc garde de ne pas confondre en général t avec „le temps".

où nous donnerons l'expression de c à l'aide de valeurs de x, y et de leurs dérivées sur la solution de départ.

On trouve tout d'abord, en utilisant les expressions ξ', η'

$$\varphi' = -b\zeta + (\xi \cos z + \eta \sin z)\, z'.$$

D'où

$$\varphi'' = -b\,\zeta' + (\xi \cos z + \eta \sin z)\; z'' - (b_x x' + b_y y')\,\zeta + (\xi' \cos z + \eta' \sin z)\, z' - \\ - (\xi \sin z - \eta \cos z)\, z'^2,$$

$$\varphi'' = -b\,(w_x \xi + w_y\, \eta + w_z\, \zeta) + (\xi \cos z + \eta \sin z)\; (w_x x' + w_y y' + w_z z') - \\ - (b_x \cos z + b_y \sin z)\, b\, \zeta + (b_x\, \xi + b_y \eta)\, w - \varphi\, w^2.$$

Les termes où figurent les dériveés de w s'écrivent $b\,(w_y \cos z - w_x \sin z)\,\varphi - -w_z\,[b\,\zeta - w\,(\xi \cos z + \eta \sin z)]$, de sorte que les termes en ζ disparaissent dans le second membre, et que en dehors des termes où φ est apparu de lui-même, figure le produit de w par $w_z(\xi \cos z + \eta \sin z) + b_x \xi + b_y \eta$, autrement dit $(b_x \sin z - b_y \cos z)\,\varphi$. D'où une forme simple de c, à savoir $c \equiv b\,(w_x \sin z - w_y \cos z) - w\,(b_x \sin z - b_y \cos z) + w^2$, ou, en utilisant l'expression de w,

$$c \equiv a^2 + 3a\,(b_y \cos z - b_x \sin z) + b\,(a_x \sin z - a_y \cos z) + \\ + 2(b_y \cos z - b_x \sin z)^2 + b\,(-b_{x^2} \sin^2 z + 2b_{xy} \sin z \cos z - b_{y^2} \cos^2 z),$$

ou encore, si on préfère utiliser la fonction $u = b^2/2$,

$$c \equiv a^2 + \frac{3a}{\sqrt{2u}}\,(u_y \cos z - u_x \sin z) + \sqrt{2u}\,(a_x \sin z - a_y \cos z) + \\ + \frac{3}{2u}\,(u_y \cos z - u_x \sin z)^2 + (-u_{x^2} \sin^2 z + 2u_{xy} \sin z \cos z - u_{y^2} \cos^2 z).$$

Le cas particulier où b est une *constante donnée* a une interprétation géométrique immédiate: dans le plan, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, rechercher des courbes dont la *courbure* est une fonction de point donnée $a(x, y)/b$. Les cas particuliers où $a \equiv 0$ et où $a \equiv$ constante différente de zéro sont les deux seuls auxquels s'attache Poincaré sous les noms de „mouvement absolu" et de „mouvement relatif", le second se présentant en particulier dans ce qu'on est convenu d'appeler le „problème des trois corps restreint".

3. Le cas général que nous venons de traiter directement a été étudié par Aurel Wintner [2], à qui on doit d'avoir remarqué l'insuffisance des indications données par Poincaré [3] [3] à ce sujet; malheureusement deux erreurs numériques successives faussent le résultat donné par Wintner [4]. Il me semble donc utile de donner, outre la méthode précédente, une autre méthode de calcul, qui se rapproche davantage d'ailleurs de celles de Poincaré et de Wintner, mais qui a l'avantage de ne pas faire appel à une identité posée à priori.

3) Oubli des termes $-2\omega y'\xi + 2\omega x'\eta$ au deuxième membre de (3). De plus, au deuxième membre de l'équation (9), [3, p. 282] il convient d'ajouter $3\left(\frac{x'\,x'' + y'\,y''}{x'^2 + y'^2}\right)^2$.

4) Oubli d'un facteur 2 dans (20), oubli qui se répercute dans (22), et une erreur de signe dans (22).

De plus je l'exposerai de manière à obtenir un résultat général au sujet de la variation δh de la constante $\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-U(x,y)=h$ lorsqu'on passe d'une solution du système du 4-e ordre, primitivement donné, à une solution infiniment voisine quelconque.

Utilisons la notation de Poincaré: $\vartheta = \xi y' - \eta x'$, dont la dériveé est $\vartheta' = \xi' y' - \eta' x' + \xi y'' - \eta x''$ et posons $\varrho = x'\xi' + y'\eta' - \xi x'' - \eta y''$.

L'élimination de ξ, η entre ces trois relations donne immédiatement l'identité

$$-\vartheta(x''^2+y''^2)+\vartheta'(x'x''+y'y'')+\varrho(x'y''-y'x'')+(x'^2+y'^2)(\eta' x''-\xi' y'')=0.$$

D'autre part ξ, η sont supposées satisfaire au système aux variations

$$\xi'' + a\eta' = (U_{x^2} - a_x y')\xi + (U_{xy} - a_y y')\eta,$$
$$\eta'' - a\xi' = (U_{xy} + a_x x')\xi + (U_{y^2} + a_y x')\eta$$

et x', y' au système analogue (où ξ, η et leurs dérivées sont remplacées par x', y' et leurs dérivées). Après multiplication membre à membre des quatre équations obtenues, respectivement par y', $-x'$, $-\eta$, ξ et addition, on obtient l'équation

$$\vartheta'' - 2(\xi' y'' - \eta' x'') + a\varrho = Z\vartheta,$$

où

$$Z \equiv U_{x^2} + U_{y^2} - a_x y' + a_y x'.$$

Une combinaison immédiate des deux équations obtenues permet obtenir ϱ en fonction de ϑ, ϑ', ϑ'', les coefficients s'exprimant à l'aide des x', y' et de leurs dérivées

$$\varrho[2(x'y''-y'x'')-a(x'^2+y'^2)] = (x'^2+y'^2)(\vartheta''-Z\vartheta)-2\vartheta'(x'x''+y'y'')+ \\ +2\vartheta(x''^2+y''^2).$$

Utilisons maintenant l'expression de $h=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-u$ dont la variation est donnée par

$$\delta h = x'\xi' + y'\eta' - (u_x\xi + u_y\eta) = \varrho + \xi(x''-u_x) + \eta(y''-u_y),$$

ou encore, en utilisant le système donné lui même, $\delta h = \varrho - a\vartheta$. D'où $[2(x'y''-y'x'')-a(x'^2+y'^2)]\delta h = (x'^2+y'^2)\vartheta'' - 2(x'x''+y'y'')\vartheta' + \\ + [2(x''^2+y''^2)-2a(x'y''-y'x'')+(x'^2+y'^2)(a^2-U_{x^2}-U_{y^2}+a_x y'-a_y x')]\vartheta$, et, en posant $\vartheta = \sqrt{x'^2+y'^2}\,\varphi$,

$$\frac{2(x'y''-y'x'')-a(x'^2+y'^2)}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\delta h = \varphi'' + c\varphi,$$

où $c = -3\left(\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}\right)^2 + \frac{x'x'''+y'y'''+3(x''^2+y''^2)-2a(x'y''-y'x'')}{x'^2+y'^2} + \\ + a^2 - Z = 3\left(\frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}\right)^2 - 2a\frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2} + \frac{x'x'''+y'y'''}{x'^2+y'^2} + a^2 - Z.$

Il suffit d'utiliser maintenant les relations $x'x'' + y'y'' = x'u_x + y'u_y$, $x'y'' - y'x'' + a(x'^2 + y'^2) + x'u_y - y'u_x$, $x''^2 + y''^2 = (u_x - ay')^2 + (u_y + ax')^2$, $x'x''' + y'y''' + a(x'y'' - y'x'') = u_{x^2}x'^2 + 2u_{xy}x'y' + u_{y^2}y'^2$ (et enfin $\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \cos z$, $\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \sin z$, $x'^2 + y'^2 = 2u$, pour obtenir c précisément sous la forme trouvée plus haut, ce qui donne une intéressante vérification, si pour ce dernier point, on utilise $h = 0$).

D'autre part, le coefficient de δh dans le premier membre peut s'écrire $\frac{a}{\sqrt{2u}} + \frac{u_y \cos z - u_x \sin z}{u}$, (si on suppose encore qu'on part de $h=0$).

4. L'équation différentielle trouvée, dans le cas $\delta h = 0$, à savoir $\varphi'' + c\varphi = 0$, est utilisée en particulier par Poincaré pour l'étude des „solutions périodiques": c devient alors une fonction périodique C de la variable t, et on est amené pour reconnaître si l'intégrale „d'action" présente effectivement un extremum pour une telle solution, à porter son attention sur les solutions „instables de première catégorie"; ce sont celles pour lesquelles l'équation linéaire $\varphi'' + C\varphi = 0$ admet des solutions de la forme $\exp(\alpha t)\psi(t)$, où α est réel et où ψ a la période de la fonction C sans s'annuler. Il était donc avant tout indispensable d'avoir une expression correcte de la valeur générale du coefficient c qui y conduit.

Reçu le 18 XI 1958

Université de Paris,
France

BIBLIOGRAPHIE

1. Birkhoff G. D., *Dynamical Systems*, Am. Math. Soc. 1927, N. Y., p. 39.
2. Wintner A., Amer. J. of Math., 1931, **53**, p. 620.
3. Poincaré H., *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. III, Gauthier-Villars 1899, Paris, pp. 280—283.

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Резюме)

Автор, возвращаясь к задаче исследования решений динамической системы с двумя степенями свободы, рассмотренной Пуанкаре [3] и Уинтнером [2], излагает два метода, из которых один несколько совершенствует методы цитированных выше авторов, а другой основывается на приравнивании непосредственного первого интеграла экстремальных уравнений (называемого интегралом Якоби) данной постоянной.

ASUPRA SISTEMELOR DINAMICE CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

(Rezumat)

Autorul, reluînd problema studiului soluţiilor unui sistem dinamic cu două grade de libertate considerată de Poincaré [3] şi Wintner [2], expune două metode, dintre care una perfecţionează întrucîtva acelea expuse de autorii citaţi mai sus, iar alta se bazează pe faptul că valoarea integralei prime imediate (a lui Jacobi) este o constantă dată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

517.934

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR L'ÉTUDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES DANS LE PLAN DES PHASES

PAR

ALFRED BRAIER

Note présentée à la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, de 26—29 juin 1958

§ 1. Introduction

1. Les méthodes de l'analyse topologique, qu'on désigne sous le nom de méthodes du plan des phases si les systèmes ont un seul degré de liberté [1]... [6], fournissent des renseignements essentiels sur l'évolution d'un système non linéaire, par suite de l'étude de ses trajectoires dans le plan des phases. Également, en utilisant les trajectoires du plan des phases, on peut obtenir la solution de l'équation différentielle qui décrit le système.

À présent, la méthode du plan des phases est couramment utilisée pour l'analyse des phénomènes transitoires qui se déroulent dans les systèmes de réglage automatique [6]... [8].

2. On connaît plusieurs méthodes pour la construction effective des trajectoires dans le plan des phases, après l'étude préalable des points singuliers. Si les systèmes non linéaires sont autonomes, on utilise la méthode des isoclines [9], [10] ainsi que la méthode graphique de L i é n a r d [3],[5],[11], valable pour les équations ayant la forme particulière

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + x = 0. \tag{1}$$

Pour les systèmes non autonomes décrites par des équations du type

$$\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + q(x) = F(t), \tag{2}$$

on connaît la récente méthode grapho-analytique de K u [8], [12], du reste valable aussi pour les systèmes autonomes ($F(t) \equiv 0$). D'autres méthodes on trouve, par exemple, dans [8].

3. Dans cette Note on expose une méthode graphique qui permet de construire les trajectoires du plan des phases, de même que les solutions des équations différentielles

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) = F(t), \tag{3}$$

qui au fond ont la même forme que (2). On constate que la méthode proposée est relativement simple et expéditive et qu'en particulier elle conduit à des constructions graphiques élémentaires dans un grand nombre de problèmes non linéaires qu'on rencontre à présent.

§ 2. Systèmes autonomes

4. Soit

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \tag{4}$$

l'équation différentielle qui décrit le fonctionnement d'un système non linéaire autonome, à un seul degré de liberté. Au temps t_k, l'état du système, caractérisé par les quantités x_k, $\dot{x}_k$ et $\ddot{x}_k$, est représenté dans les plans des phases $(O', \dot{x}, \ddot{x})$ et $(O, x, \dot{x})$ par respectivement, les points $P'_k(\dot{x}_k, \ddot{x}_k)$ et $P_k(x_k, \dot{x}_k)$.

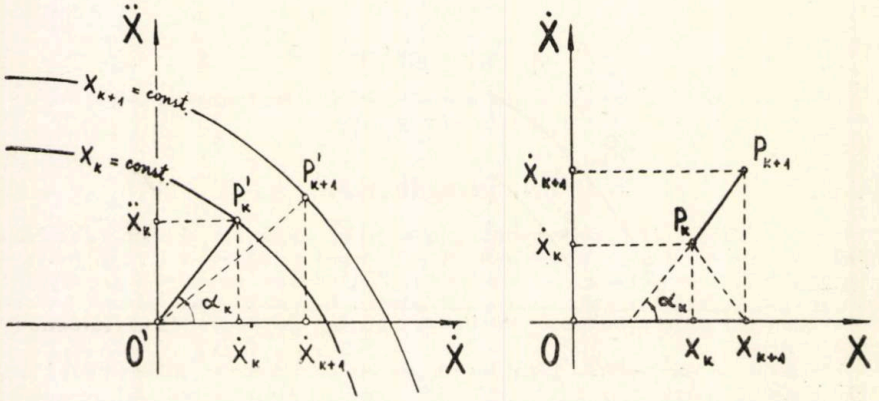


Fig. 1.

La méthode qu'on propose utilise le fait (fig.1) qu'en vertu de

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\ddot{x}_k}{\dot{x}_k} = \left(\frac{d\dot{x}}{dx}\right)_k, \tag{5}$$

la pente de la droite $O'P'_k$ du plan $(O', \dot{x}, \ddot{x})$ est égale à celle de la tangente à la trajectoire qui passe par le point figuratif P_k du plan $(O, x, \dot{x})$. C'est pour ce fait qu'on doit représenter dans le plan $(O', \dot{x}, \ddot{x})$ la famille de courbes $x = C =$ const., d'équation

$$\ddot{x} + f(C, \dot{x}) = 0. \tag{6}$$

Les trajectoires du plan des phases peuvent être construites dans la manière suivante. Soit $t = t_k, x = x_k$ et $\dot{x} = \dot{x}_k$ les conditions initiales. Représentons les points P_k et P'_k, le dernier se trouvant sur la courbe (6), correspondante à $C = x_k$ et préalablement construite. La parallèle à $O'P'_k$ menée par P_k donne la direction de la tangente à la trajectoire qui passe par P_k. On obtient alors un autre point P_{k+1} appartenant à la même trajectoire. À l'aide des quantités x_{k+1} et $\dot{x}_{k+1}$ qu'on trouve sur

le graphique, on détermine le point P'_{k+1}, sur la courbe (6) correspondante à $C = x_{k+1}$. La parallele à $O'P'_{k+1}$ menée par P_{k+1} donne la nouvelle direction de la tangente à la trajectoire qui passe par P_{k+1} et ainsi de suite.

5. Le nombre des opérations peut être réduit et les constructions simplifiées si on tourne autour de l'origine O' le plan $(O', \dot{x}, \ddot{x})$, avec $\pi/2$, dans le sens positif et on le superpose sur le plan des phases $(O, x, \dot{x})$. Nous obtenons la situation représentée dans la fig. 2, qui du point de

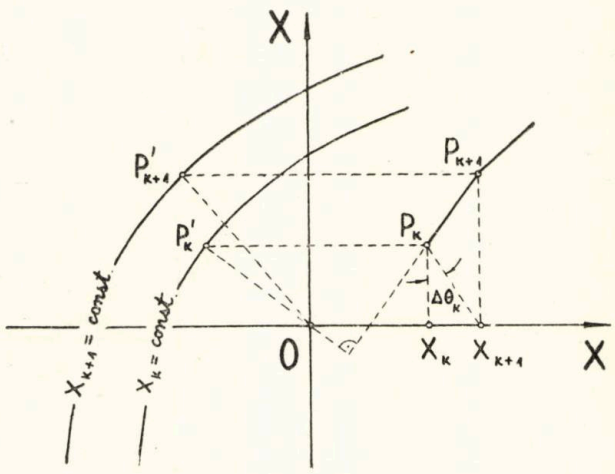


Fig. 2.

vue de la construction graphique présente l'avantage que les deux points P_k, P_{k+1} se trouvent dans le même plan, sur une parallèle à Ox. On conclut qu'on ne doit plus utiliser d'une manière explicite les quantités $\dot{x}$. Évidemment que la tangente à la trajectoire qui passe par P_k est cette fois perpendiculaire à la droite OP'_k.

Par suite de la superposition des deux plans, la famille de courbes (6) apparaît dans le plan des phases $(O, x, \dot{x})$, d'ailleurs le seul plan des phases qu'intervient dans la présente méthode. Dans ce plan, les courbes (6) ont l'équation

$$x^* = f(C, \dot{x}), \tag{6'}$$

où on a tenu compte qu'à la suite de la rotation et de la superposition, $\ddot{x} = -x^*$ (où x^* a les dimensions de $\ddot{x}$). On doit tenir compte de ce fait dans la construction des courbes (6') qui couvrent le plan des phases, lorsqu'on détermine l'échelle de x^*, après avoir choisi les échelles de x et $\dot{x}$ [1]).

1) Par exemple, si on utilise pour x et $\dot{x}$ respectivement les échelles a et b, alors l'échelle de x^* est b^2/a.

6. En conclusion, *la méthode* qu'on propose pour l'étude dans le plan des phases des systèmes non linéaires (4) *demande de construire la famille de courbes* (6′) *dans le plan des phases*, x^* ayant les dimensions de $\ddot{x}$. *Menons une parallèle à* Ox *par un point figuratif* P_k *du plan des phases, d'abscisse* x_k *et soit* P'_k *l'intersectivn de cette droite avec la courbe* (6′) *correspondante à* $C = x_k$; *la tangente à la trajectoire qui passe par* P_k *est perpendiculaire à* OP'_k.

Pour une équation donnée, après la construction des courbes (6′) dans le plan des phases, on peut utiliser, par exemple, du papier transparent pour tracer les différentes trajectoires qui correspondent à différentes conditions initiales.

7. La construction de la courbe $x = x(t)$ ne présente aucune difficulté. On doit mentionner que (fig. 2)

$$\Delta t_k = \frac{\Delta x_k}{\dot{x}_k} = \operatorname{tg} \Delta\vartheta_k, \tag{7}$$

où $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Vu que dans la construction graphique Δx_k reste suffisamment petit, $\operatorname{tg} \Delta\vartheta_k \approx \Delta\vartheta_k$ et donc, dans les limites des erreurs de la construction graphique, on peut écrire

$$\Delta t_k = \Delta\vartheta_k. \tag{7′}$$

§ 3. Systèmes non autonomes

8. Considérons maintenant la classe des systèmes non linéaires et non autonomes, à un seul degré de liberté, décrites par les équations de la forme

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t). \tag{3}$$

Remplaçons $F(t)$ par une fonction en échelle, (v. ausi K u [12]), c'est-à-dire admettons que pendant toul'intervalle $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, la fonction $F(t)$ est égale à $F(t_k + \mu\Delta t_k)$ où $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. On prendra $\mu = 0$.

Alors, pendant tout l'intervalle Δt_k, l'équation (3) devient

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) - F(t_k) = 0, \tag{8}$$

ayant la même forme que (4). La famille de courbes (6′) correspondante, qu'on doit avoir dans le plan des phases pendant tout l'intervalle Δt_k, aura l'équation

$$x^{**} = f(C, \dot{x}) - F(t_k). \tag{9}$$

Compte tenu de (6′),

$$x^{**} = x^* - F(t_k). \tag{9′}$$

Donc, *pendant tout le temps* Δt_k, *la force perturbatrice* $F(t)$ *qu'intervient dans le deuxième membre de l'équation* (3), *produit une translation de la famille de courbes* (6') *de l'équation homogène* (4) *correspondante, parallèle à* Ox *et de valeur* $F(t_k)$. *Dans la construction graphique on doit seulement déplacer le point* P'_k *dans une nouvelle position* P''_k (fig. 3), *à gauche si* $F_k > 0$ *ou à droite si* $F_k < 0$. Alors, la tangente à la trajectoire qui passe par P_k est perpendiculaire à OP''_k. En utilisant (7) ou (7') on obtient le Δt_k nécessaire pour calculer $F_{k+1} = F(t_{k+1})$.

On peut aussi construire sans difficultés le graphique de la solution $x = x(t)$ de l'équation (3).

9. On peut obtenir les quantités succesives F_k par voie purement graphique, en utilisant (7') et une représentation de $F(t)$ en coordonnées polaires [2]). Alors (fig. 3) $F_k = O_1 A_k = P'_k P''_k$. Après avoir construit la

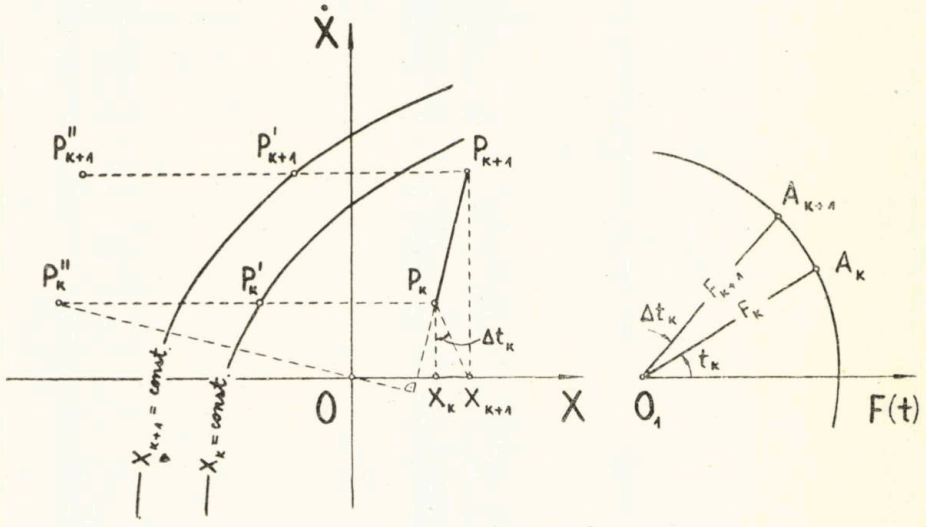


Fig. 3.

portion $P_k P_{k+1}$ de la trajectoire du système, on obtient l'angle Δt_k qui, transporté sur le graphique de $F(t)$, permet de trouver $F_{k+1} = O_1 A_{k+1} = P'_{k+1} P''_{k+1}$, donc le point P''_{k+1}, etc.

10. Soulignons que pour étudier par la méthode proposée les systèmes non autonomes (3) (ou autonomes (4)), on doit seulement construire dans le plan des phases la famille de courbes (6'). La force perturbatrice $F(t)$ nécessite son graphique à part ; la perturbation peut être donnée sous forme purement graphique et peut présenter des discontinuités (systèmes non linéaires soumis à des chocs).

---

[2]) en tenant compte des échelles utilisées pour représenter x et $\dot{x}$ dans le plan des phases ; l'échelle du temps est a/b, (v. la note 1).

Les courbes (6′) deviennent des droites dans le cas des équations de la forme

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + g(x) = F(t), \tag{10}$$

qui décrivent l'évolution de nombreux systèmes non linéaires qui intéressent la technique actuelle, comme par exemple l'équation de van der Pol [13], les équations qui régissent les mouvements des machines électriques synchrones á pôles noyés et à pôles saillants [12], les équations qui décrivent le fonctionnement des circuits électriques renfermant des éléments non linéaires [2], [13], [14] ainsi que d'autres équations [10], [15].

11. On a intégré deux équations différentielles non linéaires à l'aide de la méthode exposée (fig. 4 et fig. 5). Les familles de courbes (6′) correspondantes sont représentées dans les plans des phases respectifs. La fig. 4 se rapporte à un système autonome, décrit par une équation du type pendule simple, amorti par une résistance proportionnelle à le vitesse. La fig. 5 se rapporte à un systéme décrit par une équation du type van der Pol, soumis à un moment donné à une impulsion extérieure de forme trapézoïdale. La courbe en trait plein représente le cycle limite de l'équation, pendant que celle en trait interrompu représente la trajectoire de phase sous l'action de la perturbation appliquée. On suit clairement son effet sur le graphique de la solution $x = x(t)$ de l'équation qui décrit l'évolution du système.

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mécanique

BIBLIOGRAPHIE

1. Minorsky N., *Introduction to non-linear mechanics*, J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1947, p. I.
2. Капчинский И. М., Методы теории колебаний в радиотехнике, ГЭИ, М-Л, 1954.
3. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., симптотические методы в теорий нелинейных колебаний, Гостехиздат, Москва, 1955.
4. Hontoy P. et Jansens P., H. F., 1956, **3**, p. 6.
5. Hamburger L. şi Buzdugan Gh., *Teoria vibraţiilor şi aplicaţiile ei în construcţia maşinilor*, Ed. Tehn., Buc., 1958.
6. Солодовников В. В. (ред.), Основы автоматического регулирования, (теория) Машгиз, Москва, 1954, ч. II.
7. Tsien H. S., *Engineering cybernetics*, Mc Graw - Hill Book Co, N.Y.-Toronto-London, 1954.
8. Цыпкин Я. З. (ред.), Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления, Изд. АН СССР, Москва, 1957, гл. III.
9. Stepanov V. V., *Curs de ecuaţii diferenţiale*, Ed. Tehn., Buc., 1955 (trad. du russe).
10. Stoker J. J., *Non-linear vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, New-York, 1950.
11. Liénard A., R.G.E., 1928, **23**, pp. 901-953.
12. Ku Y. H., J. Franklin Inst, 1953, **255**, *1*, pp. 9—31.
13. Хаяси Т., Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИИЛ, Москва (trad. de l'anglais).
14. Харкевич А. А., Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике, ГИТТЛ, Москва, 1955
15. Haag J., *Les mouvements vibratoires*, t. I, Presses Universitaires de France, Paris, 1952

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

(Резюме)

Предлагается графический метод позволяющий построение фазовых траекторий и решения нелинейных уравнений типа (4) и (3).

METODĂ GRAFICĂ PENTRU STUDIUL SISTEMELOR NELINIARE ÎN PLANUL DE FAZĂ

(Rezumat)

Se expune o metodă grafică care permite construcţia traiectoriilor de fază şi a soluţiilor ecuaţiilor neliniare de tipul (4) şi (3).

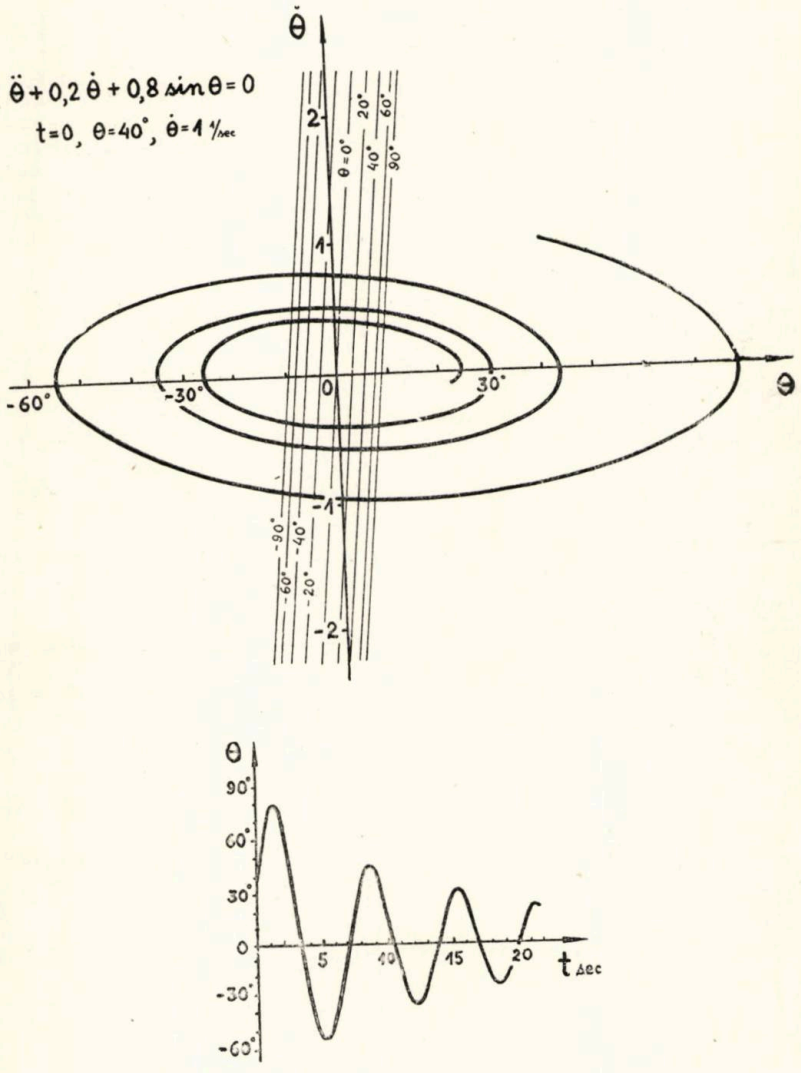


Fig. 4

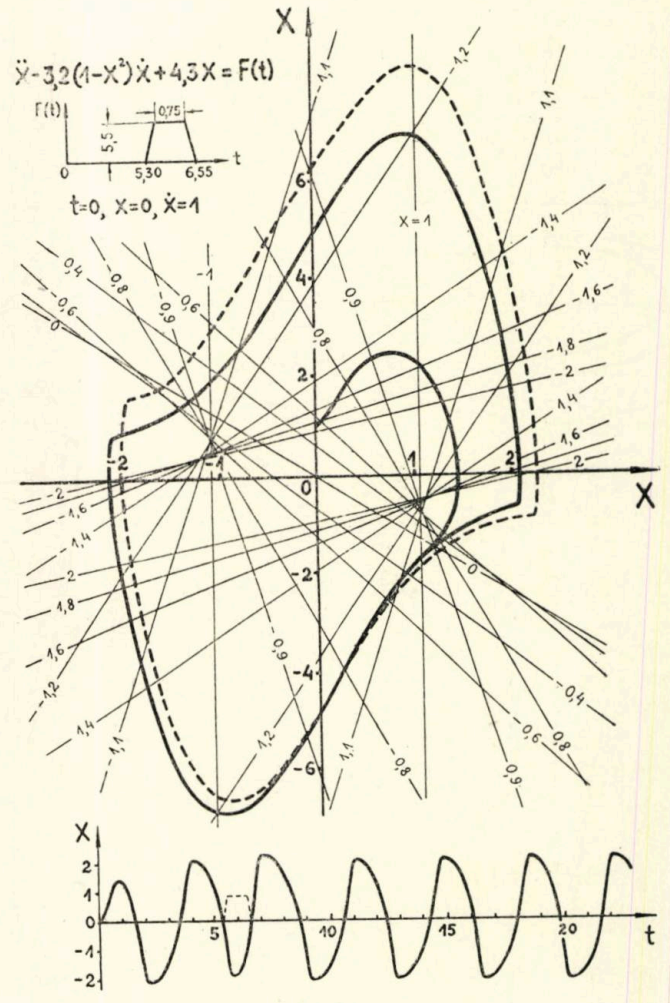


Fig. 5

PLANCHE I

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

539.15

АСИММЕТРИЧНОЕ ДЕЛЕНИЕ ТЯЖЕЛЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР

С. Г. РЫЖАНОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема асимметричного деления тяжелых ядер до сего времени не нашла себе удовлетворительного решения. Две наиболее известные гипотезы, полагаемые в основу рассчета, принадлежат Фонгу [1] и Хиллу [2] и несмотря на качественное совпадение с экспериментом всё—же встречают известные препятствия для их принятия.

Первый метод принадлежащий Фонгу, даёт чисто статистический подход к задаче о деление урана-235 тепловыми нейтронами. В рассчете предполагается, что наиболее вероятные осколки деления значительно ближе к магическим ядрам (50 протонов и 82 нейтрона) чем осколки симметричного деления. Второй метод существенно использует „модель ядра-персика“ и даёт лишь чисто качественную картину распределения выходов осколков по их массам.

Существенные затруднения статистического метода изложены в работах [3] и [4]. Не говоря уже о том, что наиболее вероятные осколки деления урана-236 довольно значительно отличаются от магических ядер (56 и 76 нуклонов того и другого рода) можно указать и на другие погрешности метода Фонга как например : учёт роли оболочечной структуры и нуклонных переходов, при рассчете энергии деформации, по работе Вёсте значительно „портит“ согласие с экспериментом достигнутое Фонгом для урана-236. Кроме того этот метод (Фонга) неохватывает асимметрию при спонтанном делении. Последнее всеми относится за счет туннельного эффекта [5], а согласно эксперименту распределение выходов осколков деления по их зарядам и массам почти тождественны как при спонтанном делении так и при делении вынужденном захватом теплового нейтрона.

Значительно ранее Я. И. Френкель ([6], стр. 158 ... 161) предложил весьма своеобразное объяснение ассимметрии деления тяжелых ядер. Согласно гипотезе Френкеля как спонтанное так и вынужденное деление являются туннельным эффектом соответственно идущим с основного и возбужденного уровней делящегося ядра (энергетический интервал разделяющий оба эти уровня равен $\Delta E \cong 6$ Мэв. Потенциальный барьер деления образован с одной стороны специфической ядерной потенциальной ямой, а с другой стороны электрическим (кулоновским) отталкиванием осколков. Основание для подобной гипотезы таково: потенциальная энергия осколков, в момент их разделения, даётся формулой [1])

$$U_0 = Z_1 Z_2 e^2 / [r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + \delta]. \tag{1}$$

Обозначения в этой формуле и далее таковы : $Z_1 e$ и $Z_2 e$ — электрические заряды осколков, при этом $Z_1 + Z_2 = Z_0$, где $Z_0 e$ — заряд делящегося ядра, A_1 и A_2 — массовые числа осколков, $r_0 A_1^{1/3}$ и $r_0 A_2^{1/3}$ —их ядерные радиусы и δ—поправка на их деформацию.

Приняв для r_0 величину равную 1,5. 10^{-13} см и для δ величину 2.10^{-13} см, получим, для урана ($Z_1 = Z_2 \cong 46$ и $A_1 = A_2 \cong 118$), $U_0 \cong 210$ Мэв. Суммарная-же ки-

[1]) e — элементарный электрический заряд, h — постоянна Планка ($h = h/2\pi$)

нетическая энергия осколков для урана-236 не превышает 175 Мэв, а для урана-239 не превосходит 190 Мэв и в других случаях подобного рода она всё-же меньше 200 Мэв. Таким образом уровень энергии осколков лежит ниже вершины потенциального барьера.

С точки зрения гипотезы Френкеля, альфа-распад есть наиболее резко асимметричное деление. По аналогии с альфа-распадом Френкелем была получена следующая формула для коэффициента прохождения осколков сквозь потенциальный барьер:

(2) $$P = \exp\left[-4\pi^2 e\sqrt{R_0/(2M_0)}\sqrt{M_1 M_2}\sqrt{Z_1 Z_2}/h\right].$$

Здесь: R_0—радиус делящегося ядра, $Z_1 e$ и $Z_2 e$—заряды осколков, M_1 и M_2—их массы, составляющие в сумме массу делящегося ядра M_0. Легко видеть, что эта формула качественно дает асимметрию деления, но приводит к слишком малой вероятности этого процесса и потому не может считаться сколь либо удовлетворительной. Это обстоятельство в принципе не может играть решающей роли против самой гипотезы Френкеля ибо формула (2) получена им слишком провизорным путём (см. напр. [6] стр. 154 ... 157) и потому должна быть заменена более точной формулой.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫХОДОВ ОСКОЛКОВ ПО ИХ ЗАРЯДАМ И МАССАМ

Более удовлетворительную формулу для вероятности w туннельного деления можно заимствовать из строгой и точной теории альфа-распада [7], [8]

(3) $$w = w_0 \exp\left[-Z_1 Z_2 e^2(\arccos 1/\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma - 1}/\sigma)/(\hbar v)\right].$$

В этой формуле, предэкспоненциальный фактор w_0 имеет порядок величины основной частоты ядерных колебаний ($w_0 \cong 10^{21}$ сек$^{-1}$), $\sigma = Z_1 Z_2 e^2/(\varrho E)$, ϱ—радиус специфической ядерной потенциальной ямы, E— суммарная кинетическая энергия осколков на бесконечности, v — их относительная скорость равная $\sqrt{2E/M}$ (M — приведенная масса осколков). Далее мы покажем, что формула (3) даёт эмпирически установленное распределение выходов (вероятностей) деления на осколки по их зарядовым и массовым числам Z и A.

Обозначим через $\bar{w}$ вероятность симметричного деления ($A_1 = A_2$) и разложим $\ln(w/\bar{w})$ в степенной ряд по положительным, целым степеням переменных

(4) $$\zeta = (2Z_1 - Z_0)/Z_0 = (Z_0 - 2Z_2)/Z_0 = 2z/Z_0, \quad \eta = (\bar{E} - E)/\bar{E},$$

($\bar{E}$ означает E для симметричного деления). Тогда мы получим со вполне достаточной точностью, формулу

(5) $$\ln(w/\bar{w}) = Z_0^2 e^2[\zeta^2 \arccos 1/\sqrt{\bar{\sigma}} - (\arccos 1/\sqrt{\bar{\sigma}} + \sqrt{\bar{\sigma} - 1}/\bar{\sigma})\,\eta/2]/(\hbar \bar{v}),$$

отличие ея правой части от таковой в (3) во всех рассматривамых случаях не превышает 0,01%.

Приняв $\bar{E} \cong 165$ Мэв мы получим для урана $\bar{v} = 2{,}65.10^9$ см/сек и $Z_0^2 e^2/\hbar\bar{v} \cong 852$. Считая $\varrho = r_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ при $r_0 = 1{,}5.10^{-13}$ см получим $\bar{\sigma} = 1{,}45$ ($\bar{\sigma}$ есть σ для симметричного деления). Для других тяжелых ядер близких к урану эти величины имеют такие-же порядки.

В [5] входит суммарная кинетическая энергия осколков на бесконечности. Её можно выразить известной формулой

$$E = E_1 + E_2 - E_0 - Q, \tag{6}$$

где E_1, E_2 и E_0 — энергии связи осколков и делящегося ядра, Q — энергия их внутреннего возбуждения. Согласно рассчетам [1] и [4] Q не превышает 5...6 Мэв, тогда как энергия деления—порядка 200 Мэв и потому мы будем пренебрегать Q в наших рассчетах. Для энергий связи применим формулу Ферми [9]:

$$E_{\text{св}} = E(0) - B_A (Z - Z_A)^2, \tag{7}$$

где $E(0) = 41{,}9 Z_A - 14 A^{2/3}$ ТМЕЕ, $B_A = 42/Z_A$, $Z_A = A/[1{,}98 + 14{,}96 \cdot 10^{-3} A^{2/3}]$.

Так, например, для делящегося ядра $Z = 92$ и $A = 235$ (уран), $Z_{A0} = 92{,}46$ и $B_{A0} = 0{,}453$ ТМЕЕ, а для осколков $A_1 = 141$ и $A_2 = 95$, $Z_{A1} = 59{,}11$ и $Z_{A2} = 41{,}45$, $B_{A1} = 0{,}71$ ТМЕЕ и $B_{A2} = 1{,}011$ ТМЕЕ.

Из (7) нетрудно получить следующую формулу для $\bar{E} - E$

$$\bar{E} - E = E^{(0)} + B_{A1} (z - z_1)^2 + B_{A2} (z - z_2)^2 \tag{8}$$

в которую введены следующие обозначения:

$$z_1 = |Z_{1A} - \bar{Z}|, \quad z_2 = |Z_{2A} - \bar{Z}|, \quad \bar{Z} = Z_0/2, \quad z = |Z_1 - \bar{Z}| = |\bar{Z} - Z_2|,$$

$$E^{(0)} = 2\bar{E}_{\text{св}} - E_{1A} - E_{2A} - 2\bar{B}_A (\bar{Z} - \bar{Z}_A)^2 =$$

$$= 42 (2\bar{Z}_A - Z_{A1} - Z_{A2}) - 14 (2^{1/3} A_0^{2/3} - A_1^{2/3} - A_2^{2/3}) - 2\bar{B}_A (\bar{Z} - \bar{Z}_A)^2,$$

где $\bar{Z}_A$, $\bar{B}_A$ есть Z_A, B_A для симметричных осколков ($A_1 = A_2 = A_0/2$). Легко показать, что $\bar{Z}_A = 50{,}4$ и $\bar{B}_A = 0{,}83$ ТМЕЕ. Те-же формулы дают для $\bar{E}$ величину равную 175 ТМЕЕ (U_{92}^{235}). Разделив (8) на $\bar{E}$ и подставив результат в (4) замечаем, что член с z^2 т. е. $(B_{A1} + B_{A2})\, z^2/(2\bar{E})$ заведомо больше члена с ζ^2 в (4), во всяком случае для ядер близких к урану.

Это обстоятельство позволяет придать, вероятности $w(Z_1\, Z_2)$ распределения выходов осколков по их зарядам, при заданных A_1 и A_2, форму гауссовой функции случайных отклонений

$$w(Z_1\, Z_2) = w_m \exp\, [-(z - z_m)^2 / (\Delta z)^2]. \tag{9}$$

Положение максимума вероятности на шкале зарядовых чисел даётся формулой

$$z_m = Z_{1m} - Z_0/2 = Z_0/2 - Z_{2m} = (B_{A1} z_1 + B_{A2} z_2)/(B_{A1} + B_{A2}). \tag{10}$$

Полуширина гауссова распределения представится в виде

$$2\sqrt{\ln 2}\,\Delta z = 2\sqrt{\ln 2}\,[Z_0^2 e^2 (B_{A1} + B_{A2}/(2\bar{E}\hbar\bar{v})], \tag{11}$$

а величина вероятности в ея максимуме как

$$w_m = w_0 \exp\{Z_0^2 e^2 [\varepsilon - B_{A1} B_{A2} \overline{\Delta Z^2}/(B_{A1}+B_{A2})]/(2\hbar\bar{v}\bar{E})\} \gg w_0 \tag{12}$$

Для урана-235, при $A_1 = 141$ и $A_2 = 95$, получаем: значение z_m в максимуме вероятности равным $\cong 8$, а полуширину равной 1. Форма распре: деления, установленная теоретическим путём, а равно и положение максимума вероятности на шкале зарядовых чисел, хорошо согласуется с экспериментом [10], [11], однако полуширина получается несколько заниженной (примерно в 1,5...2 раза), что нестоль существенно так как эксперимент может давать, в этом отношении, лишь порядок ширины (гипотеза Гленденина о равной длине радиоактивных цепочек!).

Пользуясь результатами работы [12] можно получить эмпирическую связь между зарядовыми и массовыми числами осколков для их максимальных выходов

$$A_1 - A_0/2 = A_0/2 - A_2 = 2{,}2\,(Z_1 - Z_0/2) = 2{,}2\,(Z_0/2 - Z_2)\,. \tag{13}$$

Воспользовавшись такой зависимостью можно получить и распределение вероятностей (выходов осколков) по шкале массовых чисел A_1 и A_2 в форме гауссовой функции. Положение максимума вероятности соответствует $A_1 - A_0/2 = A_0/2 - A_2 \cong 20$ с полушириной примерно равной 15, что хорошо согласуется с эмпирическими данными [13] для урана. Для ядер Th^{232}, Pu^{239} получается эмпирическая „двугорбая" кривая, в противоположность результатам Фонга (многогорбые кривые) не соответствуюшим эксперименту.

3. ПЕРИОДЫ СПОНТАННОГО ДЕЛЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

Перейдём теперь к рассчету периодов полураспада для спонтанного деления ядер типа T^{232}, U^{232}...U^{238}, Pu^{238}, Cm^{242}. Путём приближенного интегрирования (3) по зарядовым и массовым числам (по методам [14]), получаем следующую формулу для $\log_{10} T_{1/2}$ (лет)

$$\log T_{1/2} \cong -26 + (M_p \gamma r_0^2/\hbar^2)^{1/2} A^{7/6} x\,(2{,}85x - 1)^{-1/2}\,\Delta\,, \tag{14}$$

где $M_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г — масса нуклона, $T_{1/2}$ — период полураспада для спонтанного деления, выраженный в „годах". Далее

$$\Delta = \arccos 1/\sqrt{\bar{\sigma}} - \sqrt{\bar{\sigma} - 1}/\bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} \cong 2{,}2x/(2{,}85x - 1),$$

$x = Z^2 A^{-1}/(Z^2 A^{-1})_y$ — параметр устойчивости делящегося ядра, пропорциональный отношению кулоновской энергии ядра к его поверхностной

энергии, индекс y указывает на предел стабильности ядер $(Z^2 A^{-1})_y$ как известно равен $2\gamma/\varepsilon$ где γ и ε коэффициенты при $A^{2/3}$ и $Z^2 A^{-1/3}$ полуэмпирической формуле Бете-Вейцзекера для энергии связи тяжелых ядер [12].

Примем в качестве „отправной точки" ядро урана-235 для какового $x = 0{,}76$ и разложим правую часть (14) в степенной ряд по малым разностям $x - x_0$ и удерживая только члены разложения не выше первого порядка, получим:

$$(15) \qquad \log T_{1/2} = -26 + A^{7/6}\,[M_p \gamma r_0^2/(4\hbar^2)]^{1/2}\,(2{,}85\,x_0 - 1)^{1/2}\,\sigma_0\,\{\Delta_0 -$$

$$- (\arccos 1/\sqrt{\sigma_0} - 1{,}42\,x_0\,\Delta_0)\,(x - x_0)/[(2{,}85\,x_0 - 1)\,x_0]\}.$$

Отличие численной величины правой части (15) от таковой в точной формуле (14) не превышает для указанного ряда ядер 0,02%. Подставив в (15) значения $\sigma_0 = 1{,}45$ $\Delta_0 = 0{,}128$ и приняв $(Z^2 A^{-1})_y = 47$ (соответственно $\gamma = 14$ ТМЕЕ и $\varepsilon = 0{,}625$ ТМЕЕ) и заменив переменное A его средним значением (236) для указанного ряда ядер получим:

$$(16) \qquad \log T_{1/2} = 194 - 4{,}5\,Z^2 A^{-1}.$$

что хорошо согласуется с эмпирическими данными [15].

Для периода деления вынужденного захватом теплового нейтрона эксперимент (16) даёт величину порядка $10^{-10}...10^{-12}$ сек. Такое „катастрофическое" снижение периода деления уже было объяснено, с точки зрения рассматриваемой гипотезы в работе [8].

Именно достаточно считать, что для возбужденного уровня (6Мэв) радиус ядерной потенциальной ямы в 1,2 раза больше чем для основного уровня, чтобы объяснить указанный экспериментальный факт. Такое объяснение вполне правдоподобно, ибо ядерная потенциальная яма имеет у своего дна параболическую форму. В цитированной работе приведены результаты рассчета периода деления в предположении, что деформация ядра захваченным нейтроном достигает значения 0,5.

Обе интерпретации вполне эквивалентны.

4. ДРУГИЕ ВОПРОСЫ

Нами обсуждалось и деление ядра на три осколка, по гипотезе Френкеля. Потенциальная энергия каждого осколка, из рассматриваемых трёх, аппроксимировалась суммой потенциальных энергий каждого из них относительно двух других. Как известно, энергия деления на три осколка составляет 210 Мэв, так что на каждый осколок приходится кинетическая энергия равная в среднем 70 Мэв.

Рассчет по формуле аналогичной (3) даёт вероятность деления на три осколка заведомо значительно меньшую чем на два. Для объяснения порогов деления тепловыми нейтронами ядер Th^{232}, Pa^{231}, U^{238}, также не требуется обязательное предположение о надбаръерном делений.

Таким образом гипотеза Френкеля положенная в основу наших рассчетов действительно даёт единообразное объяснение основным закономерностям асимметрии деления тяжелых ядер.

Поступило 28 V 1958

Кишиневский Государственный Университет,
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Fong P., Phys. Rev., 1956, **102**, pp. 4 148.
2. Hill R., Phys. Rev., 1955, **98**, pp. 1272-1276.
3. Perring J. a. Story J., Phys. Rev., 1955, **98**, pp. 1525-1526.
4. Woeste K., Zeitsch. für Physik, 1955, **141**, pp. 643-658.
5. Bohr N. a. Wheeler D. A., Phys. Rev., 1939, **56**, p. 426.
6. Френкель Я. И., Принципы теории атомных ядер, 1950, Изд. АН СССР.
7. Разетти Ф., Основы ядерной физики, ГИТТЛ, 1940, стр. 81-90.
8. Рыжанов С. Г., ЖЭТФ, 1956, **30**, *3*, стр. 599-601.
9. Ферми Э., Ядерная физика, ИИЛ, 1951, стр. 14-17.
10. Coryell a. Glendenin, Phys. Rev., 1949, **75**, p. 337.
11. Bruntow D., Phys. Rev., 1949, **76**, p. 1798.
12. Siegel T., J. Americ. Chemic. Soc., 1949, **68**, p. 2411.
13. Entschke W., Zeitsch für Physik, 1943, **120**, S. 165.
14. Крылов А. Н., Лекции о приблизительном вычислении, ГИТТЛ, 1954, гл, 3.
15. Seaborg G. T., Phys. Rev., 1952, **85**, p. 157.
16. Wilson R., Phys. Rev., 1947, **72**, p. 98.

ASYMMETRIC FISSION OF HEAVY NUCLEI

(Summary)

Like the alpha-decay the fission of heavy nuclei is considered to be a tunnel effect going from the main or excited level of a compound nucleus in the spontaneous and induced fission respectively.

The alpha-decay is considered to be the most distinctly asymmetric fission.

By means of generalisation of the quantum mechanical formula for the alpha-decay we have obtained a formula for the probability of a fission of a heavy nucleus into two fragments with the given atomic and mass numbers from wich asymmetric fission results.

The distribution of the fragment yields according their atomic and mass numbers in the form of the Gauss-function of chance deflections has been obtained too.

The breadth of these distributions satisfactorily corresponds with the experiment.

The dependence of the periods of the spontaneous fission of heavy nucley from the parameter of the stability that well corresponds with the experimental results has been deduced.

FISIUNEA ASIMETRICĂ A NUCLEELOR GRELE

(Rezumat)

Autorul obţine o formulă pentru probabilitatea fisiunii unui nucleu greu din care rezultă fisiunea asimetrică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

537.523.5

STUDIUL EROZIUNII PRIN DESCĂRCĂRI LA ELECTROZI METALICI DIFERIŢI

DE

N. CALINICENCO, C. RUSCIOR şi CORNELIA CIOBANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Studiul electroeroziunii arată că acest proces se prezintă mai intens la metalele care constituie anoda într-un circuit de descărcare. Metalele pe care le-am utilizat în acest scop erau următoarele: Zn, Pt, Mg, Al, Cu, Ni, Fe, W şi Mo. Drept catodă, în toate cercetările noastre s-a folosit Cu, întrucît din rezultatele anterioare s-a constatat, că acest metal prezintă o eroziune catodică, relativ mică.

Instalaţia folosită este asemănătoare celei din lucrarea [1], cu unele completări, ce permiteau determinarea energiei debitate pe circuit şi a numărului de descărcări. Variaţiile tensiunii şi intensităţii curentului din circuitul de descărcare au fost urmărite cu ajutorul unui oscilograf catodic. Acest oscilograf permitea să se determine şi durata impulsurilor electrice.

2. În ultimul timp s-au emis pentru explicarea electroeroziunii, mai multe teorii. Din acestea vom cita următoarele: a) teoria electrică a distrugerii metalelor, emisă de E. M. Williams, b) teoria distrugerii mecanice a metalelor, emisă de S. L. Mandelstam şi S. M. Raiski şi c) teoria izvoarelor plate, de scurtă durată, pe suprafaţa electrozilor, emisă de B. N. Zolotîh.

Nu ne vom opri decît pe scurt asupra acestor teorii, analiza lor amănunţită fiind dată în lucrările lui A. S. Zingherman [2].

După Williams, electroeroziunea între electrozii metalici se produce la o străpungere, urmată de o descărcare electrică. În acest caz, pe electrozi se observă o scobitură în locul unde canalul de descărcare atinge electrozii. În timpul descărcării, curentul trece de pe un electrod, prin canal, la celălalt electrod. Secţiunea canalului, faţă de suprafaţa electrodului, este mică, prin urmare, în zona de trecere a curentului de pe electrod spre canal, densitatea curentului e mare. În această zonă gradientul de potenţial şi forţele electrice sînt mari. Acţiunea acestor forţe asupra sarcinilor pozitive poate provoca ruperea particulelor metalice. Volumul particulelor rupte depinde de intensitatea generală a curentului. Williams presupune că forţele acţionează numai asupra sarcinilor dispuse la suprafaţa porţiunilor rupte.

În ipoteza distrugerii mecanice a metalului, (Mandelstam şi Raiski), se admite că de pe suprafaţa electrozilor se desprinde o vînă, formată din vaporii metalelor, vînă ce are forma unor făclii sau torţe. Viteza vînei este de ordinul cîtorva sute sau chiar mii de metri pe secundă. După părerea autorilor, distrugerea metalului se face sub acţiunea mecanică a făcliilor ce cad pe electrodul opus. În felul acesta, după Mandelstam şi Raiski, electroeroziunea nu-i legată direct de descărcarea electrică, ci constituie un proces secundar, condiţionat de acţiunea mecanică a vînei de vapori metalici,

produsă la descărcare. Autorii teoriei făcliilor consideră că vînele se formează în urma emisiei, de scurtă durată, de pe suprafaţa electrodului, la descărcări cu densitate mare de energie. Aceasta provoacă vaporizarea metalului, în formă explozivă. Vaporii metalului ies normal la suprafaţa electrodului, în formă de vîne luminoase. Vîna vaporilor antrenează şi metalul topit, fapt în urma căruia pe electrod se formează o scobitură. O observare mai atentă a naturii vînelor duce la concluzia că înseşi vînele sînt produsele eroziunii şi nici decum cauza lor. Conform ipotezei de mai sus, înlocuirea gazului dintre electrozi printr-un dielectric lichid, menţinînd celelalte condiţii identice, trebuie să producă o micşorare puternică a eroziunii. În realitate, experienţele arată că o asemenea înlocuire produce o puternică creştere a eroziunii [3].

După Zolotîh, electroeroziunea este un proces electrotermic. Mecanismul acestui proces ar avea la bază izvoare termice plate, de scurtă durată şi dimensiuni reduse, de pe suprafaţa electrozilor, ce apar sub acţiunea descărcării electrice prin impulsuri. Procesul nestaţionar de propagare a căldurii de la aceste izvoare, determină volumul de metal topit sub acţiunea curentului, la suprafaţa electrodului. Aceste porţiuni de metal se îndepărtează din zona descărcării cu ajutorul forţelor ponderomotoare, de origină electrică, sau sub acţiunea undei de şoc, care se formează pe seama vaporizării parţiale a metalului la descărcare. Pe lîngă aceasta, acelaşi autor pleacă de la faptul că în mecanismul descris al eroziunii, un rol esenţial îl joacă şi efectul conductibilităţii termice a materialului din care e format electrodul (vezi bibliografia citată în [5] şi [6]).

Maximul de eroziune va depinde deci de proprietăţile termofizice ale materialului electrozilor şi de energia impulsului.

Recent, Zingherman şi K a p l a n au studiat dependenţa electroeroziunii anodei în funcţie de distanţa dintre electrozi [4]. În această lucrare, se pune o problemă de un deosebit interes pentru cercetările noastre şi anume, cauza distribuirii energiei transmisă de electrozi, adică efectul polar. Prin acest termen înţelegem mărirea eroziunii unui electrod, faţă de eroziunea celuilalt electrod. Între aceşti factori, poate fi considerată şi distanţa care provoacă variaţia coeficientului polar, adică variaţia raportului între energia cedată electrodului pozitiv şi cea cedată electrodului negativ. În această lucrare se constată că structura canalului de descărcare depinde în mică măsură de lungimea lui atunci cînd distanţa dintre electrozi nu întrece 100 microni. La o distanţă mai mare, atît structura canalului, cît şi fenomenele, ce se petrec în el, se schimbă în mare măsură.

3. Într-o lucrare recentă, A. N. K r u g l o v, S. K. M î z o v a şi I. P. K o r o b o v a [5], au găsit, în cercetările lor experimentale, că eroziunea, faţă de energia impulsului, dă în multe cazuri devieri faţă de legea liniară. Ei remarcă că aceste abateri sînt mai însemnate cînd unul din metalele electrozilor are însuşiri feromagnetice. Cercetările lor se refereau la eroziunea unei catode de cupru, anoda fiind din oţel. Curbele obţinute de ei, date de $\gamma_k = f(W_i)_{t_i=\text{const.}}$, unde t_i—durata impulsului, γ_k—eroziunea catodei de cupru, iar W_i— energia ce apare în spaţiul de scînteie, prezintă un punct de inflexiune. Punctele de inflexiune se deplasează cu creşterea duratei impulsului, spre valorile crescînde ale energiei impulsului.

Cercetările de mai sus întăresc cele deduse de B. N. Zolotîh, că baza eroziunii electrice a metalelor o constituie procesul electrotermic. După Zolotîh eroziunile electrice sînt datorite izvoarelor termice, ce se formează pe baza efectului de frînare a ionilor de catod şi a electronilor de anod [6].

Ipoteza emisă concordă cu polaritatea eroziunii şi dependenţa mărimii acesteia de temperatura de topire a materialelor electrozilor în acţiune. În felul acesta efectul Joule-Lenz nu joacă un rol esenţial.

4. În experienţele noastre am cercetat în primul rînd eroziunea anodică la diferite metale, menţinînd aceeaşi catodă de cupru. Am căutat să determinăm polaritatea electrozilor şi dependenţa acestei eroziuni de tensiune şi de energia impulsurilor.

Mărimea eroziunii în funcţie de tensiune s-a determinat prin masa metalului erodat în unitate de timp. Descărcarea electrică se producea într-un mediu dielectric, care în cazul de faţă era ulei de parafină. Vi-

teza procesului de electroeroziune creşte cu tensiunea aplicată condensatorului, în cazul cînd se menţine curentul de scurt-circuitare constant. În cazul nostru am menţinut curentul $I=1$ A, iar tensiunea U am variat-o între 20...70 V. Viteza de eroziune a anodului se exprimă în mg/min. Se obţine graficul din fig. 1.

Analizînd acest grafic, observăm că eroziunea variază în funcţie de natura metalului, în ordinea: Mo, W, Fe, Ni, Cu, Al, Mg, Pt, Zn. Ca formă, curbele sînt arce de parabolă, ceea ce duce la concluzia că viteza de eroziune este proporţională cu patratul tensiunii, în paralel cu energia debitată pe circuit.

Dacă se calculează eroziunea pe unitate de energie (m/W) în cazul nostru exprimată în micrograme pe joule (μg/J), se constată că acest raport este constant pentru un acelaşi metal. Valoarea raportului m/W s-a aflat împărţind eroziunea totală la energia efectiv consumată pentru descărcare, aceasta din urmă fiind dată de produsul dintre $CU^2/2$ şi numărul de descărcări.

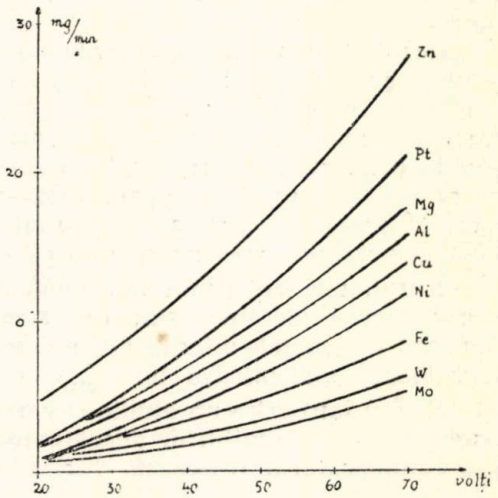


Fig. 1.

În coloana a doua a tabelului 1 sînt redate valorile respective ale raportului m/W.

Am crezut că este interesant a ne raporta şi la unii parametri termofizici ai metalelor, cum ar fi punctul de topire θ°C şi căldura totală de topire L, care sînt date în coloanele 3 şi 4 ale aceluiaşi tabel, prin L înţelegînd căldura totală necesară pentru a topi metalul dat, plecînd de la temperatura mediului.

Tabelul 1

Metalul	m/W μg/J	θ °C	L cal/g	$A.\ 10^3$
Mo	17	2550	218	556
W	20	3387	160	540
Fe	25	1535	321	490
Ni	37	1452	247	362
Cu	40	1083	148	160
Al	43	660	241	160
Mg	58	657	235	150
Pt	60	1770	79	140
Zn	110	419	65	27

În acest tabel s-a mai introdus în coloana a 5-a, mărimea $A = \theta L$.

Este interesant de observat, din acest tabel, că cantitatea erodată creşte cu cît valoarea lui A scade.

Se stabileşte, pe baza datelor experimentale, următoarea relaţie aproximativă între A şi m/W:

$$A \cdot \left(\frac{m}{W}\right)^{1,7} = 84.10^6. \tag{1}$$

Această relaţie ne permite să aflăm eroziunea anodică în ulei, a unui metal oarecare, dacă cunoaştem punctul de topire şi căldura totală de topire.

Rezultatele noastre concordă cu cele obţinute de I. G. Nekraşevici şi S. P. Mitkevici [7], care au studiat eroziunea electrozilor în ulei de transformator. Ei presupun că metalul pulverizat de pe electrozi, se încălzeşte pînă la temperatura canalului de descărcare. Din ecuaţia conservării energiei, dacă nu se ţine seama de natura metalului, reiesă că produsul masei metalului total pulverizat cu mărimea energiei maxime, care se cheltuieşte pentru pulverizarea unităţii de masă a metalului, trebuie să rămînă constant, adică $m\lambda_{total} = \text{const}$.

Rezultatele determinărilor lor confirmă veracitatea acestei regule în cazul cînd electrozii sînt din acelaşi metal. La o descărcare între electrozi, din metale diferite, cea mai mare eroziune se găseşte la metale cu valoarea mai mică a lui λ_{total}.

5. Am întreprins un studiu al variaţiei parametrilor electrici în timpul descărcării, în circuitul de descărcare. În ce priveşte tensiunea la bornele condensatorului, aceasta variază după curba din fig. 2.

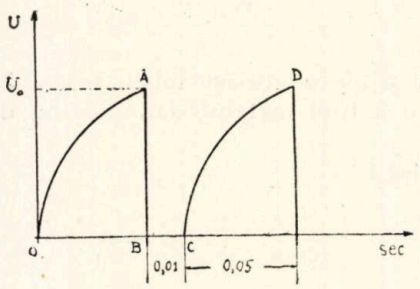


Fig. 2.

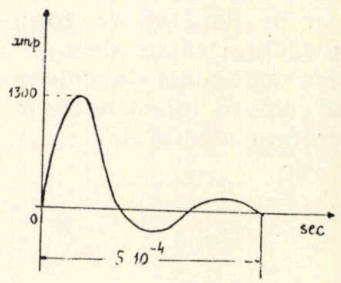


Fig. 3.

Tensiunea scade de la o valoare U_0 (cuprinsă între 20...100 V) pînă la zero, într-un timp foarte scurt (5.10^{-4} sec.) — porţiunea AB — cît durează descărcarea electrică. Pe porţiunea BC, cît durează contactul între electrozi, (0,01 sec.), tensiunea este nulă, iar apoi, la separarea electrozilor, urmează încărcarea condensatorului, pe porţiunea CD, cu durata de 4.10^{-2} sec.

Variaţia curentului de descărcare este dată de curba din fig. 3.

Descărcarea este oscilantă, dar destul de puternic amortizată. Curentul de descărcare atinge valoarea maximă de 1300 A, cînd $U_0 = 100$ V.

Putem face un calcul aproximativ al temperaturilor care se dezvoltă în timpul descărcărilor, plecînd de la unele ipoteze simplificatoare, anume, că în timpul descărcării se antrenează în canalul de descărcare, metalul topit, care constituie inițial un mic fir, ce leagă cei doi electrozi. Lungimea acestui fir este dată de distanța explozivă dintre electrozi, în funcție de rigiditatea dielectricului. De exemplu, în cazul uleiului, a cărui rigitate este de 100 kV/cm, rezultă lungimea $l = 10^{-3}$ cm. Din cantitatea de metal erodată deducem diametrul firului, care în cazul cuprului, va fi de $2 \cdot 10^{-2}$ cm.

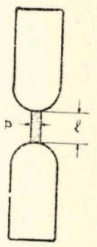


Fig. 4.

Această masă de cupru topit, aflîndu-se la o temperatură de 1083°C, este supusă unei comprimări din partea cîmpului magnetic al curentului [8]. Valoarea acestei presiuni, (p) este dată de tensiunea maxwelliană, egală cu densitatea de energie în cîmpul magnetic: $p = HB/8\pi = \mu H^2/8\pi$ care, pentru $I = 1300$ A, devine $p = 3.10^7$ dyne/cm^2, deci aproximativ 30 atm.

Temperatura crește mai departe, pînă la vaporizarea metalului.

La temperatura normală de fierbere a cuprului (T=2700°C), căldura latentă de vaporizare este L=7,3.10^4 cal/mol.

Pe baza ecuației Clausius-Clapeyron $\Delta T = \frac{T}{J} \cdot \frac{V_{vap.} - V_{lich}}{L} \cdot \Delta p$, unde $V_{vap} - V_{lich} = 2600$ cm^3/mol, aflăm creșterea temperaturii de fierbere, datorită comprimării la care este supus lichidul. Astfel se găsește ΔT=70°, deci T=2770°.

În felul acesta deducem că temperatura minimă în timpul descărcării este de ordinul a 3000°, pentru cupru.

În același mod, se pot afla temperaturile din timpul descărcării și la alte metale.

Este posibil ca pe această cale să putem explica unele abateri ale fenomenului de electroeroziune, constatate la fier de către Kruglov, Mîzova și Korobova [5], prin permeabilitatea lor magnetică. O greutate în această privință constă în faptul, că în ceea ce privește porțiunile erodate, ele se găsesc la o astfel de temperatură încît ne aflăm dincolo de punctul Curie.

6. Descărcarea în mediu lichid duce la următoarele particularități, care măresc eroziunea față de cea din aer:

1) izolează canalul de descărcare față de mediul exterior oxidant;

2) produce o localizare mai puternică a acțiunii descărcării asupra electrozilor;

3) evită formarea stratului de oxizi.

Sub pătura de lichid se crează condiții mai favorabile de electroeroziune, prin apariția unei neomogenități bruște de temperatură și a unei

teci cu o densitate mare de vapori, atît a lichidului cît şi a metalului de pe electrod.

Vaporizarea electrozilor are un caracter exploziv şi umple spaţiul interelectrodic cu particule erodate. Lichidul dielectric, în cazul cînd aceste particule sînt încărcate, poate să împiedice aglomerarea lor, împrăştiindu-le. Aceasta asigură o primenire a spaţiului din jurul electrozilor.

7. Cercetînd influenţa mai multor medii dielectrice asupra eroziunii anodice, am constatat că există o corelaţie între eroziune şi constanta dielectrică.

Tabelul 2

Mediul	Constanta dielectrică	m' mg/Wh
aer	1	3
petrol	2	26
ulei parafină	2,2	36
alcol etilic	26	43
apă	81	54

În tabelul 2 sînt date eroziunile anodice ale cuprului în diferite medii, obţinute în aceleaşi condiţiuni, la 110 V şi $C = 120$ μF.

Se constată o creştere a eroziunii, în paralel cu constanta dielectrică.

Concluzii

În urma rezultatelor obţinute reies următoarele constatări:

1. Cantitatea de substanţă erodată depinde de energia descărcării.
2. Între eroziunea anodică în ulei, punctul de topire şi căldura totală de topire se poate stabili relaţia aproximativă (1).
3. Pe baza tensiunii maxwelliene a cîmpului magnetic, creat de curentul de descărcare, se poate sabili o valoare minimă a temperaturii în procesul de eroziune.
4. Se remarcă o anumită corelaţie între eroziunea anodică şi constanta dielectrică a mediului în care se produce eroziunea.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Calinicenco N., Ruscior C. şi Ciobanu C., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1955, **I (V)**, *1—2*, p. 25.
2. Зингерман А. С., ЖТФ 1955, **XXV**, *11*, стр. 1931; Ibid., 1956, **XXVI**, *5*, стр. 1015; Ibid, 1956, **XXVI**, *9*, стр. 2008.
3. Calinicenco N., Ruscior C. şi Ciobanu C., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *1—2*, p. 55.

4. Зингерман А. С. и Каплан Д. А., ЖТФ, 1958, **XXVIII**, *2*, стр. 386.
5. Круглов А. Н., Мызова С. К. и Коробова И. П., ЖТФ, 1956, **XXVII**, *10*, стр. 2421.
6. Золотых Б. Н., Электричество, 1956, *8*, стр. 55.
7. Некрашевич И. Г. и Миткевич С. П., ЖТФ, 1956, **XXVI**, *1*, стр. 90.
8. David Erwin, Ztschr. f. Phys., 1958, **150**, S. 162.

ЭРОЗИЯ, ПРОИЗВЕДЕННАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ РАЗРЯДАМИ, МЕЖДУ РАЗНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

(Резюме)

Авторы устанавливают анодную эрозию многих металлов (Mo, W, Ni, Cu, Al, Mg, Pt и Zn), происходящая при разрядах в парафинном масле, в зависимости от электрической энергии.

Таким образом, они находят пропорциональность между количеством эрозированного металла и энергией происходящего разряда.

Эрозия на единицу энергии растёт, по вышеуказанному порядку, эти металлы.

В настоящей работе устанавливается соотношение (1) между точками плавления металла, полной его теплотой плавления и эрозией, взятой на единицу энергии. Таким образом, выводится минимальное значение температуры для каждого металла в электрическом разряде, исходя из максвелловой напряжённости магнитного поля, произведённой разрядным током. Наконец, находится, что анодная энергия растёт совместно с диэлектрической постоянной среды, в которой она производится.

L'ÉTUDE DE L'ÉLECTROÉROSION PAR DES DÉCHARGES ENTRE DES ÉLECTRODES MÉTALLIQUES DIFFÉRENTS

(Résumé)

Les Auteurs déterminent les érosions anodiques de plusieurs métaux (Mo, W, Ni, Cu, Al, Mg, Pt et Zn) par des décharges, dans l'huile, en fonction de l'énergie électrique.

On a utilisé le montage électrique suivant : les électrodes à étudier étaient montés en parallèle avec un condensateur de 180 μF, alimenté par une source de courant continu de 120 V. La décharge était reglée automatiquement à l'aide d'un dispositif électromagnétique. L'énergie debitée dans le circuit était mésurée avec un compteur électrique.

Comme cathode on a toujours utilisé le cuivre, puisque les Auteurs ont constaté dans une Note antérieure que ce métal présente une petite érosion cathodique. L'anode était constituée par l'un des métaux mentionnés plus haut.

Les variation de la tension et du courant dans la décharge ont été poursuivies à l'aide d'un oscillographe cathodique. Celui-ci permettait aussi de déterminer la durée de la décharge.

On constate une proportionnalité entre la quantité de métal érodée et l'énergie de la décharge. L'érosion par unité d'énergie croît suivant l'ordre des métaux, indiquée plus haut. On établit la relation (1) entre le point de fusion du métal, la chaleur totale de fusion et l'érosion par unité d'énergie. On déduit aussi une valeur minima de la température du métal dans la décharge électrique, à partir de la tension maxwellienne du champ magnétique créé par le courant de décharge. Enfin on constate que l'érosion anodique croît avec la permitivité du milieu dans lequel l'érosion a lieu.

La décharge dans un milieu liquide mène aux particularités suivantes, qui augmentent l'électroérosion en comparaison avec celle de l'air :

1. Détermine une isolation du canal de décharge par rapport au milieu extérieur oxydant.

2. Produit une localisation plus marquée de l'action de la décharge sur les électrodes.

3. Empèche la formation d'une couche d'oxydes. Sous la couche liquide les conditions créées sont plus favorables pour l'électroérosion, puisque on y remarque des inhomogénéités brusques de température et aussi la formation d'un fourreau avec une grande densité de vapeurs, tant de liquide que du métal qui constitue l'électrode.

La vaporisation des électrodes a un caractère explosif et remplit l'espace séparant les électrodes avec des particules érodées. Dans le cas où ces particules sont chargées électriquement, le liquide — qui constitue un milieu diélectrique — peut empècher leur agglomération, en les dissipant, ce qui assure un refraichissement de l'espace autour des électrodes et permet une augmentation plus marquée de l'électroérosion.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

539.16.08

MEASUREMENT OF ARTIFICIAL RADIOACTIVITY IN RAINWATER AT GULMARG

BY

LEKH VIR SUD and P. S. GILL

In recent years a large number of nuclear explosions were carried out by nations possessing nuclear weapons. The High Altitude Observatory at Gulmarg is situated at a height of 9000 ft very far away from the centres of such explosions. Reports were coming from various countries about the radioactive rainfalls which covered large areas. Some of the measurements have been published [1], [2]. It was considered worthwhile to make some arrangements at Gulmarg and see to what extent radioactive fall-out can be detected. Because of frequent rainfalls, particularly, during April to July, it was considered desirable to make these measurements during the above months.

With the help of a very simple arrangement, the work on the measurement of artificial radioactivity in rainwater was undertaken at the Gulmarg Observatory in 1956. A thinwalled Geiger counter with aquadag coated cathode has been used. The counter is surrounded by a glass jacket, in which sample to be tested is poured. In a way, it works like a 4π counter. Diameter of the counter is 1.5 cm and the inner diameter of the jacket is 2.5 cm. The counter is kept in vertical position. The background counting rate is around 45 counts per minute. The efficiency of the counter for gamma rays has been estimated to be 1 per cent.

Preparation of sample

Whenever it rains, five litres of rainwater are collected. It is then gradually concentrated by boiling to about 30 millilitres. As rainwater contains natural radioactive substances, most of which are daughter products of radon and thoron, the concentrate is put aside for at least two days before it is put to test.

Results

In order to calculate the disintegrations per minute per litre the number of counts, which are in excess over the background, are mul-

tiplied by the efficiency and surface factors of the counter. Measurements were made for two months viz June and July in 1956; four months i. e., June to September in 1957 and from January to June in 1958. Some of the rains showed the presence of radioactivity while others did not. Tap water was tested on many occasions in a similar way and no activity was registered. Results for the rains that gave an increase in counting rate are given in table 1.

Table 1

Year	Date	Disintegrations/ min/litre
1956	11th June	3535
Do	2nd July	1620
Do	3rd July	1620
1957	9th and 10th June	2532
Do	12th June	2000
Do	13th June	3600
Do	17th June	1333
Do	23rd June	4000
Do	26th June	3333
Do	13th July	6166
Do	25 th and 26 th August	1000
Do	5th September	1293
Do	7th September	1865
1958	18th June	1333

It is now contemplated to make continuous record of the radioactivity in the atmosphere apart from the type of measurements described in this note.

Received the 2) VIII 1958

Gulmarg Research Observatory,
Gulmarg, India

REFERENCES

1. Terentiuk F., Canad. J. of Physics, 1958, **36**, p. 136.
2. Yamasaki F. a. Kaneko H., J. of Sc. Res. Inst., 1955, **49**, p. 137.

ИЗМЕРЕНИЕ РАДИОАКТИВНОСТИ ДОЖДЕВОЙ ВОДЫ В ГУЛЬМАРКЕ

(Резюме)

Описывается аппаратура и методы измерения радиоактивности дождевой воды. Приводятся затем результаты измерений.

MĂSURAREA RADIOACTIVITĂŢII ARTIFICIALE ÎN APELE DE PLOAIE DE LA GULMARG

(Rezumat)

Se descrie aparatura folosită precum şi procedeele de măsurare a radioactivităţii în apele de ploaie, dîndu-se apoi într-un tabel şi rezultatele măsurătorilor efectuate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

537.523.5

ARC ELECTRIC CU ELECTROZI DIN STICLĂ

DE

IRINA MIHUL şi GH. TACU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Arcul electric descoperit de V. V. Petrov în anul 1892 a făcut obiectul a numeroase studii. Interesul deosebit de care s-a bucurat acest fenomen din partea fizicienilor, a fost determinat de două cauze. În primul rînd aceste studii au fost întreprinse pentru lămurirea fenomenului de conductibilitate electrică a gazelor, iar în al doilea rînd, pentru numeroase şi importante aplicaţii de laborator şi tehnice cum sînt: iluminatul electric, cuptoarele electrice cu arc, surse de radiaţii spectrale pentru scopuri analitice şi altele.

Ca electrozi se întrebuinţează bastoane de cărbune sau metal. Deşi regimul de funcţionare al arcului electric este lămurit destul de bine, complexitatea fenomenelor fizice ce au loc în această descărcare, face totuşi ca nici pînă astăzi problema arcului să nu poată fi considerată ca rezolvată definitiv. De aceea credem că studiul acestui fenomen, obţinut în condiţii deosebite de cele folosite în general, ar putea să aducă unele elemente noi şi ar putea contribui la elucidarea lui şi mai adîncă. Aceasta ne-a îndemnat să începem cercetarea arcului electric cu electrozii din corpurile izolatoare în mod obişnuit, cazul care, judecînd după literatura ştiinţifică pe care am putut-o consulta, nu a fost cercetat suficient. În experienţele întreprinse de noi, am întrebuinţat drept material pentru electrozi — sticla, material mai uşor de procurat în condiţiile în care am lucrat.

Se cunoaşte că la temperatura obişnuită, sticla este un bun izolator, rezistenţa ei specifică fiind de ordinul a 10^{14} Ω cm. Încălzită, sticla devine un conductor, a cărui conductibilitate creşte cu temperatura. O tijă de sticlă, prinsă la capete la cîte un conductor metalic sau de cărbune şi montată într-un circuit electric, îl menţine deschis. Dacă tija de sticlă este încălzită treptat din exterior, prin circuit începe să treacă un curent, cu atît mai intens cu cît temperatura sticlei este mai mare. La cîteva sute de grade Celsius, sticla devine un bun conductor de electricitate şi curentul din circuit încălzeşte bastonul de sticlă aşa de tare, încît încălzirea din exterior nu mai este necesară. Dacă în momentul cînd sticla este destul de moale, se trage de cele două capete ale tijei, aceasta se subţiază la mijloc. În locul subţiat densitatea de curent devine mai mare, sticla se topeşte, se desparte în două şi între cele două capete se stabileşte descărcarea electrică sub formă de arc. O dată stabilit, acest arc poate fi uşor menţinut un timp îndelungat, dacă circuitul este alimentat la o sursă de tensiune suficientă şi dacă în serie cu arcul se află o rezistenţă electrică potrivită. Aspectul arcului cu electrozii din sticlă este acelaşi ca şi în cazul arcului cu electrozii din metal sau din cărbune. În fig. 1 este dată o fotografie a arcului cu electrozi din sticlă funcţionînd în curent alternativ.

În curent alternativ de frecvenţă 50 Hz am obţinut un arc electric cu electrozi din sticlă, aplicînd tensiuni între 100 şi 380 V. Arcul

se amorsează mai uşor şi funcţionează mai stabil, atunci cînd tensiunea de alimentare este mai mare. În aceste condiţii, variaţiile de temperatură de a lungul electrozilor, exercită o influenţă mai mică asupra curentului din arc, iar distanţa dintre electrozi nu suferă variaţii mari în urma topirii vîrfurilor. În general, arcul cu electrozii din sticlă are o stabilitate mică, totuşi un arc alimentat la o tensiune de 380 V, cu o rezistenţă în serie de 150 Ω şi la un curent de circa 1 A poate funcţiona timp de 5...10 minute, fără întrerupere. Reaprinderea lui cînd sticla este suficient de caldă, se poate face ca în cazul obişnuit al arcului, aducînd cei doi electrozi în contact şi apoi depărtîndu-i.

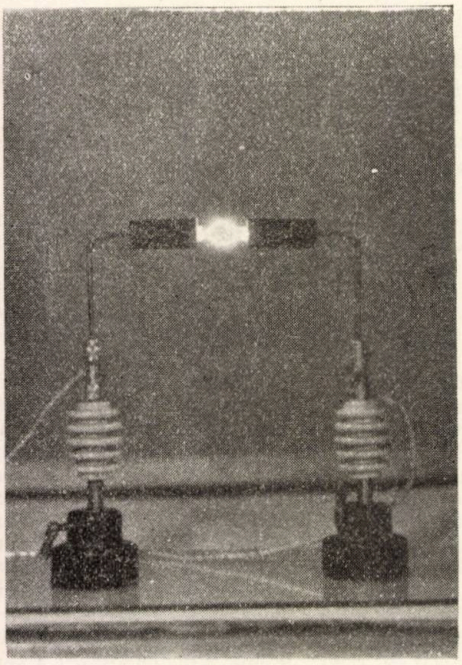


Fig. 1

Diferenţa de potenţial între electrozi a fost măsurată cu ajutorul a două sonde subţiri din platină. Valoarea ei era de ordinul a 40 V. Ea putea varia cu ± 10 V din cauza schimbării lungimii arcului sau a regimului de funcţionare în general.

Un arc cu electrozi din sticlă poate funcţiona şi în curent continuu. Pentru alimentarea lui în curent continuu am utilizat tensiuni cuprinse între 100 şi 180 V. Şi în acest caz arcul funcţionează mai stabil atunci cînd tensiunea este mai mare; diferenţa de potenţial între electrozi este de acelaşi ordin de mărime ca şi în cazul curentului alternativ. Stabilitatea funcţionării arcului este afectată de variaţia distanţei dintre electrozi şi a temperaturii lor. Ca şi în cazul arcului cu electrozi de cărbune în curent continuu, pe electrodul negativ se formează pata catodică, electrodul pozitiv are o temperatură mai ridicată de cît cel negativ dar nu se formează crater din cauză că în punctul unde arcul atinge electrodul pozitiv, sticla se află în stare lichidă. Cînd arcul se stinge, reaprinderea lui prin aducerea electrozilor în contact şi depărtarea lor, nu se poate face întotdeauna, chiar dacă sticla este suficient de caldă. Dacă însă schimbăm sensul curentului din circuit, arcul se poate aprinde din nou. În timpul funcţionării arcului se poate schimba sensul curentului, cu ajutorul unui comutator, fără ca arcul să se stingă. Aceasta arată că arcul poate funcţiona şi la frecvenţe mai mici decît 50 Hz.

Este cunoscut că în timpul cînd printr-un baston de sticlă trece un curent electric, bastonul devine luminos. Am observat că la arcul

în curent alternativ, apar luminoşi amîndoi electrozii. Dacă arcul funcţionează în curent continuu apare luminos numai electrodul pozitiv. Astfel, polaritatea electrozilor se poate recunoaşte uşor. La o examinare atentă se observă că în locul contactului dintre metal sau cărbune şi sticlă, în timpul trecerii curentului, apar mici scîntei, la ambii electrozi — în curent alternativ şi numai la cel pozitiv — în curent continuu. Luminozitatea electrozilor se datoreşte canalizării luminii emise de scînteie de a lungul tijei, prin fenomenul de reflexie totală.

O descărcare în arc se capătă şi se întreţine mai uşor atunci cînd numai unul din electrozi este de sticlă, celălalt fiind din alt material. Am obţinut arc întrebuinţînd ca al doilea electrod: W, Pt, Cu, alamă, Zn, Al şi cărbune. În toate cazurile am observat că atunci cînd electrodul de sticlă nu este încălzit prea tare, arcul în curent continuu se formează numai dacă sticla constituie electrodul negativ. Aceasta arată că trecerea curentului sub formă de arc sau scînteie, se face cu o mai mare uşurinţă într-un sens decît în celălalt. În acelaşi timp se explică motivul pentru care în cazul arcului cu ambii electrozi de sticlă, în curent continuu se luminează numai electrodul pozitiv. În cazul cînd temperatura electrodului de sticlă nu diferă mult de temperatura lui de topire, arcul se amorsează cu aceeaşi uşurinţă şi atunci cînd electrodul de sticlă constituie polul pozitiv.

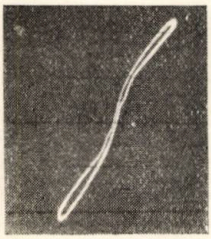


Fig. 2.

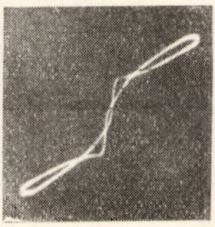


Fig. 3.

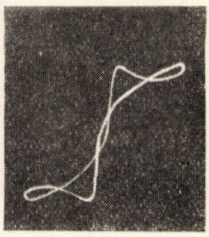


Fig. 4.

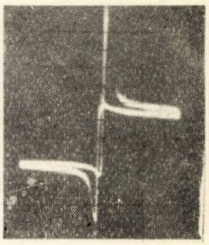


Fig. 5.

În curent alternativ, arcul electric cu un electrod de sticlă şi celălalt din metal sau de cărbune, se poate obţine şi la tensiuni mai mici. Am obţinut în aceste cazuri arc electric la o tensiune de 80 V. Durata lui este însă scurtă.

O caracteristică statică a arcului cu unul sau ambii electrozi de sticlă, prin măsurători directe a tensiunii şi a intensităţii de curent, nu am putut obţine. Însă, din numeroase măsurători efectuate am putut deduce, că atunci cînd curentul creşte, tensiunea între electrozi scade, aşa cum se întîmplă şi în cazul arcului cu electrozi de cărbune. În curent alternativ, cu ajutorul unui oscilograf catodic, am obţinut caracteristicile dinamice ale arcului pentru diferite regimuri de funcţionare. În fig. 2, 3, 4, sînt date caracteristicile dinamice ale arcului în cazul cînd ambii electrozi sînt de sticlă. Ele diferă de caracteristicile ce se obţin în cazul arcului cu electrozii de cărbune prin aceea că formează

cîte o buclă la cele două capete, care corespund intensităţii maxime de curent. Mărimea buclelor şi aspectul caracteristicilor variază cu lungimea arcului. Caracteristica din fig. 2 corespunde cazului cînd lungimea arcului este mică. Pe măsură ce lungimea arcului creşte, aspectul caracteristicii se schimbă. Caracteristica din fig. 4 corespunde lungimii maxime luată de arc, înainte de a se întrerupe. În acest caz aspectul caracteristicii se aseamănă cel mai mult cu aspectul caracteristicii ce o are arcul cu electrozii de cărbune, reprezentată în fig. 5. Totuşi, bucla de la capete se păstrează. Am observat că atunci cînd caracteristica arcului ia această formă, arcul devine sfîrîitor. La lungimi mai mici ale arcului, suprafeţele buclelor cresc şi caracteristica ia forma unui opt alungit.

În caz cînd arcul funcţionează între un electrod de sticlă şi un electrod de cărbune, curbele devin asimetrice, după cum se vede din fig. 6, 7, 8. Pentru o alternanţă, forma caracteristicilor este aceea corespunzătoare arcului cu electrozi de sticlă, iar pentru altă alternanţă, ea se schimbă. Aceasta arată că forma curbei depinde de polaritatea electrozilor. Am constatat că în alternanţa în care sticla este pozitivă, caracteristicile au aspectul propriu arcului cu electrozii de cărbune (fig. 9).

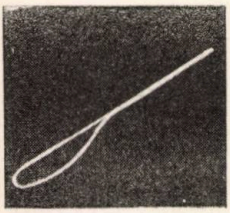


Fig. 6.

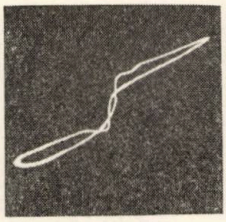


Fig. 7.

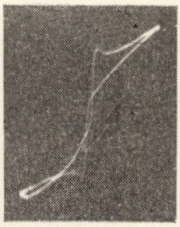


Fig. 8.

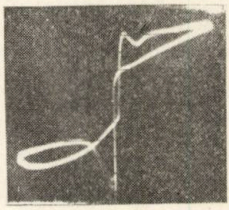


Fig. 9.

Caracteristicile ce corespund lungimilor mici ale arcului (fig. 6), în alternanţa cu cărbunele pozitiv iau forma care arată o comportare a arcului analoagă cu aceea a unei rezistenţe electrice.

Noi am lucrat cu diferite feluri de sticlă obişnuită pentru suflat, sub formă de tub sau baghetă. Diametrele baghetelor erau cuprinse între 6 şi 8,5 mm, iar în cazul tuburilor, diametrul exterior varia între 8,5 şi 9,5 mm iar cel interior între 2,5 şi 3 mm. Parte din sticlă provenea de la fabrici străine iar parte, de la cele romîneşti. Condiţiile de obţinere a arcului nu se deosebeau în mod vădit de la un fel de sticlă la altul. Am observat însă că în cazul sticlei de Jena, pentru a obţine arc, se cereau tensiuni mai ridicate. De asemenea am încercat să obţinem arc cu electrozi din alte materiale. Astfel am experimentat cu electrozi de cuarţ, care în ceea ce priveşte variaţia rezistenţei cu temperatura, are o comportare asemănătoare cu aceea a sticlei. În condiţiile în care am lucrat, nu am reuşit să obţinem arc. În schimb, procedînd

în acelaşi fel ca în cazul sticlei, am reuşit să obţinem arc de foarte scurtă durată cu un tub de porţelan nesmălţuit.

În concluzie:

1. S-au stabilit condiţiile de funcţionare ale arcului electric cu electrozii de sticlă, atît în curent continuu cît şi în curent alternativ. Totodată s-au stabilit şi condiţiile de funcţionare ale arcului cu un electrod de sticlă şi altul de cărbune sau de metal.

2. Caracteristicile dinamice ale arcului cu electrozii de sticlă, se deosebesc de caracteristicile arcului cu electrozii de cărbune, prin apariţia buclelor la capetele caracteristicilor corespunzătoare valorilor maxime ale intensităţii de curent. În cazul cînd numai unul din electrozi este de sticlă, caracteristicile devin asimetrice.

3. În acest din urmă caz, la arcul alimentat în curent continuu trecerea curentului se face mai uşor cînd electrodul de sticlă este negativ, ceea ce indică existenţa proprietăţilor de redresare.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Hagenbach A., *Der elektrische Lichtbogen*, Leipzig, 1924, Akademische Verlagsgesellschaft, M. B. H.
2. Kapţov N. A., *Fenomene electrice în gaze şi vid*, 1955, Ed. tehn., Buc. (traducere din limba rusă).
3, Bădărău E., *Fizica descărcărilor în gaze*, 1957, Ed. Acad. R.P.R., Buc.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ДУГА С ЭЛЕКТРОДАМИ ИЗ СТЕКЛА

(Резюме)

В данной работе были исследованы условия получения дугового разряда с электродами из стекла. Дугу можно получить как в переменном, так и в постоянном токе. Можно получить дугу, употребляя оба электрода из стекла, или же употребляя только один электрод из стекла, другой же будучи из угля или какого-либо металла.

В постоянном токе, между разнородными электродами, при относительно малых температурах, дуга зажигается только если стекло является отрицательным полюсом.

Динамические характеристики дуги с электродами из стекла несколько отличаются от характеристик с электродами из угля. В местах, соответствующих большим интенсивностям тока, характеристики приобретают закругления в виде петель. Когда только один электрод из стекла, петля сохраняется лишь в полупериоде, в котором стекло является положительным полюсом.

L'ARC ÉLECTRIQUE ENTRE DES ÉLECTRODES EN VERRE

(Résumé)

Dans cette Note sont étudiées les conditions nécessaires pour obtenir l'arc électrique entre des électrodes en verre, aussi bien en courant continu qu'en courant alter-

natif. On peut l'obtenir soit homogène avec les deux électrodes en verre, soit hétérogène avec un électrode en verre l'autre en charbon ou métallique.

En courant continuu, aux températures relativement basses, l'arc hétérogène ne s'amorse que si l'électrode en verre est negatif.

Les caractéristiques dynamiques de l'arc à électrodes en verre diffèrent un peu de celles de l'arc à électrodes en charbon, en présentant, dans les régions qui correspondent aux plus grandes intensités du courant, des petites boucles.

Avec l'arc hétérogène on n'obtient des boucles que pour la demipériode pour laquelle l'électrode en verre est positif.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

CONTRIBUŢII ASUPRA STUDIULUI ECHILIBRULUI ÎN PROCESUL CARBONATĂRII SARAMURII AMONIACALE

DE

C. CALISTRU şi CORNELIA LEONTE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26-29 iunie 1958

1. Introducere

Studiul echilibrului în procesul carbonatării saramurii amoniacale a fost, datorită marei sale importanţe, obiectul a numeroase cercetări.

P. P. Fedoteev în 1904 [1], [2] pune bazele teoriei clasice a procesului sodei amoniacale prin studiul echilibrului reacţiei fundamentale a acestui proces. Aceasta este o reacţie de dublu schimb şi se reprezintă prin ecuaţia :

$$NaCl + NH_4HCO_3 \rightleftarrows NaHCO_3 + NH_4Cl. \quad (1)$$

Autorul citat studiază echilibrul acestui sistem prin metoda analizei fizico-chimice. El determină experimental compoziţiile de echilibru a sistemelor corespunzătoare (loc. cit.), reprezintă sistemul de dublu schimb în proiecţia ortogonală a diagramei izotermice spaţiale şi calculînd randamentele, stabileşte condiţiile fundamentale de desfăşurare a procesului.

Determinări experimentale asupra compoziţiei de echilibru, în sistemul reprezentat de reacţia (1), au fost efectuate, după aceea, de către E. Toporăscu în 1922 [3], [4], B. Neumann şi R. Domke în 1928 [5], W. Reinders şi H. Nicolai în 1947 [6].

E. Toporăscu reprezintă, după H. Le Chatelier [7], rezultatele obţinute, cu ajutorul diagramei patratice, proiecţia conică a diagramei izotermice spaţiale a sistemului. Studiul echilibrului reacţiei (1) a fost efectuat şi de alţi cercetători [8] Deşi acest studiu este destul de complet, lipsesc date sistematice detaliate asupra reprezentării şi calculului echilibrului pentru condiţii apropiate de cele industriale, legate de folosirea saramurii de sondă.

Teoria clasică a procesului de carbonatare nu dă posibilitatea să se calculeze gradul de utilizare al sodiului, funcţie de gradul de carbonatare. Procesul real de carbonatare a saramurii amoniacale poate fi reprezentat prin ecuaţia fundamentală:

$$NaCl + NH_3 + CO_2 + H_2O \rightleftarrows NaHCO_3 + NH_4Cl \quad (2)$$

Sistemul reprezentat de ecuaţia (2) are cinci componenţi independenţi şi trei faze. Pentru studiul unui astfel de sistem şi ca urmare, pentru calculul gradului de utilizare al sodiului pentru diferite grade de carbonatare s-au elaborat două metode. G. I. Mikulin, folosind o idee a lui Sobciuk [9], [10], reprezintă sistemul în diagramă cubică. Prin prelucrarea grafică a datelor experimentale, G. I. Mikulin stabileşte o ecuaţie pentru calculul gradului de utilizare, construieşte o serie de nomograme şi ajunge la o serie de concluzii importante pentru practică. I. N. Şokin şi A. S. Solo-

viova [11] elaborează o metodă analitică care permite calculul compoziţiei de echilibru al fazei lichide şi gazoase, la orice grad de carbonatare.

În lucrarea de faţă, pe baza datelor experimentale existente [12], folosindu-se pentru calculele grafice diagrama patratică şi cubică, se efectuează calcule ale echilibrului, pentru condiţii apropiate de cele industriale, legate de folosirea saramurii de sondă. S-au intreprins calcule pentru un grad de carbonatare egal cu 200, cît şi pentru alte grade de carbonatare.

2. Rezultate obţinute

În primul rînd s-au construit diagramele patratice şi diagramele apei corespunzătoare, pentru temperaturile de 15°, 25°, 30°, 32° şi 35°. Cu ajutorul acestora s-au calculat gradele de utilizare teoretice maxime a sodiului, corespunzătoare sistemului reprezentat de ecuaţia (1). Pentru raportul molar $NaCl/NH_3$ corespunzător gradului de utilizare teoretic maxim şi pe aceleaşi diagrame, s-au calculat gradele de folosire a sodiului şi a amoniului, în cazul folosirii saramurii amoniacale saturată în clorură de sodiu şi amoniac. Compoziţia saramurii amoniacale menţionate s-a stabilit pe baza compoziţiilor de echilibru în sistemul $NaCl—NH_3—H_2O$ [12].

În tabelul 1 şi fig. 1 (v. planşa), sînt indicate rezultatele obţinute. În coloana I se dau rezultatele referitoare la sistemul obţinut prin solvirea în apa corespunzătoare a clorurii de sodiu şi bicarbonatului de amoniu solide, în coloana II — cele referitoare la saramura amoniacală saturată în clorură de sodiu şi amoniac, în care s-a introdus cantitatea de bioxid de carbon corespunzătoare unui grad de carbonatare egal cu 200.

Tabelul 1

Temperatura	15°		25°		30°		32°		35°	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
U_{Na}	18,9	78,4	80,9	78,2	83,5	81,5	83,8	81,7	83,0	80,1
U_{NH_4}	85,3	84,6	83,8	81,0	84,3	82,2	83,8	81,5	80,3	77,4
$NaCl/NH_3$	1,08	1,08	1,04	1,04	1,01	1,01	1	1	0,96	0,96

Din tabelul 1 şi fig. 1 se observă că datele obţinute pentru sistemul clasic coincid cu cele din literatură [10]. În cazul folosirii saramurii amoniacale saturate, gradele de utilizare a sodiului şi a amoniului din tabel sînt mai mici, deoarece în acest caz sistemul conţine inevitabil o cantitate de apă mai mare decît cea necesară. Din tabel se observă de asemenea dependenţa gradului de utilizare a sodiului şi a amoniului, funcţie de temperatură, cît şi faptul că valorile maxime ale gradelor de utilizare corespund temperaturii de 32°. Consideraţii geometrice asupra diagramelor (fig. 1), arată că pentru saramura amoniacală, gradele de

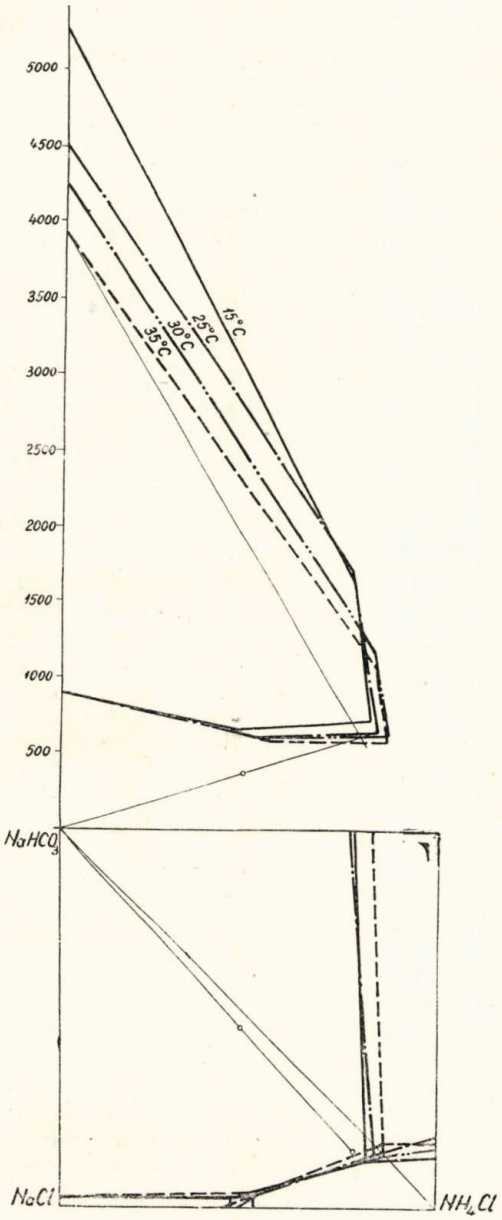


Fig. 1.

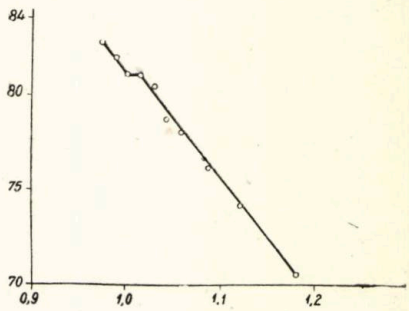


Fig. 2.

PLANŞA I

utilizare la rapoartele indicate în tabelul 1, pentru $NaCl/NH_3$, nu sînt cele maxime.

Ţinînd seamă de aceasta, s-au calculat gradele de utilizare a sodiului şi amoniului pentru diferite raporturi molare $NaCl/NH_3$ corespunzătoare saramurii amoniacale saturate la 30°. Rezultatele obţinute sînt indicate în tabelul 2 şi fig. 2 (v. planşa).

Din tabelul 2 se observă că în cazul folosirii saramurilor amoniacale saturate, la raporturi mai mici de 0,976, alături de bicarbonatul de sodiu precipită şi bicarbonatul de amoniu. Aceste soluţii nu pot fi deci folosite în practica industrială. Pentru raporturi mai mari de 0,976 se separă numai bicarbonatul de sodiu, însă gradul de utilizare al sodiului scade pe măsura creşterii raportului. Se constată că în cazul folosirii saramurii amoniacale saturate şi pentru un grad de carbonatare egal cu 200, cele mai bune grade de utilizare a sodiului se obţin pentru raporturile 0,976...1,015. Valorile numerice ale acestui parametru important, indicate în literatură [13], [15], sînt extrase, în majoritate, din lucrarea experimentală a lui Hempel şi Tedesco [14], criticată la vremea ei de către Neumann şi Domke [5], cît şi din practica industrială, fără însă să se specifice condiţiile de lucru.

Tabelul 2

Nr. crt.	Compoziţia saramurii amoniacale saturate		$NaCl/NH_3$ molar	Faza solidă	Randament	
	NaCl %	NH_3 %			U_{Na}	U_{NH_4}
1	24,30	8,16	0,866	$NaHCO_3$ +	—	—
2	24,39	7,82	0,907	NH_4CO_3	—	—
3	24,44	7,65	0,929	„	—	—
4	24,46	7,56	0,940	„	—	—
5	24,49	7,18	0,952	„	—	—
6	24,54	7,31	0,976	$NaHCO_3$	82,8	80,8
7	24,56	7,22	0,989	„	82,2	81,2
8	24 61	7,07	1,000	„	81,7	81,7
9	24,62	7,05	1,015	„	81,2	82,2
10	24,65	6,97	1,023	„	80,4	82,6
11	24,69	6,88	1,042	„	78,7	82,2
12	24,72	6,80	1,057	„	78,0	82,5
13	24,77	6,63	1,087	„	76,1	82,4
14	24,82	6,46	1,117	„	74,2	82,6
15	24,88	6,12	1,180	„	70,5	83,4

Valorile indicate în tabelul 2 pentru raportul optim se referă la saramura amoniacală saturată şi un grad de carbonatare egal cu 200. În fabricile de sodă amoniacală, în mod obişnuit, saramura amoniacală se diluiază datorită vaporilor de apă introduşi o dată cu amoniacul şi se depărtează de starea de saturaţie. Pe baza acestor considerente s-au calculat, pentru un grad de carbonatare egal cu 200 şi temperatura de 30°, gradele de utilizare pentru diferite diluări a saramurii amoniacale saturate,

Tabelul 3

1,0285	NaCl	24,67	23,97	23,30	22,65	22,07	21,48
	U_{Na}	80,4	79,7	78,0	77,4	76,4	75,4
	U_{NH_4}	82,6	82,0	80,2	79,6	78,6	77,6
1,016	NaCl	24,65	23,91	23,23	22,59	21,95	21,40
	U_{Na}	81,2	80,2	79,3	78,4	77,6	76,58
	U_{NH_4}	82,2	81,5	80,5	79,7	78,8	77,68
1,000	NaCl	24,61	23,89	23,21	22,56	21,95	21,37
	U_{Na}	81,7	81,3	80,3	79,25	78,5	77,3
	U_{NH_4}	81,7	81,3	80,3	79,25	78,5	77,3
0,983	NaCl	24,56	23,98	23,28	22,63	22,02	21,43
	U_{Na}	82,2	81,9	81,4	80,1	79,5	79,0
	U_{NH_4}	81,2	81,0	80,5	79,2	78,6	78,0
0,930	NaCl	23,34	22,77	22,13	21,52	—	—
	U_{Na}	81,7	80,6	79,8	78,70	—	—
	U_{NH_4}	76,1	—	—	—	—	—

În tabelul 3 şi fig. 3 (v. planşa) sînt indicate rezultatele obţinute la diluări diferite, pentru rapoartele: 1,028; 1,016; 1,000; 0,988; 0,930.

Valorile din tabelul 3 permit determinarea gradului de utilizare a sodiului pentru raporturi $NaCl/NH_3$ şi diluări întîlnite în practica uzinelor de sodă amoniacală. Fig. 3 poate servi ca nomogramă în condiţiile realizării unui grad de carbonatare egal cu 200.

Întrucît în fabricile de sodă amoniacală nu se realizează un grad de carbonatare egal cu 200, s-au efectuat aceleaşi calcule, cu ajutorul diagramei cubice, pentru diferite grade de carbonatare. Pentru construcţia diagramei cubice nu există determinări experimentale asupra echilibrului din sistemul

$$NaCl + (NH_4)_2CO_3 \rightleftarrows Na_2CO_3 + 2NH_4Cl$$

la temperatura de 32°.

Mondain-Monval [12] studiază acest sistem numai la 0° şi 15°. Din această cauză calculele s-au efectuat la temperatura de 15°.

În tabelul 3 şi fig. 4 şi 5 (v. planşa) sînt indicate rezultatele obţinute pentru gradele de carbonatare întîlnite mai des în practica industrială şi anume 180 şi 195.

Din tabelul şi figurile menţionate se constată că în vederea obţinerii randamentului maxim, fiecărui grad de carbonatare îi corespunde un anumit raport molar $NaCl/NH_3$. De aici rezultă că pentru raportul molar $NaCl/NH_3$ nu se poate indica o valoare general valabilă şi că aceasta se va stabili pentru condiţiile concrete ale fiecărei fabrici.

De exemplu, se observă că la raportul molar $NaCl/NH_3 = 1$, pentru un grad de carbonatare egal cu 195 sau 200, precipită şi bicarbonat de amoniu, dacă se pleacă de la saramura amoniacală saturată. Pentru

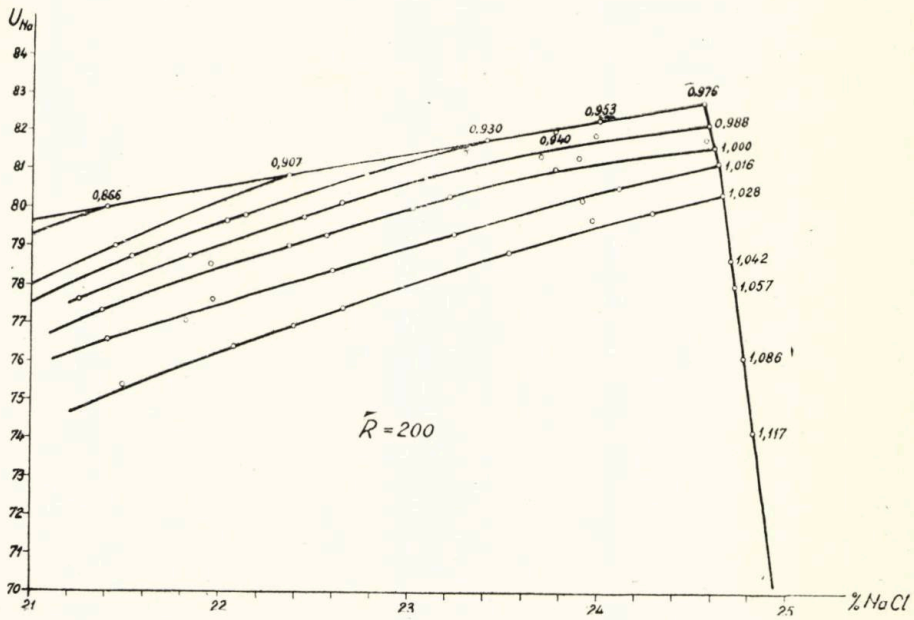


Fig. 3

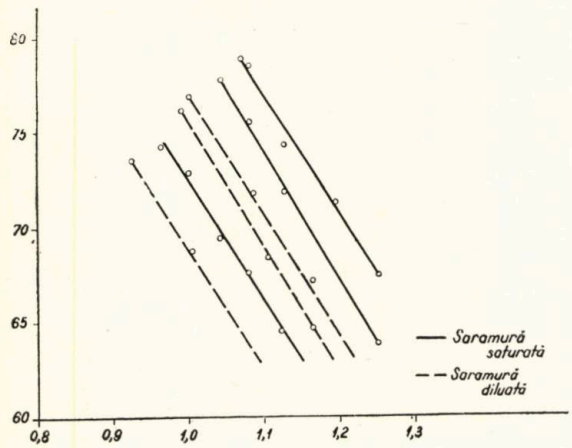


Fig. 4

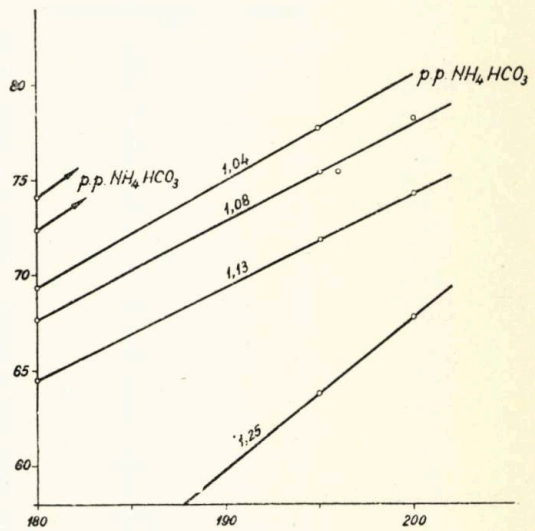


Fig. 5

PLANȘA II

același raport se poate obține precipitarea numai a bicarbonatului de sodiu dacă se pleacă de la o saramură mai diluată.

Tabelul 4

Nr. crt.	Saramură amoniacală saturată		Saramură amoniacală ce poate fi folosită		Apă	$\frac{NaCl}{NH_3}$	U_{Na}			U_{NH_4}		
	NaCl %	NH_3 %	NaCl %	NH_3 %	%		180	195	200	180	195	200
1	23,8	6,1	23,8	6,1	70,1	1,13	64,5	71,8	74,2	73,3	81,6	84,4
2	23,7	6,4	23,7	6,4	69,9	1,08	67,7	75,4	78,4	72,8	81,0	84,3
3	23,6	6,6	23,6	6,6	69,8	1,04	69,4	77,7	78,5	72,2	80,6	81,6
4	23,5	6,8	23,5	6,8	69,7	1,00	72,4	*)	*)	72,4	*)	*)
			21,8	6,3	71,9	1,00	—	76,2	—	—	76,2	—
			21,6	6,3	72,1	1,00	—	—	76,8	—	—	76,8
5	23,4	7,0	23,4	7,0	69,6	0,97	74,1	*)	*)	72,0	*)	*)
			21,0	6,3	72,7	0,97	—	75,5	—	—	73,7	—
			20,8	6,2	73,0	0,97	—	—	76,1	—	—	74,0
6	23,3	7,25	22,0	6,8	71,2	0,93	73,1	—	—	68,3	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	20,5	6,6	72,9	0,90	72,0	—	—	64,8	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	18,1	6,3	75,6	0,83	69,2	—	—	58,0	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	24,0	5,6	24,0	5,6	70,4	1,25	—	63,8	67,6	—	79,6	84,3
11	24,2	5,2	24,2	5,2	70,6	1,35	—	60,9	62,8	—	82,4	85,0

*) Precipită amestec de $NaHCO_3 + NH_4HCO_3$.

3. Concluzii

1. S-au calculat gradele de utilizare care se pot obține în procesul carbonatării saramurii amoniacale saturate și la diluări diferite, pentru

un grad de carbonatare egal cu 200 şi o temperatură de 30°C cu ajutorul diagramei patratice, construită pe baza datelor existente în literatură.

2. S-au întreprins calcule grafice analoage pentru grade de carbonatare egale cu 180 şi 195, la temperatura de 15°, cu ajutorul diagramei cubice.

3. S-a demonstrat că în fabricile de sodă amoniacală, compoziţia saramurii amoniacale, impusă de necesitatea obţinerii unor grade ridicate de utilizare a sodiului, nu are o valoare unică şi că aceasta depinde de condiţiile concrete de lucru.

Se subliniază că controlul riguros al gradului de carbonatare şi a compoziţiei saramurii amoniacale sînt condiţii esenţiale pentru conducerea procesului.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Industrii Anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Fedoteev P. P., Z. Phys. Chem., 1904, **49**, S. 162
2. — Z. Ang. Ch., 1904, **17**, S. 1644..
3. Toporăscu E., C. R. Ac. Sci. Paris, 1922, **174**, p. 870.
4. — C. R. Ac. Sci. Paris, 1922, **175**, p. 268.
5. Neumann B. u. Domke R., Z. Electrochem., 1928, **34**, S. 135.
6. Reinders W. u. Nicolai H., Rec. trov. chim., 1947, **66**, p. 477.
7. De Chatelier H., C. R. Ac. Sci. Paris, 1921, **172**, p. 345.
8. Голдштейн И. Р., ЖПХ, 1948, **21**, стр. 82.
9. Микулин Г. И., Труды всесоюзного института содовой промышленности, 1949, том V, (фотокопия).
10. Викторов М. М., Графические расчёты в технологии минеральных веществ, Госхимиздат, М., 1954.
11. Шокин И. Н. и Соловьёва А. Г., ЖПХ, 1953, **6**, стр. 584.
12. Здановский А. Б., Лясовская Е. И. и Шлеймович Р. Е., Справочник по растворимости солевых систем, том I и II, Госхимиздат, Ленинград, 1953.
13. Te-Pan-Go, *Tehnologia sodei calcinate*, I. D. T., Buc.
14. Hempel u. Tedesco, Z. Ang. Ch., 1911, **24**, S. 2459.
15. Gryeza W., Kaminski S., Leszezynski S., Pischinger E., *Tehnologia sodei amoniacale*, I. D. T., Buc. 1958.

К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРОЦЕССЕ КАРБОНИЗАЦИИ АММОНИЗИРОВАННОГО РАССОЛА

(Резюме)

На основе находящихся в литературе экспериментальных данных, авторы установили расчётным путем условия равновесия при промышленном пользовании рассола, экстрагированного скважинами. Расчётные графики осуществлены при помощи квадратных и кубических диаграмм.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DE LA SAUMURE AMONIACALE

(Résumé)

Compte tenu des résultats expérimentaux donnés par la littérature de spécialité, les Auteurs effectuent des calculs de l'équilibre, pour des conditions approchées de celles industrielles, concernant la saumure de sonde. Les calculs graphiques respectifs ont été effectués à l'aide du diagramme carré et cubique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

546.766.33–85

CONTRIBUŢIUNI LA STUDIUL CONDIŢIILOR OPTIME PENTRU OBŢINEREA BICROMATULUI DE SODIU PE CALE ELECTROLITICĂ

DE

I. N. CIOCHINĂ, ŞT. IVĂŞCANU, NICOLETA CIUREANU şi M. MARCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Introducere

Prin procedeul tratării leşiei de cromat de sodiu cu H_2SO_4 se obţine bicromat de sodiu, impurificat cu Na_2SO_4.

Drumul logic pentru rezolvarea purităţii nu poate fi decît cel electrochimic [1]. Există un procedeu pentru obţinerea bicromatului de potasiu pur din cromatul de potasiu pur, care serveşte drept anolit, la anodă de platină şi catodă de fier, cu diafragmă, catolit fiind o soluţie de KOH [2].

Prin studiul influenţei naturii electrozilor asupra condiţiilor optime de obţinere a bicromatului, autorii au realizat un nou mod de lucru, stabilind parametrii necesari pentru anodă de plumb şi anolit leşia rezultată din topitura de minereu de cromit şi pentru catodă de mercur, ca tolit fiind aceeaşi leşie, spaţiile fiind separate printr-o diafragmă poroasă.

Presupunem că mecanismul reacţiilor este următorul:

$$CrO_4Na_2 \rightarrow CrO_4^{--} + 2Na$$

Anodă.

$$CrO_2^{--} \rightarrow CrO_4 + 2e$$

$$CrO_4 + H_2O = CrO_4H_2 + \frac{1}{2}O_2$$

$$CrO_4H_2 + CrO_4Na_2 \rightarrow Cr_2O_7Na_2 + H_2O$$

$$CrO_4^{--} + CrO_4Na_2 \rightarrow CrO_7Na_2 + H_2O + 2e + \frac{1}{2}O_2$$

Catodă.

$2Na^+ + 2e \rightarrow 2Na$, care trece sub formă de amalgam.

Amalgamul se descompune parţial, formînd hidrat de sodiu, obţinîndu-se în acelaşi timp şi hidrogen, care reduce cromatul la hidrat cromic sub forma următoare [4]:

$$CrO_4^{--} + 3e + H_2O = Cr^{3+} + 8OH^-$$

2. Studiul condiţiilor optime pentru spaţiul anodic

Experienţa ne-a demonstrat că silicaţii şi carbonaţii parţial solubili nu stînjenesc şi nici nu complică obţinerea ionului bicromic, direct din minereu, precum nu împedică nici obţinerea de NaOH şi a unui verde de crom, pigment rezistent la temperatură ridicată.

Procedeul cu anodă de platină nu este recomandabil pentru industria curentă. Ozonul ce se formează în stare născîndă, mai ales la densităţi de curenţi mari [2] şi la margini ori vîrfuri ascuţite, atacă platina în timp. Din contra, anoda de plumb, metal economic, nu este atacată în aceleaşi condiţiuni.

Avînd în vedere că obţinerea de NaOH în stare de mare puritate, strict necesar tehnicii moderne, nu este posibilă decît în operaţii electrochimice, cu catodă de mercur şi diafragmă, este de prevăzut că studiul se încadrează cerinţelor tehnico-ştiinţifice ale viitorului. Industria electrochimică a clorului şi alcaliilor va găsi sprijin în acest studiu, în sensul că, fără modificări esenţiale, să se combine cu posibilitatea obţinerii bicromatului, hidroxidului şi a verdelui de crom.

PARTEA EXPERIMENTALĂ

a) La electroliza fără diafragmă, oricare ar fi natura electrozilor, nu este posibilă obţinerea ionului bicromic din cauza contactului dintre anolit şi catolit. La electrozii identici: Fe-Fe, C-C, Zn-Zn, Pt-Pt şi oţel inoxidabil fără diafragmă, nu apare precipitatul de verde de crom, decît dacă întrebuinţăm catodă de mercur şi ca anodă, pe oricare dintre electrozii citaţi mai sus.

Menţinînd deci catoda de mercur care ne oferă avantajul obţinerii de NaOH şi verde de crom şi lucrînd cu diafragmă, am procedat la studiul unicii variabile: natura chimică a anodei. Parametrii optimi pentru realizarea electrolizei reies din diagramele densitate de curent-potenţial (*Dc-V*) (fig. 1 ... 6-planşa I). Cu oricare dintre anodele utilizate se obţine ionul bicromic.

Pentru a pune în evidenţă eventualele reacţii secundare, specifice, precum şi influenţa altor compuşi chimici coexistenţi în leşia de cromat, s-au construit curbele *Dc-V* la leşia de crom şi la soluţia de cromat de sodiu pur, la concentraţii diferite (fig. 7 şi 8).

Din aceste diagrame rezultă că condiţiile de electroliză nu diferă esenţial, şi ca atare, compuşii chimici coexistenţi în leşie nu stînjenesc procesul electrochimic.

b) Pentru a putea stabili condiţiile optime a celui mai bun grad de transformare a cromatului în bicromat, s-a simţit nevoia alcătuirii unei metode de dozare a bicromatului în prezenţa cromatului. Din studiul amănunţit, a rezultat că, numai combinînd metoda de dozare potenţiometrică a ionului bicromic, în prezenţa ionului cromic [3], se pot obţine rezultate concordante.

Cu această metodă s-au obţinut datele experienţelor, privind con-

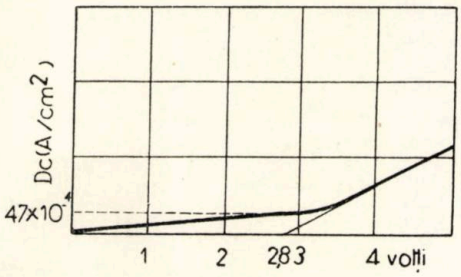


Fig. 1. — Catodă de Hg, anodă de Zn.

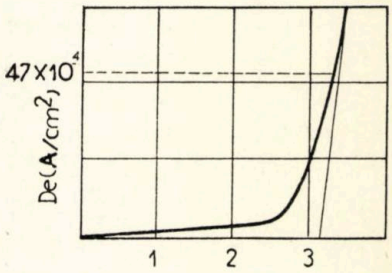


Fig. 2. — Catodă de Hg, anodă de oţel inoxidabil.

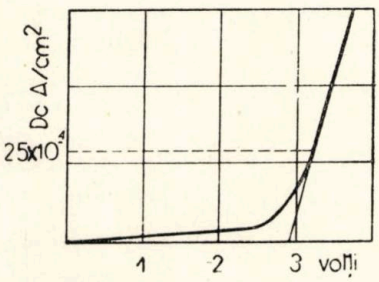


Fig. 3. — Catodă de Hg, anodă de grafit.

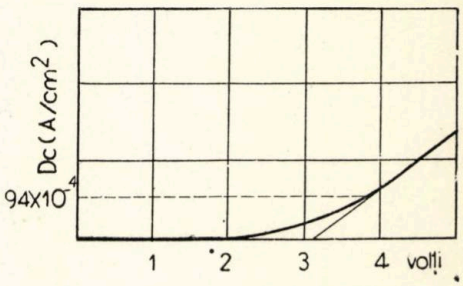


Fig. 4. — Catodă de Hg, anodă de platină.

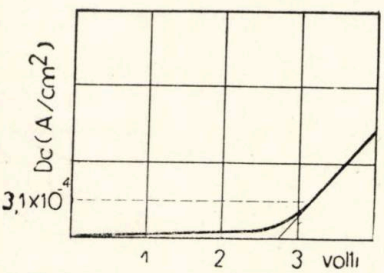


Fig. 5. — Catodă de Hg, anodă de fier.

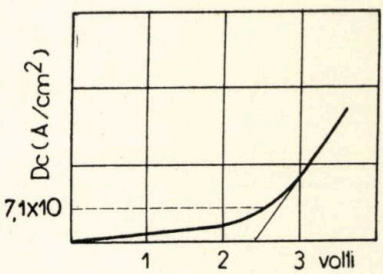


Fig. 6. — Catodă de Hg, anodă de plumb.

PLANŞA I

Curbele Dc–V *la electroliza soluţiei de cromat cu diferiţi electrozi*

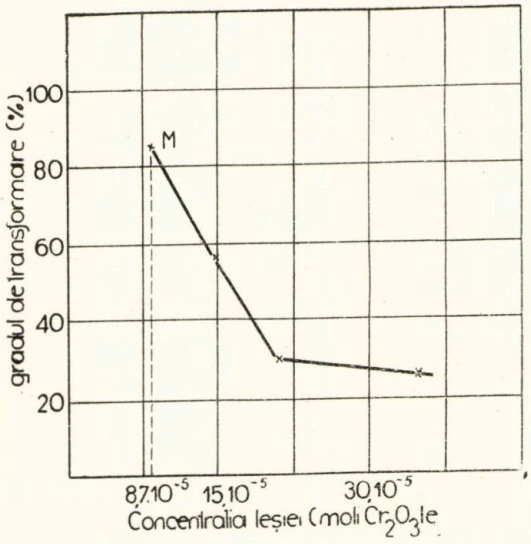


Fig. 9. — Variaţia gradului de transformare a cromatului în bicromat, în funcţie de concentraţie. Intensitatea de curent: 5 A; timpul de electroliză: 60 minute;
Curba *I*: $\frac{\text{cantitatea de bicromat obţinută, sub formă } Cr_2O_3}{\text{cantitatea totală de } Cr_2O_3 \text{ (din cromat + bicromat)}}$;
Concentraţia optimă este $8{,}7.10^{-5}$ mol Cr_2O_3/l.

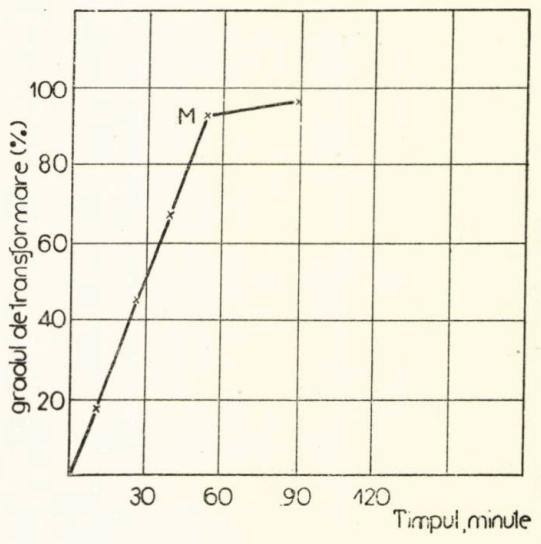


Fig. 10. - Variaţia gradului de transformare în funcţie de timpul de electroliză. Concentraţia: $8{,}7 \cdot 10^{-5}$ mol Cr_2O_3/l. Intensitatea de curent: 0,5 A. După 60 minute se obţine cel mai înalt grad de transformare

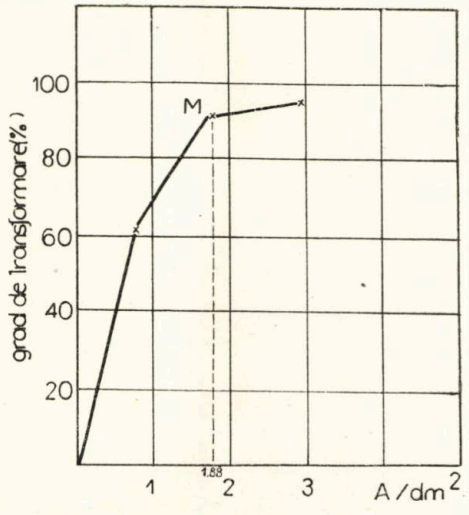


Fig. 11. — Variaţia gradului de transformare, în funcţie de densitatea de curent anodică. Timpul de electroliză: 60 minute. Concentraţia: $8{,}7 \cdot 10^{-5}$ mol Cr_2O_3/l. Densitatea de curent optimă rezultă 1,88 A/dm².

PLANŞA II

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI
1848
KÖNYVTÁRA

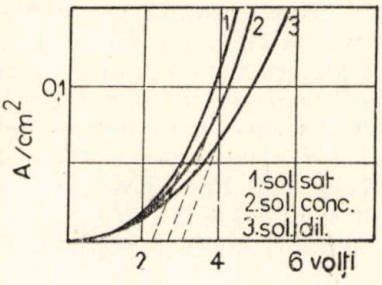


Fig. 7. — Curbele *Dc-V* ale soluțiilor de cromat de sodiu, obținute din topitură de crom, la diferite concentrații :
1. soluția saturată,
2. soluția concentrată,
3. soluția diluată.

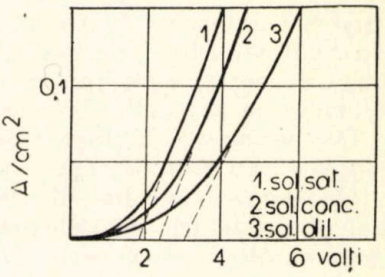


Fig. 8. — Curbele *Dc-V* ale soluțiilor de cromat de sodiu pur, la diferite concentrații :
1. soluția saturată,
2. soluția concentrată,
3. soluția diluată.

centrația, durata și densitatea de curent. Rezultatele obținute sînt reprezentate în fig. 9, 10 și 11 (planșa II). Condițiile optime sînt reprezentate prin punctele *M*. Deci, concentrația optimă este de 8.7 mol. Cr_2O_3/l, timpul optim de electroliză este de 60 minute, iar densitatea de curent anodică optimă este de 1,88 A/dm^2.

3. Studiul condițiilor optime pentru spațiul catodic

Respectînd condițiile optime de lucru stabilite pentru spațiul anodic,

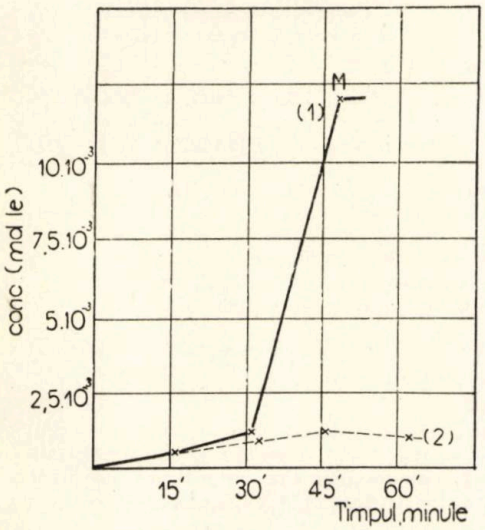


Fig. 12. — Variația concentrației catolitului în hidroxid de sodiu și carbonat de sodiu, în funcție de timpul de electroliză.
1. curba variației concentrației în NaOH,
2. curba variației concentrației în Na_2CO_3.

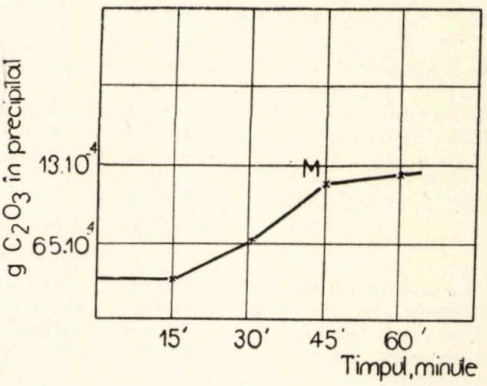


Fig. 13. — Maximum de randament în verde de crom, în funcție de timp.

s-a procedat la studiul cantitativ al produselor din spațiul catodic, adică

a hidroxidului de sodiu şi a verdelui de crom. Fig. 12 ne arată că, cantitatea maximă de hidroxid de sodiu se obţine după 45 de minute de electroliză (curba *1*, punctul *M*). Întrucît din aceeaşi diagramă (curba *2* rezultă invarianţa conţinutului de carbonat de sodiu în timpul electrolizei, înseamnă că NaOH obţinut se formează pe seama cromatului de sodiu.

De asemenea cantitatea maximă în verde de crom se formează tot după 45 de minute, aşa precum se vede din fig. 13 (punctul *M*).

Decalajul dintre timpul optim pentru spaţiul anodic (60 minute) şi timpul optim pentru spaţiul catodic (45 minute), poate fi corectat prin mărirea cantităţii de mercur, la catodă.

4. Concluzii

Se studiază condiţiile electrochimice optime pentru obţinerea ionului bicromic, direct din topitura de minereu de cromit Se stabileşte metoda de control cantitativă şi parametrii optimi, pentru executarea electrolizei şi a realizării celui mai bun grad de transformare a cromatului în bicromat. Se valorifică produsele obţinute în spaţiul catodic, în scopul măririi indicelui de economicitate. Studiul face legătura cu procedeul de obţinerea clorului şi alcaliilor prin procedeul cu diafragmă şi cu catodă de mercur.

Analiza bicromatului de sodiu obţinut după acest procedeu, efectuată conform STAS 2610/52 ne redă o cantitate de bicromat de sodiu de 90,6%, liber de sulfaţi.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Chimie Fizică,
Laboratorul de Electrochimie

BIBLIOGRAFIE

1. Pozin M. E., *Tehnologia sărurilor minerale,* Ed. Tehnică, Buc., 1953, p. 308, (trad. din l. rusă)
2. Müller u. Reuther, *Elektrochemisches Praktikum,* Neunte Auflange, Leipzig, 1953, S. 312—317.
3. Шегол М. Б. и Бирнбаум С. М., Заводская лаборатория, 1950, **16**, *2*.
4. Kudreavţev A. A., *Stabilirea ecuaţiilor chimice,* Ed. Tehnică, Buc., 1955, (trad. din l. rusă).
5. Stcherbakoff J., Z. für Elektrochemie, 1925, **31**, S. 360.
6. Stcherbakoff J. u. Essin O., Z. für Elektrochemie, 1926, **32**, S. 396.
7. Müller E. u Sauer E., Z. für Elektrochemie, 1912, **18**, S. 844.

К ИЗУЧЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПОЛУЧЕНИЯ БИХРОМАТА НАТРИЯ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИМ ПУТЕМ

(Резюме)

Даются наиболее выгодные электрохимические условия для получения бихромистого иона непосредственно из хромистой руды. Устанавливается аналитический метод количественного контроля и уточняются наивыгоднейшие параметры для произведения электролиза и реализирования наилучшей степени превращения хромата в бихромат.

Исследуется ценность продукта полученного в катодном отделении, с целью улучшения экономического показателя.

Предпринятое исследование связывается с методом получения алкалиев и хлора при помощи диафрагмы и ртутного катода.

Анализ бихромата натрия, полученного этим методом, указывает на чистоту в 90,6%, т. е. большую существующей поныне (87%), к тому же в бихромате совершенно отсутствуют сульфаты.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата-катод Hg, анод Zn.
Рис. 2. — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата-катод Hg, анод из нержавеющей стали.
Рис. 3 — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата-катод Hg, графитный анод.
Рис. 4. — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата -катод Hg, платиновый анод.
Рис. 5. — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата-катод Hg, железный анод.
Рис. 6. — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата-катод Hg, свинцовый анод.
Рис. 7. — Кривые $Dc-V$ электролиза раствора хромата натрия, полученных из различных концентраций раствора хрома:
1. насыщенный раствор,
2. концентрированный раствор,
3. разбавленный раствор.

Рис. 8. — Кривые $Dc-V$ растворов чистого хромата натрия различных концентраций:
1. насыщенный раствор,
2. концентрированный раствор,
3. разбавленный раствор.

Рис. 9. — Изменения степени преобразования хромата в бихромат в зависимости от концентрации. Напряженность тока: 0,5 А; время электролиза: 60 минут.
Кривая *1*: $\frac{\text{полученное количество бихромата в форме } Cr_2O_3}{\text{общее количество } Cr_2O_3 \text{ (хромат + бихромат)}}$,
оптимальная концентрация: $8{,}7 \cdot 10^{-5}$ моль $Cr_2O_3/1$.

Рис. 10. — Изменения степени преобразования в зависимости от времени электролиза. Концентрация: $8{,}7 \cdot 10^{-5}$ моль $Cr_2O_3/1$. Напряженность тока: 0,5 А. После 60-ти минут получается наибольшая степень преобразования.

Рис. 11. — Изменение степени преобразования в зависимости от плотности тока анода. Время электролиза: 60 минут. Концентрация: $8{,}7 \cdot 10^{-5}$ моль $Cr_2O_3/1$. Оптимальная плотность тока получена: 1,88 А/дцм².

Рис. 12. — Изменения концентрации католита в гидроксиде натрия и карбоната натрия, в зависимости от времени электролиза:
1. кривая изменений концентрации в NaOH,
2. кривая изменений концентраций в Na_2CO_3.

Рис. 13. — Зависимость максимального выхода гидроокиси хрома, от времени.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES CONDITIONS LES PLUS FAVORABLES POUR L'OBTENTION DU BICHROMATE DE NATRIUM PAR VOIE ÉLECTROLYTIQUE

(Résumé)

On expose les conditions électrochimiques les plus favorables pour l'obtention de l'ion bichromique, directement du minérais de chromite. On établie la méthode analytique du controle quantitatif et les paramètres les plus favorables pour l'exécution de l'électrolyse et de la réalisation du meilleur degré de transformation du chromate en bichromate.

On recherche à valorifier les produits obtenus dans le compartiment cathodique dans le but d'améliorer l'indice d'économicité.

L'étude fait la liaison avec le procédé d'obtention des alcalies et du chlor au moyen de la diafragme et de la cathode au mercure.

L'analyse du bichromate de natrium obtenu à l'aide de ce procédé accuse une pureté de 90,6%, c'est-à-dire plus grande que celle prétendue actuellement (87%) et, de plus, le bichromate est complètement exempt de sulphates.

Explication des figures

Fig. 1. — Courbes $Dc-V$ relatives à l'électrolyse des solutions de chromate en utilisant une cathode de Hg et une anode de Zn.

Fig. 2. — Courbes $Dc-V$ relatives à l'électrolyse des solutions de chromate en utilisant une cathode de Hg et une anode d'acier inoxidable.
Fig. 3. — Courbes $Dc-V$ relatives à l'electrolyse des solutions de chromate en utilisant une cathode de Hg et une anode de graphite.
Fig. 4. — Courbes $Dc-V$ relatives à l'électrolyse des solutions de chromate en utilisant un cathode de Hg et une anode de platine.
Fig. 5. — Courbes $Dc-V$ relatives à l'électrolyse des solutions de chromate en utilisant une cathode de Hg et une anode de fer.
Fig. 6. — Courbes $Dc-V$ relatives à l'électrolyse des solutions de chromate en utilisant une cathode de Hg et une anode de plomb.
Fig. 7. — Courbes $Dc-V$ des solutions de chromate de natrium obtenu des minéraux de chromite aux concentrations différentes :
1. solution saturée,
2. solution concentrée,
3. solution diluée.
Fig. 8. — Courbes $Dc-V$ des solutions de chromate de natrium pur, aux concentrations différentes :
1. solution saturée,
2. solution concentrée,
3. solution diluée.
Fig. 9. — Variation par rapport à la concentration, du degré de transformation du chromate en bichromate. L'intensité du courant : 0,5 A ; la durée de l'électrolyse : 60′. Courbe *I* donne le rapport entre la quantité de bichromate Cr_2O_3 et la quantité totale de Cr_2O_3 çui se trouvait dans le chromate et le bichromate. Concentration optime : $8,7.10^{-5}$ mol Cr_2O_3/l.
Fig. 10. — Variation par rapport au temps de l'électrolyse, du degré de transformation. Concentration : $8,7.10^{-5}$ mol Cr_2O_3/l. Intensité du courant : 0,5 A. Le degré optime de transformation s'obtient dans 60 minutes.
Fig. 11. — Variation par rapport à la densité du courant, du degré de transformation. La durée de l'électrolyse : 60 minutes. Concentration : $8,7.10^{-5}$ mol Cr_2O_3/l. Il en resulte la densité optime du courant pour 1,88A/dm^2.
Fig. 12. — Variation par rapport au temps de l'électrolyse, de la concentration du catholyte dans l'hydroxide de natrium et le carbonate de natrium :
1. Courbe de variation de la concentration dans NaOH.
2. Courbe de variation de la concentration dans Na_2CO_3.
Fig. 13. — Maximum de rendement par rapport au temps dans le vert de chrome.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

662.7/.8

ПИРОЛИЗ ПЫЛЕВИДНОГО РУМЫНСКОГО ЛИГНИТА В ПОТОКЕ ВОДЯНОГО ПАРА

В. Г. КАШИРСКИЙ

Исследованиями ряда авторов [1] ... [5] было показано, что горючие ископаемые гумусового происхождения — землистые бурые угли и лигниты — представляют собою весьма ценный исходный материал для комплексного энерготехнологического использования с целью производства не только тепловой и электрической энергии, но и получения газа для бытового газоснабжения и химической переработки.

Весьма перспективным методом комплексного использования бурых углей и лигнитов на электростанциях может быть высокотемпературная термическая переработка их в пылевидном состоянии в реакторах с внешним обогревом и подачей пара, рециркуляционного газа или ограниченного количества воздуха для создания турбулентного пылегазового потока в канале реактора.

На электростанциях трубчатые реакторы — пиролизеры, изготовленные из жаростойкой стали, могут быть установлены непосредственно в топочной камере котла по типу двухсветных экранов. Существенными преимуществами сочетания технологического устройства с топкой энергетического агрегата является упрощение схемы, а также возможность наиболее эффективного использования твёрдого — пылевидного кокса, путём возвращения его в топку котла для дожигания.

Как известно [6], [7], теплообмен между нагретой стенкой и подвижным слоем мелких твёрдых частиц весьма интенсивен. Распространение тепла в турбулентном пылегазовом потоке, теплофизические свойства которого подобны свойствам жидкости, происходит с большой скоростью. Поэтому высокотемпературный режим термической переработки пылевидного топлива в реакторах—пиролизерах может быть осуществлен со скоростью нагрева частиц, измеряемой сотнями градусов в секунду. Такой „жесткий" режим термической переработки сопровождается образованием летучих продуктов с малым молекулярным весом, вследствие чего возрастает выход пиролизного газа и газового бензина и резко уменьшается содержание смолы в продуктах пиролиза. На формирование состава продуктов пиролиза большое влияние оказывает также и каталитическое воздействие твёрдых частиц кокса, взвешенных в потоке.

В определенных условиях в реакциях газообразования принимает участие вводимый в реактор водяной пар, который может окислять углерод кокса и газообразные углеводороды.

В одной из наших работ [5] показано, что путём пиролиза измельченного бурого угля в потоке перегретого водяного пара в реакторе с внешним обогревом при температуре стенки реактора 1000°С на тонну сухого угля с зольностью 10% получается более 1200 кубометров газа, теплотворная способность которого достигает 2800 ккал/нм³. Пиролизный газ характеризуется повышенным содержанием водорода, что обусловлено не только реакциями дегидрирования углеводородов, но и интенсивным взаимодействием водяного пара с весьма активным пылевидным коксом. Выход газового бензина, с преобладающим содержанием бензола, составил примерно 2%. Смолы в продуктах пиролиза не обнаружено.

Как известно, Румынская Народная Республика располагает мощными месторождениями лигнитов (Дойчешти, Филиппешти, Валишоара, Ровинарь и др.), добыча которых непрерывно возрастает. С целью изучения возможности комплексного газохимического использования румынских лигнитов, нами проведена серия опытов по высокотемпературной термической переработке этого топлива в пылевидном состоянии в трубчатом реакторе. Образец многозольного лигнита месторождения Ровинарь получен от института Энергетики Академии Наук РНР, благодаря любезному содействию профессора И. Блум.

Исходный уголь характеризуется содержанием золы в количестве 56,80% на сухое вещество. Повышенная зольность обусловлена наличием глинистых примесей, которые легко удаляются простейшими методами обогащения. Ручной отборкой глинистых примесей оказалось возможным понизить зольность исходного лигнита до 34,5%.

Состав сухой массы обогащенного лигнита, в весовых процентах, показан в нижеследующей таблице:

A	C	H	$S_{общ}$	O+N	V^c
34,5	40,28	4,06	1,045	20,36	35,7

При стандартном полукоксовании такого обогащенного лигнита в алюминиевой реторте выход смолы получен в количестве 11,5%.

После удаления из исходной пробы топлива различаемых визуально глинистых примесей, минеральная масса обогащенного лигнита содержит (в % %): SiO_2 — 47,04; Al_2O_3 — 21,47; Fe_2O_3 — 6,71; Cr_2O_3 — 0,22; MnO — 0,15; CaO — 8,01; MgO — 1,44; SO_3 — 6,59; $Na_2O + K_2O$ — 2,5; TiO_2 — 5,5.

Применявшийся в опытах лигнит предварительно размалывался на шаровой мельнице до состояния пыли, полностью проходящей через сито № 30.

Высокотемпературное термическое разложение пылевидного лигнита Ровинарь в потоке водяного пара изучалось с применением укрупненной лабораторной установки, схема которой показана на рис. 1. Трубчатый реактор (*1*) из жаростойкой стали снабжен регулируемым электрообогревом, обеспечивающим возможность нагрева реактора до 1100°С. Пылевидное топливо из загрузочного бункера (*2*) подаётся быстроходным шнековым питателем в смесительной камере (*3*), к которой через перегреватель (*5*) от парообразователя (*4*) подводится перегретый пар. Из канала реактора поток продуктов пиролиза поступает в циклонный пылеосадитель (*6*), где выделяется пылевидный кокс. Далее, в змеевиковом холодильнике (*8*) конденсируется непрореагировавший водяной пар, а в колонках (*11*) с активированным углем адсорбируется газовый бензин. Количество полученного сухого газа учитывается газовыми часами (*12*). Лабораторная установка обеспечивает возможность

проведения длительных опытов с балансовым периодом не менее 3...4 часов.

Опыты по пиролизу румынского лигнита в пылевидном состоянии проведены при температурах реактора от 950 до 1100°С. Соотношение пар топливо в смеси, подаваемой в реактор, во всех опытах было равным 1:4. К смесительной коробке пылеподающего устройства пар под-

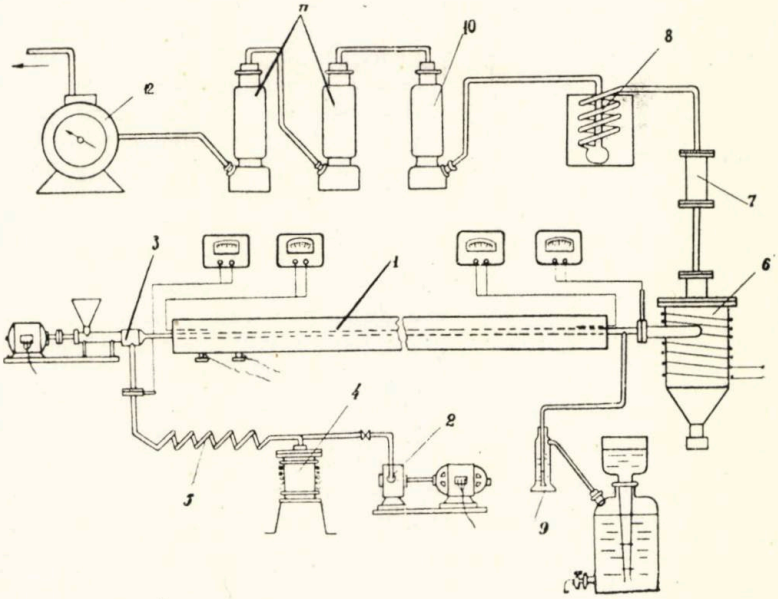


Рис. 1. — Схема лабораторной установки.

водился перегретым до 450...500°С. Время пребывания потока смеси в канале реактора в описываемых опытах было менее секунды. Температура пылегазового потока за реактором, соответственно температуре стенки реактора, менялась от 800°С при температуре реактора 900°С до 940°С при температуре реактора 1100°С. Нагрев пылегазовой смеси в реакторе осуществлялся со скоростью, превышающей 1000°С в секунду.

Выход и состав газа, полученного при различных режимах пиролиза, приводятся в таблице 1.

Таблица 1

Выход и состав пиролизного газа в зависимости от температуры реактора

t реактора °С	Выход газа нл/кг		Состав газа в объёмных % %									Q ккал/нм³
	Сух. лигнит	Горючая масса	H_2S	CO_2	$i\,C_4H_8$	C_3H_6 C_4H_8	C_2H_4	CO	H_2	C_4 H_{2n+2}	N_2	
950	376	575	0,4	22,4	0,2	1,0	4,8	17,7	45,4	5,4	2,7	2971
1000	446	636	0,4	18,9	—	—	3,8	22,0	46,2	5,2	3,9	2883
1050	560	863	0,3	17,0	—	0,2	3,5	24,0	46,4	5,3	3,6	2850
1100	594	915	0,2	15,4	—	—	2,0	25,5	47,2	5,8	3,9	2774

На рис. 2 графически показана динамика образовании компонентов газовой смеси в зависимости от температурных условий переработки лигнита.

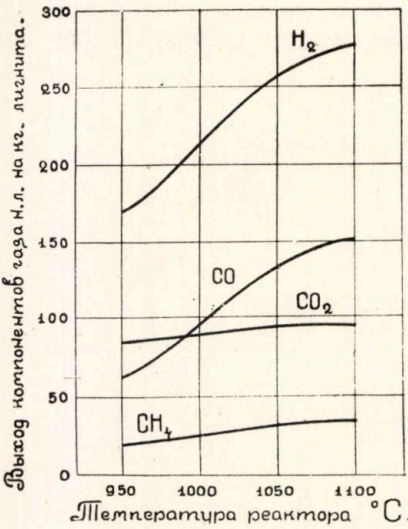


Рис. 2. — Динамика образовании компонентов газовой смеси.

Как видно из таблицы и графика, с повышением температуры процесса, увеличивается выход газа, в составе газа падает относительное содержание углекислоты и возрастает содержание окиси углерода. Суммарное содержание окислов углерода в пиролизном газе несколько превышает 40 %, что обусловлено как гумусовой природой исходного топлива, так и окислительным действием водяного пара, в атмосфере которого протекает пиролиз.

Характер изменения содержания водорода в газе также указывает на то, что наряду с пиролитическим разложением органического вещества в канале реактора имеет место газификация углерода кокса водяным паром. Теплотворная способность сухого отбензиненного газа колеблется в пределах 2770... 2970 ккал/нм³.

Сера в пиролизном газе содержится в виде сероводорода в количестве 0,2...0,4 % и в виде органических сернистых соединений, количество которых в пересчёте на сероводород составляет 0,3...0,4 см³ на литр газа.

При проведении опытов по пиролизу румынского лигнита, в изученном интервале температур, образования смолы не наблюдалось. Газовый бензин получен в количестве 1,4...1,6 % на сухое топливо. Основные константы бензина изменяются в пределах:

удельный вес $d_4^{20} = 0{,}8822 \ldots 0{,}8868$,
молекулярный вес $82 \ldots 88$
показатель преломления $n_b^{20} = 1{,}5002 \ldots 1{,}5030$
содержание серы 2,3 ... 2,8 %

Иодное число по Гюблю-Валлеру изменяется от 15 для бензина, полученного при 900°С до 2 для бензина, полученного при температуре реактора 1100°С.

Из вышеприведенной характеристики газового бензина можно заключить, что этот продукт представляет собою смесь ароматических и сернистых соединений и может быть использован в качестве исходного продукта для выделения индивидуальных ароматических соединений.

Полнота разложения органического вещества исходного топлива, в зависимости от температуры пиролиза, характеризуется составом

пылевидного кокса. С повышением температуры реактора зольность карбонизованного твёрдого остатка, полученного после пиролиза обогащенного пылевидного лигнита Ровинарь в потоке, увеличивается с 52 % при 900°С до 58 % при 1100°С.

Выход летучих, определенный стандартным методом, соответственно уменьшается с 10,4 % до 7,5 % на сухое вещество. Вследствие отщепления кислородных соединений в процессе карбонизации твёрдого остатка при пиролизе лигнита и относительного обогащения горючей массы углеродом, содержание углерода в пылевидном коксе составляет 36...39 % при содержании водорода в количестве от 0,96 до 1,04 %. Общее содержание серы в коксе, определенное по методу Эшка, колеблется в узких пределах от 1,03 до 1,19 %.

При всех режимах пиролиза теплотворная способность пылевидного кокса превышает 3000 ккал/кг, что позволяет рассматривать его как полноценное энергетическое топливо.

Как видно из изложенных выше результатов экспериментального исследования, румынские лигниты после некоторого обогащения являются весьма благоприятным видом топлива для комплексного газоэнергетического использования. Путём высокотемпературной переработки пылевидного лигнита в потоке пара в трубчатых реакторах-пиролизерах с внешним обогревом или комбинированным подводом тепла может быть получен газ по качеству превосходящий газ, производимый более сложными способами.

Дальнейшая разработка методов комплексного газохимического использования румынских лигнитов может привести к весьма ценным в научном и практическом отношении результатам.

Автор выражает глубокую благодарность профессору-доктору И. Блум за предоставленный для опытов образец лигнита, а также благодарит своих сотрудниц Т. К. Арбузову и А. Р. Якореву за активное участие в экспериментах.

Поступило 6 V 1958

Саратовский Государственный Университет
им. „Н. Г. Чернышевского", СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Караваев Н. М., **Труды научно—технической конференции по комплексному развитию буроугольной промышленности УССР**, 1948 стр. 269.
2. Кузнецов В. И., **Ibid.**, 1948, стр. 288.
3. Буймович Д., **Исследования некоторых свойств румынских лигнитов и их полукокса**, 1953, Диссертация, Киевский Ордена Ленина Политехнический институт.
4. Толубинский В. И., Щеголев Г. М., Бабуха Г. Л. и Кауфман С. Б., Труды института теплоэнергетики АН УССР, 1955, вып. *11*, стр. 28.
5. Каширский В. Г., Петелина В. С., Лобачёва Н. Б. и Якорева А. Р. Украинский химический журнал, 1956, **XXII**, *2*.
6. Wicke E. u. Fetting., Chem. Ing. Technik, 1954, **26**, *6*, p. 301.
7. Lewa M. u. Grummer M., Chem. Engng. Progress, 1952, **48**, *6*. p. 307.

PYROLISIS OF THE FINE POWDERED RUMANIA LIGNIT PERFORMED IN THE SUPERHEATED VAPOURS

(Summary)

The paper contains some experimental results of the pyrolisis of the fine powdered Rumania lignit performed in the current of superheated vapours in tube reactor at 950°... 1100°C.

The characteristics of the yield and the composition of the products of pyrolisis are given in connection with the temperature.

The paper relates the possibility of the complex gas and chemical using of lignits by means of the high temperature treatment in fine powdered state.

Explanation of the figures

Fig. 1. — Experimental installation scheme.
Fig. 2. — Complex gas compounds yield dynamics.

PIROLIZA PRAFULUI DE LIGNIT ROMÎNESC ÎN CURENTUL VAPORILOR DE APĂ

(Rezumat)

În cadrul elaborării metodelor menite a conduce la folosirea gazochimică complexă a ligniţilor din R. P. R., autorul studiază piroliza prafului de lignit romînesc în curentul vaporilor de apă.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema instalaţiei experimentale.
Fig. 2. — Dinamica formării componentelor amestecului de gaze.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

620.197

DAS VERHALTEN VON FARBANSTRICHEN AUS CHROMGELB UND ERDGAS-RUSS BEIM KORROSIONSSCHUTZ DES EISENS

VON

CONSTANTIN BRANIŞTE, DAVID PERETZ und SILVIA ŞERBAN

Mitteilung an die wissenschaftliche Tagung der technischen Hochschule Jassy, 26—29 Juni 1958

1. Vorwort

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten von Farbanstrichen aus Chromgelb und Erdgas-Russ mit Leinöl oder Lindenöl als Bindemittel untersucht. Diese Pigmente werden zur Herstellung von Kakifarben, die als Schutzanstriche gegen Korrosion äusserlicher Metallflächen dienen, benützt.

In der Fachliteratur [1] finden wir zahlreiche Methoden, die das Ziel haben die Korrosionsvorgänge zu untersuchen. Meistens werden elektrochemische Untersuchungsmethoden angewendet; so weisen wir z. B. auf die Arbeiten von Tödt [2], Tomaschow [3], Wirth [4], Klark und Akimow [5] u. a. hin.

Betrachtet man, dass die Korrosionsvorgänge elektrochemischer Natur sind, wobei die elektrischen Ströme zwischen den Lokalelektroden sehr klein sind, ist es notwendig Modelle von Lokalelementen zu benutzen [2], die den Korrosionsverlauf unter Deckschichten zu erfassen, ermöglichen. Das gute Übereinstimmen zwischen den Ergebnissen mit Modellversuchen und den gravimetrischen Korrosionsprüfungen so wie den praktischen Erfahrungen, beweist die Brauchbarkeit der Lokalelementmodelle zu diesem Studium. Die Messungen der Stromdichten mit dieser Modellapparatur ermöglicht die qualitative und quantitative Abschätzung der Korrosionsvorgänge in Abhängigkeit von der Zeit. Es ist gleichfalls möglich mit Lokalelementmodellen das Verhalten der Grenzschicht Stahl-Farbfilm zu untersuchen, die eine massgebende Rolle bei der Hemmung des Ionendurchschlupfs spielt. Der primäre und sekundäre Korrosionsschutz, der durch den Farbanstrich erzielt wird, kann aber auch durch Messungen des elektrischen Widerstandes, sowohl des Anstriches auf der metallischen Unterlage als auch des Farbfilmes allein, gemessen werden. Der Schutzwert der verschiedenen Überzüge und deren Verhalten bei der feuchten Korrosion werden mit Hilfe der Lage und des Verlaufes der Zeit-Stromdichtekurven und der Zeit-Widerstandskurven wiedergegeben.

2. Experimentelles

Die beiden Typen der Lokalelementmodelle, die benutzt wurden, erlauben das Studium des Anstriches auf der metallischen Unterlage, sowie des Farbfilmes als freie Membrane.

Der Apparat vom ersten Typus besteht aus einem Glaszylinder von 36,8 mm lichtem Durchmesser und 100 m Länge, bei einer Wanddicke von 1,5 mm. Der Zylinder hat eine, mit einem geschliffenen Glasstöpsel versehene Öffnung, durch die man die Auffüllung und das Entfernen der entstehenden Gase besorgt. Der Zylinder wird horizontal auf einem Gestell montiert; an seinen beiden Enden befinden sich die Elektroden, eine aus edlerem Metall als Eisen, die andere als filmbedektes Stahlblech. Die Dichtung erzielt man mittels Dichtungsringen aus Gummi oder plastischem Material, mit denselben Durchmesser wie der Glaszylinder. Dieselben werden mit Hilfe einer Schraube, die sich im Gestell des Apparates befindet, zusammengepresst. Jede Elektrode besitzt zwei Anschlussbügel, der eine dient zum kurzschliessen des Lokalelementmodelles, der andere, des Messgerätes.

Das andere Modell ist dem ersten ähnlich und unterscheidet sich nur dadurch, dass es aus zwei identischen Zylindern besteht, die je 48 mm lang sind. Zwischen den Zylindern befindet sich der Farbfilm als freie Membrane; eine Elektrode ist aus edlerem Metall als Eisen, die andere, aus Stahlblech.

In diesen Untersuchungen verwendeten die Verfasser blankes Platinblech als Kathode und Stahlblech mit Farbanstrich oder blankes Stahlblech vom Typus OL 34 B als Anode.

Die Farbpigmente, die zur Herstellung des Kakifarbe benützt wurden, sind Chromgelb und Erdgas-Russ. Das Chromgelb wurde laboratoriumsmässig hergestellt und besitzt folgende physikalisch-chemischen Eigenschaften:

Äusseres	feines Pulver	Deckfähigkeit	42...45 g/m²
Farbe	hellgelb	Ölzahl	15,6 %
Wassergehalt	0,12 %	pH - Wert des wässerigen Extrakts	6,3
In Wasser lösslich	0,05 %	Organische Pigmente	—
Gehalt an Cr_2O_3	22,55 %	Rest auf Sieb Nr. 009	—
Gehalt an PbO	70,25 %		

Das Erdgas-Russ, welches von der Fabrik „N. Teclu" geliefert wurde, ist von Typus *A* (R—300) und entspricht der Qualität, die in den staatlichen Normen 101—56 vorgesehen ist.

Als Bindemittel wurde Leinöl (staatliche Normen 16—51) und Lindenöl [6] mit Kobalt- und Blei-resinit als Trockenmittel verwendet. Es wurden folgende Farben angerieben:

a) Chromgelb	48 %	b) Erdgas-Russ	15,5 %
Leinöl (Lindenöl)	46 %	Leinöl	81 %
Whitespirt	5 %	Whitespirt	2 %
Kobalt- und Blei-resinit	1 %	Kobalt- und Blei-resinit	1,5 %

b') Erdgas-Russ	11,9 %	c) Chromgelb	34,4 %
Lindenöl	85,29 %	Erdgas-Russ	5,17 %
Whitespirt	1,57 %	Leinöl (Lindenöl)	57,43 %
Kobalt- und Blei-resinit	1,24 %	Whitespirt	1,83 %
		Kobalt- und Blei-resinit	1,17 %

Das Stahlblech, welches bei den Versuchen benutzt wurde, hat folgende Zusammensetzung :

C	0,12 %
Mn	0,61 %
P	0,08 %
S	0,07 %
Si	0,02 %

Der Auftrag der Farbe auf das Stahlblech, wie auf das Cellophan wurde mit besonderer Sorgfalt durchgeführt, damit der Anstrich keine Diskontinuitäten aufweist. Die Probekörper wurden dreimal gestrichen, wobei 48 Stunden zwischen jedem neuen Anstrich lagen. Die Pinselstriche wurden bei jedem folgenden Anstrich quer zum Vorherigen geführt. Vor den Messungen trocknete der Anstrich 14 Tage bei Zimmertemperatur.

Als Elektrolyt des Lokalelementmodelles benützt man Leitungswasser, dessen Analyse in [7] zu finden ist.

Die Stromdichten wurden mit einem geeichten Spiegelgalvanometer gemessen, dessen Empfindlichkeit $0{,}6 \cdot 10^{-10}$ A/mm und innerer Wiederstand 850Ω war. Die Empfindlichkeit des Galvanometers konnte durch einen Regelwiderstand geändert werden.

Die für die elektrischen Widerstände des Farbfimes (allein) und der Grenzschicht nötigen EMK-Messungen wurden mit einem Kompensationsapparat mit Röhrenverstärker vom Typus ЛП-5 durchgeführt.

3. Das Versuchsverfahren

Der Anstrich auf dem Eisenblech und auf dem Cellophan muss eine absolute Kontinuität der Farbfilme herstellen, da es sonst zu falschen Ergebnissen führen könnte. Das ist dadurch begründet, dass der Ionnendurchschlupf, der durch den Film charakteristisch gehemmt wird, anstatt gleichmässige, nicht kennzeichnende Werte der Stromdichte aufweist. Das Vorhandensein einer Filmdiskontinuität wird durch unregelmässige und heftige Schwankungen bei hohen Werten des Galvanometersstromes eruiert. Was die gleichmässige Stärke der vergleichenden Filmanstriche betrifft, ist es durch Versuche bewiesen worden, dass kleine Unterschiede in der Filmstärke die Resultate nur wenig beeinflussen.

Die Unterlage für den Farbfilm als freie Membrane bildet Cellophan, das einen zu vernachlässigenden geringen Widerstand besitzt. Durch Versuche konnte man feststellen, dass der Widerstandswert von Cellophanfolien sich innerhalb der Versuchsfehler befindet.

Da die Stromunterbrechungen die Entwicklung der Stromdichte -Zeit und Widerstand-Zeit — Kurven ungünstig beeinflussen, sind

die Lokalelementmodelle während der Korrosionsdauer kurzgeschlossen. Bei den Stromdichtemessungen ist das möglich, da der Kurzschlussbügel erst dann entfernt wird, wenn die Einschaltung des Lokalelementmodelles bereits erfolgt ist. Aber bei den EMK-Messungen nach dem Kompensationsverfahren konnte das nicht respektiert werden, weil das Element während der Messungen sich nicht im Kurzschluss befindet. Dadurch musste die Messdauer aufs äusserste, bis auf nur 10 Sekunden eingeschränkt werden.

In den ersten Versuchstagen wurden 8...10 Messungen durchgeführt, um die charakteristischen Schwankungen, die im ersten Stadium des Korrosionsverlaufes erscheinen, so weit als möglich zu fixieren. Danach wurden täglich 2...3 Messungen vorgenommen. Die Versuchsdauer für jede Probe war 10 Tage, was für die Festsetzung des Reststroms genügend ist.

Die Messungen der Stromstärke und der EMK ermöglichten die Berechnung der Stromdichte, der Widerstände des auf dem Stahl festhaftenden Farbfilmes, des Farbfilmes allein und der Grenzschichte. In den Berechnungen wurden die Wiederstände des Elektrolyten und des äusseren Stromkreises vernachlässigt.

4. Versuchsergebnisse

Da die Kakifarbe aus einer Mischung von zwei Farbkörpern besteht, war es unerlässlich das Verhalten der einzelnen Pigmente so wie der Bindungsmittel zu untersuchen.

Die Farbe von Typus *a* wurde aus Chromgelb und Leinöl oder Lindenöl hergestellt. Die Versuchsergebnisse sind in Form von Kurven (Abb. 1 und 2) dargestellt.

Die Kurve der Stromdichte (Abb. 1) läuft zuerst drei Stunden lang unter Null; das ist aus dem Diagramm nicht ersichtlich. In dieser Zeit fungiert der Versuchskörper als Kathode des Lokalelementmodelles. Das beweist, dass sich das Stahlblech unter dem Farbanstrich vollkommen passiv gegenüber dem Elektrolyt verhält. Diese Erscheinung lässt sich dadurch erklären, dass das Chromgelb, welches ein aktives Pigment ist, eine anfänglich dichte Oxydschicht bildet und so das Potential des Eisens veredelt. Die Schutzschicht wird sehr schnell vernichtet, so dass die Stromdichte grosse Werte erreicht; nach 9 Stunden ist z. B. $i = 85.10^{-10}$ A/cm^2; sie wird dann wieder teilweise hergestellt um dann (nach 5 Tagen) endgültig durchlässig zu bleiben. Die Werte der Stromdichte steigen weiter bis zu 60.10^{-10} A/cm^2 an, die anzeigen, dass der Anstrich keinen Schutz mehr bietet und der Korrosionsangriff unter dem Farbfilm fortdauernd stattfindet.

Die Widerstandskurven dieses Anstriches auf Cellophan zeigen nach 9 Stunden einen Wert von $R_p = 2{,}5.10^6\ \Omega$ an. Dessen Ordinaten verkleinern sich viel im Verlaufe der Zeit, so dass nach 5 Tagen $R_p = 0{,}2.10^6\ \Omega$ und nach 8 Tagen gleich $0{,}03.10^6\ \Omega$ sind. Diese Verminderung des elektrischen Widerstandes weist auf das Durchtränken und die Zerquellung des Farbfilmes durch den Elektrolyten hin. Es

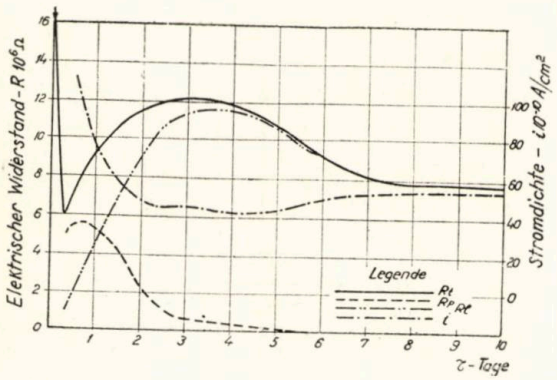


Abb. 1. — Lokalelementmodell : Pt — Leitungswasser — Stahl mit Anstrich aus Chromgelb — Leinöl.

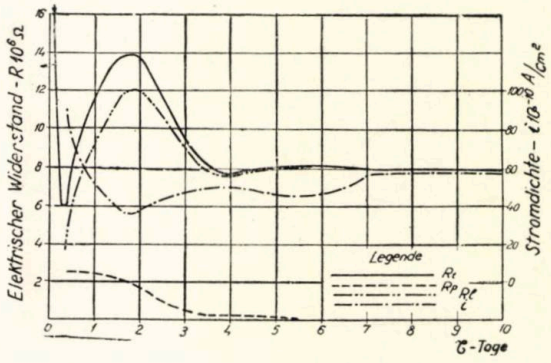


Abb. 2. — Lokalelementmodell : Pt — Leitungswasser — Stahl mit Anstrich aus Chromgelb-Lindenöl

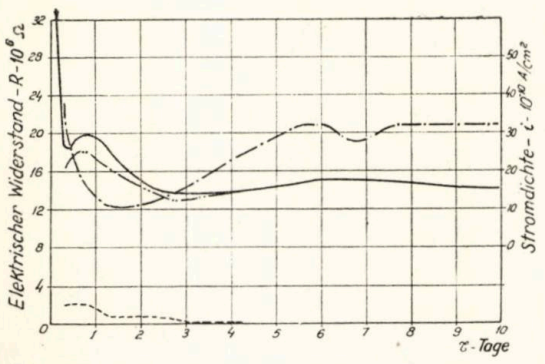


Abb. 3. — Lokalelementmodell : Pt — Leitungswasser — Stahl mit Anstrich aus Erdgas-Russ-Leinöl.

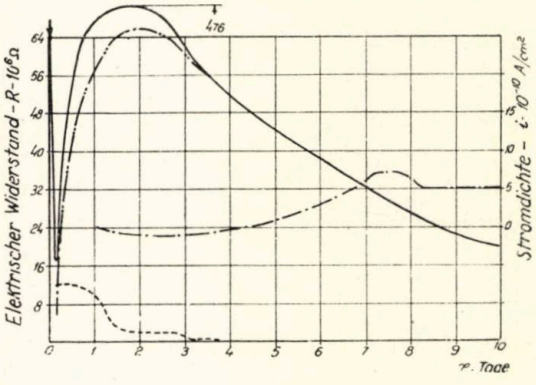
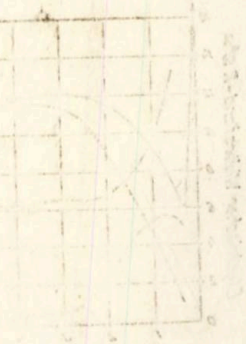


Abb. 4. — Lokalelementmodell : Pt — Leitungswasser — Stahl mit Anstrich aus Erdgas-Russ-Lindenöl



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖNYVTÁR
1953

wird hervorgehoben, dass bei einem Widerstand des Farbfilmes (allein) von $R_p = 1.10^6\,\Omega$, die Korrosionspassivität nicht mehr besteht, da die Oxydgrenzschichte nicht mehr von Farbfilm geschützt wird. Die Widerstandskurve der Grenzschicht zeigt wachsende Werte bis zu $12.10^6\,\Omega$, um dann während $1\frac{1}{2}$ Tagen schnell zu fallen und später Werte bis zu $8.10^6\,\Omega$ langsamer zu erreichen. Die verhältnissmässig kleinen Werte von R_p und R_1 weisen darauf hin, dass nicht die Farbe selbst, sondern die Oxydschicht das Eisen schützt.

Im Diagramm von Abb. 2 sind die Versuchsergebnisse des Chromgelb mit Lindenöl als Bindemittel dargestellt. Die Kurven weisen ein ähnliches Verhalten des Farbanstriches, ohne hauptsächlichen Unterschiede, auf. Der Einfluss des Bindemittels kann wegen des geringen Schutzwertes des Pigmentes, welcher den Verlauf der Kurven verschleiert, nicht bemerkt werden.

Die Versuchskörper wurden nachher mittels eines Mikroskopen untersucht und wiesen Sprünge und Quellungsblasen der Farbanstriche so wie einzelne Rostflecke der Unterlage auf, was durch die Versuchsergebnisse bestätigt wurde.

Das Verhalten der Farbe von Typus *b* und *b'*, bei der Erdgas-Russ verwendet wurde, ist in den Diagrammen der Abb. 3 und 4 die die Kinetik des Korrosionsvorganges unter den Schutzfilmen veranschaulichen, dargestellt.

Aus dem Diagramm der Abb. 3 geht hervor, dass die Reststromdichte sich bei einem Wert von 32.10^{-10} A/cm² festsetzt, der ungefähr die Hälfte derselben für die Farbe mit Chromgelb und Leinöl ist. Die Kurve R_p ist der von Abb. 1 ähnlich, weil diese die Quellungsneigung des Farbfilmes festhält. Der Widerstand der Grenzschicht, der $14.10^6\,\Omega$ ist, zeigt einen besseren Korrosionswiderstand im Vergleiche zu der Farbe aus Chromgelb an. Im diesem Falle ist der Schutz durch die Grenzschicht erzielt worden, da der Farbfilm allein sehr schnel beschädigt wird.

Die Kurven vom Diagramm der Abb. 4 heben die Vorzüge des Farbanstriches mit Erdgas-Russ und Lindenöl hervor. Die Stromdichte bleibt ungefähr 3 Tage unter Null, das heisst solange Zeit als die Grenzschicht noch mit einem dichten und widerstandsfähigen Farbfilm bedeckt ist. Nach der Umkehrung des Stromes wo der Probekörper wieder als Anode dient, wird eine Stromdichte von 5.10^{-10} A/cm² verzeichnet. Da nun bei Werten der Stromdichte kleiner als 10.10^{-10} A/cm² die Farbschutzfilme eine vollkommene Beständigkeit gegen Korrosionsangriff sichern, kann man schliessen, dass auch in diesem Falle der Anstrich einen sehr guten Korrosionswiderstand besitzt. Die gute Qualität der Farbe aus Erdgas-Russ und Lindenöl erklärt sich nur durch die charakteristischen Eigenschaften des Bindemittels. So beginnt die R_p-Kurve bei relativ hohen Werten ($12.10^6\,\Omega$) und behält dieselben eine längere Zeit. Das beweisst, dass der Farbanstrich eine kleinere Quellungsneigung besitzt, als die Farbe mit Leinöl. Was aber das Verhalten der Grenzschicht anbetrifft, konnte man feststellen, das ihr elektrischer Widerstand hunderte Millionen Ohm erreicht, das heisst Werte,

die vergleichbar mit denen sind, die die Verfasser bei den Versuchen mit Farbanstrichen aus Bleimennige erhalten haben. Der Widerstand der Grenzschicht, der dem Reststrome entspricht ist $20 \cdot 10^6\,\Omega$, also über den Mindestwert, welcher eine vollkommene Beständigkeit anzeigt ($10.10^6\,\Omega$). Die obenerwähnten Versuchsergebnisse zeigen an, dass das Erdgas-Russ ein Pigment ist, der dem Farbanstrich höheren Schutzqualitäten verleiht. Durch Verwendung des Lindenöls als Bindemittel, erreicht man einen höheren und dauerhafteren primären wie sekundären Schutzwert, insbesondere für Erdgas-Russ. Die mikroskopischen Untersuchungen der Probekörper bewiesen, dass die Unterlage aus Stahlblech nicht sichtbar angegriffen wurde und der festhaftbare Farbanstrich keine Quellungsblasen oder Sprünge aufwies.

Nachdem der Einfluss der einzelnen Farbpigmente so wie der der Bindemittel festgestellt wurde, konnte man den gegenseitigen Einfluss der Pigmente einerseits und der Bindemittel anderseits untersuchen. Die Versuche, die mit einem kleinen Zuschuss von Erdgas-Russ zu Chromgelb durchgeführt wurden, zeigten keine durchgreifenden Änderungen in der Lage und dem Verlauf der Kurven für Stromdichte und Widerstand. Darum hat man einen Farbanstrich mit grösseren Gehalt (ungefähr 5%) an Erdgas-Russ hergestellt (Farbe Typus *c*), bei welchen man den gegenseitigen Einfluss der Farbpigmente feststellen konnte. Dieser gegenseitige Einfluss bleibt, selbst wenn man verschiedene Bindemittel gebraucht, bestehen.

Die Messergebnisse sind in den Abb. 5 und 6 gegeben.

Bei der Kakifarbe, die mit Leinöl hergestellt ist, kann man feststellen, dass die Stromdichte sich ungefähr 5 Tage bei den Werten von 15.10^{-10} A/cm² festsetzt, um nachher bis zu 22.10^{-10} A/cm² anzuwachsen. Derselbe bleibt auch für den Reststrom gültig. Der Widerstand R_p des Farbfilmes allein zeigt wie alle anderen Versuche an, dass der Farbfilm eine grosse Quellneigung besitzt. Der Widerstand R_1 der Grenzschicht wächst stetig an um nach 3 Tagen ein Maximum zu erreichen ($36.10^6\,\Omega$), wird nachher langsam kleiner bis zu einem Wert von $26.10^6\,\Omega$ für den Reststrom.

Die Abb. 6 zeigt den Einfluss des Lindenöls als Bindemittel. Es geht aus ihr hervor, dass dieser Farbanstrich einen kompakten Film mit einer kleinen Porosität bildet, so das die Stromdichte ungefähr 3 Tage um den Nullpunkt schwankt, um sich nachher bei einen Reststrom von 10.10^{-10} A/cm² festzusetzen. Der Widerstand des Farbfilmes (allein) ist anfänglich $19{,}5.10^6\,\Omega$ um fortdauernd kleiner zu werden, so dass die Werte nach 4 Tagen $0{,}2.10^6\,\Omega$ sind. Die Passivität der metallischen Unterlage, die 3 Tage dauert, ist durch sehr grosse Werte des Widerstands der Grenzschicht angegeben ($1070.10^6\,\Omega$) um dan kleiner zu werden ($49{,}5.10^6\,\Omega$). Die sehr kleine Stromdichte und der grosse elektrische Gesamtwiderstand für die Zeitspanne von 3 Tagen beweisen, dass die Vorgänge, die den Korrosionsschutz des Stahlblechs bewirken, andere sind wie im Falle des Chromgelbs, im Sinne, das hier gleichzeitig die Oxyd — so wie die Grenzschicht des Farbanstriches wirken. Die oxydierenden Eigenschaften des Chromgelbs und die Adsorbtions-

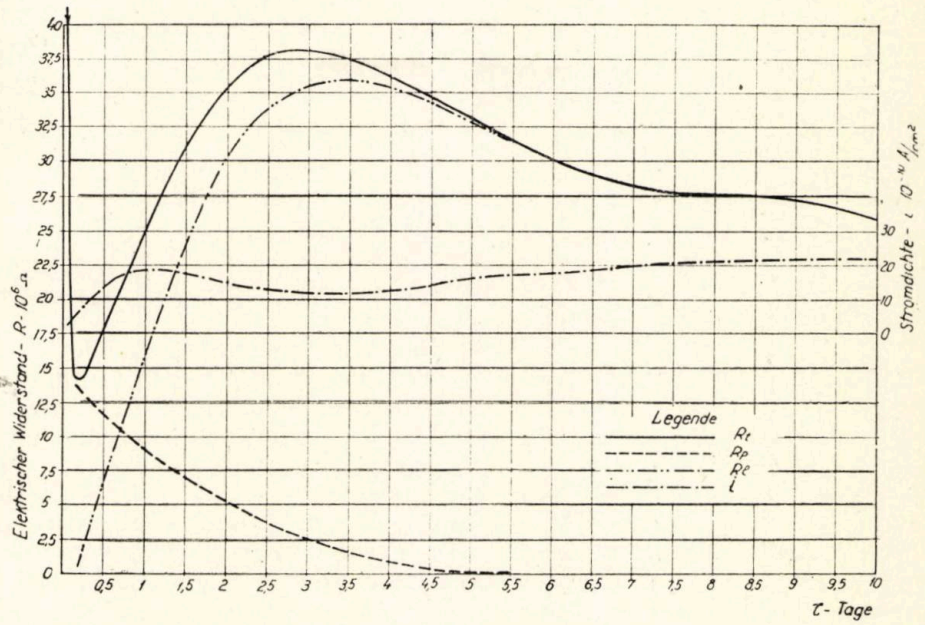


Abb. 5. — Lokalelementmodell: Pt — Leitungswasser — Stahl mit Anstrich aus Kakifarbe — Leinö .

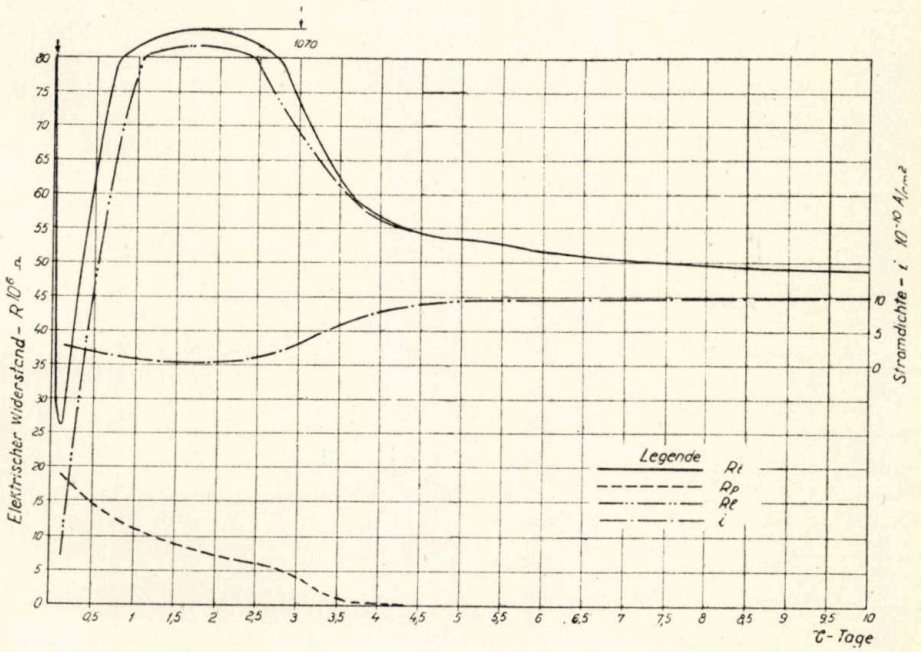


Abb. 6. — Lokalelementmodell: Pt — Leitungswasser — Stahl mit Anstrich aus Kakifarbe — Lindenöl.

fähigkeit des Erdgas-Russes, die durch die Anwesenheit des Lindenöls begünstigt werden, sichern dem Schutzanstrich eine fast vollkommene Undurchlässigkeit.

Um einen Gesamtblick über die Versuche zu ermöglichen, wurden die bezeichnendsten Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 1

für Stromdichte und elektrischen Widerstand

Farbetypus	Reststromdichte i (10^{-10} A/cm^2)	Anfänglicher Widerstand des Farbfilmes allein R_p (10^6 Ω)	Widerstand der Grenzschicht beim Reststrom R_1 (10^6 Ω)
Chromgelb mit Leinöl	58	2,5	8
Chromgelb mit Lindenöl	54	5,5	7,8
Erdgas-Russ mit Leinöl	32	2	14
Erdgas-Russ mit Lindenöl	5	12	20
Kakifarbe mit Leinöl	22	13,5	25,8
Kakifarbe mit Lindenöl	10	19,5	49,5

5. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zum Studium der Farbanstriche, die für den Schutz des Eisens gegen die feuchte Korrosion benutzt werden, dar. Dieses Thema ist von grosser Aktualität, sowohl vom theoretischen als auch vom praktischen Standpunkt.

Die Kakifarbanstriche, welche für die Bedeckung äusserer Metallflächen dienen, wurden bis jetzt noch nicht bezüglich des Schutzes gegen feuchte Korrosion untersucht. Aus diesem Grunde war es nötig, dass sich die unternommenen Untersuchungen sowohl auf den Einfluss der Farbpigmente als auch den der verwendeten Bindemittel zudehnten.

Es wurden folgende Ergebnisse erzielt:

a) Die Farbanstriche aus Erdgas-Russ besitzen bessere Schutzeigenschaften gegen die feuchte Korrosion als die mit Chromgelb, gleichgültig welches Bindemittel (Leinöl oder Lindenöl) verwendet wurde.

b) Es wird hervorgehoben, dass din Kakifarbanstriche einen höheren Korrosionswiderstand, als die aus einzelnen Pigmenten bestehenden Farbanstriche aufweisen. Die von der Zeit abhängige Verminderung der Schutzwerte der Kakifarbanstriche wird von deren Gelatinierung verursacht.

c) Das Lindenöl bewährt sich als Bindemittel, sowohl bei der Herstellung der Kakifarben als auch bei Erdgas-Russfarben besser als das allgemein verwendete Leinöl.

Technische Hochschule Jassy,
Lehrstuhl der anorganischen Industrien

LITERATURVERZEICHNIS

1. Акимов Г. В., Теория и методы исследования коррозий металлов, 1954, Изд. АН СССР, М.-Л., стр. 229-387.
2. Tödt, Z. Elektrochemie, 1928, **34**, S. 586; Ibid., 1934, **40**, S. 536,

3. Томашов, Защита металлических конструкций от коррозий протекторами, 1940.
4. Wirth J. K., Doberan Bad şi Machu Willibald, *Coroziunea fierului sub pelicule protectoare, în special de vopsele*, I. D. T., Referate în domeniul metalurgiei, *41*.
5. Klark G. B. şi Akimov G. V., Analele romîno-sovietice, 1955, *34*, pp. 114-146.
6. Dima M., Cotruţ Gh. şi Diaconescu E., St., şi cerc. de chimie 1954, **2**.
7. Huidovici Gh. şi Teodorescu E., *Analiza apei de Timişeşti şi caracterizarea ei din punct de vedere potabil, domestic şi industrial*, Iaşi, 1937,

ПОВЕДЕНИЕ ПЛЕНОК КРАСКИ, НА ОСНОВЕ ХРОМОВОКИСЛЫЙ СВИНЕЦ – САЖА, В ЗАЩИТЕ СТАЛИ

(Резюме)

Как следствие произведенных экспериментальных работ были следующие выводы :

1. Пленка краски, на основе сажи, независимо от использованного вяжущего (льняное или липовое масла) обладает лучшими жащитными качествами, чем хромовокислый свинец.

2. Пленка краски хаки создает антикоррозионную защиту лучшую чем краски единного состава.

3. При изготовлении краски хаки, а также и на основании сажи, новый вяжущий—липовое масло—оказался лучшим классического льняного масла.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Модель местного элемента, Pt-водопроводная вода — сталь окрашенная хромовокйслым свинцом, вяжущий—льняное масло.
Рис. 2. — Модель местного элемента, Pt-водопроводная вода — сталь окрашенная хромовокислым свинцом, вяжущий-липовое масло.
Рис. 3. — Модель местного элемента, Pt-водопроводная вода — сталь окрашенная сажей вяжущий—льняное масло.
Рис. 4. — Модель местного элемента, Pt-водопроводная вода — сталь окрашенная сажей, вяжущий—липовое масло.
Рис. 5. — Модель местного элемента, Pt-водопроводная вода — сталь окрашенная краской хаки, вяжущий—льняное масло.
Рис. 6. — Модель местного элемента, Pt-водопроводная вода — сталь окрашенная краской хаки, вяжущий-липовое масло.

COMPORTAREA PELICULELOR DE VOPSEA PE BAZĂ DE GALBEN DE CROM — NEGRU DE FUM, IN PROTECŢIA OŢELULUI

(Rezumat)

Prezenta lucrare constituie o contribuţie la studiul peliculelor de vopsea kaki, folosite în protecţia oţelului împotriva coroziunii umede.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Model de element local, Pt-apă de la reţea — oţel vopsit cu galben de crom, liant ulei de in.
Fig. 2. — Model de element local, Pt-apă de la reţea—oţel vopsit cu galben de crom, liant ulei de tei.
Fig. 3. — Model de element local, Pt-apă de la reţea — oţel vopsit cu negru de fum, liant ulei de in.
Fig. 4. — Model de element local, Pt-apă de la reţea—oţel vopsit cu negru de fum, liant ulei de tei.
Fig. 5. — Model de element local, Pt-apă de la reţea — oţel vopsit cu vopsea kaki, liant ulei de in.
Flg. 6. — Model de element local, Pt-apă de la reţea—oţel vopsit cu vopsea kaki, liant ulei de tei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

660

CONTRIBUŢII LA STUDIUL CĂDERII DE PRESIUNE ÎN COLOANE CU UMPLUTURĂ

DE

TEODOR SĂVEANU, I. IBĂNESCU şi RADU TUDOSE

1. Introducere

Căderea de presiune redă în mare măsură condiţiile de curgere prin umplutură, condiţii ce influenţează în cel mai înalt grad fenomenele de transfer de căldură şi de masă. Căderea de presiune se măsoară uşor şi variaţiile, ei la instalaţii în funcţie, permit să se tragă concluzii asupra schimbărilor survenite în funcţionare.

Din aceste considerente căderea de presiune a constituit obiectul multor studii, din care s-au tras concluzii cu privire la comportarea diferitelor umpluturi. Deocamdată cea mai folosită umplutură este cea de inele ceramice.

Condiţiile de curgere prin umplutură sînt influenţate de mulţi factori, care au fost în cea mai mare parte studiaţi. O problemă dificilă o constituie cuprinderea influenţei acestor factori în relaţii simple de calcul.

Pentru curgerea unei singure faze prin medii poroase s-au stabilit relaţii de calcul pe bază de experienţă, de un mare număr de cercetători, din care o parte sînt citate de H. Brauer [1]. Relaţia lui N. M. Javoronkov [2] pentru umplutură neudată este suficient de exactă. Este de menţionat relaţia lui S. Ergun [1] completată de H. Brauer [1] care redă bine curgerea unei faze prin umplutura de inele ceramice. Rezultate bune se obţin şi cu folosirea relaţiei lui E. Kirschbaum [3] pentru inele ceramice de 8; 15 şi 25 mm.

Pentru curgerea a două faze prin umplutură, relaţiile de calcul existente dau rezultate mult mai aproximative. O relaţie mai generală este relaţia lui N. M. Javoronkov [2], valabilă între punctele de regim optim şi de înec, dar care dă rezultate mai mici decît în realitate. Sînt de menţionat [4], [5], [6] datele prezentate în grafice, obţinute prin experimentare şi valabile numai pentru gazul şi lichidul cu care s-a experimentat.

În lucrarea de faţă ne-am propus să studiem influenţa unor factori asupra căderii de presiune şi să stabilim relaţii de calcul pentru căderea de presiune prin umplutură uscată, umedă şi stropită la sistemul aer-apă în contracurent.

2. Instalaţia de experimentare

S-a folosit o instalaţie de experimentare cu o coloană de $\varnothing = 191$ mm şi înălţimea totală de 1800 mm, umplută pe o înălţime de 920 mm.

S-a folosit ca umplutură inele ceramice normale de $25 \times 25 \times 3$ şi $15 \times 15 \times 2$ mm.

Instalaţia conţinea ventilatorul *2* prin care era suflat aer, a cărui cantitate era reglată de clapeta *1*.

Aerul intra în partea inferioară a coloanei cu umplutură 7, i se măsura debitul cu un tub Pitot-Prandtl 8, folosind un manometru diferenţial înclinat M_2.

Apa de la reţea intra într-un rezervor 4 cu preaplin 3, pentru asigurarea debitării constante a cantităţii, reglată cu un robinet şi apoi stropită în coloană. Apa ieşea din coloană prin sifonul 6. Debitul de apă s-a măsurat în vasul 5, din care era dată la canal. 4 termometre (t_1, t_2, t_3, t_4) măsoară temperaturile aerului şi apei la intrare şi ieşire.

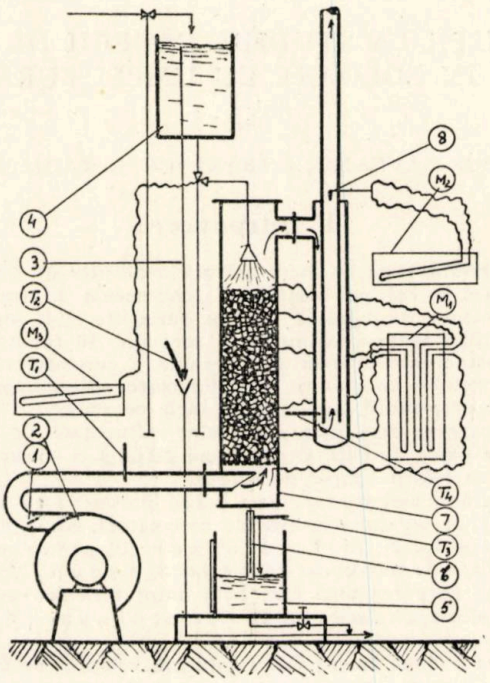


Fig. 1. Schema instalaţiei de experimentare.

Presiunea în umplutură s-a măsurat în şase puncte, din care 1 şi 6 erau fixate în afara umpluturii iar 2, 3, 4 şi 5 în umplutură.

3. Modul de operare

S-au făcut încercări cu umplutura uscată, umedă şi stropită şi s-a măsurat căderea de presiune funcţie de debitul de gaz.

Căderea de presiune s-a măsurat cu trei manometre diferenţiale, din care unul legat înainte şi după umplutură, iar celelalte două la diverse înălţimi a umpluturii. S-a constatat că se obţin rezultate concordante, indiferent de locul unde s-a făcut măsurarea.

La umplutura uscată s-a variat viteza gazului de la 0 la circa 2,5 m/s. La umplutura umedă, umezirea s-a făcut iniţial prin stropire

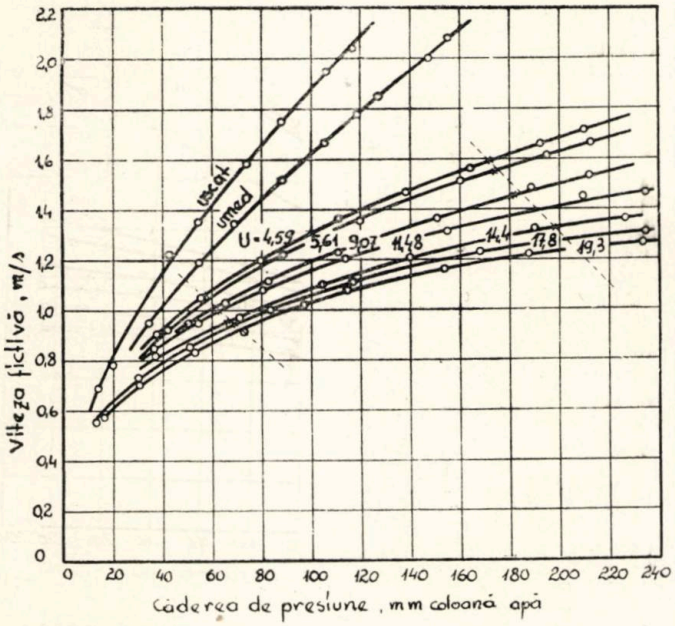


Fig. 2. — Căderea de presiune Δp în mm coloană apă pe 0,8 m înălţime umplutură de 25×25×3 mm.

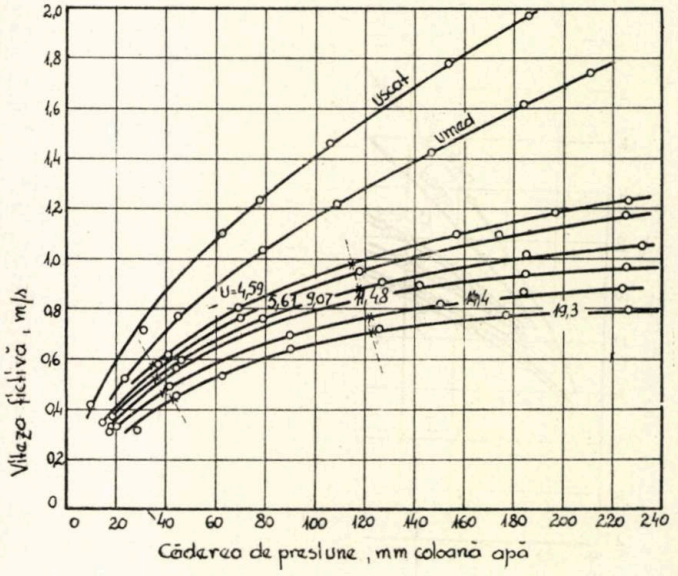


Fig. 3. — Căderea de presiune Δp în mm coloană apă pe 0,8 m înălţime umplutură de 16×15×2 mm.

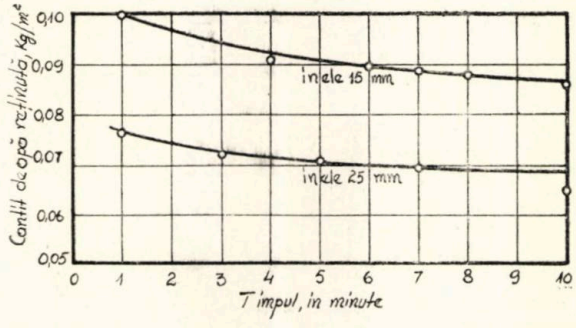


Fig. 4. — Variaţia în timp a cantităţii de apă reţinută de inelele ceramice de 25 mm şi 15 mm la 14°C.

PLANŞA I

intensă şi circulaţie a gazului cu viteză mare, după care s-a lăsat circa 3 minute pentru scurgerea apei. În timpul determinărilor s-a reîmprospătat umezirea la circa 10 minute, pentru a evita uscarea umpluturii.

La umplutura stropită s-a măsurat căderea de presiune funcţie de debitul de gaz, la diverse densităţi de stropire, menţinute constante. Şi aici se asigura, la început, umezirea completă a umpluturii, prin stropire intensă şi circulaţie a aerului cu viteză mare.

Densitatea de stropire a variat între 4...20 m^3/m^2h.

Temperatura apei la intrare a fost 11,5 ± 0,2°C iar la ieşire 14 ± ± 0,5°C. Temperatura aerului era la intrare 26 ± 1°C iar la ieşire 14 ± ± 0,5°C.

4. Rezultate obţinute

După cum s-a menţionat mai sus, încercările s-au făcut cu inele ceramice Raschig de 25 şi de 15 mm. Rezultatele obţinute sînt date în graficele din fig. 2 şi 3 (v. planşa I) în care în ordonată este dată viteza fictivă v_0 a gazului (în m/s) iar în abscisă, căderea de presiune Δp (în kg/m^2) pe înălţimea de umplutură de 0,8 m.

Dimensiunile reale ale umpluturii n-au corespuns dimensiunilor normale. Din această cauză s-au măsurat dimensiunile la un număr de inele şi valorile medii găsite sînt date în tabelul 1. În calcule s-au folosit dimensiunile reale.

Umplutura umezită prezintă o cădere de presiune mai mare decît umplutura uscată; această cădere de presiune depinde de cantitatea de apă reţinută pe suprafaţa inelelor prin forţe de adeziune şi în unghiurile moarte [1].

Variaţia în timp a cantităţii de apă reţinută pe suprafaţa inelelor s-a stabilit prin încercări cu inele de 25 şi de 15 mm puse într-un vas, menţinut imobil în timpul încercărilor. S-a experimedtat la 14°C. Rezultatele obţinute sînt redate în fig. 4 (v. planşa I).

Tabelul 1

Dimesiunile şi mărimile caracteristice ale inelelor

	Dimensiuni în mm	Suprafaţa specifică σ m^2/m^3	Volumul liber v_l m^3/m^3
Date normale	15×15×2 25×25×3	330 200	0,70 0,74
Date reale	15,20×15,51×2,31 23,51×25,85×3,36	307 180,5	0,707 0,73

Din grafic (fig. 4) rezultă că pelicula de apă reţinută pe suprafaţa inelelor ceramice are o grosime de circa 70, respectiv 90 microni.

5. Prelucrarea rezultatelor obţinute

Pentru a stabili domeniile de curgere în care s-a lucrat, s-au determinat punctele de regim caracteristic, regim optim („looding") şi regim de înec („flooding") cu relaţiile lui L e r n e r şi G r o v e [7] şi apoi s-au verificat cu relaţia lui A. N. P l a n o v s k i şi V. V. K a f a r o v [8].

În fig. 2 şi 3 (planşa I) s-a marcat cu linii întrerupte limita de regim optim şi de înec. Se constată că s-a depăşit regimul de înec în toate încercările cu umplutură stropită.

Căderea de presiune funcţie de viteză este reprezentată prin parabole.

Întrucît căderea de presiune se exprimă obişnuit funcţie de v^2, am reprezentat în fig. 5 şi 6 (planşa II) căderea de presiune prin inele, funcţie de energia dinamică, calculată cu viteza fictivă v_0.

Se constată că curbele pentru umplutura uscată şi umedă se apropie de drepte care trec prin origină. Faptul că aceste curbe se apropie de drepte, permite ca prin o singură determinare, prin calcul sau prin experienţă, să se găsească oricare valoare a căderii de presiune, folosind această reprezentare.

Curbele pentru inele stropite au curbura mai mică în această reprezentare şi la densităţi de stropire mai mici ele pot fi înlocuite, pe anumite porţiuni, cu drepte.

6. Stabilirea relaţiilor pentru Δp

Din fig. 5 şi 6 (planşa II) rezultă că la umplutura uscată şi umedă concavitatea curbelor este orientată în direcţie opusă faţă de cea a umpluturii stropite. Acest considerent a permis să se tragă concluzia că relaţiile de calcul care exprimă căderea de presiune pot fi de forma:

$\Delta p = Ahv_0^{2-n}\gamma_g / (2d_{ech}g)$ — pentru umplutură uscată şi umedă şi

$\Delta p = Ahv_0^{2+n}\gamma_g / (2d_{ech}g)$ — pentru umplutură stropită

Aceste relaţii s-au scris sub forma:

$$\Delta p = ahv_0^2\gamma_g / [2d_{ech}g(v_0\gamma_g d/\mu g)^n],$$

respectiv

$$\Delta p = [ahv_0^2\gamma_g / (2d_{ech}g)][v_0\gamma_g d_{ech}/(\mu g)]^n.$$

În aceste relaţii se notează $\lambda = a/\mathrm{Re}^n$, respectiv $\lambda = a\,\mathrm{Re}^n$ sau sub forma unei singure expresii $\lambda = a\,\mathrm{Re}^n$ în care n este negativ pentru umplutura uscată şi umedă şi pozitiv pentru umplutura stropită.

Valorile lui a şi n sînt date în tabelul 2:

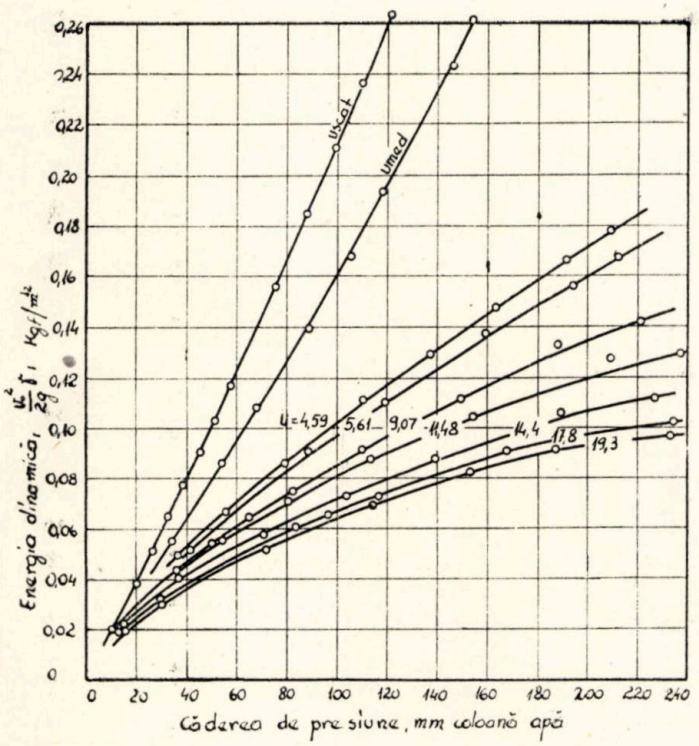


Fig. 5. — Căderea de presiune Δp funcție de energia dinamică la inele ceramice de 25×25×3 mm.

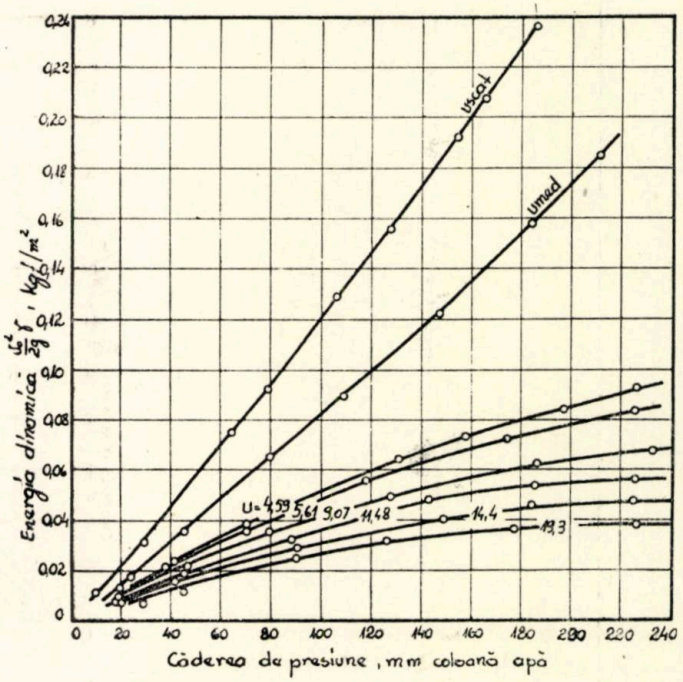


Fig. 6. — Căderea de presiune funcție de energia dinamică la inele ceramice de 15×15×2 mm.

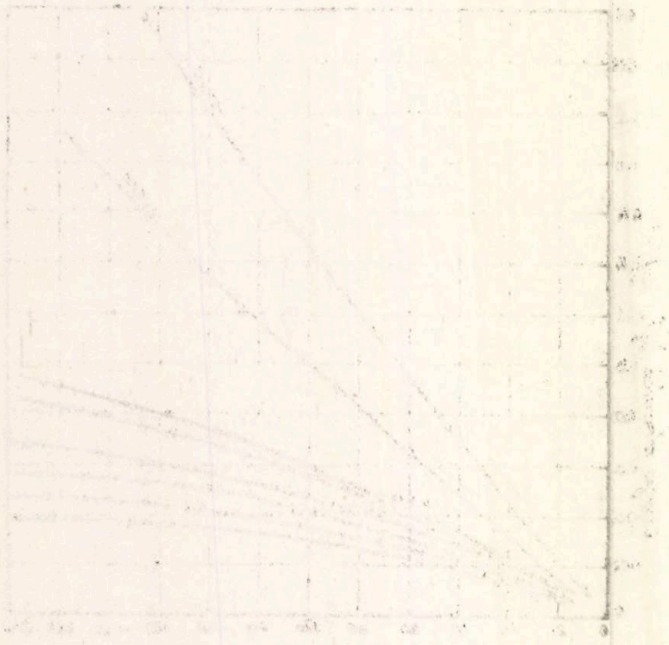


Fig. 6 — Cadres de pression Δp pour la centrale thermique à foyer rotatif de $12 \times 12 \times 3$ mm.

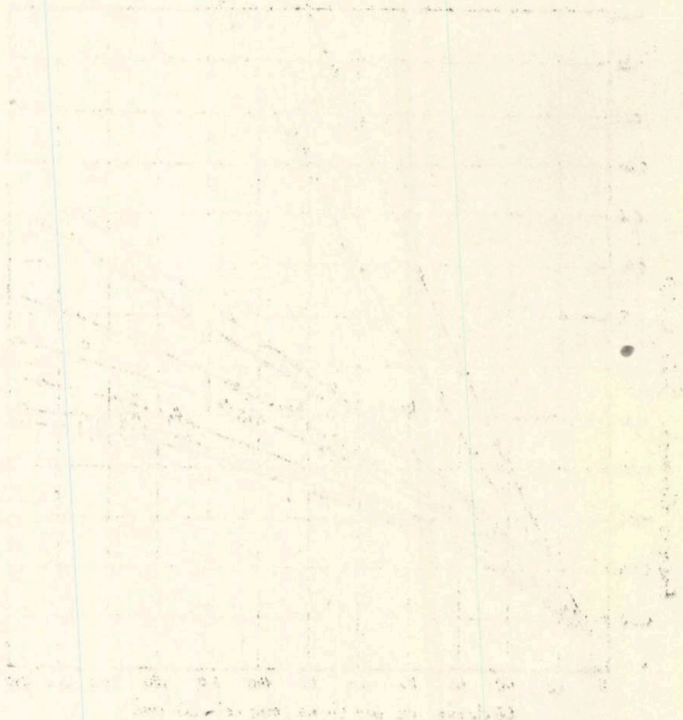


Fig. 7 — Cadres de pression Δp pour la centrale thermique à foyer rotatif de $12 \times 12 \times 3$ mm.

Tabelul 2

	a	n
Pentru umplutura uscată		
pentru inele de 15 mm	32	−0,177
pentru inele de 25 mm	25	−0,128
Pentru umplutura umedă		
pentru inele da 15 mm	27,5	- 0,105
pentru inele de 25 mm	17,9	−0,0523
Pentru umplutura stropită		
pentru inele de 15 mm	$\frac{0,0973}{n^{3,425}}$	$\frac{1,50U}{9,04+U}$
pentru inele de 25 mm	$\frac{0,0186}{n^{5,71}}$	$\frac{1,685U}{6,90+U}$

Relaţiile obţinute dau o eroare de $\pm 8\%$ şi sînt valabile pentru tot domeniul de curgere pînă dincolo de limita de înec.

Trebuie menţionată în mod special influenţa stării suprafeţei umpluturii asupra căderii de presiune. După un timp de funcţionare cu apă potabilă a coloanei cu inele de 25 mm, s-a constatat o creştere a căderii de presiune de 8% la umplutura uscată, datorită depunerilor curente din apa potabilă (depuneri în cantităţi extrem de mici). S-au făcut încercări de depunere a durităţii temporare din apă prin precipitarea ei prin absorbţie de amoniac gazos.

La o depunere de numai circa 12 g/m² suprafaţă a umpluturii, căderea de presiune a crescut cu circa 30%, apreciată pentru umplutura uscată. Micşorarea secţiunii libere a umpluturii prin depunerea celor 12 g/m² este neglijabilă (variaţia de volum liber este de 0,005 m³/m³) şi ca atare creşterea căderii de presiune se explică numai prin schimbarea naturii suprafeţei şi a rugozităţii ei.

Menţionăm că relaţiile s-au stabilit cu inele noi.

7. Concluzii

1. În lucrare s-au stabilit relaţii pentru calculul căderii de presiune în coloane cu umplutură din inele ceramice de 15×15×2 şi 25×25×3 mm pentru condiţiile: umplutură uscată, umedă şi stropită, valabile la sistemul aer-apă, în contracurent.

Relaţiile sînt valabile pentru tot domeniul de curgere, pînă dincolo de limita de înec.

2. S-a demonstrat importanţa depunerilor pe umplutură, depuneri care măresc mult căderea de presiune.

Notaţii utilizate

Δp — căderea de presiune (kf/m²);
$d_{ech} = 4v_1/\sigma$, diametrul echivalent (m);
γ_g — greutatea sp cifică a gazului (kgf/m³);
v_1 — volumul liber al umpluturii (m³/m³);
σ — suprafaţa specifică a umpluturii (m²/m³);
μ — vîscozitatea gazului (kgfs/m²);
λ — coeficient de rezistenţă (adimensional);
h — înălţimea umpluturii (m);
g = 9,81 m/s², acceleraţia gravitaţiei;
A, n, a — constante numerice (adimensionale).

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Chimie Fizică,
Laboratorul de Procese şi Aparate

BIBLIOGRAFIE

1. Brauer H., Chemie - Ing. Techn., 1957, **29**, S. 785—790.
2. Жаворонков Н. М., Аеров М. Е. и Умник Н. Н., Хим пром., 1948, *10*.
3. Kirschbaum E., *Destillier und Rektifiziertechnik*, Springer - Berlin, 1950, (citat după Bratu E. A., *Curs de procedee şi aparate în industria chimică*, vol. II, Lit. înv., Buc., 1954, p. 102).
4. Жаворонков Н. М., Хидравлические основы скруберново процесса и теплопередача в скруберах, Совецкая Наука, 1944, (citat după Егоров Н. Н., Охлаждение газа в скруберах, Госхимиздат, М., 1954).
5. Perry J. N., *Chemical Engineers'Handbook*, Third Edition, Mc Graw-Hill, New-York, 1950.
6. Berl Ernst, *Chemische Ingenieur Technik*, III Bd., Springer, Berlin, 1935.
7. Lerner B. J. a. Grove C. S. jr., Ind. Eng. Chem., 1951, **43**, p. 216.
8. Рамм В. М., Абсорбционньий процессы в химической промышленность, Госхимиздат, М., 1951, стр. 195.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE LA CHUTE DE PRESSION DANS LES COLONNES À REMPLISSAGE

(Résumé)

Les Auteurs étudient la chute de pression dans le cas des anneaux céramiques normaux pour le système air-eau, en contrecourant.

On établit des relations qui permettent à calculer plus exactement la chute de pression

On met en évidence l'importance des dépôts sur le remplissage, qui modifient la valeur de la chute de pression. C'est à cause du changement de la nature et de la rugosité de la surface, que la valeur de la chute de pression se modifie d'une manière ininterrompue.

Explication des figures

Fig. 1. — Schéma de l'installation expérimentale.
Fig. 2. — La chute de pression Δp (mm colonne d'eau) sur une hauteur de 0,8 m de remplissage, de $25\times25\times3$ mm.
Fig. 3. — La chute de pression Δp (mm colonne d'eau) sur une hauteur de 0,8 m de remplissage, de $15\times15\times2$ mm.
Fig. 4. — La variation en fonction du temps, de la cantité d'eau retenue par les anneaux céramiques de 25 mm et 15 mm, à 14 C.
Fig. 5. — La chute de pression Δp en fonction de l'énergie dynamique chez les anneaux céramiques de $25\times25\times3$ mm.
Fig. 6. — La chute de pression Δp en fonction de l'énergie dynamique chez les anneaux céramiques de $15\times15\times2$ mm.

К ВОПРОСУ О ПОТЕРИ ДАВЛЕНИЯ В НАСАДОЧНЫХ КОЛОНКАХ

(Резюме)

Изучаются потери напора при нормальных керамических кольцах для системы вода-воздух в противотоке. Устанавливаются уравнения расчета потери напора и выявляется значение отложений на насадку различных примесей, беспрерывно изменяющих потери давления в связи с изменением природы поверхности и шероховатости.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Схема экспериментальной установки.
Рис. 2. — Падение давления Δp в мм водянного столба при высоте насадки в 0,8 м и керамических кольцах в $25\times25\times3$ мм.
Рис. 3. — Падение давления Δp в мм водянного столба при высоте насадки в 0,8 м и керамических кольцах в $15\times15\times2$ мм.
Рис. 4. — Изменение во времени количества задержанной воды керамическими кольцами в 25 мм и 15 мм, при 14° Ц.
Рис. 5. — Падение давления Δp в зависимости от динамической энергии у керамических колец в $25\times25\times2$ мм.
Рис. 6. — Падение давления Δp в зависимости от динамической энергии у керамических колец в $15\times15\times2$ мм.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

TRANSMISIA CĂLDURII ÎN SCHIMBĂTOARE DE CĂLDURĂ CU SERPENTINĂ PENTRU LICHIDE

DE

M. MARINESCU ŞI FLORIN VĂLU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1, p. 235] am publicat rezultatele experienţelor făcute cu trei tipuri constructive de schimbătoare de căldură cu serpentină, pentru lichide, în scopul de a face o comparaţie în privinţa eficacităţii lor. În ceea ce priveşta baza de calcul a acestora, în lucrarea mai sus citată, am arătat că pentru tipurile 1 şi 2, calculul coeficientului de trecere a căldurii α_2 la lichidul din exteriorul serpentinei cu formulele:

a) pentru regim laminar: $Nu = \varepsilon_l\, 0{,}74\, Re^{0{,}2}\, (Gr\, Pr)^{0{,}1}$, [2, p. 96],

b) formula lui V. I. Gomelauri: $Nu = c\, Re^{n}\, Pr^{0{,}4}$, [3, p. 192], cît şi

c) formula pentru convecţia liberă: $Nu = c\, (Gr\, Pr)^{n}$, [2, p. 79],

care par a se aplica acestui caz, dau valori cu mult prea diferite faţă de rezultatele experimentale.

În lucrarea de faţă am studiat posibilitatea calculului acestui coeficient de trecere a căldurii în cazul lichidelor, pentru tipurile *1* şi *2* (fig. 1 şi 2), cu scopul găsirii unei formule a cărei aplicare să dea rezultate cît mai apropiate de cele experimentale.

2. Date constructive

Serpentina acestor aparate a fost o ţeavă de cupru de 11/13 mm, STAS 523/49, de lungime $L = 3{,}90 \pm 0{,}02$ m, suprafaţa efectivă pentru schimb de căldură $S = 0{,}147 \pm 0{,}002$ m^2 şi cu pasul spirelor $h = 0{,}03125$ m.

Metoda de lucru, expusă în [1, p. 235], prevede curgerea forţată a apei calde prin serpentină şi a apei reci prin spaţiul din exteriorul serpentinei.

Pentru calculul transmisiei căldurii este necesar a se cunoaşte regimurile de curgere ale fluidelor. Din datele constructive ale aparatelor, se poate cunoaşte secţiunea liberă de curgere a fluidului cald.

Secţiunea liberă de curgere a fluidului rece, prin spaţiul din exteriorul serpentinei, trebuie determinată.

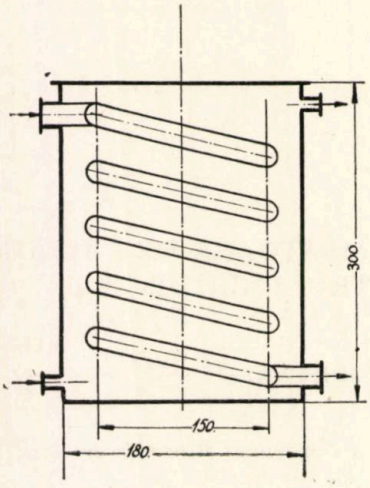


Fig. 1.

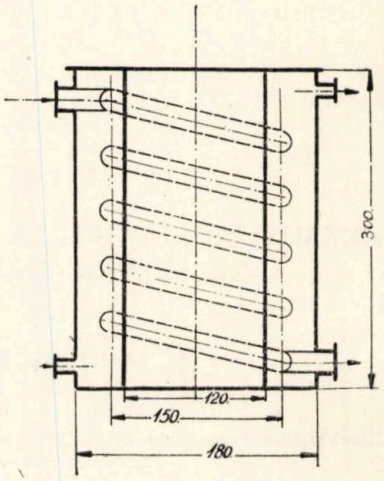


Fig. 2.

3. Secţiunea liberă de curgere a fluidului rece

Deoarece spirele serpentinei fac un unghi cu planul orizontal, rezultă că intersecţia oricărei spire cu un plan orizontal este o curbă închisă, a cărei formă se apropie foarte mult de aceea a unei elipse, astfel încît aria ei, pentru calculele tehnice, poate fi aproximată prin aria elipsei.

Mărimea acestei arii variază în funcţie de diametrul ţevii din care este construită serpentina, de diametrul şi de pasul spirei.

În cele ce urmează vom utiliza următoarele notaţii: a — semiaxa mare a elipsei; $b=d/2$—semiaxa mică a spirei, d — diametrul ţevii din care e construită serpentina, h — pasul spirelor, D — diametrul mediu al spirelor, D_1 — diametrul interior al cilindrului exterior, D_2 — diametrul exterior al cilindrului interior (v. fig. 3 şi 4).

Se ştie că dacă un cerc de rază a se proiectează după o elipsă a cărei semiaxă mică este b, unghiul dintre planul cercului şi planul de proiecţie are cosinusul [4, p. 445]

$$\cos \alpha = b/a. \tag{1}$$

Deci aria elipsei este:

$$S = \pi a^2 \cos \alpha = \pi ab. \tag{2}$$

Deoarece în cazul proiectării unor astfel de aparate nu se cunoaşte decît d, D şi h, trebuie să se exprime aria elipsei funcţie de aceşti parametri.

Secțiunea transversală *CI* a unei țevi înclinate intersectate de un plan orizontal, se va proiecta pe acesta ca o elipsă (fig. 5).

Dacă în această secțiune transversală, se consideră două diametre perpendiculare, din care unul să fie paralel cu planul de proiecție, atunci acest diametru, la variația înclinației secțiunii față de planul de proiecție, rămîne constant ca mărime și deci acest diametru va fi axa mică a elipsei.

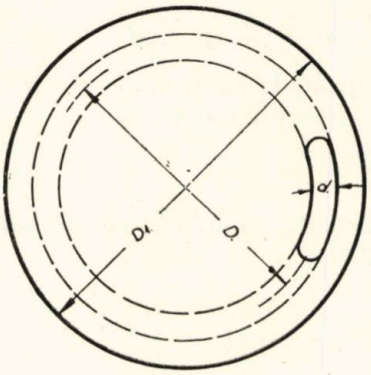


Fig. 3.

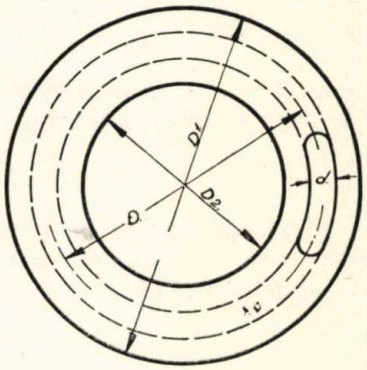


Fig. 4.

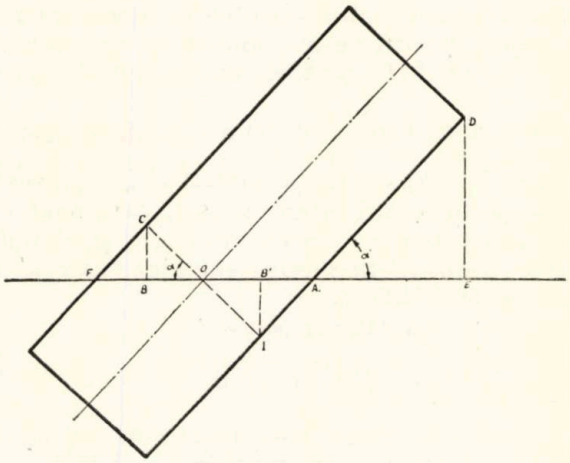


Fig. 5.

Exprimînd semiaxa mare în funcție de semiaxa mică și de cosinusul unghiului dintre secțiunea transversală și planul de proiecție, din (1) și (2) se obține pentru aria elipsei, expresia:

(3) $$S = \pi b^2/\cos\alpha,$$

Notînd cu $DE = h$ — pasul elipsei şi cu $AE = \pi D$ — lungimea cercului spirei, panta serpentinei este dată de [4, p. 501]:

(4) $$\operatorname{tg}\alpha' = h/(\pi D).$$

Unghiurile α şi α' sînt complementare şi deci $\cos\alpha = \sin\alpha'$; dar

(5) $$\sin\alpha' = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha'}} = \frac{h/(\pi D)}{\sqrt{1+h^2/\pi D)^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi^2 D^2 + h^2}}$$

şi cum $b = d/2$, urmează că aria elipsei, exprimată în funcţie de d, D şi h, care reprezintă parametrii ce pot fi cunoscuţi iniţial, este:

(6) $$S = 0{,}785\, d^2\sqrt{(\pi D/h)^2 + 1}.$$

Secţiunea liberă de curgere a apei reci, cu suficientă aproximaţie pentru calcule tehnice, va fi dată de relaţia:

a) pentru tipul *1*:

(7) $$S_1 = 0{,}785\,[D_1^2 - d^2\sqrt{(\pi D/h)^2 + 1}]$$

şi b) pentru tipul *2*:

(8) $$S_2 = 0{,}785\,[D_1^2 - D_2^2 - d^2\sqrt{(\pi D/h)^2 + 1}].$$

Pentru calculul diametrului echivalent, care intervine în relaţiile de calcul în aceste cazuri, ne-am folosit de una din formulele empirice dată în literatură [11, p. 139] pentru determinarea perimetrului elipsei:

(9) $$P \cong 4\,(0{,}9827\,a + 0{,}311\,b + 0{,}2867\,b^2/a).$$

Semiaxa mare a elipsei am exprimat-o funcţie de semiaxa mică, în care, la fel ca şi în cazul ariei elipsei, cosinusul unghiului dintre planul secţiunii transversale a ţevii înclinate şi planul orizontal, α, a fost înlocuit prin sinusul unghiului complementar α' şi acesta a fost exprimat funcţie de tangenta sa.

Deci semiaxa mare a elipsei este:

(10) $$a = b\,\sqrt{(\pi D/h)^2 + 1},$$

care introdusă în formula (9) permite determinarea aproximativă a perimetrului elipsei cu ajutorul parametrilor d, D şi h, cunoscuţi iniţial.

Diametrul echivalent s-a calculat cu formula cunoscută [5, p. 287], [6, p. 77], [8, p. 180], [9, p. 18], [10, p. 254]:

(11) $$d_{ech} = 4S/P$$

unde S — secţiunea efectivă de curgere a fluidului (în m^2), P — partea din perimetrul secţiunii care participă la schimbul de căldură (în m).

4. Calculul coeficientului de trecere a căldurii α_2

Datele experimentale obținute cu tipurile *1* și *2* au fost expuse în [1, p. 235] și au fost rezumate în tabelele *1* și *2* pe care le redăm mai jos.

Tabelul 1

Tipul 1

Nr. exp.	τ	Apă caldă în serpentină			Apă rece în cilindru			Q	ε_Q	K	ε_K	δ_K	Observații
		$10^{-5}V$	t_1	t_2	$10^{-5}V$	t_1	t_2						
1	180	3,75	70,0	44,5	4,89	14,0	34,1	3490	±50	716	±44	±6,1	
2	161	3,86	77,8	47,4	4,95	13,7	38,1	4285	±75	794	±46	±5,8	
3	179	3,73	81,0	46,0	4,92	11,5	38,5	4740	±40	837	±40	±4,8	
4	174	3,74	81,0	46,0	4,91	12,0	37,8	4630	±79	818	±6	±5,6	Nou introdusă

Tabelul 2

Tipul 2

Nr. exp.	τ	Apă caldă în serpentină			Apă rece în cilindru			Q	ε_Q	K	ε_K	δ_K
		$10^{-5}V$	t_1	t_2	$10^{-5}V$	t_1	t_2					
1	187	3,82	80,0	43,0	4,81	10,9	41,6	5205	±115	1005	±41	±4,1
2	161	3,82	79,2	42,7	4,84	10,7	41,2	5150	±150	1001	±49	±4,9
3	180	4,42	70,0	40,0	4,85	10,7	36,2	4610	±160	993	+54	±5,4

În aceste tabele: τ — durata experienței (s), V — debitul fluidului (m^3/s), t_1 și t_2 — temperaturile de intrare și ieșire ale fluidelor (°C), Q — schimbul orar de căldură (kcal/h), calculat pe baza bilanțului termic, ε_Q — eroarea absolută care afectează valoarea lui Q, (kcal/h), K — coeficientul de transmisie a căldurii (kcal/m^2 h grd), calculat din bilanțul termic, ε_K — eroarea lui K (kcal/m^2 h grd), δ_K — eroarea relativă a lui K (%).

Pentru ambele tipuri de aparate, coeficientul de trecere a căldurii α_1 de la apa caldă care circulă prin serpentină, s-a calculat cu formula cunoscută [5, p. 286]:

$$Nu = 0{,}023\, f\, \varepsilon_R\, Re^{0.8}\, Pr^{0.4},$$

în care $f = 1 - 6.10^5\,\mathrm{Re}^{-1,8}$ — coeficient de corecţie pentru curgerea în regim intermediar, $\varepsilon_R = 1+3{,}54\ d/D$ — coeficient care ţine seama de curbura serpentinei.

Secţiunile libere de curgere ale apei reci la ambele tipuri de aparate s-au calculat cu formulele propuse (9) şi (10) rezultînd:

pentru tipul *1*, $S = 0{,}02343$ m², pentru tipul *2*, $S = 0{,}01130$ m².

Perimetrul elipsei s-a calculat cu formula (9) rezultînd $P = 0{,}1421$ m. Diametrul echivalent s-a calculat cu formula (11) rezultînd:

$$\text{pentru tipul } 1,\ d_{1\,\mathrm{ech}} = 4\,S_1/P = 0{,}6595\ \mathrm{m},$$

$$\text{pentru tipul } 2,\ d_{2\,\mathrm{ech}} = 4\,S_2/P = 0{,}3181\ \mathrm{m}.$$

La debitele cunoscute din tabelele 1 şi 2, care curg prin secţiunile libere ale tipurilor de aparate *1* şi *2*, au rezultat numere Reynolds care indică un regim de curgere laminar.

Aplicînd formula de calcul a coeficientului de trecere a căldurii în regim laminar [2, p. 96] s-au obţinut valori cu mult prea mici faţă de cele experimentale.

Făcînd o cercetare vizuală asupra caracterului curgerii lichidului în spaţiul din exteriorul serpentinei, am constatat, că deşi valoarea lui Re în aceste cazuri indică o curgere laminară, ea nu este laminară, deoarece prezenţa spirelor în spaţiul de curgere a lichidului, determină curenţi transversali pe direcţia de curgere.

În procesele de trecere a căldurii prin convecţie forţată, această deformare a curgerii laminare implică o creştere a influenţei criteriului Re care caracterizează regimul hidrodinamic al curgerii forţate şi excluderea criteriului Gr care caracterizează regimul hidrodinamic al curgerii libere [6, p. 73], influenţa criteriului Pr, care caracterizează proprietăţile fizice ale lichidului, rămînînd aproximativ aceeaşi.

În urma acestor observaţii făcute asupra caracterului regimului de curgere, am constatat o analogie cu cazul convecţiei forţate în spaţiul intertubular cu şicane, pentru care literatura [5, p. 288] recomandă folosirea formulei:

$$\mathrm{Nu} = C d_{\mathrm{ech}}^{0,6}\ \mathrm{Re}^{0,6}\ \mathrm{Pr}^{0,33}\ (\mu/\mu_p)^{0,14}. \tag{12}$$

Deoarece valoarea coeficientului C din această formulă variază funcţie de forma şicanelor şi anume $C = 1{,}72$ pentru şicane în formă de segmente şi $C = 2{,}08$ pentru şicane inelare, din raportul

$$\mathrm{Nu}/[d_{\mathrm{dech}}^{0,6}\ \mathrm{Re}^{0,6}\ \mathrm{Pr}^{0,33}\ (\mu/\mu_p)^{0,14}] = C,$$

am calculat valoarea lui C pentru şicanele ce le formează spirele serpentinei în cazul aparatelor de tipul *1* şi *2*, găsind:

pentru tipul *1*, $C = 2{,}23$, pentru tipul *2*' $C = 3{,}13$.

Aplicînd formula (12), astfel corectată, pentru tipurile de aparate *1* şi *2* s-au obţinut rezultate foarte apropiate de cele experimentale.

Tabelul 3

Tipul 1

Nr. exp.	K	ε_K	α_1	α_2	$10^4 w$	Δt_m	t_{ml}	t_p	λ	ϱ	$10^6 \mu$	$10^6 \mu_p$	Re	Pr	α_{2t}	K_t
1	716	±44	3054	944	20,87	33,2	24,0	49,8	0,5214	101,6	93,78	56,21	29,30	6,42	1046	777
2	796	±46	3329	1056	21,10	36,6	25,9	55,8	0,5244	101,6	90,02	51,31	30,95	6,14	1079	812
3	835	±40	3219	1131	20,99	38,6	25,0	53,3	0,5230	101,6	91,85	53,35	30,19	6,28	1070	801
4	818	±46	3227	1102	20,95	38,5	24,9	53,9	0,5228	101,6	92,05	52,84	30,06	6,29	1068	800

Tabelul 4

Tipul 2

Nr. exp.	K	ε_K	α_1	α_2	$10^4 w$	Δt_m	t_{ml}	t_p	λ	ϱ	$10^6 \mu$	$10^6 \mu_p$	Re	Pr	α_{2t}	K_t
1	1005	±41	3235	1464	42,5	35,2	26,3	50,5	0,5250	101,6	89,31	55,57	62,83	6,08	1474	1009
2	1000	±49	3221	1458	42,8	35,0	25,9	50,1	0,5245	101,6	89,92	55,92	62,86	6,13	1478	1009
3	992,4	±54	3492	1393	42,9	31,6	23,4	46,1	0,5205	101,6	94,99	60,16	59,68	6,52	1403	998

În formula (12) valorile constantelor fizice se iau la temperatura medie a lichidului:

$$Nu = \alpha d / \lambda, \; Re = wd\varrho / \mu, \; Pr = 3600 \; c_p \mu g / \lambda,$$

unde d — diametrul exterior al ţevii (m), w — viteza de curgere a lichidului prin secţiunea liberă (m/s), λ — coeficientul de conductivitate termică a lichidului (kcal/m h grd), ϱ — densitatea lichidului (kg. s²/m⁴), μ — viscozitatea lichidului (kg s/m²), μ_p — viscozitatea lichidului la temperatura peretelui serpentinei (kg s/m²), c_p — căldura specifică a fluidului la presiunea constantă (kcal/kg grd), g — acceleraţia gravitaţiei (m/s²).

Temperatura peretelui serpentinei s-a calculat cu relaţia

$$t_p = t_{ml} + \Delta t_m - \Delta t_1,$$

unde: t_p — temperatura peretelui (°C), t_{ml} — temperatura medie a lichidului (°C), Δt_m — diferenţa medie logaritmică a temperaturilor lichidelor (°C), $\Delta t_1 = K \Delta t_m / \alpha_1$ — căderea de temperatură prin filmul format de lichidul cald (°C).

În afara notaţiilor de mai sus, s-au mai introdus: α_1 — coeficientul de trecere a căldurii la fluidul cald (kcal/m² h grd), α_2 — coeficientul de trecere a căldurii la fluidul rece, valoare experimentală, (kcal/m² h grd), α_{2t} — coeficientul de trecere a căldurii la fluidul rece, calcular cu formula (12) corectată (kcal/m² h grd), K_t — coeficientul de transmisie a căldurii, calculat cu valorile lui α_1 şi α_{2t} (kcal/m² h grd).

Rezultatele pentru tipul *1* sînt date în tabelul 3, iar rezultatele pentru tipul *2* sînt date în tabelul 4.

5. Concluzii

Din tabelele 3 şi 4 se constată că valorile lui α_{2t}, calculate cu formula (12), diferă foarte puţin de cele ale lui α_2 obţinute experimental, ceea ce face ca valorile lui K_t, calculate cu ajutorul lui α_{2t} să fie suficient de apropiate de cele ale lui K, determinate prin bilanţul termic.

La tipul *1* diferenţele lui α_{2t} faţă de α_2 sînt în medie de $\pm$ 5,3% şi ale lui K_t faţă de K în medie de $\pm$ 0,6% .

La tipul *2* diferenţele lui α_{2t} faţă de α_2 sînt în medie de $\pm$0,90 % şi ale lui K_t faţă de K în medie de $\pm$0,6%.

Diferenţele mai mari la tipul *1* decît la tipul *2* sînt datorate, în parte, condiţiilor de experimentare [1, p. 235].

Luînd în consideraţie erorile care afectează determinările experimentale, se poate trage concluzia că formula (12) se poate aplica calculelor termice la schimbătoarele de căldură cu serpentină de tipul *1* şi *2* pentru lichide, dînd rezultate suficient de apropiate de cele experimentale.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Industrii Organice

BIBLIOGRAFIE

1. Marinescu M. şi Vălu Fl., Rev. Univ. „Al. I. Cuza" şi a Inst. Polit. Iaşi, 1955, 2, *1—2*, pp. 235-246.
2. Михеев М. А., Основы теплопередачи, ГЭИ, М.—Л., 1949.
3. Шорин С. Н., Теплопередача, Гостроиздат, М., 1952.
4. F. G. M., *Cours de Géométrie*, Paris, 1922.

5. Casatchin A. G., *Procese şi aparate principale în tehnologia chimică,* Ed. tehn. Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
6. Kicighin M. A. şi Kostenko G. N., *Schimbătoare de căldură şi instalaţii de vaporizare.* Ed. tehn., Buc., 1958, (trad. din l. rusă).
7. Petuhov B. S., *Studiul experimental al proceselor de transmitere a căldurii,* Ed. tehn. Buc., 1956, (trad. din l. rusă).
8. Pavlov K. F., Romankov P. G. şi Noskov A. A., *Exerciţii şi probleme la cursul de procese şi aparate din tehnologia chimică,* ed. II, Ed. tehn., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ЗМЕЕВИКОВЫХ ТЕПЛООБМЕННИКАХ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ

(Резюме)

Сообщаются замечания о свободном сечении течения жидкости в змеевиковых теплообменниках и предлагается формула для вычисления коэффициента теплопередачи. Применение этой формулы даёт результаты эквивалентные экспериментальным.

LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR DANS LES ÉCHANGEURS DE CHALEUR EN SERPENTINE POUR LIQUIDES

(Résumé)

Dans cette Note, les Auteurs présentent quelques observations concernant la section libre d'écoulement des fluides, dans les échangeurs de chaleurs en serpéntine et proposent une formule, pour le calcul des coefficients d'échange superficiel, dont l'application donne des résultats concordants avec ceux obtenus experimentalement.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

547.459

UN NOU PRODUS DE CONDENSARE A BENZOINEI CU *p*-AMINOFENOL

REACTIV PENTRU DOZAREA CUPRULUI

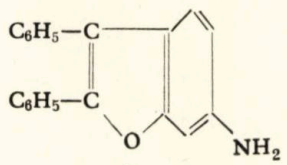
DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei R. P. R.
şi
ELENA COCEA

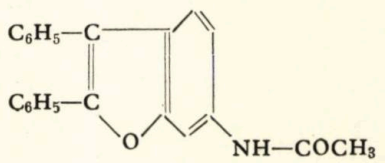
Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Într-o lucrare anterioară [1], am arătat că benzoina se condensează cu *m*- şi *p*-aminofenol, în prezenţa unui amestec de clorură de zinc anhidră şi acid acetic glacial.

În cazul *m*-aminofenolului reacţia conduce la *2,3-difenil-6-amino-cumaronă* (I) şi derivatul său acetilat (II :

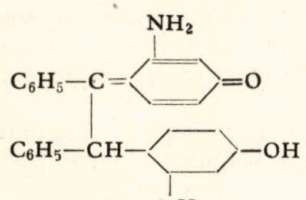


I

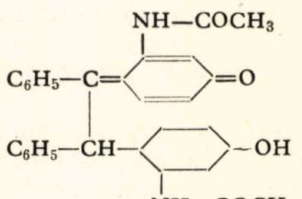


II

precum şi la un colorant de difenilmetan (III) şi derivatul său acetilat (IV), produse analoage auraminei:



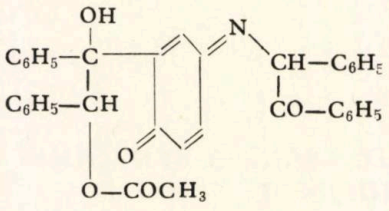
III



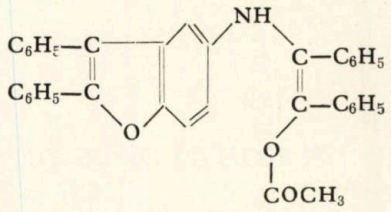
IV

La condensarea benzoinei cu *p*-aminofenol s-au obţinut trei produse şi anume: un produs amorf, albastru închis, *N-deşil-2-(fenilacetometil-*

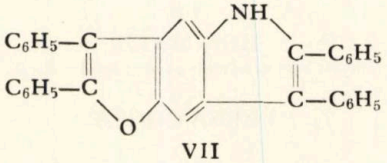
fenilcarbinolil)-p-benzochinon-imină (V), un produs amorf verzui, *5-acetil-desil-amino-2,3-difenil-cumaronă* (VI) şi un produs cristalin alb-gălbui, *4',5'-difenilpirolo-2',3'-5,6-(2,3-difenil) cumaronă* sau tetrafenilbenzopirol-furan (VII):



V

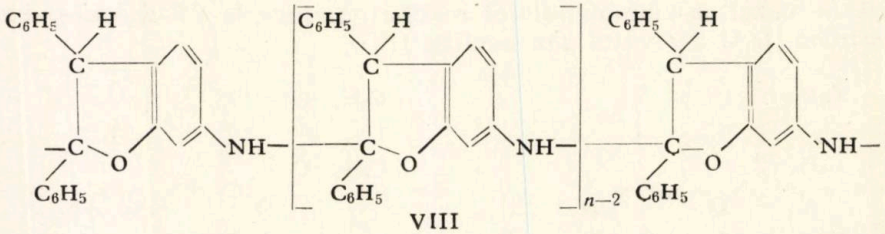


VI



VII

În altă lucrare [2], unul dintre noi a arătat că schimbînd mediul de reacţie, şi anume, condensînd benzoina cu clorhidrat de *m*-aminofe-nol în soluţie alcoolică şi cantitate mică de acid clorhidric concentrat -catalizator-se obţine un polimer cumaronic, al cărui monomer este *2,3-difenil-6-amino-cumarona* (I), polimerul avînd structura de forma (VIII):



VIII

În lucrarea de faţă, am cercetat condensarea *benzoinei* cu *clorhidrat de p-aminofenol*, în mediu de alcool şi acid clorhidric, cît şi condensarea benzoinei cu *sulfat de p-aminofenol*, în mediu de alcool şi acid sulfuric diluat, spre a vedea dacă şi *p*-aminofenolul, prin condensare cu benzoina, conduce la polimeri cumaronici, analogi celor obţinuţi cu *m*-aminofenol.

Reacţia de condensare s-a făcut prin încălzire la reflux timp de 8...10 ore.

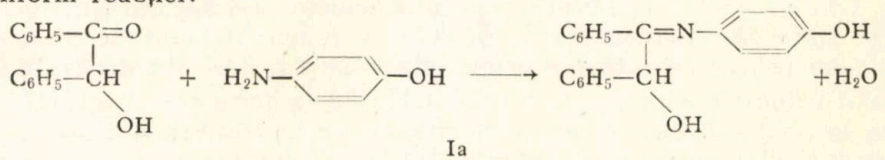
Din masa de reacţie am separat, prin recristalizări repetate din alcool, un produs alb sub formă de cristali aciculari foarte fini, care se topeşte la temperatura de 153... 154°.

După rezultatele analizelor, acest produs are compoziţia: $C_{20}H_{17}O_2N$. Nu se solvă în acizi, fapt care arată că grupa aminică este blo-cată. În schimb, produsul se solvă la încălzire în soluţie de hidroxid de sodiu dublu normal, din care se separă la răcire un produs sub formă

de paiete strălucitoare, galbene-aurii. La spălare cu multă apă, dispare forma cristalină şi se obţine un produs alb amorf, care recristalizat din alcool are acelaşi punct de topire ca şi produsul iniţial.

Acest fapt indică prezenţa unei grupe fenolice libere, care în soluţie relativ concentrată de hidroxid de sodiu, dă un derivat metalic, uşor hidrolizabil la diluare.

După compoziţie şi proprietăţi, rezultă că acest produs se formează din benzoină şi *p*-aminofenol, prin eliminarea unei molecule de apă între grupa carbonilică a benzoinei şi grupa aminică a *p*-aminofenolului, conform reacţiei:



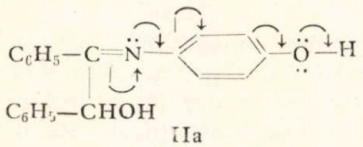
Ia

Produsul rezultat (Ia) este baza Schiff a benzoinei cu *p*-aminofenolul.

Formarea, prin încălzire, a fenolatului de sodiu respectiv, la tratare cu hidroxid de sodiu dublu normal şi nestabilitatea acestui fenolat, îndepărtarea uşoară a sodiului prin hidroliză la spălare cu apă, se explică printr-un efect electronic.

În produsul (Ia), la atomul de azot există o acumulare de electroni mobili, perechea de electroni liberi de la N şi perechea de electroni π de la legătura dublă.

Acest fapt determină un flux electronic, un efect de conjugare statică, numai în sensul indicat de săgeţile curbate, configuraţia (IIa)



IIa

Ca urmare a acestui flux de electroni către atomul de H din grupa fenolică, H devine fixat mai puternic şi deci mai puţin ionizabil. De aici decurge formarea mai grea a fenolatului de sodiu precum şi hidroliza uşoară a lui cu apă.

Reactiv pentru dozarea cuprului din sulfat de cupru

Baza Schiff (Ia) posedă *proprietăţi reducătoare* pentru sărurile de argint şi de cupru.

Astfel, azotatul de argint este redus de baza Schiff la Ag metalic, tot aşa cum este redus şi de *p*-aminofenol.

Clorura cuprică este redusă atît de baza Schiff cît şi de *p*-aminofenol la oxizi de cupru neunitari.

Reducerea sulfatului de Cu decurge însă diferit. *p*-Aminofenolul reduce sulfatul de cupru din soluţie neutrală la oxizi neunitari, în timp ce baza Schiff îl reduce la *cupru metalic* cantitativ, aşa că reacţia poate fi folosită pentru *dozarea* cuprului din sulfat.

Soluţia de sulfat de cupru se tratează cu soluţie alcoolică de bază Schiff. Reacţia de reducere merge chiar la rece, dar se efectuează în scurt timp la încălzire pe baie de apă, 10... 15 minute. Cuprul se filtrează într-un creuzet filtrant se spală cu alcool şi eter, se usucă şi se cîntăreşte.

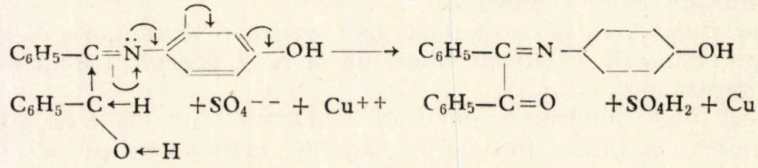
Vom denumi acest reactiv *BpA*, Benzoină-*p*-Aminofenol.

Mecanismul reacţiei de reducere

Acţiunea reducătoare a reactivului *BpA* nu se datoreşte componentei de *p*-aminofenol, ci componentei benzoinice. Aceasta reiese din următoarele considerente.

Din soluţia de la filtrarea cuprului metalic am separat atît benzil, cît şi sulfat de *p*-aminofenol. Benzilul şi *p*-aminofenolul se formează printr-un proces de oxidare a grupei alcoolice din *BpA* şi hidroliza compusului cetonic rezultat. Acceptorul de H este în acest caz ionul SO_4^{--} ce trece în acid sulfuric, concomitent cu punerea în libertate a Cu metalic. După hidroliza compusului cetonic, SO_4H_2 se fixează la *p*-aminofenol.

Cedarea uşoară a H din grupa alcoolică secundară a *BpA* se datoreşte tot efectului de conjugare statică—săgeţile curbate—care antrenează după sine un efect de inducţie ce labilizează atomii de H din grupa alcoolică — săgeţile drepte valenţiale — conform schemei:



IIIa

Electronii ce transformă ionul Cu^{++} în Cu metal sînt luaţi de la atomii de H ce se detaşează din grupa alcoolică.

Faza următoare este un proces de hidroliză a produsului cetonic, care conduce la benzil şi *p*-aminofenol, acesta din urmă fiind fixat ca sulfat de *p*-aminofenol.

Din aceste reacţii rezultă că grupa alcoolică secundară din restul benzoinic participă la procesul de reducere.

În literatură este citat cazul cînd grupa alcoolică secundară din benzoina însăşi poate să reducă Zn-tetrafenilporfina la Zn-tetrahidro-tetrafenilporfină [3]. Aici însă, grupa = CHOH este activată fotochimic, cu radiaţii de $\lambda_{max} = 625$ mμ, randamentul cuantic (raportul dintre produsul redus şi viteza de absorbţie a luminii de către benzoină) fiind de 0,3...0,6.

În cazul nostru grupa = CHOH este activată de restul de *p*-aminofenol, introdus în molecula de benzoină, prin efectul de conjugare static, care determină efectul de inducţie ce labilizează atomii de H.

Cercetările asupra produsului *BpA* cît şi asupra altor produse similare, precum şi extinderea fenomenului de reducere asupra altor săruri vor continua.

Concluzii

1. În lucrarea de faţă s-a preparat un nou produs de condensare între benzoină şi *p*-aminofenol, denumit *BpA*, care este o bază Schiff (Ia).

2. Se arată că acest produs are proprietăţi reducătoare şi că poate fi folosit ca reactiv.

3. Proprietăţile reducătoare se datoresc grupei alcoolice secundare din componenta benzoinică, grupă ce are atomii de H labilizaţi prin efectul de conjugare al componentei de *p*-aminofenol, care detemină un efect de inducţie.

4. Cu acest reactiv s-a elaborat o metodă pentru dozarea Cu, sub formă de Cu metalic, din sulfatul de cupru.

Partea experimentală

1. Baza Schiff-BpA

Se solvă la cald 10,6 g benzoină în 40 cmc alcool etilic, în soluţia alcoolică se dispersează 14,5 g clorhidrat de *p*-aminofenol (raport molar 1 : 2) uscat şi pulverizat, se adaugă 7 cmc HCl $d=1{,}19$ şi se refluxează totul, sub agitare, timp de 8...10 ore.

Clorhidratul de *p*-aminofenol se solvă cu greu, treptat în 3...5 ore de fierbere la reflux a amestecului de reacţie.

Final, soluţia alcoolică, roşie închis, separă după răcire o masă solidă cu aspect cristalin. Se filtrează, în filtrat trece excesul de clorhidrat de *p*-aminofenol, iar pe filtru rămîne un produs alb-gălbui, care se îmbruneşte repede la uscare în aer, datorită urmelor de aminofenol înglobate în masa substanţei. Se spală bine pe filtru cu apă distilată pentru îndepărtarea urmelor de HCl şi de clorhidrat de *p*-aminofenol. După uscare, se obţin 7,5 g produs brut, alb-gălbui, pufos.

Dacă raportul molar între reactanţi este mai mic decît 1 mol benzoină la 2 mol *p*-aminofenol-HCl, de exemplu 1 mol benzoină la 1,3 mol clorhidrat de *p*-aminofenol, atunci, din mediul de reacţie, final, cristalizează o parte din benzoina nereacţionată, mai repede decît produsul de condensare al ei, putîndu-se uşor separa prin filtrare.

Baza Schiff rezultată se solvă uşor, chiar la rece, în alcool metilic, etilic, acetonă. Este insolubilă în apă, se solvă la cald în soluţie dublu normală de hidroxid de sodiu şi din soluţia alcalină galbenă intens, cristalizează la uşoară răcire paiete strălucitoare, galbene-aurii, care la spălări repetate cu apă se transformă, pe măsura spălării, în substanţă albă, identică bazei Schiff iniţiale, ca aspect, formă cristalină şi punct de topire.

Aceeaşi bază Schiff se obţine dacă se întrebuinţează în reacţia de condensare a benzoinei sulfat de *p*-aminofenol în locul clorhidratului, menţinînd raportul partenerilor de reacţie ca în cazul precedent, dar folosind drept catalizator soluţie diluată de acid sulfuric (volume egale de acid sulfuric $d=1{,}84$ şi apă). La 0,1 mol benzoină solvită în 40 cmc alcool se adaugă 0,2 mol sulfat de *p*-aminofenol şi 6 cmc acid sulfuric conc. solviţi în 6 cmc apă. După cca 10 ore de fierbere la reflux, din amestecul de reacţie se separă produsul, în mod asemănător ca în cazul condensării cu clorhidrat de *p*-aminofenol.

Purificarea produsului brut se face prin recristalizări din alcool, operaţia repetîndu-se pînă cînd substanţa pură, ace foarte fine albe, nu se mai îmbruneşte la şedere în aer un timp, iar soluţia alcoolică, după filtrarea produsului, este de culoare slab gălbuie, ceea ce indică absenţa aminofenolului liber. Punct de topire 153...154°.

Analize:

$C_{20}H_{17}O_2N$ (303)	Calc.	C=79,20 %,	H=5,61 %,	N=4,62 %.
	Găsit	C=79,24 %,	H=5,90 %,	N=4,88 %.
		C=79,54 %,	H=5,64 %,	N=4,96 %.

2. Dozarea cuprului din soluţie de sulfat de cupru

Baza Schiff obţinută are capacitatea de a reduce sărurile de argint, cupru, din soluţii neutrale la metalul respectiv. Tratînd o soluţie apoasă de sulfat de cupru cu un mic exces dintr-o soluţie alcoolică de bază Schiff, la uşoară încălzire pe baie de apă (50...70°) în 5...10 minute se depune din soluţie cupru metalic, soluţia rămînînd galbenă, clară. Se filtrează la vid pe creuzet filtrant, se spală cuprul rămas pe filtru de repetate ori cu alcool cald pentru îndepărtarea urmelor de substanţă organică, apoi cu eter şi final se usucă la 105° pînă la greutate constantă.

Analize :

	$SO_4Cu.5H_2O$ g	Apă cmc	Bază Schiff g	Alcool etilic cmc	Cupru obţinut
I	0,1249	10	0,4030	15	0,0321
II	0,0920	5	0,2862	15	0,0233
III	0,1306	10	0,3818	20	0,0335

$SO_4Cu.5H_2O$ (249,72) Calc. Cu 25,46%,
I. Găsit Cu 25,60%, II. Găsit Cu 25,32%, III. Găsit Cu 25,65%.

Prin evaporare la volum mic a filtratelor alcoolice rămase de la dozarea cuprului, cristalizează întîi benzilul rezultat, ca urmare a procesului de reducere şi hidroliză, cantitatea corespunzătoare de sulfat de *p*-aminofenol şi excesul de bază Schiff nereacţionată. Prin recristalizare din alcool se obţine benzilul în stare pură.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Industrii Organice

BIBLIOGRAFIE

1. Matei I., Cocea şi El. Lixandru T., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1955, **I**, (V), *1—2*, pp. 89—99.
2. Cocea El., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1956, **II**, (VI), *3—4*, p. 147.
3. Gilbert R., Seely, a. Melvin Calvin, J. Chem. Physics, 1955, **24**, p. 1068; C., 1957, p. 394.

НОВЫЙ ПРОДУКТ КОНДЕНСАЦИИ БЕНЗОИНА С п—АМИНОФЕНОЛОМ. РЕАКТИВ ДЛЯ ДОЗИРОВВИ МЕДИ

(Резюме)

1. В настоящей работе был изготовлен новый продукт конденсации бензоина с п—аминофенолом, который является основанием Шиффа (Ia).

2. Показано, что этот продукт обладает восстанавливающими свойствами и может быть употреблен в качестве реактива.

3. Восстанавливающие свойства обуславиваются вторичной алкогольной группой бензоиновой части. В этой группе атомы водорода лабилизировали эффектом сопряжения п—аминофеноловой части, которая обуславливает индукционный эффект.

4. При помощи этого реактива был разработан метод для дозировки меди, в сернокислой меди, под видом металлической меди.

EIN KONDENSATIONSPRODUKT VON BENZOIN MIT *p*-AMINOPHENOL. EIN REAGENZ ZUR QUANTITATIVEN BESTIMMUNG VON KUPFER.

(Zusammenfassung)

1. In dieser Arbeit gibt man die Darstellung eines neuen Kondensationsproduktes von Benzoin mit *p*-Aminophenol, das sich als eine Schiff-Base (Ia) verhaltet.

2. Man zeigt dass dieses Produkt reduzierende Eigenschaften besitzt und deswegen als Reagenz anwenden kann.

3. Die reduzierende Eigenschaften leiten sich von der sekundären alkoholischen Gruppe der Benzoinkomponente her. Die Wasserstoffatome dieser Gruppe werden durch eine konjugierendes Effekt der *p*-Aminophenolkomponente und ein nachfolgendes Induktionseffekt labilisiert.

4. Mit dieser Reagenz wurde eine Methode verarbeitet, die zur quantitativen Bestimmung des Kupfers als Metall aus Kupfersulfat dienen kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

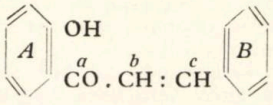
547.972

THE LOTOFLAVIN PROBLEM

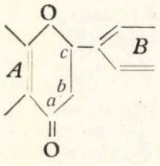
BY

T. S. WHEELER

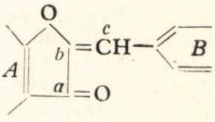
Flavones belong to the flavonoid series of compounds (see (1) to (7)) which are of widespread occurrence in the vegetable kingdom.



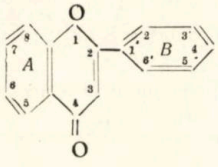
CHALKONE
(1)



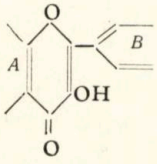
FLAVANONE
(2)



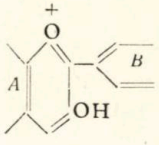
AURONE
(3)



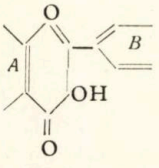
FLAVONE
(4)



FLAVONOL
(5)



ANTHOCYANIDIN
(6)



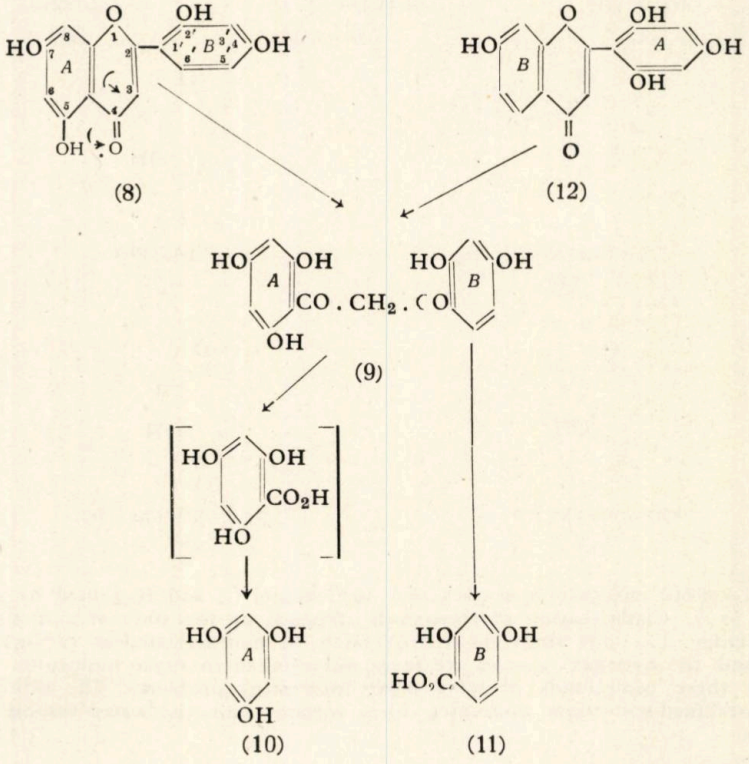
DIHYDROFLAVONOL
(7)

A flavonoid molecule comprises two aryl nuclei (*A* and *B*) joined by a propane bridge (*a, b, c*). Classification of flavonoids depends on the state of oxidation of the propane bridge. The aryl rings are hydroxylated or methoxylated at various positions (see (8)), and the hydroxyl groups are frequently linked to sugar molecules. The biogenesis of these compounds presents many interesting problems. The anthocyanidins (6) when combined with sugar molecules form anthocyanins, the water-soluble pigments of flowers.

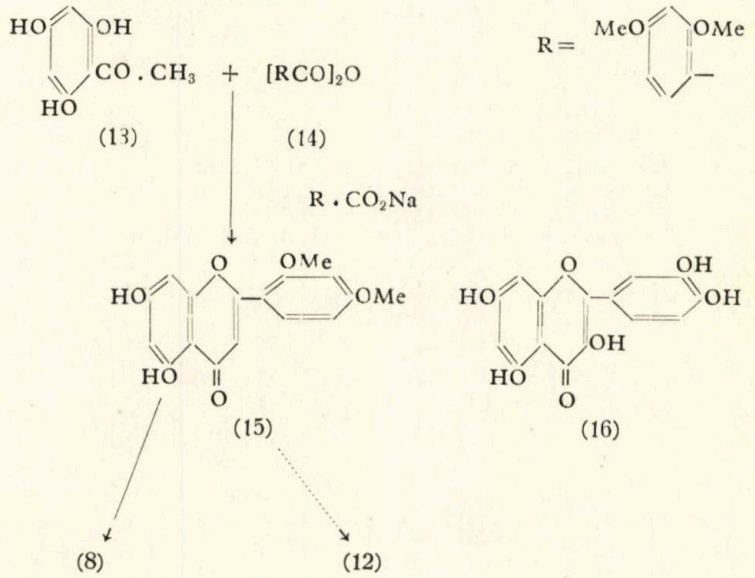
It is with flavones (see (4) and (8)) that we are now mainly concerned. These compounds can be regarded as vinylogue esters. When treated with alkali they undergo hydrolytic decyclisation to form the corresponding 1 : 3-diketones (9) which then suffer acid and ketonic hydrolysis. Decarboxylation of the acids first formed may occur. This type of alkaline degradation has been much employed in the determination of flavone structure.

Our story begins with the Anglo-Sudanese War (1896...1900). A number of army mules died after eating *Lotus arabicus* and samples of the plant were, accordingly, collected and sent to the Imperial Institute in London for investigation. The results were published by Dunstan and Henry [1] in 1901. These workers stated that they found *Lotus arabicus* to contain a cyanogenetic glycoside which they named „Lotusin". This compound on acid hydrolysis yielded maltose, a flavone which they called „Lotoflavin", and hydrogen cyanide—the last being presumably the lethal component. To lotoflavin they assigned the structure 5 : 7 : 2′ : 4′-tetrahydroxyflavone (8).

These were the days before paper chromatography, infra-red and ultra-violet spectroscopy, and microanalysis. Consequently Dunstan and Henry had to rely for structural determination on alkaline degradation of the flavone which gave small quantities of two products. One was considered to be phloroglucinol (10) mainly because it produced a magenta colour on a pine shaving moistened with hydrochloric acid. The other product was thought, mainly from its melting point, to be 2 : 4-dihydroxybenzoic acid (11). Neither of these identifications would now be regarded as satisfactory. However, they pointed to the structure (8) for lotoflavin assuming that the alkaline hydrolysis of the flavone took the normal course, through the diketone (9). It will be observed that the isomeric flavone (12) could also yield compounds (9), (10) and (11) by alkaline degradation ; this possibility was eliminated since lotoflavin contained a hydroxyl group which was not readily methylated and was, therefore, probably in the 5-position which is known to be chelated with the keto-group in position 4 (see (8)).



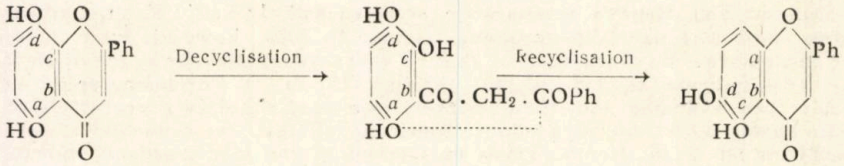
Dunstan and Henry's results were accepted and 5 : 7 : 2′ : 4′-tetrahydroxyflavone was listed as a naturally-occurring flavone. In 1929, however, Robinson and Venkataraman [2] synthesised 5 : 7 : 2′ : 4′-tetrahydroxyflavone by the Allan-Robinson method as indicated at (13) and (14) through (15) to (8). Chromatographic methods were not then available, but these workers compared the dyeing properties of their synthetic flavone with those of a minute specimen (all that was available) of lotoflavin obtained from Dr. T. A. Henry. Trials on aluminium and iron mordants showed lotoflavin to be a good dyestuff giving shades generally similar to those from flavonols (3-hydroxyflavones ; (5)). These shades were closest to those shown by quercetin (5 : 7 : 3′ : 4′-tetrahydroxyflavonol ; (16)). The synthetic tetrahydroxyflavone had feeble tinctorial powers.



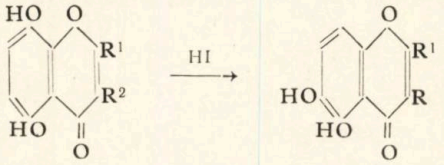
Such was the genesis of the lotoflavin problem which puzzled flavonoid chemists for many years and has been solved only recently. The solution was delayed, however, by the difficulty of obtaining samples. In 1938 the late Dr. Henry [3] published a note describing an examination of a further quantity of *Lotus arabicus* he had been able to obtain. He was unsuccessful in isolating lotoflavin though he did obtain the known compound „Lotoaustralin" which is the glucoside of the cyanohydrin of ethyl methyl ketone. Finnemore, Cooper and Stanley [4] obtained this compound from *Lotus australis*, a toxic Australian plant.

Henry's research was cut short by the outbreak of the second world war. In considering his negative result he stated that the second sample of *Lotus arabicus* yielded only 0.2 *per cent* of hydrogen cyanide as compared with about 0.3 *per cent* given by the sample he had examined many years before. These new samples were destroyed in the bombing of London.

We must now go off on an apparently irrelevant trail, and discuss the well-known Wessely-Moser rearrangement. In 1930 these chemists [5] found that a 5:8-dihydroxyflavone (17) on treatment with hydriodic acid rearranges indo 5 : 6-dihydroxyflavones (19). Later Shah, Mehta, and Wheeler [6], suggested that a benzoyl-γ-resorcyloylmethane of the type (18) is intermediate in the rearrangement. Decyclisation of (17) to form compound (18) is followed by re-cyclisation to produce the flavone (19). In recent years, the Wessely-Moser rearrangement has been extended to a variety of compounds, for example, as shown at (20) to (21) and (22) to (23).

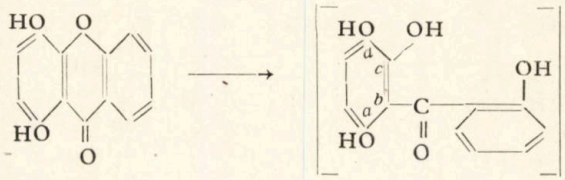


(17) (18) (19)

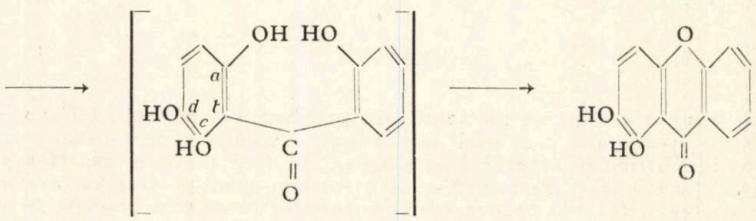


(20) (21)

Flavonols, R^1 = Aryl, R^2 = OH, [7], [8].
Chromones, R^1 = Alkyl, R^2 = H, [9].
Chromonols, R^1 = Alkyl, R^2 = OH, [8].
iso *Flavones*, R^1 = H, R^2 = Aryl, [10], [11].



(22)

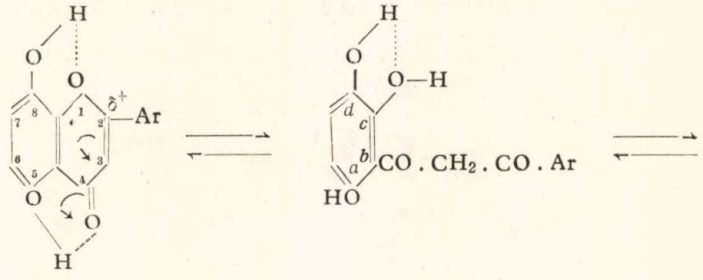


(23)

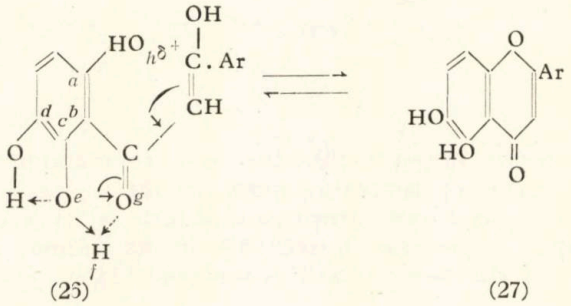
Xanthones, [12].

We have recently developed the early idea of Shah, Mehta, and Wheeler [6] in regard to the mechanism of the rearrangement which we now write as at (24) to (27). In considering this mechanism we recall that a 5 : 8-dihydroxyflavone is the unstable member of the related pair and rearranges into the stable 5 : 6-isomer when heated with hydriodic or 70 *per cent* sulphuric acid. Further, examination of a model shows that the hydroxyl group in position 8 (see (24)) can form a hydrogen bond with the oxide oxygen in position 1. This promotes acid hydrolysis (decyclisation) of the flavone which, as has been said, can be regarded as a vinylogue ester. When decyclisation to produce (25) takes place, hydrogen bonding occurs between the ortho hydroxyl-groups at *c* and *d* [13], [14]. This favours the formation of the system (26). Chelation between the oxygen atoms at *c* and *d* loosens the bond between the oxygen atom (*e*) and the proton (*f*) attached to it, so that the proton readily chelates with the keto-

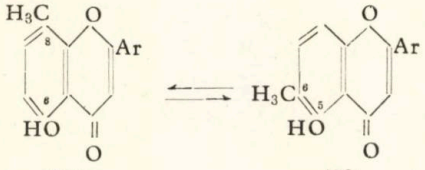
group at *g*. This assists the formation of a positive pole at carbon atom *h* and cyclisation (esterification) to form compound (27).



(24) (25)



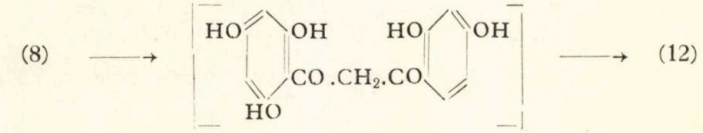
(26) (27)



(28) (29)

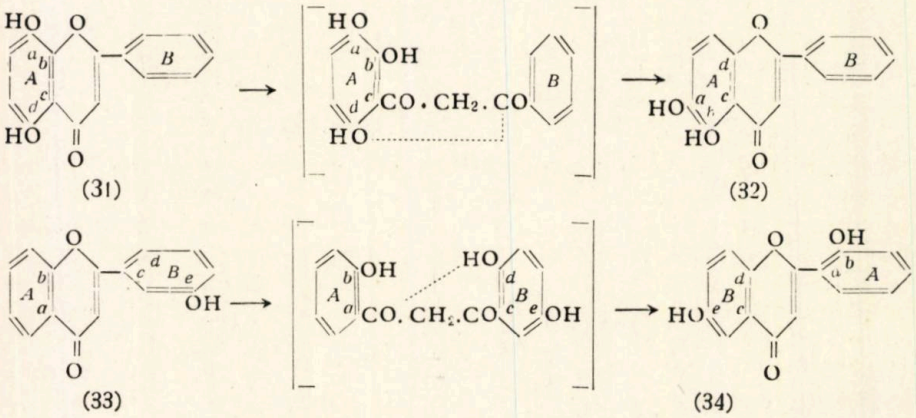
Various investigations [15], [16] have shown that 5-hydroxy-8-methylchromones (28) are not necessarily less stable towards hydriodic acid than the 5-hydroxy-6-methyl isomer (29). With a methyl group in the 8 position there is no chelation to assist decyclisation as at (24) or to favour recyclisation in one direction as at (26) to (27).

The mechanism for the Wessely-Moser transformation outlined at (24) to (27) involves decyclisation to the diketone (26) and recyclisation on a second hydroxyl group. This suggested that the final demethylation step ((15) → (8)) involved in the synthesis of 5:7:2′:4′-tetrahydroxyflavone (8) might have caused rearrangement to 7:2′:4′:6′-tetrahydroxyflavone (12) with intermediate formation of the diketone (9) or (30).



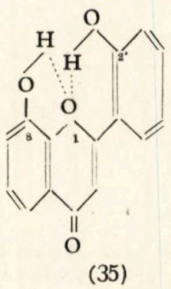
(30)

Accordingly we investigated the possibility of effecting with 2′-hydroxyflavones this analogue of the Wessely-Moser rearrangement. The suggested rearrangements are compared at (31)→(32) and (33)→(34).



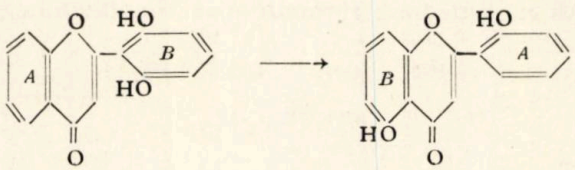
(31) (32) (33) (34)

We were more hopeful that the new rearrangement, which we may call the 2′-hydroxy rearrangement, would occur, because models showed that the 2′-hydroxyl groups could form a hydrogen bond with the oxide oxygen at position 1 (see (33)) in the manner shown for the hydrogen atom of the 8-hydroxyl group (see (24)).

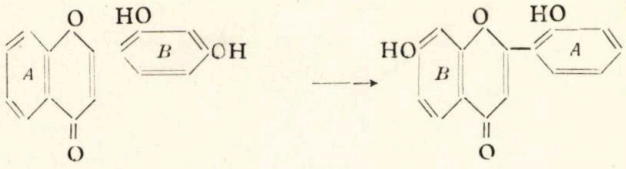


(35)

It took some time to establish the conditions for the 2′-hydroxy rearrangement. Eventually, the transformations shown at (33)→(34), (36)→→(37), (38)→(39), and (40)→(41) were effected. It will be noted that in each case the rearrangement proceeds so that the hydroxyl groups are on the chromone nucleus rather than in the side-chain. We have not as yet been able to suggest a satisfactory explanation of this result. One

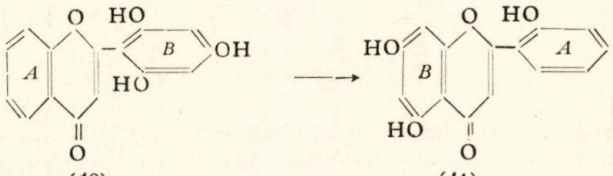


(36) (37)

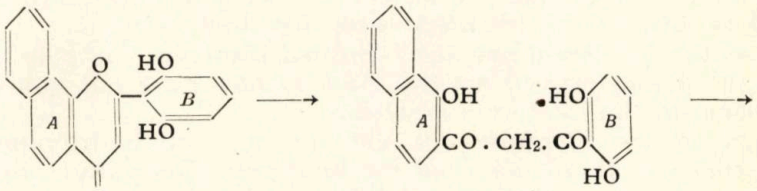


(38) (39)

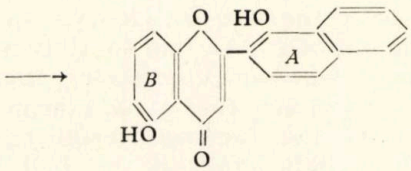
other point of interest that has emerged is that flavones with hydroxyl groups in 2′: 6′-positions (see (36), (40)) rearrange readily. It is necessary only to reflux with hydriodic acid at ordinary pressures; the transformation (38) → (39) requires the use of hydriodic acid in a scaled tube at 210° C. The instability of flavones such as (36) is emphasised by their non-occurrence in nature. Further, we found that flavones of the napthalene series could, normally, not be rearranged, nevertheless we did succeed in transforming compound (42) into (44), (43) being in the probable intermediate.



(40) (41)

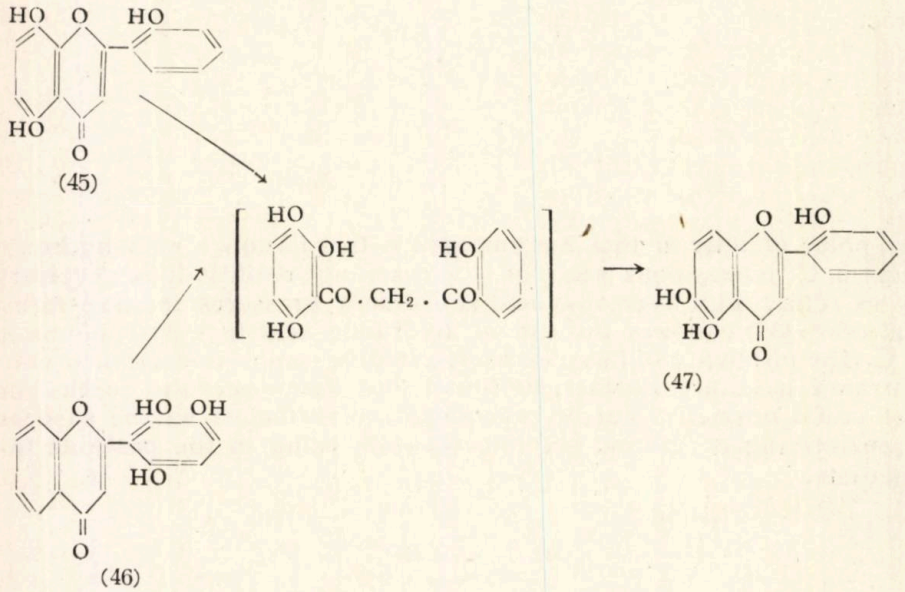


(42) (43)



(44)

Although, we know as yet little of the mechanism of the 2′-hydroxy rearrangement, it seems likely that a diketone of the type (30) is intermediate in the reaction. This is confirmed by experiments in which compounds (45) and (46) each gave (47), the first by a Wessely-Moser and the second by a 2′-hydroxy rearrangement.



The instability of the 2′:6′-dihydroxy type of flavone showed that the idea set out above—that the lotoflavin problem arose from a 2′-hydroxy rearrangement during demethylation of (15) so that (12) in place of (8) was formed had the defect of being wrong; flavone (12) rearranged to form (8) on treatment with hydriodic acid.

And so the lotoflavin problem remained unsolved. The clue which seemed so promising proved useless. And so now I will tell you about a direct attack on the lotoflavin problem.

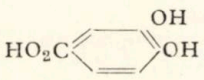
Scrutiny of the literature did not reveal a tetrahydroxyflavone with properties like those recorded for lotoflavin. Derivatives of 3: 5: 7: 3′-tetrahydroxyflavone [17] which gave a tetra-acetate with m. p. near that recorded for lotoflavin tetra-acetate, and of the 5:7:3′:5′-isomer, which is new, were synthesised with similar negative results.

As mentioned above the late Dr. Henry's specimens of lotoflavin were destroyed during the War. We had in University College, Dublin, a small sample (35 mg.) labelled „Lotoflavin". Dr. N. N. Cullinane (personal communication) stated that it had been supplied in 1929 by Dr. Harold Brown of the Imperial Institute, where Dunstan and Henry worked. With so little available we had been slow to touch this authentic sample, but now we felt we must tackle the job. It was found to be identical with a second authentic specimen (*ca.* 5 mg.) which was obtained later through the courted of Sir Robert Robinson. Portion (19 mg.) was acetylated and a product with m. p. 190° was isolated.

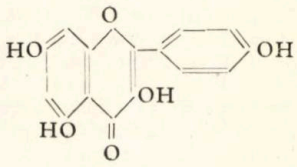
This, surprisingly, gave analytical figures corresponding to a penta-acetoxyflavone. Consideration of the melting points of the known penta-

acetoxyflavones indicated that this acetylated compound might be quercetin penta-acetate. By courtesy of Dr. Bate-Smith, my colleague Dr. J. E. Gowan was permitted to examine the chromatographic properties of the sample of lotoflavin at the Low Temperature Research Station in Cambrigde, England, where the micro-identification of flavonoids has been closely studied. With the co-operation of Dr. T. Swain comparative chromatographic runs were made on paper [18] between a number of flavones including 5:7:3′:4′-tetrahydroxyflavone, 5:7:4′-trihydroxyflavonol (kaempferol), 5:7:2′:4′-tetrahydroxyflavonol (morin), 5:7:3′:4′-tetrahydroxyflavonol (quercetin) and the lotoflavin specimen.

The solvent systems employed were „Forestal" (10 H_2O; 30 AcOH; 3 conc. HCl, v/v) [19] and butanol-acetic acid-water (6 : 1 : 2 v/v). Inspection was carried out in ultra-violet light with and without treatment with ammonia vapour [20]. The specimen gave two spots in the solvent systems tried, the major one of which had R_F values and colour reactions identical with those of quercetin (16); the second component, present only in trace amounts, had R_F values and colour reactions indistinguishable from those of kaempferol (49).



(48)



(49)

The major component was strongly retarded on borate-buffered filter paper in butan-1-ol-water, showing the presence of an *o*-dihydroxy grouping [21], [22]. The presence of this grouping was confirmed by indentification by paper chromatography of protocatechuic acid (48) together with phloroglucinol (10) as the products of alkaline degradation of lotoflavin on a microscale [23]. The same degradation products were given by quercetin. The ultraviolet spectra of lotoflavin in ethanol, 0.002M-sodium ethoxide [24] and 0.1% ethanolic aluminium chloride [25] were identical with those of quercetin and the infra-red spectra of the two compounds in the double bond ((5.5...7) μ) and „finger print" regions ((8 ... 12) μ) were also indistinguishable. Further, the m. p. of acetylated lotoflavin was not depressed by the addition of quercetin penta-acetate and the ultraviolet spectra of these two derivatives in ethanol and 0.1% ethanolic aluminium chloride had identical absorption maxima. Robinson and Venkatarama [2] commented as stated above on the similarity in dyeing propertis of lotoflavin and quercetin.

It is clear, therefore that lotoflavin, as represented by the two samples available, is quercetin with a trace (probably 1...2 *per cent*) of kaempferol. It is interesting that these two flavonols occur together in tea leaves, [26], [27], and in strawberries (*Fragaria chiloensis*) [28].

Received the 12 I 1958

University College, Dublin, Ireland

REFERENCES

1. Dunstan W. R. a. Henry T. A., Phyl. Trans. Royal Society, 1901, **194 B**, p. 515.
2. Robinson R. a. Venkataraman K., J Chem. Soc., 1929, p. 61.
3. Henry T. A., J. Soc. Chem. Ind., 1938, **57**, p. 248.
4. Finnemore H., Cooper J. M. a. Stanley M. B., Ibid., 1938, **57**, p. 162
5. Wessely F. u. Moser G. H, Monatsh., 1930, **56**, S. 97.
6. Shah R. C., Mehta C. R. a. Wheeler T. S., J. Chem. Soc., 1933, p. 1555.
7. Briggs L. H. a. Locker E. H., Ibid., 1949, p. 2157.
8. Donnely D. M., Philbin E. M. a. Wheeler T. S., Ibid., 1956, p. 4409.
9. Chakravorty D. K., Mukerjee S. K., Murty V. V. S. a. Seshadri T. R., Proc. Indian Acad. Sci., 1952, **35A**, p. 37.
10. Baker W., Dunstan I, Harborne J. B., Ollis W. D. a. Winter R., Chem. a. Ind., 1953, p. 277.
11. Whalley W. B., Ibid., 1953, p. 277.
12. Philbin E. M., Swirsky J. a. Wheeler T. S., J. Chem. Soc, 1956, p. 4455.
13. Wulf O. R, Liddel U. a. Hendricks S. B., J. Amer. Chem. Soc., 1936, **58**, p. 2287.
14. Pauling L., Ibid., **94**.
15. Schmid H. u. Bolleter A., Helv. Chim. Acta, 1950, **33**, S. 917.
16. Bannerjee N. R. a. Seshadri T. R., J. Sci. Industr. Res. India, 1954, **13 B**, p. 598.
17. Shaw B. L. a. Simpson T. H., J. Chem. Soc., 1952, p. 5031.
18. Nordström C. B. a. Swain T., Ibid., 1953, p. 2764.
19. Bate-Smith E. C., Biochem J., 1954, **58**, p. 122.
20. Bate-Smith E. C. a. Westall R. G., Biochem. Biophys. Acta, 1950, **4**, p. 427.
21. Wachtmeister R. G., Acta Chem. Scand., 1951, **5**, p. 976.
22. Swain T., Biochem. J., 1952, **53**, p. 200.
23. Bate-Smith E. C. a. Swain T., J. Chem. Soc., 1953, p. 2187.
24. Mansfield G. H., Swain T. a. Nordström C. G., Nature, 1953, **172**, p. 23.
25. Swain T., Chem. a Ind., 1954, p. 1480,
26. Oshima Y. a. Goma T., J. Agric. Chem. Soc. Japan, 1933, **9**, p. 948.
27. Oshima Y. a. Ka H., Ibid., 1936, **12**, p. 975.
28. Williama B. L. a. Wender S. H., J. Amer. Chem. Soc., 1952, **74**, p, 5919.

О ЛОТОФЛАВИНЕ

(Резюме)

Автор, приводя данные о исследованиях строения флавона, полученного впервые 1901 г. из *Lotus Arabicus* и названного затем лотофлавином, показывает, что этот последний состоит из смеси 5 : 7 : 3′ : 4′-тетрагидроксифлавоноля и 1...2% 5 : 7 : 4′-тригидроксифлавоноля.

PROBLEMA LOTOFLAVINEI

(Rezumat)

Autorul, trecînd în revistă cercetările relative la constituţia flavonului extras în 1901 din *Lotus Arbicus* şi denumit apoi lotoflavină, arată că acesta este de fapt un amestec de 5 : 7 : 3′ : 4′-tetrahidroxiflavonol şi 1...2% 5 : 7 : 4′-trihidroxiflavonol.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

547.26.127

POLIESTERI BORICI

DE

ELENA COCEA

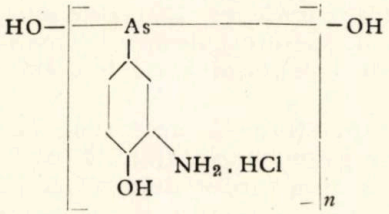
Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

După cum în domeniul organic, aproape nu există combinaţie care să nu fi fost cercetată în vederea obţinerii de polimeri înalţi, tot aşa, în ultimul timp, a început să se studieze, în lumina teoriei combinaţiilor macromoleculare organice, posibilitatea obţinerii de polimeri elementorganici şi anorganici.

Astăzi se ştie că multe din elementele sistemului periodic sînt capabile să se încateneze pentru a forma polimeri fie direct, fie prin intermediul altui element ca O, N, S, etc.

În tehnică, dintre polimerii elementorganici (polimeri cu radical organic fixat direct la elementul anorganic din catenă), sînt larg folosiţi polimerii organosilicici, care, datorită siliciului din molecula lor, posedă atît proprietăţi caracteristice substanţelor anorganice cît şi proprietăţile celor organice, depăşind cu mult, în unele privinţe, polimerii pur organici.

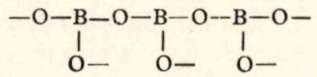
Astăzi se ştie că însăşi salvarsanul este un polimer elementorganic de forma:



şi că activitatea lui terapeutică şi toxicitatea sa depind de mărimea gradului de polimerizare.

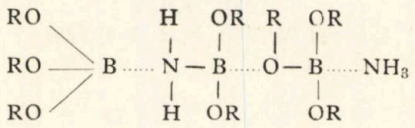
Dintre polimerii înalţi anorganici putem cita sticlele şi cimenturile, a căror constituţie necesită încă lămuriri, precum şi oxizii silicici, ce au structură spaţială.

Borul, situat în grupa a III-a din tabelul lui Mendeleev, este capabil să dea înlănţuiri prin atomi de oxigen, conducînd la poliboraţi. Dintre aceştia, o structură bine cunoscută are metaboratul de calciu, care după Zachariasen W. H. şi Ziegler G. [1] constă dintr-un lanţ nelimitat de anioni de forma:



Acidul poliboric (metaboric) nu i stabil, el scindează repede cu apă pînă la acidul boric monomer. Sînt cunoscuţi numeroşi compuşi organici obişnuiţi, cu bor în molecula lor.

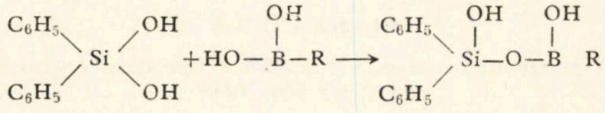
Esterii borici pot da complexe cu amoniacul [2] de forma:



În literatură se găsesc numeroase încercări de polimerizare a unor esteri borici, care au legături duble în radicalul organic.

Astfel, B. N. Rutowski şi N. S. Lesnov [3] au preparat borat de trialil prin încălzirea alcoolului alilic cu acid boric, în benzen, care serveşte pentru antrenarea apei rezultate din reacţia de formare a acestui ester în prezenţa acidului sulfaminic drept catalizator [4].

Esteri micşti borosilicici au fost preparaţi [5] din difenilsilandiol şi $R—B(OH)_2$:



Derivaţii rezultaţi se polimerizează pe seama grupelor OH, conducînd la polimeri elementorganici, care se pot trage în fire şi filme.

Considerînd, pe de o parte faptul că esterii cu radical organic nesaturat nu polimerizează, iar pe de altă parte, capacitatea esterilor de a forma complecşi cu amoniacul, ne-am pus problema posibilităţii obţinerii de polimeri borici prin condensarea acidului boric cu baze organice, polifuncţionale, cum sînt di- şi tri-etanolaminele.

La formarea unor astfel de polimeri ar putea participa grupele OH din acidul boric, grupele OH din etanolamină cît şi azotul bazic.

În cele ce urmează vom da rezultatele obţinute în reacţia de condensare dintre acidul boric şi dietanolamină.

La tratarea acidului boric cu dietanolamină, în diferite raporturi molare şi încălzire la temperaturi destul de moderate (80...90°), are loc mai întîi solvirea totală a acidului boric în dietanolamină, însoţită de o spumare abundentă.

Pe măsură ce temperatura se urcă pînă la 135... 145°, lichidul de reacţie, care iniţial era gălbui şi uşor fluid, devine din ce ce mai vîscos. Concomitent, are loc o eliminare abundentă de vapori de apă. Reacţia s-a realizat în atmosferă de gaz inert (CO_2) pentru evitarea oxidării şi pentru a înlesni, în acelaşi timp, îndepărtarea apei rezultate din reacţie. Apa degajată se poate culege, total, printr-un dispozitiv de culegere cu refrigerent, fixat la vasul de reacţie. Pentru eliminarea ultimelor resturi de umiditate, cît şi a urmelor de dietanolamină nereacţionată, final, se încălzeşte la vid. Operaţia durează cca. 2... $2^1/_2$ ore, temperatura fiind menţinută, mai mult, între 130... 140°. Dacă încălzirea se face la temperatură mai ridicată (160... 180°) are loc şi degajare de amoniac.

Final, chiar la cald, mediul de reacţie se întăreşte într-o masă solidă, sticloasă şi uşor casantă. Este solubilă la rece, în apă, şi la cald, în alcool şi acetonă, dar e insolubilă în alţi solvenţi organici.

Din soluţie alcoolică concentrată precipită cu eter, un produs alb, cu aspect cristalin. Produsul a fost purificat prin repetate solviri în alcool şi reprecipitări cu eter, pentru îndepărtarea urmelor de dietanolamină.

Produsul pur este higroscopic, se descompune la încălzire fără să se topească. Soluţiile apoase sau alcoolice au caracter puternic bazic. Este perfect stabil în soluţii alcaline şi din acestea se poate separa prin precipitare cu alcool sau acetonă.

Nu rezistă la acţiunea acizilor chiar diluaţi, ci se descompune cu separare de acid boric, aşa cum sînt descompuşi esterii borici obişnuiţi.

La tratarea soluţiei alcoolice de poliester boric cu iodură de metil, se formează sarea cvaternară de amoniu, macromoleculară.

Soluţia alcoolică şi mai ales cea apoasă, întinsă pe suport de lemn, sticlă sau metal, depune un film sticlos, perfect lucios şi transparent, care se întăreşte foarte repede, dar care se solvă uşor în apă.

Dacă filmul este încălzit în etuvă mai mult timp, devine aderent ca un smalţ, solubitatea sa fiind suprimată.

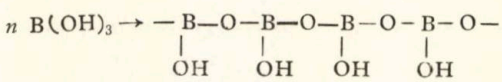
Produsul se solvă treptat, la cald, în ulei de in sicativizat, iar peliculele obţinute cu aceste soluţii sînt rezistente şi insolubile.

Acelaşi produs l-am obţinut şi prin condensarea oxidului metaboric $(B_2O_3)_n$ cu dietanolamină, numai că în acest caz, cantitatea de apă, eliminată din reacţie, este cu mult mai mică.

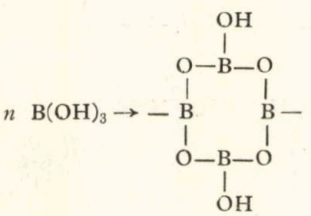
Analizele produsului purificat indică compoziţia: $C_6H_{23}O_{12}N_2B_4$.

Ţinînd seama de proprietăţile acestui produs şi de modul său de preparare, presupunem că, reacţia dintre acid boric sau $(B_2O_3)_n$ şi dietanolamină conduce la formarea unui produs macromolecular prin următorul mecanism:

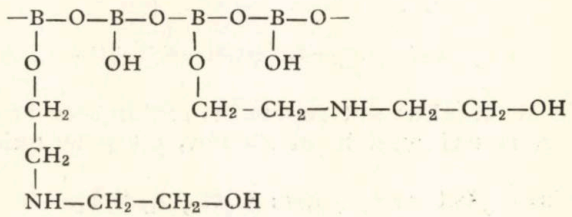
În prima fază ar avea loc deshidratarea acidului boric la un polimetaborat, fie liniar, fie ciclic:



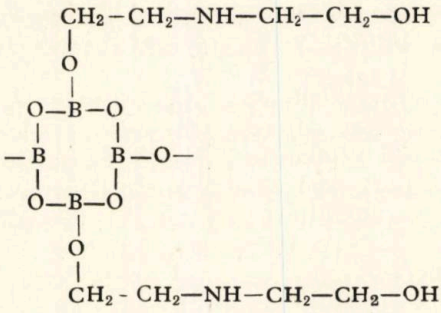
sau:



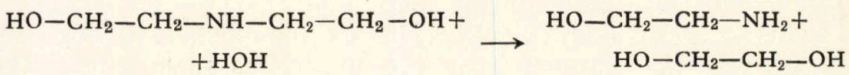
În faza următoare, aceşti polimetaboraţi pot reacţiona cu cîte două molecule de dietanolamină la fiecare verigă de patru atomi de bor, dînd esteri polimeri cu verigi de forma:



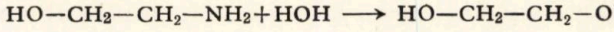
sau:



Avînd în vedere că la temperaturi mai ridicate ale masei de reacție se degajă și amoniac, acesta nu poate proveni decît printr-o scindare catalizată de acidul boric. În acest caz, fie dietanolamina ca atare, fie resturile de dietanolamină din catene, scindează hidrolitic la glicol și monoetanolamină, sau glicol și amoniac, după schema:

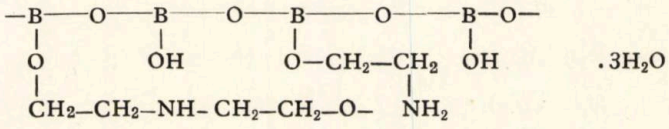


și:

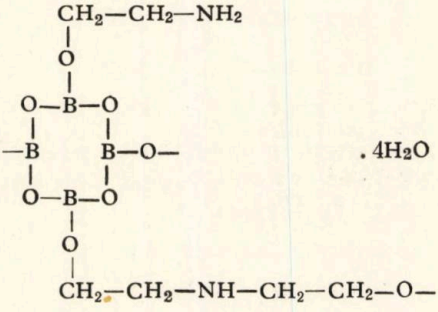


Atunci este posibil ca poliesterii de mai sus să treacă în poliesteri parțial scindați, cu verigi de forma (I) și (II):

(I)



(II)



Verigile de acest fel se pot repeta prin înlănțuire la valențele figurate libere la bor, la oxigenul legat de bor, cît și la oxigenul legat de carbon.

La analiză s-a găsit compoziția: $C_6H_{23}O_{12}N_2B_4$.

Această compoziție corespunde verigii deschise cu $3H_2O$, adică: $C_6H_{17}O_9N_2B_4 . 3H_2O$ și pentru veriga ciclică, cu $4H_2O$, adică: $C_6H_{15}O_8B_4 . 4H_2O$.

Aceste două structuri atribuite verigilor polimerului, fiind în concordanță cu datele analitice, rămîne ca prin cercetări ulterioare să se aducă dovezi în sprijinul uneia sau alteia dintre structuri.

În orice caz, adiția de apă este posibilă atît la veriga cu structură acilică, cît și la cea cu structură ciclică, fixarea apei făcîndu-se prin perechile de electroni libere de la oxigen, care completează lacuna electronică a atomului de bor.

Mai este posibil ca lacunile electronice de la bor să fie completate intermolecular, de perechile de electroni libere de la atomii de azot

Concluzii

1. În lucrare se arată ca acidul boric reacționează cu dietanolamina, conducînd la mase sticloase cu catenă anorganică și structură macromoleculară.

2. Din comportări, mod de formare și compoziție chimică, rezultă că produsul este un poliester boric, cu proprietăți pronunțate bazice.

3. Din soluția apoasă sau alcoolică, macropolimerul dă pelicule transparente, incolore, care aderă bine la lemn, metal și sticlă, dar care sînt ușor solubile în apă. Solubilitatea poate fi suprimată prin încălzirea ulterioară a peliculei sau prin modificarea rășinii cu uleiuri sicative.

Analize

			C%	H%	N%	B%
$C_6H_{17}O_9N_2B_4 . 3H_2O$		Calc.:	20,09	6,41	7,81	12,08
sau:	(358,3)	Găsit:	20,03	6,67	7,79	12,05
$C_6H_{15}O_8N_2B_4 . 4H_2O$			20,18	6,27	7,70	12,64

Institutul Politehnic Iași,
Catedra de Industrii Organice

BIBIOGRAFIE

1. Zachariasen W. H. u. Ziegler G., Z. Kristallogr., 1932, (A) **83**, S. 354.
2. Hein Fr., *Chemische Koordinationslehre,* Leipzig, 1954, S. 195.
3. Rutowski B. N., Lesnov N. S., C (I), 1950, p. 1613.
4. Irany Ernest Paul, Canford N. J., C (II), 1951, *9*, p. 1207,
5. Upson R. W., C. (I), 1951, p. 2662.

БОРНЫЕ ПОЛИЭФИРЫ

(Резюме)

В настоящей работе констатируется, что борная кислота реагирует с диэтаноламином, образуя стекловидные массы, имеющие цепь неорганической природы и макромолекулярной структуры.

Исходя из поведения, способа образования и химического состава, устанавливается, что вещество является борным полиэфиром с сильными основными свойствами.

Из спиртового и водного растворов полимер образует прозрачные, бесцветные пленки, которые хорошо прилипают к дереву, металлу и стеклу, но легко растворяются в воде.

Растворимость может быть устранена нагреванием пленки или же модификацие осмолы высыхающими маслами.

BORSÄUREPOLYESTER

(Zusammenfassung)

1. In dieser Arbeit zeigt man, das die Borsäure mit Diethanolamin reagieren kann und dass, das erhaltene glasartige Produkt, eine anorganische Kette und makromolekulare Struktur besitzt.

2. Aus Verhalten, Bildungsweise und Zusammensetzung ergibt sich, dass dieses Produkt ein Borsäurepolyester, mit stark basischen Eigenschaften, darstellt.

3. Aus wässeriger oder alkoholischer Lösung erzeugt das Makroprodukt durchsichtige, farblose Filme, die eine gute Adesivität für Holz, Metall und Glas besitzen; diese Filme sind aber im Wasser leicht löslich.

Die Wasserlösslichkeit mag es durch Erwärmen der Filme oder durch Modifizieren des harzigen Produktes mit trocknenden Öle aufgehoben werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

547.583.2

CONDENSAREA 2,4'-DINITROCLORBENZENULUI CU ACIDUL 4,4'-DIAMINOSTILBEN-2,2'-DISULFONIC

DE

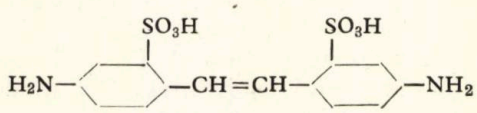
GH. LUPUŞOR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

Într-o lucrare anterioară [1], am studiat condensarea 2,4'-dinitroclorbenzenului cu derivaţii de benzidină.

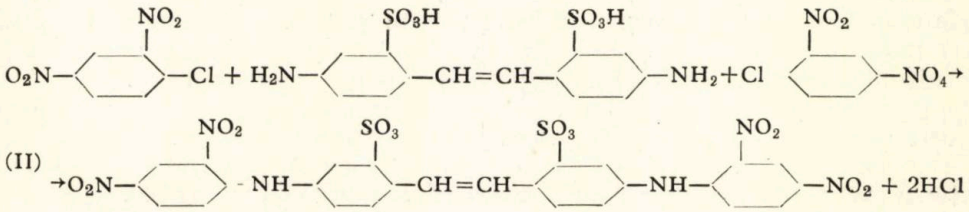
În scopul de a extinde reacţia de condensare a dinitroclorbenzenului, în lucrarea de faţă, am ales ca derivat aminat, acidul 4,4'-diaminostilben-2,2'-disulfonic (I):

(I)



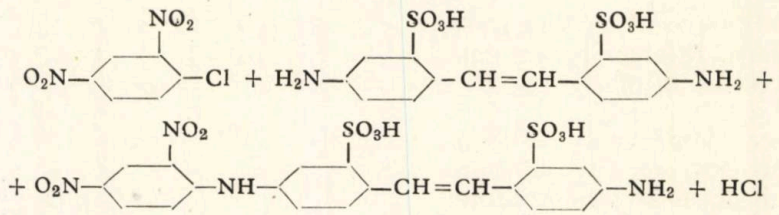
Acidul diaminostilbendisulfonic, avînd în moleculă două grupe aminice, se poate condensa cu două molecule de dinitroclorbenzen sau numai cu una singură.

Prin condensarea dinitroclorbenzenului cu acidul diaminostilbendisulfonic, în raport molar de 2:1, am obţinut acidul tetranitrodiaminostilbendisulfonic (NN'-Bis / 2,4-dinitrofenil / 4,4'-diaminostilben-2,2'-disulfonic) (II), conform reacţiei:



(II)

Prin condensarea acidului diaminostilbendisulfonic cu dinitroclorbenzen în raport molar de 1:1, am obţinut acidul dinitrofenildiaminostilbendisulfonic (N/2,4-dinitrofenil/diaminostilbendisulfonic) (III), după reacţia de mai jos:



(III)

Produsul (II) se prezintă sub formă de pulbere amorfă de culoare brun-roșcată, greu solubilă în apă la fierbere; prin răcirea soluției apoase formează un gel greu filtrabil.

Prin acidularea soluției apoase, cu acizii clorhidric sau sulfuric, substanța precipită sub formă ușor filtrabilă.

Produsul nu se poate obține cristalin, din solvenții obișnuiți încercați. La încălzire, începe a se înegri în jurul temperaturii de 170°, iar pe la 260° se descompune fără a se putea marca un punct de topire.

Cu hidroxidul de bariu, formează sarea de bariu, o pulbere amorfă de culoare maron-deschis, foarte puțin solubilă, atît în apă rece cît și la fierbere. Încălzită, sarea de bariu se descompune energic.

Acidul tetranitrodifenildiaminostilbendisulfonic, se comportă ca o materie colorantă acidă, putînd vopsi lîna, mătasea naturală și pielea, în galben-portocaliu.

Produsul (III), acidul dinitrofenildiaminostilbendisulfonic, se prezintă ca o pulbere amorfă, maron-deschis, greu solubilă în apă rece solubilă în multă apă la fierbere.

Prin răcirea soluției apoase, se formează gel nefiltrabil. Prin acidulare precipită, devenind ușor filtrabil în mediu puternic acid.

Este solubil în acid sulfuric concentrat, fără a-și schimba culoarea, din care reprecipită prin diluare.

Cu hidroxidul de bariu formează sarea de bariu. Sarea de bariu este complet solubilă în apă, la fierbere. Prin răcirea soluției apoase, în timp de cîteva ore, se formează cristali aciculari, dispuși radial, de culoare brună. La încălzire, sarea de bariu se descompune energic fără a se topi.

Acidul dinitrofenildiaminostilbendisulfonic (III), se comportă ca o materie colorantă acidă, vopsind lîna, mătasea și pielea, în galben ca lămîia. Comparînd însușirile produșilor (II) și (III), se constată la ambii o puternică higroscopicitate. Astfel, acidul dinitrofenildiaminostilbendisulfonic, uscat la 150°, arată o pierdere în greutate de 13%.

În contact cu atmosfera, produsul uscat recîștigă în cursul a trei ore, circa 11% din greutate, circa 10% aparținînd primului sfert de oră.

La ambii produși au fost determinate curbele spectrale de absorbție (extincție) cu ajutorul unui spectrofotometru Zeiss (fig. 1).

S-a lucrat în soluții apoase, concentrația în produși fiind de 0,25 mg/cm³.

Comparînd curbele, se constată în primul rînd că maximul de absorbție pentru ambele curbe se găsește la limita violetă a spectrului vizibil.

La derivatul tetranitric se observă o uşoară deplasare spre lungimi de undă mari (efect batocrom), fiind în concordanţă cu prezenţa a patru grupe nitrice în derivatul (II) faţă de două grupe nitrice în derivatul (III).

Interesantă apare absenţa efectului de halocromie, în soluţiile de acid sulfuric ale acestor produşi. Atribuim această lipsă, prezenţei grupelor sulfonice în moleculele compuşilor (II) şi (III).

În [1] am arătat că compuşii de condensare ai dinitroclorbenzenului cu benzidina şi derivaţii ei — tolidina şi dianizidina, care sînt compuşi polinitrici de acelaşi tip, colorează puternic soluţiile lor în acid sulfuric concentrat.

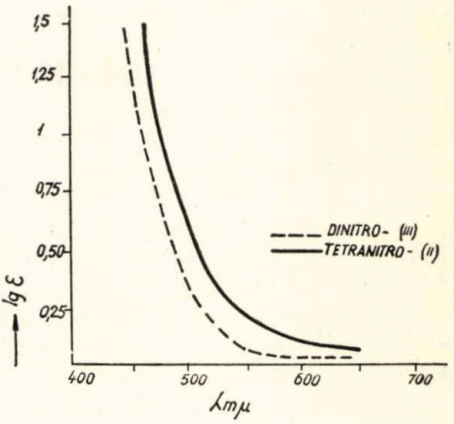
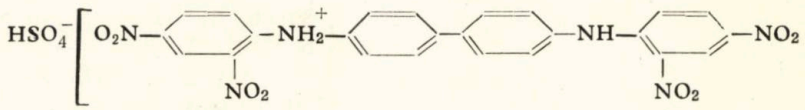


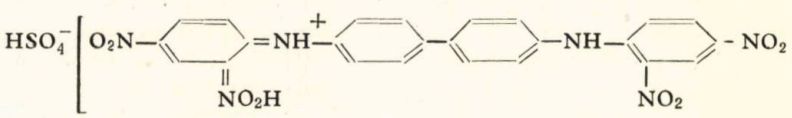
Fig. 1.

La compuşii amintiţi, bazicitatea grupelor aminice secundare este considerabil micşorată de prezenţa radicalilor aromatici, totuşi în soluţie de acid sulfuric concentrat se dovedeşte că şi grupele aril-aminice secundare sînt capabile să formeze sare cu acizii minerali puternici.

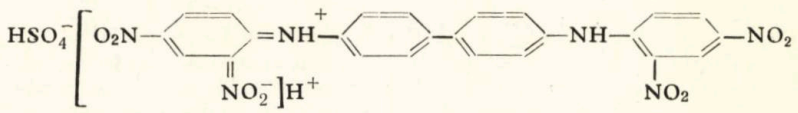
Luînd ca bază aprecierile lui Pfeiffer şi Jäger [2] asupra efectului halocromic observat la eterii *o*-şi *p*-nitrotiofenolilor şi aplicînd aceste consideraţiuni, de exemplu, la tetranitrodifenilbenzidină, se poate explica coloraţia roşie-violetă, ce apare în soluţia de acid sulfuric a acesteia, în felul următor: în prima fază se formează sarea (IV):

(IV) 

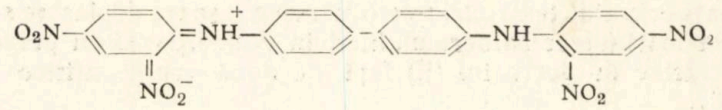
Sarea (IV) trece în forma chinoidică, a acidului nitronic (V):

(V) 

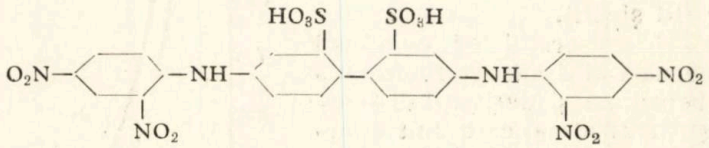
Acizii nitronici fiind acizi tari, grupa $=NO_2H$ se ionizează ca în schema (VI):

(VI) 

Ionii HSO_4^- şi H^+ trecînd în soluţie, rămîne liber ionul bipolar cu structură *o*-chinoidică puternic colorat (VII):

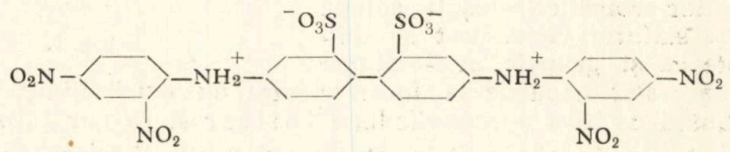
(VII) 

Cu totul opus se comportă, în soluție de acid sulfuric, derivatu obținut prin condensarea dinitroclorbenzenului cu acidul benzidin disulfonic (VIII):

(VIII) 

Soluția acestuia, în acid sulfuric, nu arată nici un schimb de culoare.

Considerăm că în compusul (VIII), grupele aminice secundare sînt blocate de către grupele sulfonice din moleculă, așa cum se arată mai jos (IX):

(IX) 

și în așa măsură încît ele nu pot da sare cu acidul sulfuric și se suprimă astfel posibilitatea de formare a ionului bipolar liber în formă chinoidică. Derivații (II) și (III) obținuți, pot servi ,ca atare, în vopsitorie, clasîndu-se printre coloranții nitrici acizi.

Derivatul (III) avînd o grupă aminică liberă, este susceptibil de a da reacții specifice.

Astfel, prin diazotare și cuplare în mediu alcalin cu diverși naftoli, acizi naftoli sulfonici și aminonaftolisulfonici, am obținut coloranți monoazoici, care se pot încadra în clasa coloranților direcți.

Studiul coloranților de acest tip cît și proprietățile lor continuă.

Partea experimentală

A. Condensarea 2,4-dinitroclorbenzenului cu acidul 4,4'-diaminostilben-2,2'-disulfonic, în raport molar de 2 : 1.

Acidul tetranitrodifenildiaminostilbendisulfonic (acid NN'-Bis/2,4-dinitrofenil/4,4'-diaminostilben-2,2'-disulfonic) (II).

Într-un balon de antrenare se introduc: 10 g acid diaminostilbendisulfonic, 20,49 g 2,4-dinitroclorbenzen (include 10 g exces) și 11,49 g carbonat de calciu, se agită energic, se introduc circa 80 cm^3 apă și se supune antrenării. În decurs de circa 9 ore are loc reacția, înlăturîndu-se totodată și excesul de dinitroclorbenzen care este recuperabil. Prin acidulare cu acid clorhidric, se înlătură carbonatul de calciu și se filtrează la vid. Se spală pe filtru cu apă acidulată cu acid clorhidric. Se evită spălarea cu apă curată deoarece aceasta împiedică filtrarea.

Se obțin 15,5 g produs brut uscat. Randament circa 84%.

Pentru analize, produsul brut se încălzeşte cu apă, se tratează cu carbonat de sodiu pînă la reacţie alcalină, se fierbe şi se filtrează de urmele de carbonat de calciu precipitat. Soluţia sodică se acidulează puternic cu acid sulfuric. Produsul obţinut se usucă în etuvă la 150°. Se răceşte într-un exicator mic. Se cîntăreşte repede din cauza higroscopicităţii pronunţate.

Analize :

$C_{26}H_{18}O_{14}N_6S_2$	calculat :	C%=44,44 ;	H%=2,56 ;	N%=11,19
	găsit :	43,9	3,22	11,59

B. Condensarea 2,4-dinitroclorbenzenului cu acidul 4,4'-diaminostilben-2,2'-disulfonic în raport molar de 1 : 1.

Acidul dinitrofenildiaminostilbendisulfonic (acid N/-2,3-dinitrofenil/-4,4'-diaminostilben-2,2'-disulfonic) (III).

Într-un balon prevăzut cu un refrigerent de aer scurt, pe baie de apă în fierbere se introduc : 20 g acid diaminostilbendisulfonic, 10,94 g 3,4-dinitroclorbenzen, 20 g carbonat de calciu şi o cantitate de apă cît să cuprindă bine amestecul şi să permită o agitare bună.

După circa şase ore cu agitare intermitentă, se depune o masă compactă roşie-cărămizie. Îndepărtarea urmelor de dinitroclorbenzen se face antrenînd produsul brut cu vapori de apă circa jumătate de oră.

Prin acidulare cu acid clorhidric, se înlătură excesul de carbonat de calciu şi se pune acidul în libertate. Se filtrează la trompă, se spală cu apă acidulată cu acid clorhidric. Uscat la 120° se obţin 28 g produs brut. Randament=93%.

Purificarea pentru analize se face ca şi la produsul (II) luîndu-se aceleaşi măsuri de precauţie.

Analize :

$C_{20}H_{16}O_{10}N_4S_2$	calculat :	C%=44,85 ;	H%=2,97 ;	N%=10,26
	găsit :	44,27	3,15	9,81

Concluzii

1. Acidul diaminostilbendisulfonic se poate condensa cu dinitroclorbenzenul în raport molar de 1 : 2 şi 1 : 1.

2. Condensarea în raport molar de 1 : 2, duce la formarea acidului tetranitrodifenildiaminostilbendisulfonic (II).

3. Condensarea în raport molar de 1 : 1 duce la obţinerea acidului dinitrofenildiaminostilbendisulfonic (III).

4. Ambii produşi posedă însuşiri tinctoriale, caracteristice coloranţilor acizi.

5. Acidul dinitrofenildiaminostilbendisulfonic este diazotabil şi poate cupla în mediul alcalin cu diverse componente, rezultînd coloranţi azoici direcţi.

Institutul Politehnic din Iaşi,
Catedra de Industrii Organice

BIBLIOGRAFIE

1. Lupuşor Gh şi Dumitrescu Sv., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1956, **2**, *1—2*, pp. 131—137.
2. Pfeiffer P. u. Jager H., B. 1942, **75**, S. 1885.

КОНДЕНСАЦИЯ 2,4—ДИНИТРОХЛОРБЕНЗОЛА С 4,4′—ДИАМИНОСТИЛЬБЕН—2,2′—ДИСУЛЬФОКИСЛОТОЙ

(Резюме)

Осуществлена конденсация диамино-стильбендисульфоновой кислоты с динитрохлор-бензолом в молярном соотношении 1 : 1 и 1 : 2. Полученные продукты обладают красильными свойствами по отношению к шерсти, коже и натуральному шелку. Динитрофенил-диамино-стильбендисульфоновая кислота нестойка к диазо-реакциям и может сочетаться в щелочной среде с различными компонентами, давая субстантивные красители.

DIE KONDENSATION VON 2,4′ — DINITROCHLORBENZOL MIT 4,4′-DIAMINOSTILBEN -2,2′-DISULFONSÄURE

(Zusammenfassung)

Es wurde die Kondensation der Diaminostilbensulfosäure mit Dinitrochlorbenzol (2,4) in molarem Verhältniss 1 : 1 und 1 : 2 durchgeführt.

Die erhaltenen Produkte besitzen färberische Eigenschaften gegenüber Wolle, Leder und Naturseide.

Die Nitrofenildiaminostilbendisulfosäure ist diazotierbar und kann mit entsprechenden Komponenten durch alkalischer Kupplung substantive Farbstoffe geben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4. 1958

CONSIDERATIONS ON SOME RESULTS OBTAINED IN THE STUDY OF VEGETABLE CANCER

BY

CRISTOFOR SIMIONESCU

Corresponding Member of the Roumanian Popular Republic Academy

1. Introduction

The fundamental research work owing to which biology has become a science of immense prestige and importance trends gradually and firmly towards the study of the pathological phenomena of neoplasical type, the cancer. The existence of tumours is well known not only among animals, but also among the inferior organisms — the nonvertebrates — and even among plants. While for the first class of tumours, as asserted in a recent work of C. I. Parhon and I. Petrea [1], there are plenty of recorded data and experimental observations as well as perfectly organized research work, for the second class — the inferior organisms — the studies are still in the research stage, bringing out new facts of general interest in the problem of the biology of the cancer.

It is clear that, in order to resolve these fundamental problems of biology, the study of plants play an important part.

In a series of cases, the final conclusions may be transposed by analogy, and sometimes generalized for animals (e. g. our representation on the constitution and organisation of the cells in tissues, problems of growth, etc.). The idea that pathological phenomena of the cancer type concern the living form, without any regard to structure or stadium of organisation, leads us to the conclusion that the study of tumours in various forms in plants may promote in biology new conquests, liable to be applied to superior organisms.

Numerous scientists, working in the field of phytopathology, of the chemism of vegetable tumours, of phytophysiopathology, entertain this hope, as appears from a series of experimental data, among which we mention those of Heinz K. Parchwitz [2] and of the German school of biophysicians in general.

In our country, V. Vendég [3] obtained interesting results regarding certain common pathogenic agents of animals and plants. The observations showing that extracts of certain malignant tumours may produce virosis in plants deserve a special mention. These results, as well as the conclusions of other scientists are an encouragement to all who believe in the existence of a reciprocity between the animal and vegetal kingdoms and are waiting for eventual practical results. The researches carried out by Lydia Mesrobeanu [4], on sun-flower stems (*Helianthus annus*), with a glicidolipoidic complex from the *Bacillus tumefaciens*, as well as the work of Tr. Săvulescu [5], referring to immunity in the bacterial diseases of plants, are to be noticed too.

The researches mentioned above, as well as many others, emphysize the necessity of enlarging and deepening the studies referring to vegetable tumours, studies which are expected to bring about real progresses in many a scientifical field.

The biochemistry of plants payed comparatively little attention to the problem of vegetable cancer and to the biochemistry of tumours, although, as we shall see farther on, the chemical transformations brought about by vegetable tumours, may serve to elucidate certain — still unsolved — problems of the chemistry of wood.

2. The process of lignification in some vegetable tumours

a) Theoretical considerations

Although the chemistry of wood won in the last hundred of years considerable successes, one of its fundamental problems, that of the link between the principal components of wood : cellulose and lignin — remained still unsolved.

The actual state of the chemistry of lignin, maintains a speculative character and bestows little light even regarding most important problems such as the formation of lignin in plants or the structure of lignin.

The way leading from the study of vegetable tumours to the elucidation of the fundamental and actual problems of the chemistry of wood, might seem too long to be interesting.

Nevertheless, the fact *that the unusual development of the lignifying process in tumours offers us the possibility of pursuing certain biochemical phenomena more successfully and on a larger scale*, may be a sufficient excuse for our holding a different oppinion. At all events, the research work carried on for several years under our guidance and tending to elucidate certain problems of the chemistry of lignin, trends mainly toward the study of the chemical transformations in vegetable tumours. They lead us to certain conclusions, part of which — those referring to the problem of the link between cellulose and lignin — are related in the present article.

As a matter of fact, many theories dealing with the formation of lignin have been issued and many studies initiated up to now. For our present theme we must retain two old hypothesis, that might prove useful, namely: *the formation of lignin through a process of synthesis by direct assimilation, and cellulose regarded as a precursor of lignin.*

The former, expressed by Klasson (1920) [6], leads us to the conclusion that through a process of assimilation in the first stage of which occurs formaldehyde :

$$CO_2 + H_2O = HCHO + O_2$$

we might get to a dimeric derivative, the coniferyl, which finally leads us to α-lignin :

$$22\ HCHO = C_{22}H_{22}O_7 + 11\ H_2O + 2\ O_2$$

or β-lignin :

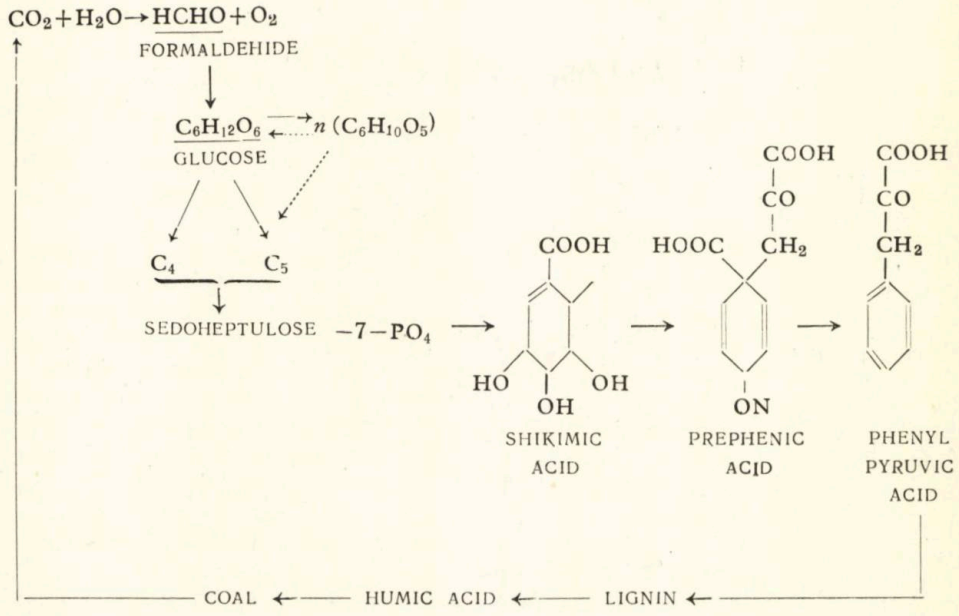
$$19\ HCHO = C_{19}H_{18}O_9 + 10\ H_2O.$$

Therefore, the plant should synthesise under the action of the chlorophyl, the coniferyl alcohol, which together with the simultaneously formed glucose would lead to coniferin.

The second idea, suggested by Kabsch in 1863, supposes that *lignin is a product obtained during the degradation of cellulose*; in 1904 Green published certain data on this subject which obviously are now out of date.

In our opinion the truth lies somewhere very near the last idea, that of *lignin being a product of the transformation of cellulose, better said of the glucose obtained by its splitting off or by biosynthesis.*

This way of transformation barred by so many interrogation points might be presented as follows (I):



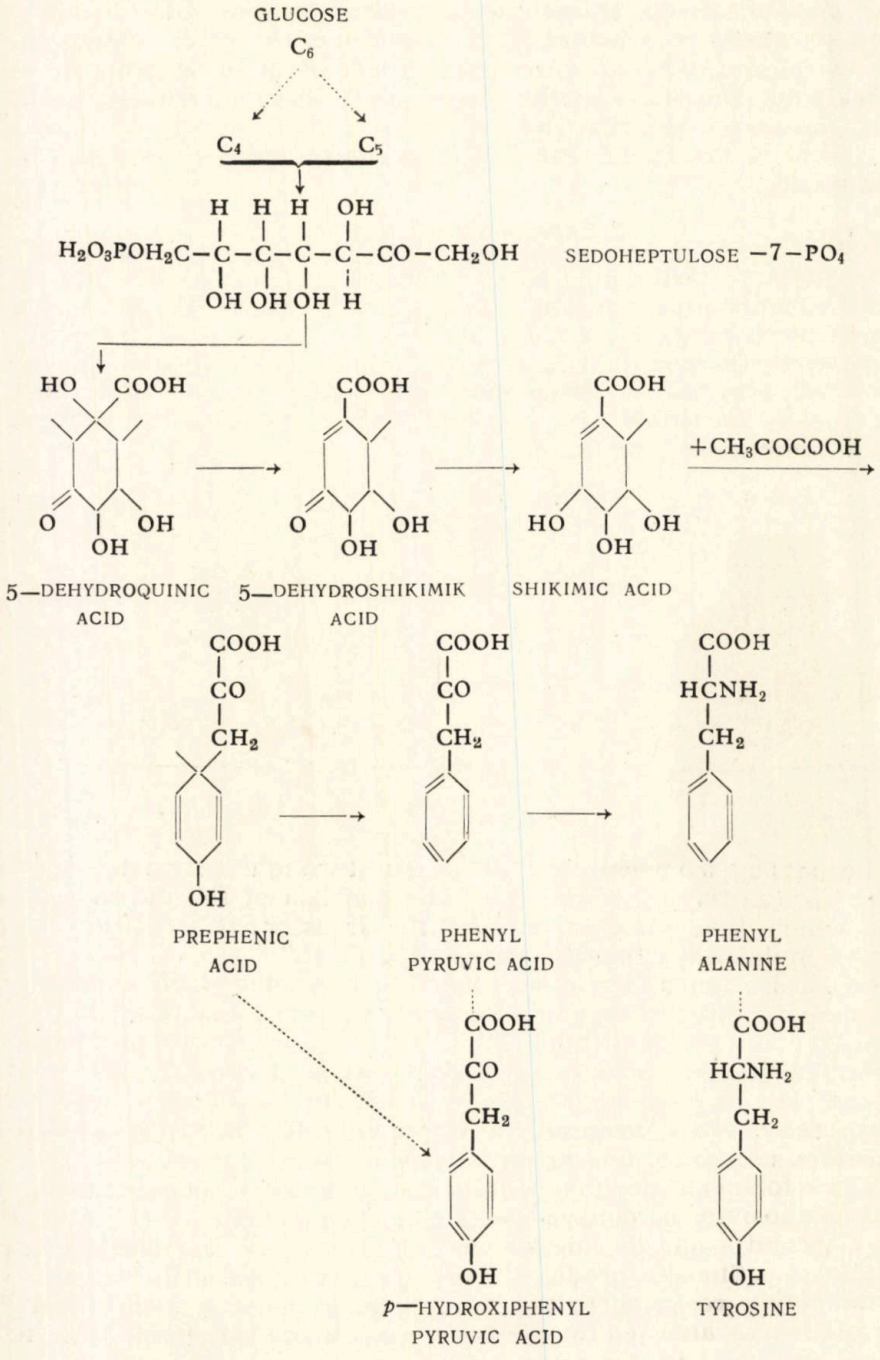
(I)

The passing from cellulose to glucose through enzymatic splittings and aromatization, is still the basic problem of the thesis, according to which, lignin is the result of the transformation of cellulose under the multifarious life conditions of a plant.

The latest suppositions concerning the biosynthesis of derivatives of the phenyl propanic type are fairly well known; according to them, the glucose splitted off in fragments C_4 and C_5 undergoes a mechanism of cyclization (II), and after recombining in at least two different ways, passes into sugars containing 7 atoms of carbon of the sedoheptulose 7-phosphate type [7]. These sugars are supposed to form the aliphatic intermediate substance, undergoing cyclization.

Thus, the thesis of lignin biosynthesis through aromatization of sugar obtained from glucose is more than ever actual.

But to what extent glucose — which is in fact the basis of the process,—originates directly from biosynthesis or from cellulose and to what extent the cellulose itself is brought about in the plant through biochemical processes able to form the precursors of lignin, has not yet been said.


GLUCOSE
C6
C4
C5
H H H OH
H2O3POH2C–C–C–C–CO–CH2OH
OH OH OH H
SEDOHEPTULOSE –7–PO4
HO COOH
O OH
OH
COOH
O OH
OH
COOH
HO OH
OH
+CH3COCOOH
5—DEHYDROQUINIC ACID
5—DEHYDROSHIKIMIK ACID
SHIKIMIC ACID
COOH
CO
CH2
OH
COOH
CO
CH2
COOH
HCNH2
CH2
PREPHENIC ACID
PHENYL PYRUVIC ACID
PHENYL ALANINE
COOH
CO
CH2
OH
COOH
HCNH2
CH2
OH
p—HYDROXIPHENYL PYRUVIC ACID
TYROSINE

(II)

We consider that cellulose *may pass into lignin* and that the object of our study must be whether the transformation occurs along the passage of the fragments of glucose, therefore through glucose, or in any other way. The study of the chemism of vegetable tumours, seems to suport the thesis according to which the process of lignification is closely linked to the modification of the ratio of the principal constituents of wood.

b) Experimental results

The literature concerning these problems describes many forms of vegetable tumours produced either by certain injuries or by pathogenic agents: bacteria, fungi, insects, etc.

Among the microorganisms able to produce tumours we mention: *Agrobacterium tumefaciens*, *Pseudomonas tumefaciens* or *savastanoi*, *Micrococcus populi*, *Bacterium citri*, etc. and among the fungi, *Plowrightya morbosa*, *Melampsorella cerastii*, etc.

Fig. 1.

Fig. 2.

Our research work comprehended as a first step the study of gall nuts, tumours, the cancerous formations on developed trees respectively and we followed up the modifications which appeared in the chemical composition of decayed wood, in comparison with the sound one; in a second stage the development in time of the process of lignification in artificially produced tumours, will be studied.

Some results referring to the modifications in the chemical composition of fir-tree attacked by a fungus —*Melampsorella cerastii* — were previously published in our review [8]. Fig. 1 presents the cancerous

tumour of a fir-tree attacked by a fungus, whilst fig. 2 shows the anarchical growth of the branches of a fir-tree at onset point. A strong process of lignification was signalized in the tumour, a lowering of the cellulose percentage, an important storage of resin between bark and wood without noticeable modification of the percentage of tannic substances.

Subsequently, we studied the process of lignification in a beech-tree tumour *(Fagus silvatica)* — fig. 3a and 3b—, originated in an infection due to traumatism. The description of this tumour and part of the observations, were published in collaboration with Margareta Grigoraş [9].

As may be seen from the longitudinal section (fig. 4), samples were taken for analysis out of 10 different spots (black circles), of which number *1*, *2* and *9* represent the very stalk of the tree and the

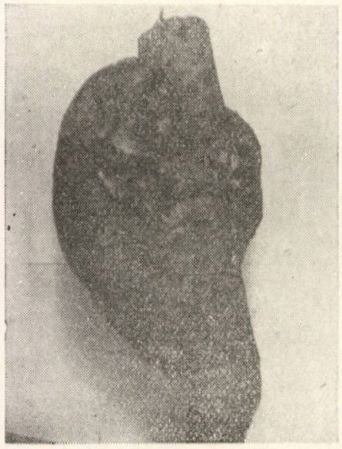


Fig. 3 a

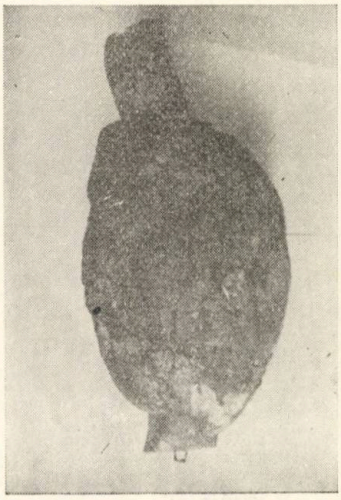


Fig. 3 b

rest, different regions of the tumour; the white circle indicates the spots where samples for microscopical sections were taken from; these sections were performed through the kindness of Prof. Dr. Germano Centola at the Experimental Station for Cellulose, Paper and Textile Vegetal—and Man-made Fibres, Milano. The stereotypes in the attached 15 figures (beech and elm-tree) were obtained through microscope by setting of the cross-sections of wood in ultraviolet light, a method currently used in the above mentioned institute and which is described by F. Taraschi [10].

Fig. 5 presents an elm-tree with tumour, fig. 6 a poplar *(Populus nigra)* with cauliflowerlike cancer, spread 1.65 m. along the trunk, having a 0.56 m. diameter at the most developed point of the tumour, versus 0.23 m. just below the tumour.

As may be seen from fig. 6 five cross-sections were made trough the trunk (noted S_1, S_3, S_5, S_7, S_9 to be distinguished from the sections bearing even numbers which were not submitted to analysis). The sections are reproduced in fig. 7...11; on the figures are indicated the spots where samples for analysis were taken from. To be noted, in all the sections and especially in the middle of the sections S_1 and S_5, a destroying process due to the yellow fungus *(Fomes fomentarius)*. The tree was felled in the forest of Tuşnad (Hungarian Autonom Region), in July 1957.

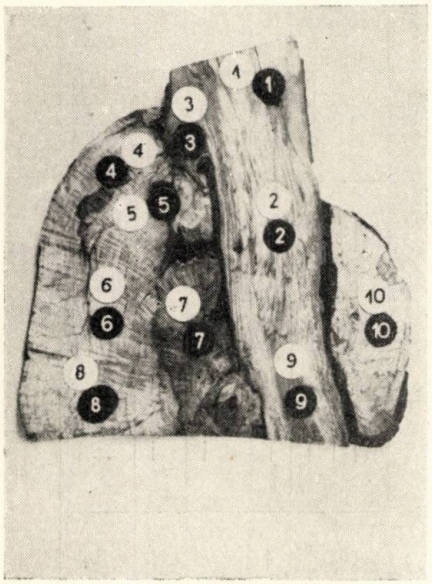


Fig. 4.

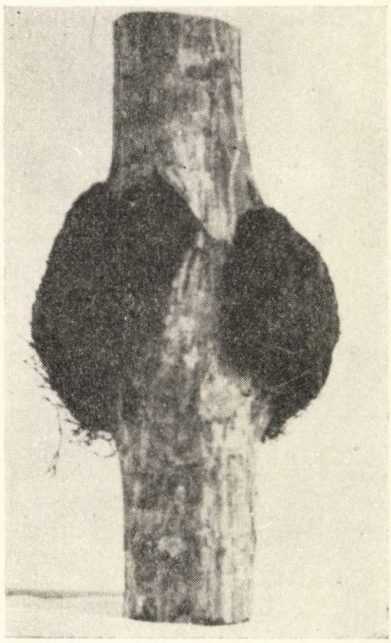


Fig. 5.

Both in the longitudinal section of the beech-tree and in the five sections of the poplar, the cellulose was determined by the Kürschner-Hoffer method [11], the lignin by the 72 % H_2SO_4 method, P. P. Komarov variant [12] and the pentosans by the Tollens 13.5 % hydrochloric acid method. For the beech-tree tumour we analysed also the extract in warm water (extraction time three hours at 80°C), to determine the dry residue, the pH of the solution and the copper number. The results of the studies are listed in table 1 for the beech-tree and in table 2 for the poplar.

Finally, in fig. 12...24 are presented microscopical aspects in normal, polarized and ultraviolet light of the cross sections of sound beech-wood and of its tumour (fig. 4), whilst in fig. 25 and 26 are presented

Table 1

Wood components	Sample number from section									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Cellulose %	43.14	51.35	37.77	40.40	42.24	47.57	43.41	46.93	50.33	44.88
Lignin %	26.74	18.87	31.29	28.15	27.18	21.21	26.75	22.45	19.77	23.32
Cellulose + lignin %	69.88	70.22	69.09	68.55	69.42	68.78	70.16	69.38	70.10	68.20
Pentosans %	12.77	11.26	14.55	13.99	13.93	13.46	13.08	13.67	10.42	14.38
Cellulose + lignin + + pentosans %	82.65	81.48	83.64	82.54	83.35	82.24	83.24	83.05	80.52	82.58
Extract in warm water (dry residue)	2.44	—	—	5.37	—	3.64	3.75	—	—	5.09
	2.83	—	—	5.43	—	4.01	3.62	—	—	4.82
average	2.63	—	—	5.40	—	3.82	3.68	—	—	4.95
Copper number of the extract	2.01	—	—	1.58	—	1.23	1.21	—	—	1.46
	1.98	—	—	1.56	—	1.28	1.19	—	—	1.43
	1.88	—	—	—	—	1.38	1.20	—	—	1.48
average	1.95	—	—	1.57	—	1.28	1.20	—	—	1.45
pH value of the extract	5.83	—	—	5.23	—	5.15	5.43	—	—	5.39
Nitrogen %	0.16	—	—	0.19	—	0.16	0.15	—	—	0.12
Proteic material %	1.00	—	—	1.18	—	1.00	0.93	—	—	0.75

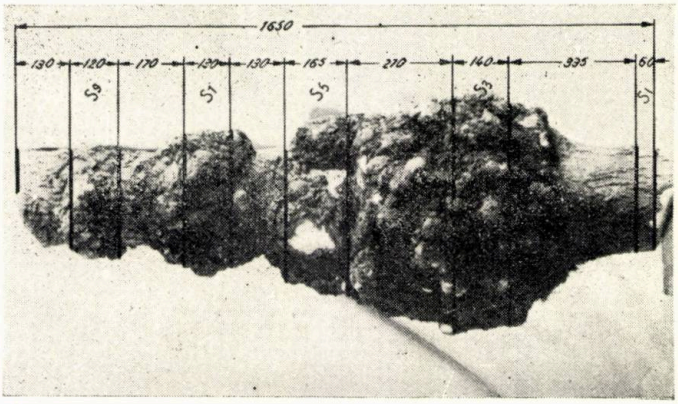


Fig. 6.

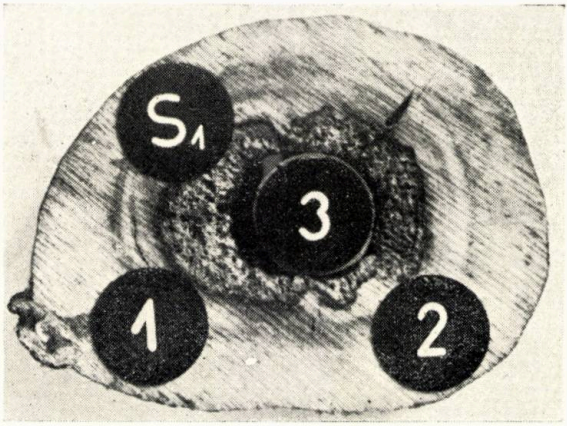


Fig. 7.

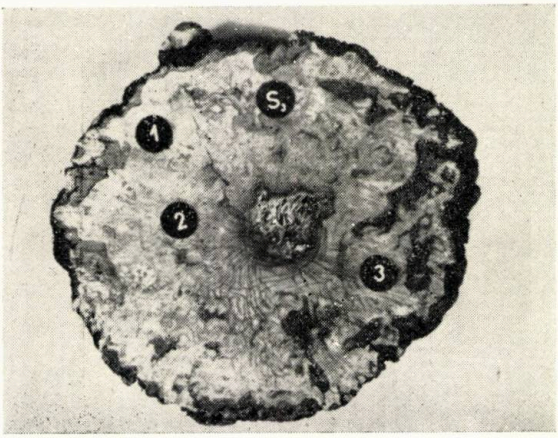


Fig. 8.

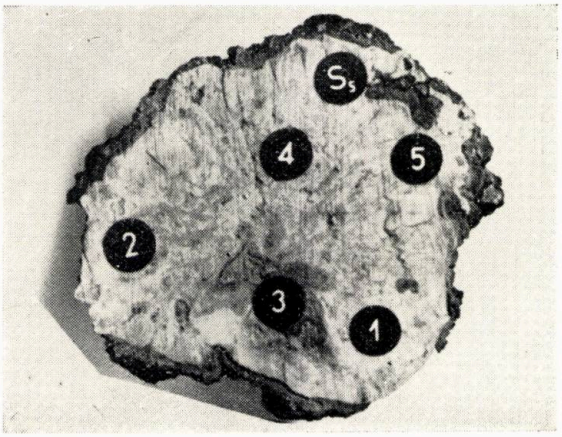


Fig. 9.

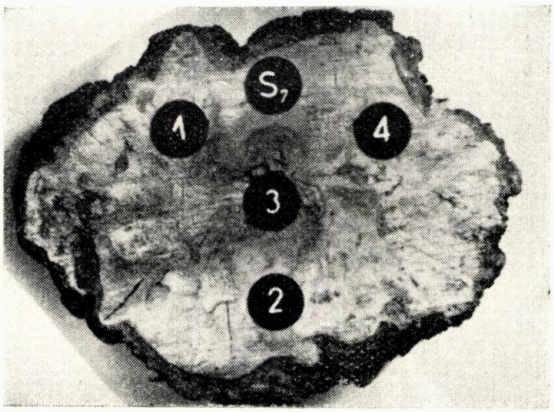


Fig. 10.

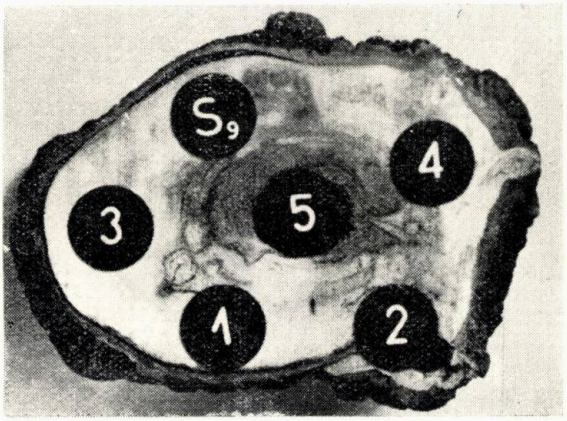


Fig. 11.

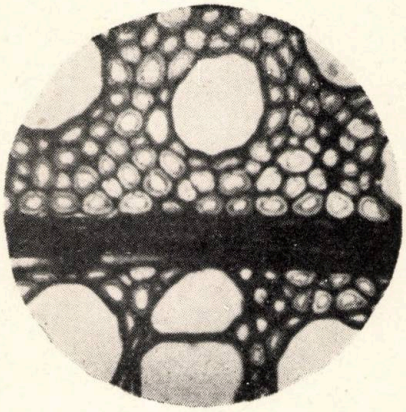


Fig. 12.

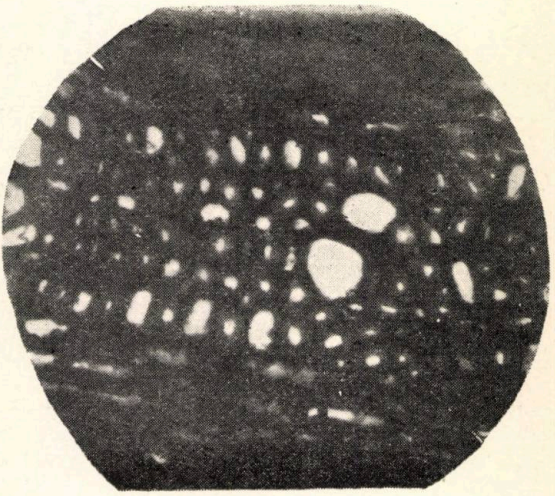


Fig. 13.

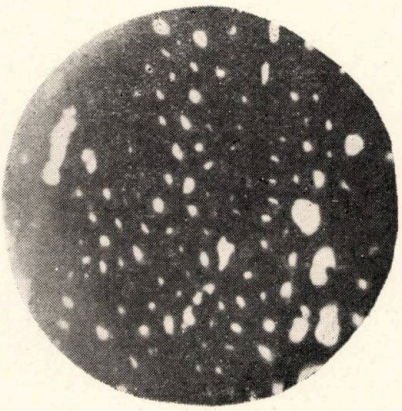


Fig. 14.

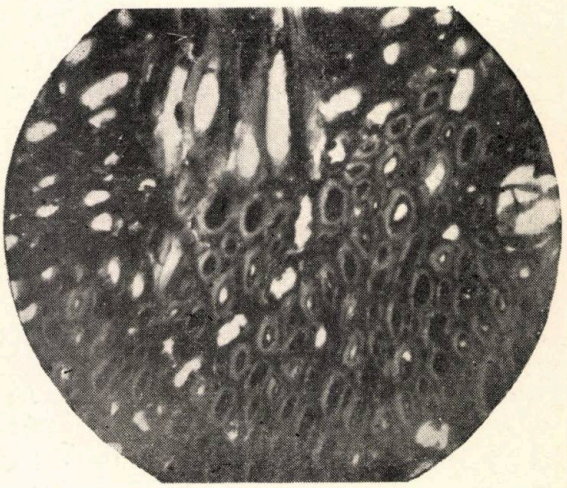


Fig. 15.

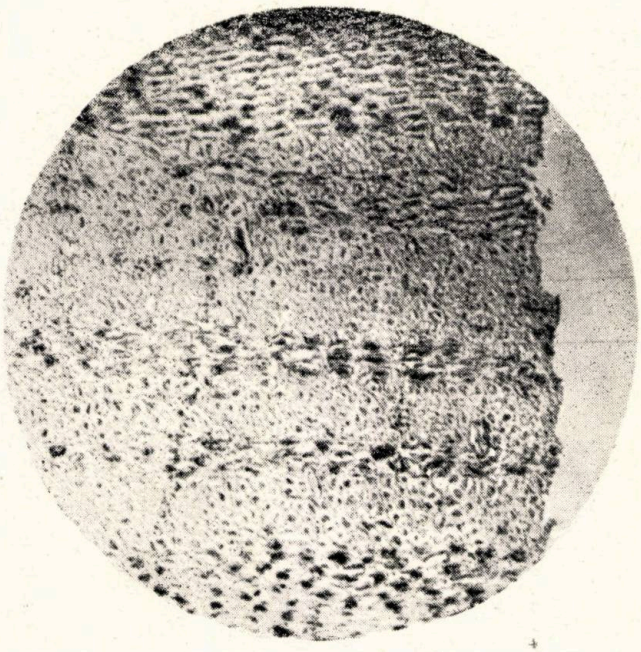


Fig. 16.

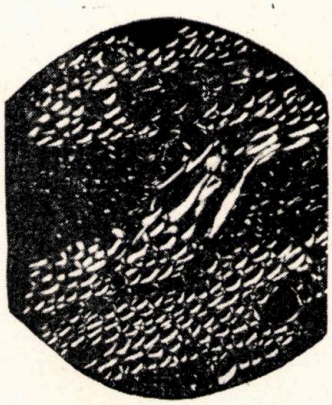


Fig. 17.

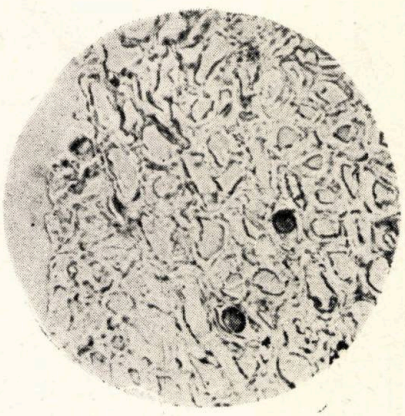


Fig. 18.

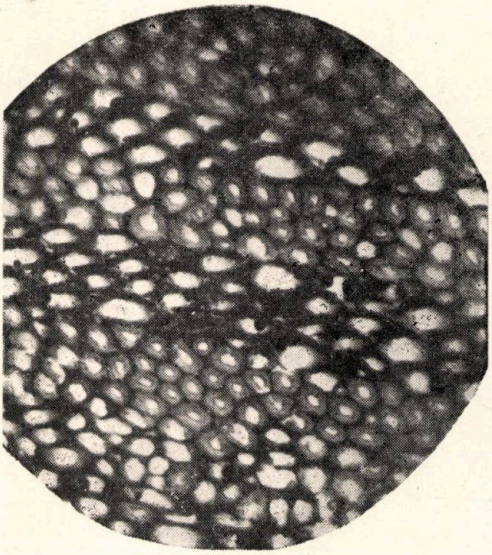


Fig. 19.

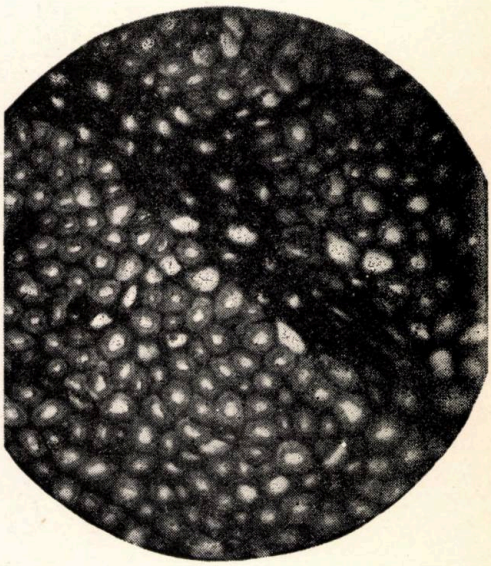


Fig. 20.

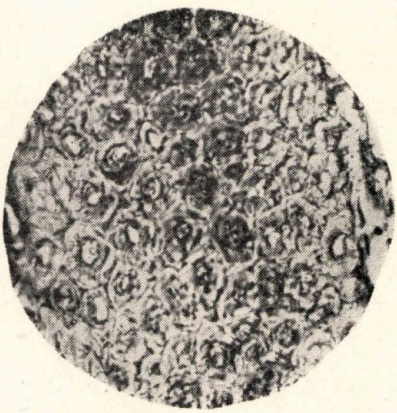


Fig. 21.

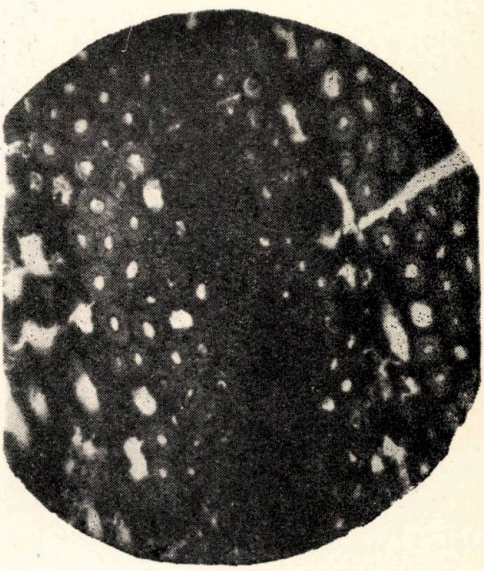


Fig. 22.

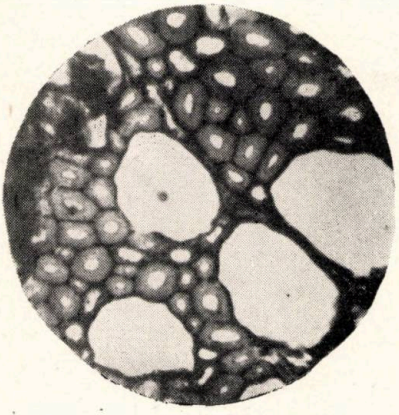


Fig. 23.

Fig. 24.

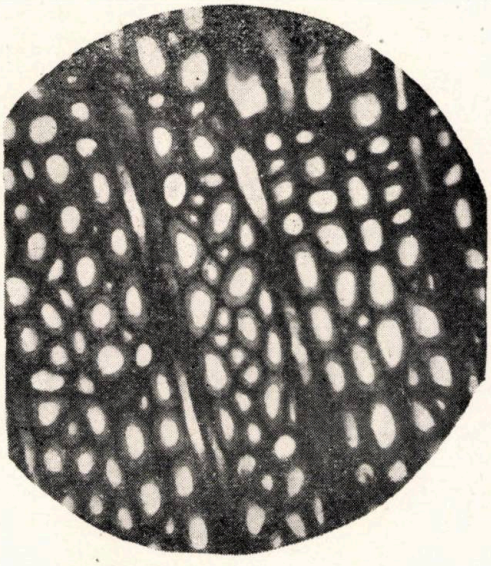


Fig. 25.

Fig. 26.

Table 2

Principal wood components	Section S_9					Section S_7		Section S_5			Section S_3			Section S_1	
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*2*	*4*	*1*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*
Cellulose	51.58	33.50	52.04	40.02	45.46	43.03	38.35	39.71	48.17	38.49	39.64	38.42	37.96	50.55	49.74
	52.05	33.58	51.96	40.76	45.25	42.95	38.80	39.49	48.34	38.03	39.74	39.29	38.31	50.42	50.97
										38.90	39.89		38.55		50.52
															50.54
average %	51.81	33.54	52.00	40.39	45.35	42.99	38.57	39.60	48.25	38.47	39.75	38.85	38.27	50.48	50.44
Lignin	22.13	37.65	21.27	31.51	27.17	29.59	34.03	33.02	22.70	36 15	32.51	35.31	35.71	19.41	22.97
	21.48	37.78	19.14	30.05	26.30	29.95	33.43	33.51	23.17	36.57	31.96	35.75	35.80	20.65	21.66
	21.66														
average %	21.75	37.71	20.20	30.78	26.73	29.77	33.73	33.26	22.93	36.36	32.23	35.53	35.75	20.03	21.31
Cellulose + lignin %	73.56	71.25	72.20	71.17	72.08	72.78	72.30	72.86	71.18	74.83	71.98	74.38	74.02	70.51	71.75
Pentosans	18.11	17.39	17.51	18.88	19.28	18.71	17.95	19.34	15.95	14.75	15.45	15 74	14.03	14.55	14.75
	17.85	17.63	17.65	19.22	19.24	19.10	17.52	18.94	15.63	14.67	15.27	15.86	14.66	14.68	14.68
											14.66	15.95	14.43	14.96	14.21
average %	17.98	17.15	17.58	19.05	19.26	18.90	17.73	19.14	15.79	14.70	15.12	15.85	14.37	14.71	14.54

microscopical aspects in ultraviolet light of the elm tree. In table 3 are given the necessary explanations for the figures cited above.

Table 3

Fig. No.	Sample taken from white circle No.	Microscopy in	Mangnification	Sort of photographs
12	*1*	ultraviolet light	410 ×	positiv 4″
13	*3*	ultraviolet light	410 ×	positiv 7″
14	*4*	ultraviolet light	410 ×	
15	*4*	ultraviolet light	410 ×	
16	*4*	white light	97 ×	
17	*4*	polarized light	195 ×	
18	*5*	white light	490 ×	
19	*5*	ultraviolet light	410 ×	
20	*7*	ultraviolet light	410 ×	
21	*8*	white light	980 ×	
22	*8*	ultraviolet light	410 ×	
23	*9*	ultraviolet light	410 ×	
24	*10*	white light	490 ×	
25	sound elm	ultraviolet light	410 ×	positiv 4″
26	elm with tumour	ultraviolet light	41 0×	positiv 4″

c) Argument on results

As we have already shown for fir-tree and beech-tree, in the case of the elm-tree cancer we noticed a firm process of lignification, the intensity of which varies with the different regions of the tumour. In the sound poplar, we find 52% cellulose and 20.20% lignin, whilst in the same section (S_9), in the chemically most modified region —but in tumefied tissue (circle *2* of S_9)— the percentage of cellulose decreases to 33.54% and lignin rises to 37.71%. *Thus, not only in the same tree, but even at the same level, betwixt the parts with cancerous cells and the opposite side, without a tumour, there exists a decrease of the cellulose contents of 16.46% and a correspondent increase of lignin of 17.51%.*

This remark concerns all the five sections of the examined tree. The sum of cellulose and lignin contents remains constant, ranging betwen 70.51 ... 74.83%. Certain unimportant variations from the average value of 72% may be explained by the presence — in the analysed spots — of the yellow fungus.

Taken as a whole, the results presented in table 1 and table 2, as well as those published previously regarding the fir-tree, *prove that the remark about the rise of lignin contents to the detriment of cellulose in the trees with tumours, holds good for many species.* This is all the more interesting as, both in the case of the beech and of the cancerous poplar, the process of lignification is denoted by an impor-

tant increase of the lignin amount (12.4% for beech and 17.5% for poplar), which means, as shown above, that the phenomenon, watched on an extended scale, is expressed by obvious biochemical modifications. In the elm-tree of fig. 5, as well as in a small swelling on a birch-tree, that is to say in less developed tumours, the decrease of the cellulose did not exceed 5% (from 47.31% cellulose in the sound elm-tree to 42.74% in the tumour and from 47.13% in the sound birch-tree to 42.11% cellulose in the swelling).

For the beech-tree tumour, the extract in hot water was analysed, presenting a pH value varying from 5.15 to 5.88, whilst the copper number varied between 1.20...1.95. The protein percentage remained within very close limits.

Certain modifications in the pentosans contents were recorded both in the beech-tree and in the poplar. Thus, in the former, the content is somewhat increased in the tumour compared to the sound wood, whereas in the poplar one may observe a decrease of the pentosan percentage in the sections S_5, S_3 and S_1. These sections belong to the main tumour, which differs by a more intensive process of cancerification, as well as a more intensive penetration of rot.

The records of the variations of the pentosans contents do not permit a generalization.

The process of lignification, so clearly expressed in the analytical results discussed above, was also watched under the internal morphological aspects of the tumours in the beech and elm-tree.

There are essential differences between the microscopical sections of sound beech and elm-wood tissues and those of the corresponding tumours. Whilst in the sound wood, the morphological aspect of the wooden fibre is the classical one, as may be observed from fig. 12 and 25, in the tumour, one may observe abnormal structures, the more evident, the more advanced the process of lignification. These anomalies relate to the orientation of the fibre, the constitution of the cellwall, the cell content, the aspect of the nucleus, the splitting off process, etc.

In most of the microscopical sections from the tumour, made in ultraviolet light, we may observe a process of lignification corresponding to the analytical data. Lignin is intensely spread, sometimes disposed in zones, the fibres present different directions (fig. 15 and 17) and contain within the lumen a brown-yellowish substance. In general, these tissues contain cells which underwent a chaotical division, with hypertrophied nuclei some of the cells possessing more than one nucleus; to be noticed that there exist normally large cells, which undergo a splitting off process and which contain small cells, in a series of microscopical sections, especially those in fig. 22. P. I. Juster in his work on the mechanism of the formation of tumours in plants, also observes small cells inside certain big cells of the sun-flower tumours *(Helyanthus annuus)* produced by *Bacteria tumefaciens* [13].

The vascular elements appear in the tumour quite irregular, cross-sectioned either transversally or longitudinally, whereas the pith rays are larger than in sound wood (fig. 19).

Following up as a whole the correspondence between the images of ultraviolet microscopy, the macroscopical modifications and the analytical data of the tumour, we may obviously establish, that the process of chemical-biological transformations is not uniformly realized, that the differences between the sound wood and the cancerous one are essential and that the method may help to elucidate some essential problems in the chemistry of wood.

3. Conclusions

In vegetable tumours, chemical-biological modifications take place, which are expressed chiefly by a *decrease of the cellulose percentage and an increase of the lignin percentage, independently of the species of tree examined, but dependent on the form and the nature of the tumour.* The fact that although the amount of lignin increases considerably, *the sum cellulose-lignin remains constant,* is quite obvious. That may prove that the process of lignification takes place on account of the degraded polysaccarides of the cellulose.

Thus, the old hypothesis with *regard to the transformation of cellulose in lignin,* seems to be confirmed by certain experimental results, some of which were presented in the present note. At the same time, we point out that the chemical-morphological study of vegetable tumours may open new horizons for the understanding of the transformations occuring in plants under particular conditions, *may comţlete with new facts the cycle of carbon in nature* and may help—better conditions for experimental work being granted — to solve one of the most important scientifical problems, that of cancer.

Solely a concordant and unitary survey of the phenomena which occur in the vegetable and animal kingdoms, as well as a thorough study of the biochemism of vegetable tumours at the same level as that carried out on animals, might intensify the rhythm of the elucidation and finally offer the means of preventing cancer, of stopping and improving its therapy.

We bring our best thanks to our colleague Prof. Dr. Germano Centola (Italy) and to our co-worker Margareta Grigoraş, for the help bestowed in the realization of this work.

Received the 30 XII 1958

Chair of Cellulose, Paper and Man-Made Fibres of the Polytechnical Institute and Section of Natural Macromolecules of the Chemical Institute „Petru Poni", Jassy.

REFERENCES

1. Parhon C. I. a. Petrea I., Nature, 1958, **X,** *5*, p. 58.
2. Parchwitz K. H., Wissenshaftliche Annales Akademie, 1953, Heft *2*, S. 123.
3. Vendég V., Rev. ştiinţelor medicale, 1951, **III**, seria 3-a, p 32.
4. Brauns E. F., *The Chemistry of Lignin*, New-York, 1952, p. 710.
5. Săvulescu Tr., Archives roumaines de pathologie expérimentale et de microbiologie, 1936, **9**, *2*, p. 209.

6. Mesrobeanu L., Idem, 1936, **9**, *1*, p. 1.
7. Adler E, Tappi, 1957, **40**, *4*, p. 294.
8. Simionescu Cr. şi colab., Bul. Inst. Polit. Iaşi (serie nouă), 1956, **II** (**IV**), *1-2*, p. 115.
9. Simionescu Cr., Grigoraş M., Paperi ja Puu, 1957, **39**, *5*, p. 283.
10. Taraschi F., *L'industria della Carta*, 1956, **10**, *6*, p. 67.
11. Hulot Levy G., *L'analyse immédiate des bois*, Paris, 1946, p. 119.
12. Rogovin A. Z. şi Sorîghina N. N., *Chimia celulozei şi a substanţelor însoţitoare*, Ed. Tehn., Euc. 1958, p. 647, (translated from Russian).
13. Juster I. P., *Contribuţiuni la studiul mecanismului formării tumorilor la plante* (teză de doctorat), 1936, tipografia Furnica, Buc., p. 54.

К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАСТИТЕЛЬНЫХ ОПУХОЛЕЙ

(Резюме)

В некоторых растительных опухолях наблюдается ряд химико-биологических изменений, характеризуемых в основном уменьшением процентного содержания целлюлозы и повышением содержания лигнина независимо от вида древесины, но в зависимости от формы и природы опухоли. Констатируют, что, несмотря на явное повышение содержания лигнина, сумма (целлюлоза + лигнин) остается постоянной в различных местах опробования изученных деревьев. Это может служить доказательством того, что процесс лигнификации идет за счет деструкции целлюлозы и полисахаридов.

Старая гипотеза относительно превращения целлюлозы в лигнин, как нам кажется, подтверждается некоторыми экспериментальными данными, часть которых представлена в таблицах 1 и 2 (бук и тополь).

Замечательно то, что морфологическое изучение растительных опухолей (бук, граб) по сравнению со здоровой древесиной, иллюстрированное 15-ю рисунками, дополнительно ведет к аналогичным выводам, полученных химическим путем, открывая тем самым новые возможности для уяснения превращений, имеющих место в растениях в необычных условиях развития; оно вносит новые факты в объяснение круговорота углерода в природе, ведет, ввиду доступности экспериментальных средств, к разрешению одного из важнейших вопросов современной науки—вопроса рака.

В работе схематично представлены возможные этапы процесса лигнификации, обсуждают на основе химического анализа и микроскопирования ультрафиолетовыми лучами химико-морфологические превращения в больной и здоровой древесине, комплектуют новыми данными круговорот углерода в природе.

ASUPRA CÎTORVA REZULTATE OBŢINUTE ÎN STUDIUL TUMORILOR VEGETALE

(Rezumat)

În unele tumori vegetale se desfăşoară modificări chimico-biologice care se traduc în principal prin scăderea procentului de celuloză şi creşterea procentului de lignină, indiferent de specia arborelui studiat, dar funcţie de forma tumorii şi natura ei. Se degajă în mod evident constatarea că deşi lignina creşte simţitor, suma celuloză + lignină rămîne constantă în diferitele regiuni ale arborilor studiaţi. Aceasta poate să constituie o dovadă că procesul de lignificare se desfăşoară pe seama polizaharidelor, a celulozei degradate.

Vechea ipoteză a transformării celulozei în lignină pare să fie deci confirmată de unele rezultate experimentale, dintre care parte sînt prezentate în lucrarea de faţă în tabelele 1 şi 2 (pentru fag şi plop).

În acelaşi timp se semnalează că studiul morfologic al tumorilor vegetale (de fag şi carpen) în comparaţie cu lemnul sănătos, reflectat în 15 figuri, este în măsură să completeze studiul chimic prin concluzii similare şi să deschidă noi perspective pentru înţelegerea tranformărilor din plante în condiţiuni particulare, să completeze cu fapte noi ciclul carbonului în natură, să ajute, dat fiind condiţiile mai accesibile de experimentare, la rezolvarea uneia din cele mai pregnante probleme ale ştiinţei, problema cancerului.

În lucrare se schematizează etapele mari ce ar putea să aibă loc în procesul de lignificare, se discută modificările chimico-morfologice din tumori, pe baza analizelor chimice şi a studiilor de microscopie în ultraviolet a secţiunilor de lemn sănătos şi bolnav şi se completează ciclul carbonului în natură cu noi date.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

675

ASUPRA STABILIRII CALITĂŢILOR CHIMICE-TEHNOLOGICE ALE EXTRACTULUI DE LEMN DE STEJAR INDIGEN OBŢINUT PRIN EXTRACŢIE SIMPLĂ ŞI EXTRACŢIE SULFITICĂ

DE

GH. ALEXA, GH. CHIRIŢĂ ŞI AGLAIA CHIRIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

1. Introducere

Tendinţa de a se utiliza cît mai economic materialele tanante în vederea tăbăcirii, a avut drept urmare o serie întreagă de cercetări care să permită a înlocui extracţia cu apă prin extracţia chimică, care duce în general la majorarea conţinutului în tanin a zemurilor obţinute. Din mijloacele propuse au dat rezultate, în special, sărurile acidului sulfuros: sulfitul şi bisulfitul de sodiu. În ţările Europei Centrale, în decursul ultimului război mondial a prezentat un interes deosebit aşa numita extracţie sulfitică [1], care duce la mărirea procentului de tanin obţinut la extracţie. După părerea lui W. Grassmann, în extracţia sulfitică se produce o sulfitare medie a particulelor de tanin greu solubile care trec în soluţie, comportîndu-se apoi ca taninuri adevărate. Extracţia sulfitică se pretează, în special, în cazul prelucrării materiilor tanante de natură pirocatehinică, în care caz sulfitul de sodiu solubilizează flobafenele, particulele aglomerate de tanin ce se găsesc în materialele tanante şi sînt datorite unor procese oxidative de natură enzimatică.

În ultimul timp, au apărut o serie de studii care sînt împotriva extracţiei sulfitice [2]. Pe baza studiilor lui Binko şi a colaboratorilor săi de la Institutul de Cercetări al Industriei de Pielărie şi pe baza cercetărilor lui Blazej, industria cehoslovacă de pielărie a renunţat de a mai face extracţie sulfitică a taninului din coaja de molid.

Blazej ajunge la concluzia necesităţii înlăturării extracţiei sulfitice a taninului din coaja de molid, în urma unor încercări practice de tăbăcire cu extract de molid, obţinut prin extracţie sulfitică. Analizînd însă după metodele internaţionale de analiză conţinutul în tanin obţinut prin extracţie sulfitică, rezultă un procent ridicat de tanin în compara-

ţie cu extracţia cu apă. Autorii găsesc acest rezultat eronat, deoarece, pudra de piele absoarbe pe lîngă produsele tanante şi alte produse cu caracter fenolic şi nefelonic, de structură mai simplă sau mai complicată, care nu aparţin însă la grupa tananţilor adevăraţi [2].

Tananţii vegetali, cît şi cei sintetici, constau dintr-un amestec de compuşi analogi şi omologi şi prin urmare ei trebuie să fie priviţi ca atare şi nu prin prizma fracţiunilor individuale din aceste amestecuri. Unele fracţiuni pot avea însuşiri tanante mai avantajoase, altele mai puţin avantajoase, însă în totalitatea acestor fracţiuni, adică extractul tanant însuşi în ansamblu, are proprietăţi cu totul diferite de fracţiunile individuale componente [3].

S-a observat că extracţia sulfitică este favorabilă, mărind procentul de tanin extras, nu numai în cazul taninurilor pirocatehinice ci şi în cazul unor taninuri pirogalice, aşa cum este taninul din lemnul de stejar [4]. După alţi autori, substanţele tanante greu solubile, din lemnul de stejar, sînt formate în special din acid elagic, compus care rezultă prin hidroliza taninurilor pirogalice, iar extracţia sulfitică nu poate avea nici un efect [5].

Întrucît fabrica „Argeşul"-Piteşti produce extract din lemn de stejar, care reprezintă peste 50% din totalul de extracte indigene produse la noi în ţară, colectivul fabricii, în dorinţa folosirii cît mai economice a materiei prime şi a îmbunătăţirii calităţii extractului obţinut, în ultimii ani, a luat o serie de măsuri tehnico-organizatorice în urma cărora s-au obţinut o serie de rezultate demne de remarcat.

Astfel, colectivul fabricii a studiat şi aplicat în producţie extracţia sulfitică, care a dus la creşterea cantităţii de tanin şi la ameliorarea cifrei de raport [6]. Consumul de lemn de stejar la o tonă de tanin pur, în timpul iernii a scăzut în medie de la 39,1 tone la 34,5 tone, iar în perioada de vară de la 38,0 tone la 33,73 tone. Extractul obţinut, în urma controlului periodic efectuat pe producţia industrială, s-a dovedit a avea o cifră de raport îmbunătăţită, prin creşterea procentului de tanin, scăderea netaninurilor şi a insolubilelor.

Stabilirea calităţii şi a proprietăţilor chimico-tehnologice a produsului obţinut prin extracţie sulfitică, în comparaţie cu extractul obţinut în urma extracţiei simple cu apă, a constituit preocuparea colectivului nostru.

În vederea atingerii acestor obiective, în lucrarea de faţă s-a studiat:

1. definirea extractelor,
2. viteza de difuzie a extractelor în piele,
3. puterea de fixare şi puterea de legare a extractelor tanante,
4. precipitarea fracţionată cu clorură de sodiu,
5. floculareа cu acizi minerali în intervalul de pH = 7, pînă la pH = 1,
6. proba de sedimentare: a) în absenţa gelatinei, b) în prezenţa gelatinei.

Toate determinările s-au efectuat pe:

a) extract de stejar „Argeşul"-Piteşti, obţinut prin extracţie sulfitică

b) extract de stejar „Argeșul"-Pitești obținut prin extracție simplă cu apă,

c) extract de stejar sovietic,

d) extract de stejar iugoslav.

S-au studiat comparativ cele două probe de extract de stejar de la „Argeșul"-Pitești, cu două probe de stejar din import, pentru a reieși o serie de concluzii care ar putea duce la îmbunătățirea extractului de stejar indigen.

2. Definirea extractelor de stejar

Extractele de stejar sovietic și iugoslav analizate sînt acele obișnuite care le primim din import, sub formă solidă.

Extractul de lemn de stejar „Argeșul"-Pitești, obținut din lemn necojit, prin extracție numai cu apă, este sulfitat ulterior cu 2% sulfit de sodiu și 2% bisulfit de sodiu, raportat la taninul pur.

Extractul tanant „Argeșul"-Pitești este obținut prin extracția sulfitică a lemnului de stejar necojit, adăugîndu-se 0,2% sulfit de sodiu față de materialul tanant și tratarea ulterioară a produsului finit cu 2% bisulfit de sodiu raportat la taninul pur.

Analiza tanică a extractelor studiate s-a făcut prin metoda agitării, respectîndu-se normele internaționale de analiză [7].

Pentru analiză, s-a folosit pudra de piele slab cromată, fabricată de Deutschen Lederinstitut-Freiberg. Apa distilată folosită la determinarea caracteristicilor extractelor tanante, are: pH=5,6 și reziduul=0%

Dozarea conținutului în zaharuri s-a făcut după metoda Appelius Schmidt [8]: un volum din soluția detanizată cu acetat de plumb, se tratează cu soluție Fehling, se aduce la fierbere, se răcește, se adaugă IK și SO_4H_2 și se titrează excesul de soluție Fehling cu tiosulfat de sodiu $n/10$. Se face o probă în alb.

Rezultatele analitice sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Definirea extractelor

Date analitice %	Stejar sovietic	Stejar iugoslav	Stejar „Argeșul"-Pitești normal	Stejar „Argeșul"-Pitești obținut prin extracție sulfitică
Umiditate	13	13	13	13
Reziduu total	87	87	87	87
Solubile totale	82,85	84,05	83,94	85,11
Tanin	47,40	58,56	44,14	48,11
Netaninuri	35,45	25,49	39,80	38,00
Insolubile	4,15	2,95	3,06	0,89
Cifra de puritate	57,20	69,56	52,58	55,87
Substanțe zaharoase	7,30	6,27	6,17	6,23
Substanțe minerale	2,36	2,12	4,44	5,30
pH-ul extractului	4,2	4,1... 4,2	4,2... 4,3	4,4... 4,5
Culoarea la tintometru Lovibond; strat de 0,5 cm. grosime:				
a) unități de galben	10,4	8,0	10,0	10,0
b) unități de roș	5,1	3,7	5,8	6,6

Cifra de raport a extractului de stejar romînesc este mai mică decît a extractelor sovietic şi iugoslav, în timp ce netaninurile sînt mai mari. Faţă de extractul iugoslav, extractul de stejar indigen este inferior. Avîndu-se în vedere că geografic, nu sînt diferenţe prea mari între pădurile noastre de stejar şi cele iugoslave, ar trebui ca să se reflecte aceasta şi în compoziţia chimică a celor două extracte.

Deosebirile dintre cele două extracte reies cu siguranţă din materia primă care se foloseşte, precum şi din tehnologia de obţinere a extractului.

Colectivul fabricii de extracte tanante „Argeşul"-Piteşti a îmbunătăţit mult tehnologia de obţinere a extractului de stejar, dar în ceea ce priveşte materia primă, mai sînt încă multe măsuri de luat pînă se va ajunge la materia primă cea mai potrivită, din care să rezulte un extract de mai bună calitate.

Analiza chimică confirmă avantajele extracţiei sulfitice care duc la un extract cu o cifră de raport îmbunătăţită, la creşterea procentului de tanin, la scăderea insolubilelor şi a netaninurilor.

3. Viteza de difuzie a extractelor în piele

Pentru determinarea vitezei de difuzie a extractelor s-a folosit piele gelatină crupon-bovine categoria 19 kg, cu o grosime de cca. 3,5 ... 4,0 mm, care a fost pregătită astfel: pielea gelatină, cenuşerită cu var şi sulfură de sodiu a fost decalcificată cu 0,6% clorură de amoniu şi 0,1% acid clorhidric şi o flotă de 250%. Durata decalcificării a fost de 24 ore. A urmat apoi o spălare intensă, după care probele de piele au fost ţinute timp de 24 ore în soluţie de clorură de potasiu $n/10$. pH-ul pielii astfel pregătită măsurat cu un pH-metru cu electrod de chinhidronă este de 6,8.

S-au tăiat bucăţi egale de piele cu dimensiunile de 5×7 cm, s-au spălat cu apă distilată şi apoi au fost suspendate în vase care conţineau 500 cm^3 din soluţiile tanante de studiat.

Pentru fiecare extract tanant s-au pregătit soluţii care să conţină 0,5; 1; 2; 4; 8% reziduu uscat. După 1, 3, 6, 12 şi 24 ore de la introducerea pielii gelatină în soluţiile tanante a fost luată cîte o fîşie de 3... 5 mm de piele, citindu-se apoi la microscop pătrunderea taninului în piele. S-a socotit a nu fi necesară o durată mai mare de şedere a pielii gelatină în contact cu soluţiile tanante pentru a se determina viteza de difuzie a extractelor tanante, deoarece diferenţieri mai mari între vitezele de difuzie a diferitelor extracte tanante se manifestă numai în primele ore de tăbăcire [9], [10], apoi viteza de difuzie scade ajungînd la o valoare apropiată.

Pătrunderea taninului în pielea gelatină a fost calculată numai dinspre faţa pielii, în procente, faţă de secţiunea pielii.

Temperatura soluţiilor tanante a fost de 18... 20° C. S-a determinat pătrunderea taninului în pielea gelatină la concentraţiile de 0,5; 1; 2; 4; 8% reziduu uscat.

Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 2. Din analiza rezultatelor, reiese că cea mai bună pătrundere o are extractul de stejar sovietic, apoi extractul iugoslav, urmat de extractul de stejar indigen.

Se constată că prin extracţia sulfitică se obţine un extract de stejar cu o putere mai mare de pătrundere în pielea gelatină, în comparaţie cu extractul de stejar obţinut prin extracţia numai cu apă.

Cunoscînd pătrunderea taninului în pielea gelatină (în mm), s-a calculat viteza de difuzie a extractului tanant, aplicînd formula $V = S/T$, în care V—viteza de difuzie, S—secţiunea pătrunsă (în mm) şi T—timpul

de pătrundere (în ore). Rezultatele sînt date în tabelul 3. La viteza de difuzie ca și la pătrunderea taninului în pielea gelatină, se pot face aceleași observații.

Tabelul 2

Pătrunderea taninului în gelatină

Extractul de	Durata de tăbăcire în ore				
	1	3	6	12	24
Concentrația zemii : 0,5% substanță uscată					
Stejar sovietic	7,7	8,8	18,4	21,5	23,9
Stejar iugoslav	5,4	10,5	12,2	14,3	22,8
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	4,5	7,8	9,5	14,6	17,3
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	4,8	7,6	14,3	15,8	17,9
Concentrația zemii : 1% substanță uscată					
Stejar sovietic	8,1	8,8	17,1	18,9	27,0
Stejar iugoslav	7,8	8,1	17,1	17,9	26,3
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	7,5	8,7	11,1	14,6	18,4
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	8,1	9,2	14,6	15,8	24,2
Concentrația zemii : 2% substanță uscată					
Stejar sovietic	8,1	14,3	20,9	22,8	28,2
Stejar iugoslav	8,2	14,3	20,2	22,5	27,2
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	7,8	11,1	13,1	17,1	26,3
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	8,4	12,8	19,0	20,0	30,0
Concentrația zemii : 4% substanță uscată					
Stejar sovietic	9,7	15,2	27,33	29,1	30,6
Stejar iugoslav	10,2	15,3	21,9	27,3	28,2
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	8,5	12,2	16,9	20,2	33,3
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	8,9	14,8	19,5	26,9	36,1
Concentrația zemii : 8% substanță uscată					
Stejar sovietic	13,2	18,8	26,8	30,8	40,5
Stejar iugoslav	13,6	17,9	21,3	28,0	36,8
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	10,8	14,5	20,5	28,6	34,3
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	12,1	14,6	21,4	30,9	37,8

Tabelul 3

Vitezele de difuzie ale extractelor tanante (mm/oră)

Extractul de	După					Valoarea medie
	1 oră	3 ore	6 ore	12 ore	24 ore	
Concentraţia zemii : 0,5% substanţă uscată						
Stejar sovietic	0,310	0,117	0,123	0,072	0,040	0,133
Stejar iugoslav	0,216	0,140	0,081	0,048	0,038	0,105
Stejar „Argeşul"-Piteşti, normal	0,180	0,103	0,063	0,049	0,029	0,085
Stejar „Argeşul"-Piteşti, obţinut prin extracţie sulfitică	0,192	0,101	0,095	0,053	0,030	0,095
Concentraţia zemii : 1% substanţă uscată						
Stejar sovietic	0,324	0,117	0,114	0,063	0,045	0,0133
Stejar iugoslav	0,312	0,122	0,114	0,060	0,044	0,130
Stejar „Argeşul"-Piteşti, normal	0,300	0,116	0,074	0,049	0,031	0,114
Stejar „Argeşul"-Piteşti, obţinut prin extracţie sulfitică	0,324	0,123	0,097	0,053	0,040	0,127
Concentraţia zemii : 2% substanţă uscată						
Stejar sovietic	0,324	0,191	0,139	0,076	0,047	0,156
Stejar iugoslav	0,327	0,191	0,134	0,075	0,046	0,155
Stejar „Argeşul"-Piteşti, normal	0,312	0,148	0,087	0,057	0,044	0,130
Stejar „Argeşul"-Piteşti, obţinut prin extracţie sulfitică	0,336	0,171	0,127	0,067	0,050	0,150
Concentraţia zemii : 4% substanţă uscată						
Stejar sovietic	0,388	0,203	0,182	0,097	0,051	0,186
Stejar iugoslav	0,403	0,204	0,146	0,091	0,047	0,179
Stejar „Argeşul"-Piteşti, normal	0,340	0,163	0,113	0,067	0,055	0,148
Stejar „Argeşul"-Piteşti, obţinut prin extracţie sulfitică	0,356	0,197	0,130	0,089	0,060	0,167
Concentraţia zemii : 8% substanţă uscată						
Stajar sovietic	0,528	0,251	0,178	0,103	0,067	0,225
Stejar iugoslav	0,544	0,248	0,142	0,094	0,061	0,217
Stejar „Argeşul"-Piteşti, normal	0,432	0,193	0,135	0,095	0,058	0,182
Stejar „Argeşul"-Piteşti, obţinut prin extracţie sulfitică	0,484	0,173	0,142	0,103	0,063	0,193

4. Puterea de fixare şi puterea de legare a extractelor tanante

Indicele de fixare (sau puterea de fixare) reprezintă cantitatea de tanin absorbit sau fixat de 100 g pudră de piele, dintr-o soluţie de 6% substanţă tanantă, după o agitare de 3 ore sau 24 ore.

Indicele de combinare (sau puterea de legare) reprezintă cantitatea de tanin fixat ireversibil de 100 g pudră de piele după o agitare de 3 ore sau 24 ore.

S-au preparat soluții de 6 % tanin care s-au centrifugat cîte 30 minute, la o centrifugă cu 3000 rot/min. pentru îndepărtarea insolubilelor, apoi s-a determinat puterea de fixare și puterea de legare a extractelor tanante la 3 ore și la 24 ore, după metoda Wilson și Kern [11].

Se cîntăresc 5 g pudră de piele uscată, necromată, se introduce într-un flacon de agitare de 500 cm^3 peste care se adaugă 125 cm^3 apă distilată și 25 cm^3 din soluția clară de 6 % tanin pur. Se agită apoi flaconul într-un agitator rotativ, timp de 3 ore sau 24 ore. Din jumătate în jumătate de oră de adaugă cîte 25 cm^3 din soluția de 6 % tanin pur, pînă la un total de 125 cm^3.

După 3 ore sau 24 ore de agitare, se filtrează, soluția se centrifughează și cu ea se determină puterea de fixare, iar pudra de piele se introduce într-un filtru clopot Procter și se trece peste ea, în timp de 12 ore, 9 l de apă distilată, determinîndu-se puterea de legare.

Pentru determinarea indicelui de fixare, se determină solubilele totale prin evaporarea și aducerea la pond constant a 10 cm^3 de soluție de 6 % tanin pur centrifugată. Se iau în considerație, în calcul, solubilele ce rezultă din cele 5 g pudră de piele luate în lucru.

Rezultatele sînt date în tabelul 4.

Tabelul 4

Indicii de fixare și indicii de combinare ai extractelor

Extractul de	Indicii de fixare după		Indicii de combinare după	
	3 ore	24 ore	3 ore	24 ore
Stejar sovietic	54,67	71,49	27,73	35,15
Stejar iugoslav	60,23	74,00	25,81	37,73
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	55,39	68,64	28,79	39,22
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	53,45	65,77	26,76	38,10

Din datele tabelului 4 rezultă că puterea de fixare a extractului de stejar indigen, obținut prin extracție cu apă sau extracție sulfitică, este mai mică decît a extractelor cu care s-a făcut comparația. Prin extracție sulfitică se obține un extract de stejar cu o putere de fixare mai mică decît puterea de fixare a extractului obținut prin extracție cu apă. Puterea de combinare a extractului de stejar indigen este mai bună decît a extractelor cu care s-a făcut comparația. Prin extracție sulfitică, după cum era și de așteptat, puterea de combinare este mai mică decît a extractului obținut normal.

5. Precipitarea fracționată cu clorură de sodiu

Viteza de pătrundere în interiorul țesutului dermic este invers proporțională cu dimensiunile particulelor de tanin iar pe de altă parte, particulele de tanin pot avea o afinitate cu atît mai mare pentru fibra dermică cu cît sînt mai mari.

Pentru determinarea astringenței extractelor tanante studiate s-a aplicat metoda de precipitare fracționată cu clorură de sodiu.

S-a lucrat cu soluţii de 1 % tanin. S-au îndepărtat insolubilele prin centrifugare timp de 30 minute, cu 3000 rot/min. Din soluţia liberă de insolubile sau luat 10 cm³ la care s-a adăugat iar 1,1 g clorură de sodiu, fin pulverizată, s-au agitat 30 minute, apoi s-a centrifugat 30 minute la 3000 rot/min. Se separă sedimentul. În soluţia rezultată s-a adăugat iar 1,1 g clorură de sodiu, s-a agitat, s-a centrifugat, s-a separat sedimentul, operaţia repetîndu-se cu alţi 1,1 g clorură de sodiu. Sedimentele s-au solvit separat cu apă distilată, s-au adus la 100 cm³, dozîndu-se taninul după metoda Löventhal.

Datele analitice sînt cuprinse în tabelul 5.

Din tabelul 5 se observă că extractul de stejar indigen este cel mai astringent. Extractul de stejar obţinut prin extracţie sulfitică are astringenţa mai mică decît extractul obţinut prin extracţie cu apă.

Tabelul 5

Precipitarea fracţionată cu clorură de sodiu

Extractul de	Substanţe precipitabile cu NaCl, la adaos de:			Total precipitabile	Neprecipitabile
	1,1 g	2,2 g	3,3 g	%	%
Stejar sovietic	27,74	17,20	17,19	62,13	37,87
Stejar iugoslav	31,62	21,73	14,55	67,90	32,10
Stejar „Argeşul"-Piteşti, normal	34,25	24,37	12,38	71,20	28,80
Stejar „Argeşul"-Piteşti, obişnuit prin extracţie sulfitică	31,87	23,19	13,18	68,24	31,76

6. Floculareа cu acizi minerali în intervalul de pH=7 pînă la pH=1

S-a studiat pe soluţii analitice de 4 g tanin/l, imediat după prepararea lor. Cantitatea de extract cîntărită este dizolvată imediat într-un flacon cotat de 1 l, cu apă clocotită. Se răceşte soluţia sub agitare, timp de o oră. Se adaugă, imediat după răcire, 2 cm³ toluen, pentru a se înlătura apariţia fermentaţiei. Se fac imediat cercetările necesare pentru a se evita apariţia fenomenelor de îmbătrînire ce influenţează gradul de dispersie [12]. Zemurile cu concentraţia analitică, se aduc la pH=7 prin adaus de hidrat de sodiu normal, se filtrează pentru a se obţine o soluţie clară. Din soluţia de analizat s-au luat probe de cîte 50 cm³ cărora li s-au adăugat cantităţi crescînde de HCl normal, formîndu-se astfel o scară de soluţii cu pH-uri care să varieze de la probă la probă, cu 0,1 unităţi de pH. După jumătate de oră de şedere, se determină proba la care se observă o tulburare a soluţiei, determinîndu-se astfel punctul de tulburare a extractului respectiv. De la această probă, pînă la capătul şirului de probe, se centrifughează, după care se duce la pH=1 cu HCl normal. După altă jumătate de oră se determină proba la care nu se mai observă nici un precipitat.

pH-ul acestei probe, înainte de a fi fost adusă la valoarea 1, reprezintă punctul de floculare.

Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 6.

Floculareа cu acizi constituie un indiciu al vitezei de difuzie a taninului în piele, care depinde de astringenţa fiecărui extract în parte. Cu cît un extract va avea particule mai mari, cu atît floculareа în prezenţa acizilor va avea loc la un pH mai ridicat. În cazul de faţă, as-

tringențele extractelor fiind apropiate și punctele de floculare sînt apropiate, arătînd mici variații.

Tabelul 6

Flocularea cu acid clorhidric între pH=7 *și* pH=1

Extractul de	Punctul de tulbureală pH	Punctul de floculare pH
Stejar sovietic	3,5...3,6	1,8
Stejar iugoslav	4,15	1,9...2,0
Stejar „Argeșul"-Pitești, normal	2,8	1,9
Stejar „Argeșul"-Pitești, obținut prin extracție sulfitică	3,2	1,6...1,7

7. Proba de sedimentare

Sedimentarea extractelor, fie în prezența gelatinei, fie în absența gelatinei, dă o serie de indicații privind solubilizarea lor, la concentrații diverse de utilizare și pe baza acestor date se pot trage concluzii asupra comportării extractelor la tăbăcire [13].

a) *Sedimentarea în absența pielii gelatine*

Sedimentarea în absența gelatinei s-a determinat fără încălzire prealabilă și după încălzirea prealabilă a extractelor de studiat.

I. Sedimentarea în absența pielii gelatine fără încălzire prealabilă a extractelor

Pentru determinarea cantitativă a depozitului format de extracte prin sedimentare, s-au preparat soluții de extracte tanante de următoarele concentrații: 1^0, 2^0, 3^0, 4^0,

Tabelul 7

Sedimentarea fără încălzire prealabilă a extractelor (% volume)

°Bé	Stejar sovietic după		Stejar iugoslav după		Stejar „Argeșul", obținut prin extracție sulfitică după		Stejar „Argeșul" normal după	
	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore
1	2,4	2,4	3,0	2,2	5,0	5,0	1,5	1,2
2	8,7	7,0	9,0	10,0	7,5	8,0	7,5	7,1
3	8,7	7,4	10,0	8,0	9,5	9,7	11,6	11,5
4	12,0	10,5	15,0	15,0	9,5	9,7	12,0	13,0
5	18,0	17,5	17,5	17,5	14,0	13,5	21,1	22,1
6	17,0	17,5	18,0	17,5	21,0	19,5	25,5	25,0
7	18,0	18,0	25,0	25,5	23,0	22,5	48,2	38,6
8	25,0	24,0	37,5	32,0	27,0	26,0	51,0	42,8
9	30,0	27,0	26,7	24,0	31,5	29,0	34,5	33,0
10	30,0	27,0	29,0	28,0	39,0	35,0	68,1	53,8
11	29,0	27,5	26,3	25,0	41,0	37,0	65,0	52,0
12	38,0	33,0	33,2	31,5	45,5	39,5	79,5	67,6

5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, 11° şi 12° Bé, care s-au pus în cilindri gradaţi de 100 cm^3 şi s-au lăsat în repaus. După 24 şi 48 ore s-a citit volumul depozitului format, care s-a raportat la volumul total al soluţiei pusă în cilindri. Rezultatele sînt date în tabelul 7.

Se observă din datele tabelului 7 că depozitul format de extractul de stejar indigen, obţinut prin extracţie cu apă, este mai mare decît depozitul format de extractul de stejar obţinut prin extracţie sulfitică. Aceasta se datoreşte acţiunii de solubilizare a insolubilelor de către sulfitul de sodiu în timpul extracţiei sulfitice.

II. Sedimentarea în absenţa pielii gelatine, cu încălzire prealabilă

Soluţiile extractelor studiate de 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, 11° şi 12° Bé au fost încălzite pe baie de apă la 40° timp de o oră. Apoi au fost turnate în cilindri gradaţi şi s-a observat depozitul format după 24 ore şi 48 ore.

Tabelul 8

Sedimentarea cu încălzire prealabilă a extractelor (% volume)

°Bé	Stejar sovietic după		Stejar iugoslav după		Stejar „Argeşul", obţinut prin extracţie sulfitică după		Stejar „Argeşul", normal după	
	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore
1	3,5	3,2	2,0	1,5	5,0	5,0	2,5	2,5
2	12,0	10,2	6,1	7,5	25,5	21,5	12,6	11,4
3	17,0	14,0	9,0	10,0	53,0	40,5	24,5	22,1
4	18,0	16,5	19,4	18,5	55,0	42,0	29,2	27,5
5	19,0	16,5	26,5	23,5	58,5	43,0	30,0	27,5
6	21,5	18,0	25,0	25,0	65,0	45,0	32,0	28,4
7	21,5	19,0	36,3	29,0	65,0	46,0	83,5	67,7
8	36,5	26,5	37,0	42,0	75,0	58,0	83,0	73,0
9	46,0	31,5	58,5	43,5	68,0	50,0	87,1	76,8
10	53,0	36,0	59,0	45,0	74,0	50,5	82,2	76,0
11	50,0	37,0	68,0	47,0	75,0	50,0	87,5	82,1
12	56,0	39,0	66,5	47,5	76,0	58,0	91,0	83,4

Datele analitice sînt cuprinse în tabelul 8. Sedimentele formate, volumetric, sînt mai mari în comparaţie cu sedimentele formate la extractele fără încălzire prealabilă. În ceea ce priveşte mărimea sedimentelor extractelor studiate, se poate spune acelaşi lucru ca şi în cazul sedimentării fără încălzire prealabilă.

b) *Sedimentarea în prezenţa gelatinei*

Pentru determinarea sedimentului în prezenţa pieilor, s-a lucrat cu piele gelatină — bovine — categoria 31 ... 35 kg, cenuşerită cu var şi sulfură de sodiu şi decalcificată complet cu 0,6% clorură de amoniu şi 0,3% acid clorhidric. Probele de piele s-au tăbăcit în pahare într-o flotă de 400%, cu zemuri începînd cu 1° Bé pînă la 12° Bé inclusiv.

Soluţia s-a schimbat zilnic, cu o zeamă nouă, de concentraţie determinată. Din zeama epuizată, după 24 ore de tăbăcire, s-a luat o cantitate din fiecare probă, care s-a pus în cilindri gradaţi, măsurîndu-se sedimentul după 24 ore şi 48 ore.

Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 9.

Se constată că extractele de stejar iugoslav și sovietic au depozitul maxim la 70° Bé, pe cînd la extractul de stejar indigen, sedimentul crește o dată cu concentrația și în nici un caz nu se poate preciza care este concentrația sedimentului maxim.

Tabelul 9

Sedimentarea în prezența pielii gelatină (% volume)

°Bé	Stejar sovietic după		Stejar iugoslav după		Stejar „Argeșul", normal după		Stejar „Argeșul", obținut prin extracție sulfitică după	
	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore	24 ore	48 ore
1	8,0	8,3	8,5	8,0	7,0	4,0	3,0	2,0
2	8,0	8,2	6,0	6,0	7,5	7,0	4,0	3,6
3	8,5	9,0	16,0	14,0	7,0	6,0	2,0	2,0
4	17,0	16,0	39,0	29,5	14,0	16,0	5,0	8,5
5	26,0	25,0	62,0	42,0	25,0	24,0	20,0	21,0
6	26,0	24,5	68,5	57,2	27,0	25,0	29,5	26,5
7	30,0	24,0	85,5	70,0	—	—	42,0	32,5
8	27,0	25,0	38,0	32,5	29,0	25,0	47,0	41,5
9	26,0	19,0	42,0	33,0	22,5	20,0	34,5	30,0
10	25,0	23,0	33,0	28,5	65,0	45,0	29,0	23,0
11	23,0	18,0	28,5	23,5	58,0	50,6	60,0	38,0
12	18,0	15,0	25,0	20,0	52,0	42,0	40,0	28,0

8. Concluzii

1. Extractul de stejar indigen, atît cel obținut prin extracție cu apă, cît și cel obținut prin extracție sulfitică, este inferior extractului iugoslav și celui sovietic. Pentru îmbunătățirea calității extractului indigen trebuie în primul rînd îmbunătățită materia primă și în al doilea rînd perfecționat procesul tehnologic.

2. Extractul de stejar obținut prin extracție sulfitică are unele calități mai bune în comparație cu extractul normal. Astfel, i s-a îmbunătățit cifra de raport, viteza de difuzie a crescut în comparație cu extractul de stejar obținut prin extracție cu apă.

3. Proba de sedimentare, atît în prezența cît și în absența gelatinei la extractul de stejar indigen, dovedește de asemenea că este inferior extractelor de stejar cu care s-a făcut comparația.

4. Avîndu-se în vedere că prin extracția sulfitică s-a mărit randamentul în tanin raportat la materia primă cu peste 10% și că extractul obținut este superior celui obținut prin extracția numai cu apă, s-a realizat un progres, urmînd să se continue preocupările pe linia îmbunătățirii extractului de stejar indigen.

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Tehnologia Pielii,
Confecțiilor de Piele și a Tananților

BIBLIOGRAFIE

1. Grassman W. u. Kuntara W., Collegium, 1943, S. 79.
2. Blazej A. u. Markusovska E., Das Leder, 1957, *4*.
3. Süszer A., Revista de chimie, ASIT, 1957, *3*, p. 156.
4. Mihailov A. N., *Chimia substanţelor tanante şi a proceselor de tăbăcire*, vol. II, I.D.T., Buc. p. 210, (trad. din l. rusă).
5. Alexandrescu Gr. Gr. şi colab., *Extracţia sulfitantă la difuzie* (studiu făcut la fabrica „Argeşul"), 1952, (manuscris).
6. Mihai P., Revista de chimie, ASIT, *5*, pp. 255—259.
7. * * * *Méthodes officielles d'analyse de la Société Internationale des Chimistes des Industries du Cuir*, Harvey Publisher, Londra, 1938.
7. Bergmann M., Gnamm u. Vogel W., *Die Gerbung mit Pflanzengerbstoffen* Wien, 1931, S. 205—206.
9. Mezey E., Collegium, 1925, S. 305.
10. * * * M.I.U., Inst. de Cercetări Textile, Pielărie, Cauciuc, 1954, p. 14.
11. Küntzel A., *Gerbereichemisches Taschenbuch*, 6-e Auflage, Dresden u. Leipzig, 1955, S. 195—197.
12. Gerngross O. u. Herfeld H., Collegium, 1932, S. 679—709.
13. Sagoschen I., Collegium, 1932, S. 501—505.

К ВОПРОСУ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ДУБОВОГО ЭКСТРАКТА, ПОЛУЧЕННОГО ВОДНОЙ И СУЛЬФИТНОЙ ЭКСТРАКЦИЯМИ

(Резюме)

Ввиду улучшения качества дубового экстракта, полученного на заводе „Арджешул" - Питешть, ввели сульфитную экстракцию, прибавляя в диффузор № 4 0,2% сернокислого натрия в пересчёте к количеству сырья. Этим методом получают экстракт с улучшенным показателями.

Отечественный дубовый экстракт сравнивали с советским и югославским экстрактами и констатировали пониженное качество первого.

Полученный дубовый сульфитный экстракт обладает повышенной доброкачественностью; содержание нерастворимых веществ понизилось от 3,06% до 0,89%. Скорость диффузии дубителя в гольевой порошок повышена. Объём осадка при различных концентрациях меньше соответствующего объема, полученного для водного экстракта.

SUR LES QUALITÉS CHIMIQUES ET TECHNOLOGIQUES DES EXTRAITS DE BOIS DE CHÊNE OBTENUS PAR L'EXTRACTION SULFITIQUE ET PAR EXTRACTION AQUEUSE

(Résumé)

Pour l'amélioration du rendement en tanin extrait du bois de chêne ainsi que pour l'obtention d'un extrait avec des qualités meilleures, la fabrique „Argeşul"-Piteşti, fait l'extraction du bois en présence de 0,2% de sulfite de sodium, calculé au poid du bois.

Dans le présent travail on étudie l'extrait de bois de chêne obtenu à l'extraction sulfitique, du point de vue chimique et tehnologique, en comparaison du même extrait obtenu à l'extraction aqueuse ainsi qu'en comparaison avec d'autres extraits de bois de chêne (soviétique et jugoslave).

Les résultats de cette étude montrent que par l'extraction sulfitique on obtient un extrait meilleur. En effet, l'extrait de bois de chêne obtenu par extraction sulfitique possède un chiffre de pureté amelioré.

Par l'extraction sulfitique les insolubles diminuent de 3,06% à 0,89%. De même, la vitesse de diffusion de l'extrait sulfitique dans la peau en tripe augmente.

Le dépôt volumétrique à différentes concentrations, est plus petit pour l'extrait obtenu par extraction sulfitique que pour celui obtenu par l'extraction à l'eau pure.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

CÎTEVA OBSERVAŢII ASUPRA EXTRACTULUI DE COAJĂ DE BRAD *(ABIES PECTINATA)* ŞI A ACELUIA DE COAJĂ DE MOLID *(PICEA EXCELSA)*

DE

C. STRUB, IRINA IAROŞINSCHI-DRABIC ŞI CORNELIA MAGA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

Bradul (*Abies*), ca şi molidul (*Picea*), aparţine familiei *Pinaceaelor* din clasa *Gymnospermelor* [1] şi este comun etajului montan, crescînd diseminat, în amestec cu molidul [1, pp. 87...88] în ţara noastră fiind însă procentual depăşit de către acesta.

Conţinutul în tanin al coajei de molid variază între 7,49% şi 15,1%, iar cifra de puritate între 38,9% şi 55,1% [2], pe cînd cel al coajei de brad variază între 3,19% şi 5,82%, funcţie de vîrsta arborelui şi de înălţimea în raport cu baza arborelui, de la care a fost recoltată coaja; cifra de puritate a extractului creşte în acelaş sens cu conţinutul în tanin, atingînd valori cuprinse între 62,23% şi 64,83% [3].

Această cifră de puritate neobişnuit de mare pentru materialele tanante vegetale indigene, atît lemnoase cît şi ierboase, ne-a determinat a cerceta în continuare, unele proprietăţi ale extractului de coajă de brad, obţinut prin extracţie obişnuită în mediu apos, ca şi comportarea acestuia faţă de pielea gelatină, în raport cu proprietăţile şi comportarea extractului de coajă de molid.

În acest scop au fost utilizate extracte de coajă de brad şi de coajă de molid, cu compoziţia indicată în tabelul 1.

Extractele tanante, atît cel de coajă de brad cît şi cel de coajă de molid au fost obţinute în condiţii identice, într-o baterie de 6 difuzoare de lemn, cu o capacitate de cîte 10 litri fiecare, după principiul contra curentului, la temperaturi crescînde pînă la temperatura optimă de extracţie, respectiv 100°C [3], [4]. Cifra de puritare a extractului de coajă de molid astfel obţinut (46,35%) este cuprinsă între limitele deja indicate, ce caracterizează coaja de molid [2]; cifra de puritate însă, a extractului de coajă de brad, obţinut după cum am spus, în condiţii identice de extracţie şi concentrare, este mult redusă, în raport cu aceea stabilită în cursul definirii coajei de brad ca material tanant, prin metoda oficială de analiză tanică [5], [6], (36,26% în raport cu 62,23%

Tabelul 1

Compoziţia extractelor de coajă de brad şi coajă de molid

Date analitice %	Extract de coajă de brad	Extract de coajă de molid
Umiditate	14,50	14,50
Insolubile	8,96	6,52
Tanin	26,99	36,61
Netanin	49,55	42,37
Cifra de puritate	35,26	46,35

pînă la 64,83%) ceea ce trebuie explicat prin marea sensibilitate la temperatură a taninurilor cojii de brad [3] şi a tendinţei accentuate a soluţiilor de extract de coajă de brad de a da naştere unor depozite insolubile, abundente.

Tabelul 2

Ziua	Extract de coajă de brad (soluţie)		Extract de coajă de molid (soluţie)		Amestec de extracte de coajă de brad şi de molid (soluţie)	
	Densitatea ° Bé					
	rezidual㠠	după redresare	rezidual㠠	după redresare	rezidual㠠	după redresare
0	—	0,3	—	0,3	—	0,3
1	0,25	0,5	0,2	0,5	0,05	0,5
2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,45	0,5
3	0,5	0,8	0,5	0,8	0,4	0,8
4	0,7	0,8	0,7	0,8	—	—
5	0,7	1,2	0,65	1,2	0,65	1,2
6	1,1	1,2	1,1	1,2	1,0	1,2
7	1,1	1,6	1,2	1,6	1,0	1,6
8	1,55	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6
9	1,6	2	1,5	2	1,6	2
10	2	2,5	2	2,5	2	2,5
11	2,3	2,5	—	—	—	—
12	2,4	3	2,4	3	2,5	3
13	2,8	3	2,8	3	—	—
14	3	3	3	3	3	3
15	—	—	—	—	3	3
16	—		—	—	—	—
17	3	3,5	3	3,5	3	3,5
18	—	—	—	—	—	—
19	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
20	—	—	—	—	—	—
21	3,5	4	3,5	4	3,5	4
22	4	4	3,7	4	4	4
23	4	5	4	5	4	5

Pentru a urmări comportarea acestor extracte (în soluţie) în raport cu pielea gelatină, am supus în paralel, trei serii de probe de piele gelatină, acţiunii tanante a trei soluţii de extract de coajă de brad, de coajă de molid şi de amestec de coajă de brad şi de coajă de molid, de concentraţii crescînde, în mod progresiv, pe măsură ce gradul de tanaj al pielii creştea, începînd cu zemuri de concentraţie corespunzătoare unei densităţi de 0°3 Bé şi terminînd cu zemuri de o concentraţie corespunzătoare densităţii de 5° Bé, după cum indică tabelul 2, concentraţia finală (de 5° Bé) fiind determinată nu de gradul maxim de tanaj, ci de momentul cînd ultimele probe de piele gelatină au fost complet şi uniform pătrunse de către soluţia tanică; probele de piele gelatină ce s-au găsit în acest stadiu, la o concentraţie a zemei sub valoarea celei corespunzătoare densităţii de 5° Bé, au fost lăsate în continuare în contact cu zeama tanantă şi aceasta a fost, în continuare, în aceeaşi măsură, (pînă la 5° Bé), pînă ce ultima serie de probe de piele a fost şi ea complet şi uniform pătrunsă de către zeama tanantă, pentru a pune toate seriile de probe în condiţii identice.

Difuzarea taninului, în interiorul ţesutului dermic (în fiecare din cele trei serii de probe) a fost urmărită prin măsurarea, cu ajutorul microscopului micrometric a „vitezei de pătrundere" (de difuzie), exprimată în % din grosimea probei de piele. Rezultatele acestor măsurători sînt redate în tabelul 3.

Tabelul 3

Ziua	Viteza de pătrundere în pielea gelatină în % (din grosimea pielii)		
	Extract de coajă de brad	Extract de coajă de molid	Amestec de extracte de coajă de brad şi de moild
1	7,81	7,50	7,12
2	6,66	10,52	8,06
3	9,52	17,85	17,64
4	10,60	23,07	25,92
5	20,89	26,56	21,73
6	28,56	25,00	21,42
7	24,61	22,22	25,39
8	21,53	25,42	27,27
9	26,47	31,81	28,12
10	28,07	29,50	28,78
11	25,74	32,81	29,86
12	26,56	38,98	30,55
13	33,82	39,34	36,92
14	32,83	38,08	34,32
15	—	—	—
16	—	—	—
17	30,00	36,76	29,57
18	—	—	—
19	37,83	37,87	34,28
20	—	—	—
21	37,48	—	38,66
22	40,03	—	43,05
23	46,10	—	—

Din examinarea acestui tabel rezultă că soluţia de extract de coajă de molid difuzează mai uşor în interiorul ţesutului dermic al pielii, şi că deci, pielea gelatină este uniform pătrunsă şi colorată, într-un interval de timp mai scurt decît de către soluţia de extract de coajă de brad, amestecul de extracte de coajă de brad şi de coajă de molid prezentînd o comportare intermediară, ceea ce dovedeşte încă odată, influenţa reciprocă a diverşilor agenţi tananţi, [7]. Aceste date sînt redate mai concludent în fig. 1.

Deoarece între viteza de pătrundere a unui extract tanant în interiorul ţesutului dermic şi astringenţa extractului respectiv, există o dependenţă directă (sau mai corect spus, astringenţa particulelor tanice ce alcătuiesc extractul considerat), noi am urmărit fracţionarea, din aproape în aproape, a extractelor de coajă de brad şi coajă de molid, cu clorură de sodiu, în trei moduri diferite, în comparaţie cu cantitatea de tanin ce se lasă precipitată prin tratarea cu o cantitate de clorură de sodiu egală cu 30 g dintr-un volum de 100 cc soluţie tanică cu o concentraţie de 1 % tanin. Rezultatele acestor determinări sînt redate în tabelul 4 şi fig. 2.

Tabelul 4

Cantităţile procentuale de tanin precipitat cu cantităţi variabile de electrolit (prin sărare fracţionată cu clorură de sodiu)

Nr. probelor	Cantitatea de NaCl în g la 100 cc sol. tan. 1 %	% tanin precipitat din 100 cc sol. extract de coajă de	
		brad	molid
I	în sol. iniţială : 5	15,642	11,415
	în filtrat : 2×5	0,000	5,708
	idem 3×5	5,058	4,273
	idem 4×5	2,542	7,142
	idem 5×5	2,542	2,868
	idem 6×5	5,058	0,000
II	în soluţie iniţială : 10	20,279	21,426
	în filtrat : 2×10	7,600	11,415
	idem 3×10	10,117	11,415
III	în soluţie iniţială : 20	39,247	44,285
	în filtrat : 20+10	8,871	12,849
IV	în soluţie iniţială : 30	50,635	51,427

Cantităţile procentuale de tanin precipitat (raportat la cantitatea totală de tanin a extractului) a fost determinată volumetric prin metoda Loewenthal [6, p. 173].

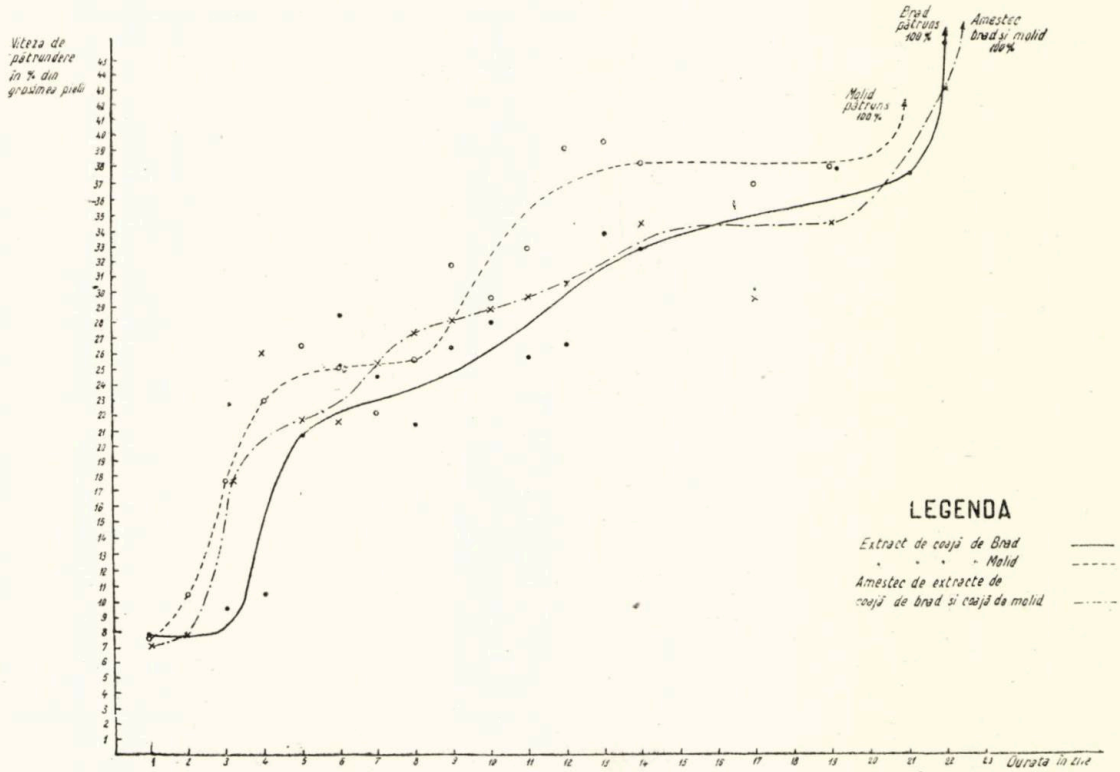

Viteza de pătrundere în % din grosimea pielii
Brad pătruns 100%
Amestec brad şi molid 100%
Molid pătruns 100%
Durata în zile
LEGENDA
Extract de coajă de Brad
Molid
Amestec de extracte de coajă de brad şi coajă de molid

Fig 1.

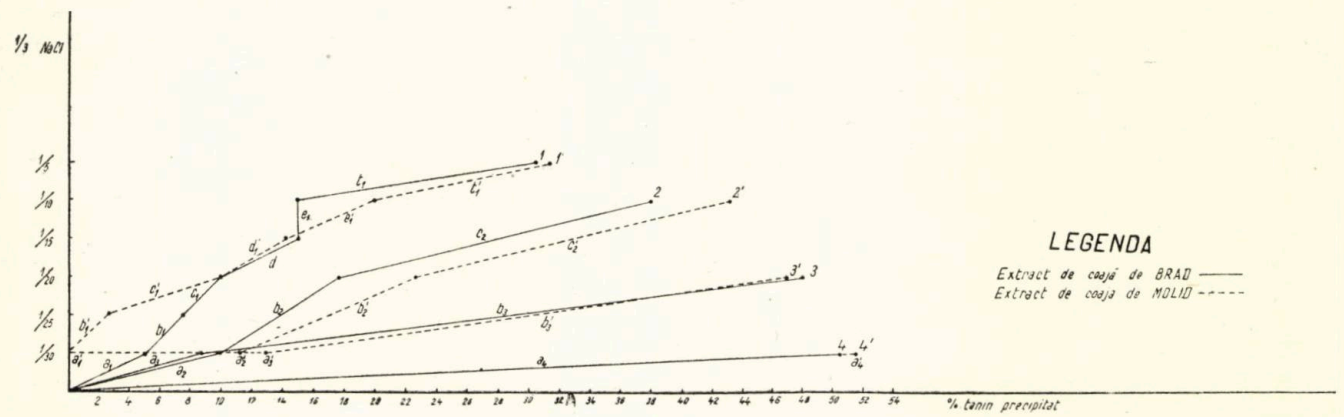

1/3 NaCl
% tanin precipitat
LEGENDA
Extract de coajă de BRAD
Extract de coaja de MOLID

Fig 2.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1948

Considerînd soluţiile tanice ca reprezentînd sisteme coloidal polidisperse prin excelenţă, putem presupune că toate particulele de natură tanică (netaninuri de natură tanică, taninuri şi substanţe neextractibile de natură tanică, ca şi insolubilele de natură tanică, ce se depun la rece din soluţiile tanice obţinute la cald) se pot înscrie într-o curbă, într-un sistem de axe retangulare, în care pe axa ordonatelor măsurăm diametrul particulelor, iar pe axa absciselor, numărul de particule de aceleaşi dimensiuni limite, ce imprimă particulelor caracterul de netaninuri, acele de taninuri şi de substanţe neextractibile.

Într-un sistem coloidal (sau semicoloidal) perfect polidispers, ale cărui particule posedă dimensiuni mereu crescînde, acestea ar putea fi înscrise într-o curbă reprezentînd o linie dreaptă, ce trece prin originea axelor de coordonante.

Valoarea unghiului pe care curba îl determină cu axa absciselor, este funcţie de natura materialului tanant, şi caracteristică acestuia.

Pentru cele mai multe materiale tanante, curba de înscriere a particulelor de natură tanică, nu este reprezentată printr-o dreaptă, ci ea poate avea forme variate.

Valoarea tanantă a unui material tanant, în afară de valoarea raportului tanin/netanin, este caracterizată şi prin diversitatea dimensiunilor particulelor tanice, ea fiind cu atît mai mare cu cît particulele tanice, fără a-şi pierde caracterul polidispers, posedă dimensiuni apropiate între ele [8], aceste dimensiuni putînd fi imprimate particulelor tanice, în mod voit, în condiţii determinate [8], [9].

Deoarece cu cît dimensiunile particulelor de natură tanică sînt mai mici, cu atît este necesară o cantitate mai mare de electrolit, respectiv de clorură de sodiu, pentru a le precipita, între diametrul particulei şi între cantitatea de clorură de sodiu există un raport de inversă proporţionalitate ($d = k/g$); de aceea în fig. 2 noi am înscris în axa ordonatelor inversele cantităţilor de clorură de sodiu utilizate în fracţionarea sistemului polidispers de particule de natură tanică, ce reprezintă soluţia de extract de coajă de brad, iar pe axa absciselor, cantitatea de tanin precipitat (exprimată în procente), din cantitatea totală de tanin a extractului tanant.

Curbele *1* şi *1'* au fost obţinute prin precipitarea particulelor de dimensiuni mari, dintr-un volum de 100 cc soluţie tanică de 1 %, cu o cantitate de 5 g clorură de sodiu chimic pură; filtratul rămas în urma îndepărtării precipitatului a fost din nou tratat cu aceeaşi cantitate de clorură de sodiu. Repetîndu-se această tratare de 6 ori, din ultimul filtrat, au fost precipitate particulele tanice de dimensiunile cele mai mici, cu o cantitate de clorură de sodiu egală cu 6×5 g.

Cele şase precipitate resolvite în apă caldă şi aduse la un acelaşi volum de soluţie, au fost dozate oxidimetric prin metoda Lowenthal [6].

Curbele *2* şi *2'* au fost obţinute în mod analog, prin tratare cu o cantitate de clorură de sodiu egală cu 3×10 g, curbele *3* şi *3'*, cu 20 şi 10 g clorură de sodiu şi în sfîrşit curbele *4* şi *4'*, prin tratare cu 30 g clorură de sodiu.

Din examinarea datelor cuprinse în tabelul 4 şi a curbelor înscrise în fig. 2 (curbele *1* şi *1'*) rezultă următoarele:

a) extractul de coajă de brad este alcătuit din particule de natură tanică de dimensiuni ce cresc continuu, începînd cu dimensiunile cele mai mici (curba *1* trece prin origina axelor de coordonate);

b) această creştere a dimensiunilor nu este uniformă, prima porţiune de curbă (a_1) prezentînd o pantă lină, particulele tanice ce se lasă înscrise în această porţiune de curbă, posedă deci dimensiuni apropiate între ele şi pătrund de aceea uşor şi uniform, dar nu progresiv, în interiorul ţesutului dermic, fără a fi fixate în straturile superficiale ale acestuia şi ca urmare „viteza de pătrundere" nu poate fi evidenţiată; ea apare ca constantă în fig. 1;

c) particulele tanice corespunzătoare porţiunilor de curbă b_1 şi c_1 posedă dimensiuni ce diferă între ele în mod mai accentuat, sînt în genere de dimensiuni mai mari decît primele şi sînt deci caracterizate printr-o reacţionabilitate mai mare faţă de fibra dermică şi de aceea ele sînt reţinute în straturile superficiale ale ţesutului dermic, fără a bloca spaţiile interfibrilare şi interfasciculare ale acestora. De aceea viteza lor de pătrundere poate fi măsurată, ceea ce arată porţiunea de curbă (corespunzătoare extractului de brad) pronunţat ascendentă, din fig. 1;

d) porţiunea c_1 a curbei *1* arată o creştere bruscă a dimensiunilor particulelor tanice, ce se manifestă din nou printr-o micşorare a vitezei de pătrundere (ziua a 15-a şi următoarele-fig. 1);

e) curba *1'* (corespunzătoare extractului de coajă de molid) este caracterizată prin aceea că nu trece prin originea axelor de coordonate, deci porţiunea de curbă a'_1 este egală cu zero, ceea ce înseamnă că extractul de coajă de molid este lipsit de particule tanice de dimensiunile cele mai reduse, fără capacitate de fixare pe fibra dermică şi că cele mai mici particule tanice sînt cele corespunzătoare fracţiunii de curbă b'_1, caracterizate prin o suficientă reacţionabilitate spre a fi reţinute de către fibra dermică pentru a colora distinct straturile superficiale ale ţesutului dermic (întocmai ca şi fracţiunea corespunzătoare de curbă b_1), ceea ce permite urmărirea pătrunderii zemii tanante şi deci măsurarea vitezii de pătrundere şi ceea ce apare evident în fig. 1; ea arată alura ascendentă, de la început, a curbei corespunzătoare extractului de molid.

f) echivalenţa curbelor corespunzătoare indicate în cele două figuri (1 şi 2), poate fi cu uşurinţă urmărită mai departe.

În concluzie, apare deci posibil de a prevedea modul de comportare a unui extract tanant vegetal, în raport cu pielea gelatină, din trasarea curbei de înscriere a particulelor de natură tanică, ce alcătuiesc extractul considerat şi deci aceste curbe ar putea constitui un criteriu de apreciere a calităţii unui extract tanant vegetal şi deci un criteriu de caracterizare tehnologică a extractelor.

Aceste cîteva observaţii alcătuiesc o parte dintr-o lucrare de mai mare amploare, pe care o urmărim de mai multă vreme, studiind sub acest aspect, cît mai multe extracte şi materiale tanante vegetale, pentru a stabili corelaţia dintre:

a) forma şi mărimea unghiului de înscriere a particulelor de natură tanică ce alcătuiesc un extract tanant vegetal, pe de o parte şi

b) viteza de pătrundere (difuzie) a particulelor tanice în interiorul ţesutului dermic,

c) taninul combinat

d) taninul ireversibil fixat de către fibra dermică, pe de altă parte.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Tehnologia pielii, a Confecţiilor de piele şi a Tananţilor
Laboratorul de Tehnologia pielii, Blănurilor şi a Extractelor tanante

BIBLIOGRAFIE

1. Beldie Al., *Plantele lemnoase din R.P.R.*, 1953, ed. Agro-silvică de Stat Buc., p. 83.
2. Otin C. a. Huidovici Gh., J. of the Intern. Soc. of leather trades chimists, 1931, **15**, *6*, pp. 264–272.
3. Alexa Gh., Strub Const., Maga Cornelia, Drabic-Iaroşinschi Irina şi Manciu Maria, St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R. filiala Iaşi, Chimie, 1956, **7**, *1* pp. 147–157.
4. Drabic Iaroşinschi Irina, Strub Const., Maga Cornelia şi Burghelea Gh., St. şi. cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Chimie 1956, **7**, *1* p. 129–145.
5. Int. Soc. of leather trades chimists, *Official methods of analysis* London, 1938, pp. 8–22.
6. Küntzel A. *Gerbereichemisches Taschenbuch*, Th. Steinkopff Verlag, Dresden u. Leipzig, 1943, S. 141 u. 163.
7. Maga Cornelia, Drabic-Iaroşinschi Irina, Strub Const., Ungar Carol şi Hofman Tuli, Bulet. Inst. Polit. din Iaşi, 1956 **2**, (**6**), *1–2*, pp. 123–130.
8. Strub Const., Drabic-Iaroşinschi Irina şi Maga Cornelia, St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1954, **5**, *1–2*, pp. 173–187.
9. Alexa Gh., Strub Const., Maga Cornelia şi Drabic-Iaroşinschi Irina, Stud. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1956, **5**, *3–4*, pp. 173–187.

О ЭКСТРАКТАХ ИЗ ЕЛОВОЙ И СОСНОВОЙ КОРЫ

(Резюме)

Считая, что растворы танидов представляют собой коллоидальную систему большой дисперсии, можно предположить, что частицы танидового происхождения могут быть вписаны в кривую прямоугольных координат.

Значение угла образованного тангенсом в различных точках кривой и абсциссой находится в зависимости от происхождения материала танидов и их характерных свойст.

Эти предположения дали вбзможность построить характерные кривые для экстрактов к голью, могли бы, по мнению авторов, служить для определения качеств танидовых экстрактов и, следовательно, способом определения их технологических свойств.

QUELQUES OBSERVATIONS CONCERNANT L'EXTRAIT DE L'ÉCORCE DE SAPIN

(Résumé)

Les Auteurs, tout en supposant que les solutions tanniques ne sont que des colloïdes polidispérsés et en utilisant pour la représentation géométrique adéquate de la variation du nombre des particules tanniques fonction de la nature du matériel tannant, un système d'axes cartésien, établit l'allure des courbes caractéristiques pour les extraits de l'ecorce de sapin (*Abies Pectinata* et *Picea Excelsa*) (fig. 1 et 2) Ces figures, tout en expliquant le comportement par rapport à la peau en tripe, des extraits obtenus, conduisent très probablement aux critères d'appreciation de la qualité d'un extrait tannant végétal, c'est à dire aux critères de caractérisation technologique des extraits tannants.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

677.31

UN ASPECT PUŢIN CERCETAT AL „CARBONIZĂRII LÎNII"

INFLUENŢA SULFATULUI DE SODIU

DE

MIŞILIM GRINDEA, RITA ZEIDMAN şi FLORIN VĂLU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

În tehnologia prelucrării lînii brute, tratamentul chimic pentru îndepărtarea aderenţelor vegetale (scaieţi, turiţe, etc.) — carbonizarea — are o deosebită importanţă.

Condiţiile în care se realizează transformarea celulozei acestor aderenţe, în hidroceluloza friabilă, nu rămîn fără influenţă şi asupra fibrei de lînă.

Dacă pentru filatura de lînă cardată se practică deseori carbonizarea lînii înainte de filare, pentru filatura de lînă pieptănată se evită această operaţie tocmai din cauza influenţei procesului asupra însuşirilor elastice ale fibrei.

Primele metode de carbonizare pe cale chimică, datează de peste 100 ani — Izard şi Leloup (1854), carbonizare cu HCl; Julion — carbonizarea cu H_2SO_4, HCl, HNO_3 [1]. Deşi între timp s-au făcut propuneri şi pentru folosirea sărurilor acide, procedeul cel mai folosit în carbonizarea lînii brute a rămas cel cu acid sulfuric.

În acest procedeu, materialul fibros tratat cu o soluţie diluată de acid sulfuric, este supus, după uscare, acţiunii unei temperaturi de peste 100°, realizîndu-se astfel degradarea celulozei, care, devenită friabilă, se îndepărtează uşor prin scuturare.

Cercetarea ştiinţifică asupra parametrilor optimi ai procesului datează numai din jurul anilor 1934...36, [2], [3], [4], [5].

A fost studiată influenţa naturii acidului, a concentraţiei, a duratei, precum şi a temperaturii de uscare şi de carbonizare, propriu zisă. S-a stabilit că cel mai important factor dintre cei amintiţi, îl reprezintă concentraţia acidului [6] acceptîndu-se concentraţia optimă de 4...6% H_2SO_4. De asemenea, acelaşi autor a stabilit că degradarea creşte cu creşterea concentraţiei şi temperaturii.

În ceea ce priveşte temperatura de îmbibare cu soluţia de acid sulfuric, se admite temperatura ordinară ca cea mai indicată, întrucît ridicarea temperaturii ar determina o absorbire mai intensă a acidului de către lînă, dar în detrimentul substanţelor celulozice, concentraţia în acid a băii scăzînd.

Pentru reuşita carbonizării este necesară temperatura de 100°. Ridicarea temperaturii se recomandă numai după o prealabilă uscare, pentru ca lîna să rămînă cu un conţinut minim de umiditate. Încălzirea materialului la temperatura de 100°, în prezenţa umidităţii, este nocivă întrucît poate produce hidroliza lînii însăşi.

Pentru stabilirea eventualelor modificări suferite de fibra de lînă în procesul de carbonizare au fost folosite diferite metode.

Astfel, Ellöd şi Hass (1937), pentru a pune în evidenţă influenţa temperaturii, au folosit variaţia vitezei de absorbţie a unui colorant de dispersitate moleculară, la un pH determinat, (Kristal ponceau 6*R*) constatînd degradarea prin creşterea vitezei de vopsire. Aceiaşi autori au studiat modificările lînei şi prin viteza de dizolvare într-o soluţie de 15% KOH la 60° precum şi prin rezistenţa la rupere.

În studiile sale, M. Harris [6], urmărind influenţa concentraţiei, foloseşte ca o măsură a degradării, pe lîngă rezistenţa la rupere şi conţinutul de azot amoniacal.

Lucrări mai recente ale lui M. Lees şi E. Elsworth [9] folosesc pentru prima oară urmărirea influenţei concentraţiei prin solubilitatea în alcali. Solubilitatea în alcali creşte cu degradarea.

Toate aceste metode se bazează pe faptul că prin tratamentul acid al lînii, deşi se folosesc iniţial soluţii diluate de acizi, prin creşterea concentraţiei în timpul procesului, are loc o oarecare degradare hidrolitică a lînii. Această degradare, mai mult sau mai puţin avansată, manifestată printr-o rupere a lanţului principal polipeptidic, se reflectă atît în modificarea lungimii de rupere precum şi în creşterea conţinutului de azot labil, în creşterea solubilităţii în alcali sau în creşterea accesibilităţii unor reactivi (coloranţi, soluţii diazo, etc).

Locul carbonizării în procesul de finisare a constituit obiectul a numeroase discuţii. Toate discuţiile au dus la concluzia că lîna, înaintea carbonizării, trebuie spălată, pentru îndepărtarea impurităţilor necelulozice ale lînii. Spălarea se realizează, în majoritatea cazurilor, în soluţii slab alcaline de săpun şi carbonat de sodiu şi este urmată de o clătire în mai multe ape. Totuşi, această clătire s-a dovedit în general a fi insuficientă.

C. H. Lister [10] (1949) a urmărit în mod special această problemă, făcînd analiza extractului apos a diferite lînuri spălate industrial (5 g lînă în 100 ml apă, 30' baie rece — 5' fierbere) a găsit un conţinut în carbonat de sodiu de 0,1..1%.

Şi colectivul nostru a analizat extractul apos a unor lînuri spălate la fabrica de postav Buhuşi şi Textila-Griviţa Bucureşti, găsind alcalinităţi între aceleaşi limite.

Acest lucru corespunde şi cu observaţia din practică, după care în băile de carbonizare creşte conţinutul de sulfat de sodiu (se modifică densitatea soluţiilor, măsurătorile areometrice fiind total eronate).

La o analiză efectuată asupra unor probe sondă din bazinul de carbonizare a fabricii de postav Buhuşi, am găsit un conţinut de 25 g/l sulfat de sodiu.

Această observaţie (a acumulării sulfatului de sodiu în băile de carbonizare) stă la baza lucrării noastre care şi-a propus să studieze influenţa concentraţiei sulfatului de sodiu din băile de carbonizare asupra eventualei degradări a lînii.

Din literatură este cunoscut faptul că în prezenţa de săruri, cantitatea de HCl legat creşte cu concentraţia ionică [11].

În cercetarea proceselor tehnologice, influenţa sărurilor în tratamentele acide, a fost puţin considerată.

Într-o lucrare privind vopsirea în băi acide (H_2SO_4 cu Na_2SO_4) [12] deşi se urmăreşte influenţa acestor băi asupra fibrei de lînă, nu se consideră influenţa separată a sulfatului de sodiu.

Influenţa sulfatului de sodiu în băile acide a fost studiată de către Perryman [13] în procesul vopsirii acide a lînii, deci la temperaturi ridicate (100°), exprimînd rezultatele sale prin solubilitatea în alcali. Astfel, solubilitatea în alcali scade cu creşterea cantităţii de sulfat de sodiu (în băi acide la fierbere). Dacă se raportează însă rezultatele la pH-ul corespunzător temperaturii de 100°, care creşte în prezenţa sulfatului de sodiu, rolul sulfatului, de protector al fibrei, este numai aparent. Totuşi este un fapt cert că adausul de sulfat de sodiu în aceste condiţii, micşorează solubilitatea în alcalii, deci degradarea.

Influenţa sulfatului de sodiu, în condiţiile speciale ale carbonizării a fost puţin studiată [14].

Propunîndu-ne să cercetăm influenţa sulfatului de sodiu format în înprejurările arătate, în bazinul de îmbibare, am urmărit modificările suferite de lînă prin metodele: solubilitatea în alcali, variaţia conţinutului de azot labil, reacţia Pauly (creşterea acessibilităţii reactivilor) şi rezistenţa la rupere.

Cercetările noastre au fost efectuate pe lînă albă din sortul ţigaie de Constanţa, carbonizată în condiţii de laborator.

La soluţia de 4% acid sulfuric s-au făcut adaose crescînde de sulfat de sodiu de la 0,2 g/l la 25 g/l. Rezultatele obţinute sînt redate în fig. 1, 2, 3, 4 şi în tabelul 1.

PARTEA EXPERIMENTALĂ

Probele au fost efectuate pe lînă albă, sortul ţigaie de Constanţa. Materialul brut a fost supus unei degresări prin extracţii cu CCl_4 în aparatul Soxhlet, după care a urmat o spălare intensă cu apă distilată.

Tabelul 1

Metoda de cercetare	Lînă crudă	Lînă carbonizată cu 40 g/l H_2SO_4 + Na_2SO_4 (g/l)									
	— (C)	— (E)	0,2 (1)	0,6 (2)	1 (3)	3 (4)	6 (5)	10 (6)	15 (7)	20 (8)	25 (9)
Solubilitatea în NaOH (%)	8,92	11,54	11,33	11,89	12,33	14,16	12,39	11,21	10,15	10,10	9,40
Conținutul de N labil (%)	4,2	6,58	6,86	7,38	8,03	8,69	7,78	7,04	8,37	8,41	9,36
Metoda Pauly cantitativă (mg diazoic legat)	1,72	1,72	3,44	4,31	5,60	6,46	4,09	2,88	2,75	2,32	1,93
Rezistența dinamometrică (g)	16,82	16,64	16,30	15,70	14,50	14,36	15,30	15,46	15,50	16,28	16,40

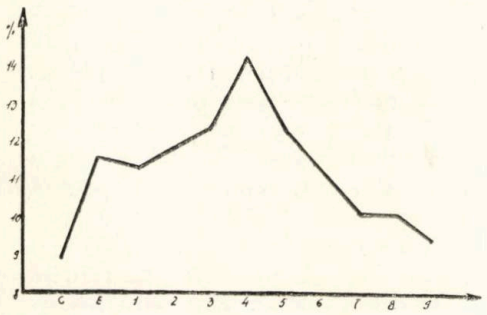


Fig. 1.

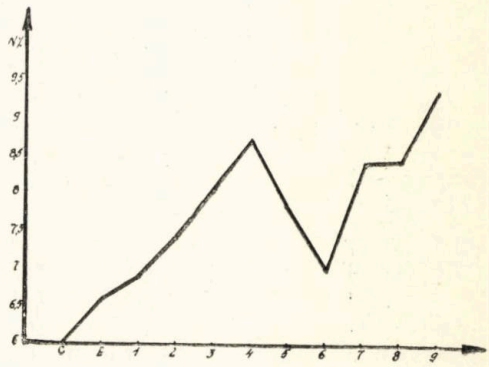


Fig. 2.

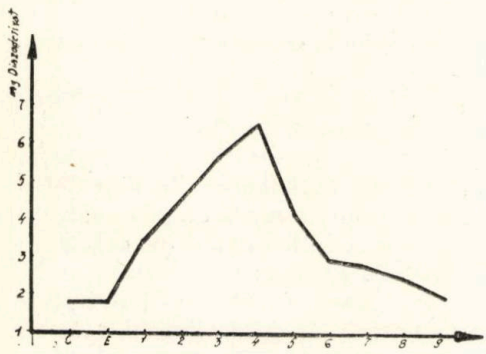


Fig. 3.

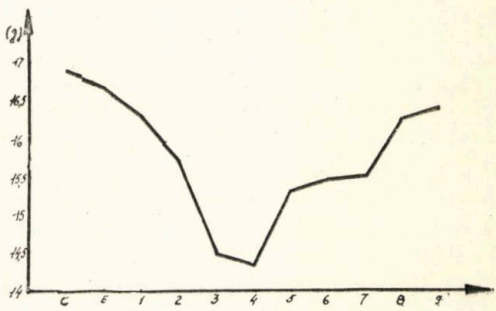


Fig. 4.

După uscare la aer, materialul a fost destrămat, scuturat şi curăţat de toţi însoţitorii săi accidentali. Pentru a elimina erorile de mînuire, materialul a fost supus unei degresări suplimentare (clătire cu CCl_4).

Materialul astfel pregătit, a fost tratat în băi de acid sulfuric 4% cu cantităţi crescînde de sulfat de sodiu (0,2, 0,6, 1, 3, 6, 10, 15, 20, 25 g/l). Modulul băii 1:50, temperatura 25°, durata 1h. După o uscare la temperatură moderată, materialul a fost menţinut în vederea carbonizării propriu-zise, timp de 2 ore, la temperatura de 110°. După o spălare energică, materialul a fost menţinut 24 ore în apă distilată, apoi uscat la aer.

Pentru a pune în evidenţă modificările suferite de lînă, în condiţii diferite de tratare, probele: solubilitatea în alcali, conţinutul de azot labil, reacţia Pauly şi rezistenţa la rupere, au fost efectuate în paralel, atît cu lîna netratată cît şi cu lîna tratată acid, fără sulfat de sodiu.

S-au notat probele supuse analizelor, după cum urmează:

C Lînă crudă
E Lînă carbonizată cu 4% acid sulfuric
1. Lînă carbonizată cu un adaos de 0,2 g/l Na_2SO_4
2. idem 0,6 g/l Na_2SO_4
3. idem 1 g/l Na_2SO_4
4. idem 3 g/l Na_2SO_4
5. Lînă carbonizată cu un adaus de 6 g/l Na_2SO_4
6. idem 10 g/l Na_2SO_4
7. idem 15 g/l Na_2SO_4
8. idem 20 g/l Na_2SO_4
9. idem 25 g/l Na_2SO_4

Solubilitatea în alcali, la cantităţile mici de sulfat de sodiu, pînă la 3 g/l, creşte, după care scade, la concentraţii mai mari (10...25 g/l), atingînd valori mai mici decît cele pentru tratamentul acid, fără sulfat.

Curba care reprezintă variaţia conţinutului de azot labil, prezintă aceeaşi alură ca aceea a solubilităţii în alcali, pînă la concentraţia de 10 g/l, de la concentraţia de 15 g/l crescînd iarăşi. Toate valorile pentru tratamentele în prezenţa sulfatului sînt mai mari decît acelea pentru tratamentul acid fără sulfat.

Curba care arată degradarea pe baza reacţiei Pauly, urmează mai fidel alura curbei solubilităţii în alcali, valorile obţinute la conţinutul maxim de sulfat apropiindu-se de cele ale probei acide fără sulfat; aceeaşi observaţie pentru rezistenţa dinamometrică.

Se poate observa deci, că prezenţa sulfatului de sodiu apare ca nocivă în concentraţii mici ale acestuia, atingînd un maxim pentru o concentraţie de 3 g/l. La concentraţii mai mari, influenţa sulfatului de sodiu apare ca protectoare (cu excepţia parţială a variaţiei conţinutului de azot labil).

Ţinînd seama de cercetările fundamentale citate mai sus, acţiunea protectoare a sulfatului de sodiu ar apărea contradictorie.

În cazul carbonizării nu poate fi vorba de o modificare a pH-ului, acţiunea efectivă a acidului sulfuric avînd loc la o concentraţie relativ mare în acid, cea mai mare parte din apă fiind eliminată prin uscare.

Trebuie admis că prezenţa unei cantităţi suplimentare de electrolit (Na_2SO_4) influenţează însăşi hidratarea fibrei, în sensul echilibrului de membrană după Donnan. O cantitate mai mare de electrolit determinînd o reîmpărţire a apei de hidratare a ionilor, ar determina hidratarea mai mică a fibrei. O cantitate mai mică de apă în fibră, chiar la o concentraţie mai mare de H_2SO_4 apără fibra de degradare hidrolitică.

Solubilitatea în alcali (după Harris și Smith) [15]. Aproximativ 400 mg lînă au fost menținute într-un volum de 100 ori mai mare de NaOH 1/10 *N* timp de o oră, la 65°, la termostat. După o clătire intensă (fenol ftaleină) și uscare la greutate constantă, s-a recîntărit lîna, exprimîndu-se solubilitatea în alcali în %, raportat la greutatea materialului inițial, (fig. 1).

Datele exprimate în tabelul 1 reprezintă media a 16 determinări pentru fiecare sort analizat.

Variația conținutului de azot labil [16]. 100 mg lînă uscată la aer, au fost menținute 72 ore într-un vas închis, cu 8 ml H_2O, 10 ml H_2O_2 1% și 2 ml KOH *N*/2, agitînd frecvent. Filtratul obținut a fost supus apoi kjeldhalizării (cu H_2SO_4 concentrat, $CuSO_4$, K_2SO_4 și H_2O_2 30%) și distilării. Un ml de HCl 1/10 *N* consumat de NH_3 degajat, corespunde la 0,0014 g azot, (fig. 2).

Rezultatele exprimate procentual față de materialul uscat reprezintă media a patru determinări.

Reacția Pauly permite punerea în evidență printr-o reacție de culoare, a degradării lînii, prin creșterea accesibilității unei soluții diazo în stratul cortical, unde are loc cuplarea cu tirozina.

Reacția Pauly modificată de Gross, Roll și Schreiber [17] permite determinarea cantitativă, volumetrică, a degradării.

Lîna de analizat a fost introdusă într-o soluție diazo (*m*-nitro *o*-anizidină diazotată) de concentrație cunoscută.

Volumul de soluție diazo, consumat prin cuplarea cu tirozina, a fost determinat ulterior printr-o cuplare cantitativă cu o soluție de beta-naftol 1/100 *N*. Rezultatul raportat la proba oarbă de titrare a soluției diazo cu beta-naftol se exprimă în mg diazoic legat, (fig. 3).

Rezistența la rupere s-a determinat cu un dinamometru tip Schoper în următoarele condiții: distanța între cleme 30 mm; tensiunea inițială a fibrei 500 mg. Rezultatele obținute reprezintă media a 25...35 fibre și se exprimă în g/fibră, (fig. 4).

Concluzii

Din lucrarea prezentată se pot trage următoarele concluzii:

1. Modificările structurale intervenite în fibra de lînă, în procesul carbonizării, sînt influențate de prezența sulfatului de sodiu, format în condițiile industriale.

2. Solubilitatea în alcali crește, în cazurile cînd soluția de acid sulfuric conține și sulfat de sodiu, atingînd totuși o valoare maximă pentru concentrația de 3 g/l sulfat. Pentru concentrații mai mari, solubilitatea în alcali atinge chiar valori mai mici decît aceea obținută pentru tratamentul acid fără sulfat.

3. Indicele de degradare după metoda Pauly cantitativă, confirmă indicațiile date de solubilitatea în alcali; rezistențele mecanice arată de asemenea un același sens al influenței sulfatului. Azotul labil pune în evidență o aceeași influență a sulfatului numai pînă la concentrația de 10 g/l, după care înregistrează o nouă creștere.

4. Pentru procesul tehnologic industrial trebuie considerat faptul că prezența sulfatului de sodiu în bazinul de îmbibare este inevitabilă.

În acest sens, concentrația de 3 g/l sulfat de sodiu trebuie considerată ca o concentrație critică.

5. Ținînd seama de variația solubilității în alcali, a rezistenței dinamometrice, a indicilor de degradare după metoda Pauly cantitativă, este recomandabilă evitarea concentrației critice de 3 g/l prin adăugarea inițială de sulfat de sodiu în soluția de îmbibare.

Institutul Politehnic, Iași
Catedra de Tehnologie Chimică Textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Diserens L., *Neue Verfahren in der Technik der chemischen Veredlung der Textilfassern*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1948, T. 1, S. 274—275.
2. Ryberg S., Am. Dyest. Rep., 1934, **23**, p. 230.
3. Armand L., TIBA, 1935, **13**, p. 753.
4. Herbig H., Mell. Text. Ber., 1936, **17**, S. 488, 538, 721.
5. Brown J. S., Textile Colorist, 1935.
6. Ryberg S., Am. Dyest. Rep., 1935, **24**, pp. 142—150.
7. Ellöd u. Haas, Zeitschr. für ges. Text. Ind., 1937, **40**, S. 31.
8. Harris M., Am. Dyest. Rep., 1934, **23**, p. 224.
9. Lees K. a. Elsworth E., J. Soc. Dyers and Col., 1952, pp. 204—205.
10. Steinhard a. Harris, J. of N. B. S., 1940, **24**, p. 355.
11. Lester C. H., J. Soc. Dyers and Col., 1949, **60**.
12. Würtz A., Mell. Text. Ber., 1955, **36**, S. 591—593, 810.
13. Perryman R. V., J. Soc. of Dyers and Col., 1957, **73**, pp. 456—457.
14. Crewter W. G. a. Pressley T. A., Text. Res. J., 1958, **28**, pp. 70 72.
15. Harris M. a. Smith A. L., J. of B. N. S., 1936, **17**, p. 577.
16. Krais u. Schelber, Leipziger Monatsschr. für Text. Ind., 1929, S. 165, 211.
17. Gross, Roll u. Schreiber, Mell. Text. Ber., 1939, **20**, S. 357.

НЕИССЛЕДОВАНАЯ СТОРОНА „КАРБОНИЗАЦИИ ШЕРСТИ". ВЛИЯНИЕ СЕРНОКИСЛОГО НАТРИЯ

(Резюме)

В исследовании процесса карбонизации не установленно до настоящего времени образование сернокислого натрия в ваннах обработки шерсти при помощим натрием.

В работе изучается влияние концентрации сернокислого натрия, образованного из углекислого натрия введеного шерстью в сернокислую ванну, на изменение шерстяных волокон.

Изменения шерстяного волокна были исследованы:

1) Паули-количественной реакцией, (метод Гросса, Ролла и Шрейбера), 2) растворимостью в щелочах, 3) лабильным азотом, 4) динамометрическим сопротивлением.

Определяется критическая величина концентрации сернокислого натрия.

UN ASPECT NON ÉTUDIÉ DU „CARBONISAGE DE LA LAINE". INFLUENCE DU SULPHATE DE NATRIUM

(Résumé)

Les études concernant le processus du carbonisage n'ont pas considéré jusqu'á présent la formation du sulfate de natrium dans les bains de H_2SO_4 utilisés pour le carbonisage.

Les Auteurs ont étudiés l'influence du sulfate de natrium, formé par le Na_2CO_3 apporté par la laine dans le bain de H_2SO_4, sur les modifications subies par la laine.

Les modifications des fibres de laine on été analysées par:

1. la réaction Paully-quantitative (la méthode Gross, Roll et Schreiber); 2. la solubilité en alcali; 3. l'azote labile; 4. la résistence dynamométrique.

On a observé une valeur critique de la concentration du sulfate de natrium.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621.319.

DETERMINAREA ENERGIEI CONSUMATE PE CICLU ÎN CAZUL OSCILAŢIILOR DE RELAXARE

DE

EMIL LUCA, V. PETRESCU, N. REUS şi ILEANA BUDĂI-MIHUL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 23—29 iunie 1958

1. Consideraţii generale

Oscilaţiile de relaxare, obţinute în mod obişnuit prin descărcarea intermitentă a unui condensator încărcat, printr-un tub cu gaz, presiunea în tub fiind de cîţiva mm Hg, a constituit obiectul a numeroase cercetări (v. de ex. [1]...[5]]), în care au fost expuse atît teoriile emise asupra naturii oscilaţiilor de relaxare, cît şi rezultatele experimentale obţinute.

Considerînd că alimentarea condensatorului C se face de la o sursă de tensiune continuă sub o tensiune U, prin intermediul unei rezistenţe R, descărcarea intermitentă a acestuia printr-un tub cu gaz, deci obţinerea oscilaţiilor de relaxare, nu se face decît atunci cînd parametrii R, C şi U au valori bine definite. Din această cauză oscilaţiile de relaxare au fost studiate iniţial funcţie de aceşti parametri.

Cercetări ulterioare, făcute printre alţii de W. A. Leyshon [6], M. Laporte [7], E. Blum [8], şi în special de J. Moussiegt [9], au arătat că rolul fundamental într-o descărcare intermitentă îl are curentul ce traversează tubul cu gaz în timpul descărcării intermitente a condensatorului şi nu parametrii U şi R. Intensitatea curentului în timpul descărcării intermitente a condensatorului trecînd printr-o valoare maximă (I_m), atenţia autorilor citaţi a fost reţinută în special de această valoare maximă a intensităţii curentului, funcţie de care au fost trasate diverse curbe ce definesc regimul descărcărilor intermitente, de data aceasta funcţie de valoarea capacităţii utilizate.

Cercetările întreprinse în această direcţie au arătat că în procesul descărcărilor intermitente, intensitatea maximă a curentului de descărcare nu este o mărime constantă ci creşte, tinzînd către o valoare limită, atunci cînd capacitatea C a circuitului oscilant creşte. Aceste valori limită sînt atinse pentru valori ale capacităţii circuitului oscilant cu atît mai mici, cu cît rezistenţa r pusă în serie cu tubul de descărcare, are o valoare mai mare.

În procesul producerii unei descărcări intermitente a unui condensator printr-un tub cu gaz, atunci cînd R, C şi U au valori constante, curentul de descărcare prin tub, în timpul unui ciclu, avînd o valoare variabilă şi căderea de tensiune pe tub va avea de asemenea o valoare variabilă.

Determinarea maximului şi minimului de tensiune în cazul acestor descărcări, intermitente, cît şi variaţia lor, a constituit de asemenea obiectul a numeroase lucrări, printre care cele întreprinse de Taylor şi Stephenson [10], W. Clarkson [11] F. M. Penning [12], G. Walle [13], Anthouard [14], Haak [15] şi Rothe [16].

Rezultă că atît intensitatea curentului din timpul unei descărcări intermitente cît şi căderea de tensiune de pe tubul de gaz prin care se produce descărcarea intermitentă, definesc în fond condiţiile de producere a descărcării intermitente prin tub şi deci funcţie de ele trebuie analizat procesul descărcării intermitente, el fiind datorit acţiunii comune a acestor două mărimi variabile.

Energia consumată pe ciclu, în cazul unei descărcări intermitente, fiind funcţie atît de căderea de tensiune de pe tub din timpul unui ciclu, cît şi de intensitatea curentului de descărcare din aceeaşi perioadă, ne propunem a determina valoarea energiei consumate pe ciclu (funcţie atît de tensiune cît şi de intensitate) şi a studia variaţia acestei mărimi funcţie de parametrii circuitului oscilant.

2. Principiul metodei

În vederea determinării energiei consumate pe ciclu în cazul oscilaţiilor de relaxare, am plecat de la posibilitatea obţinerii caracteristicii dinamice, adică a ciclului de relaxare, din cazul unei descărcări intermitente, obţinută la un osciograf catodic. Asemenea cicluri de relaxare au mai fost obţinute printre alţii de W. A. Leyshon [6], Reich şi Depp [17], R. W. Sloane [18], L. F. Richardson [19], G. Walle [13], J. Moussiegt [9] şi E. Luca, V. Petrescu şi N. Reus [21].

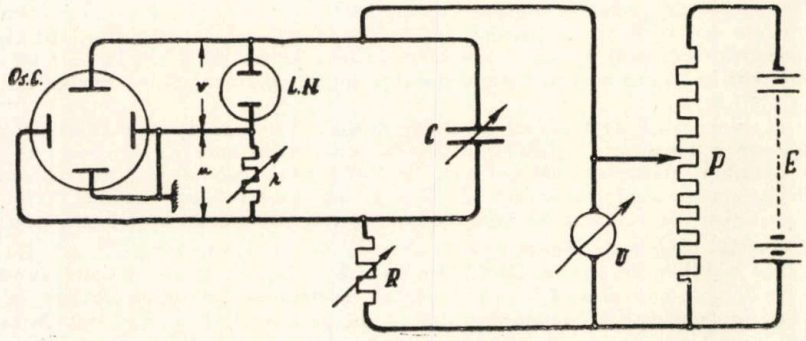


Fig. 1

Pentru obţinerea la osciloscopul catodic a ciclurilor de relaxare, am utilizat un montaj clasic, redat în fig. 1, unde condensatorul C a circuitului oscilant este încărcat de la sursa de curent continuu prin intermediul rezistenţei R. Condensatorul C se descarcă apoi intermitent prin lampa cu neon LN în serie cu care se găseşte rezistenţa r.

Căderea de tensiune (v) de pe lampa cu neon se aplică la plăcile verticale ale unui osciloscop catodic, în timp ce la plăcile orizontale se aplică căderea de tensiune (u) de pe rezistenţa r, care la o anumită scară, reprezintă însăşi valoarea curentului de descărcare (i).

În acest caz la osciloscopul catodic în planul (v, u) sau în planul (v, i) se obţine caracteristica dinamică a descărcării intermitente, deci ciclul de relaxare respectiv.

Forma ciclului de relaxare fiind cea reprezentată în fig. 2, rezultă că aria ciclului de relaxare, exprimată în cm^2, va fi dată de relația:

$$S_{cm^2} = \iint dx\, dy.$$

La o etalonare în volți a celor două scări ale oscilografului catodic, adică

$dv_{volți} = a_{volți/cm}\, dx$, $du_{volți} = b_{volți/cm}\, dy$

și ținînd seama de faptul că pentru $r = const.$, căderea de tensiune (u) de pe rezistența r este funcție numai de variația curentului de descărcare (i), pentru cazul cînd se cunoaște timpul τ_1 (secunde), acesta reprezentînd durata completă a unei descărcări intermitente, se capătă pentru energia W consumată pe ciclu valoarea

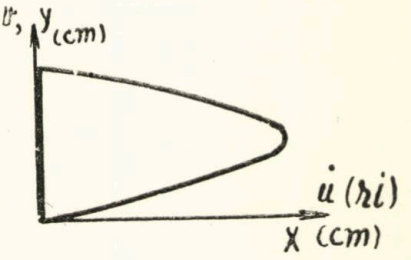


Fig. 2.

$$(1) \qquad W_{jouli} = \frac{a_{V/cm}\, b_{V/cm}}{r_\Omega}\, \tau_{1\,sec}\, S_{cm^2}.$$

Rezultă deci că din măsurarea ariei S a suprafeței ciclului de relaxare și a duratei τ_1 a descărcării intermitente se poate determina energia consumată pe ciclu în procesul descărcărilor intermitente, întrucît celelalte mărimi sînt cunoscute și anume: r este menținut constant, iar a și b reprezintă etalonarea în volți a scărilor oscilografului catodic.

Determinarea duratei τ_1 a descărcării intermitente se face utilizînd relația cunoscută [20]:

$$(2) \qquad \tau_1 = C(r + \varrho) \ln (U_A / U_s),$$

unde: C — capacitatea circuitului oscilant, r — rezistența montată în serie cu lampa cu neon, ϱ — rezistența interioară a lămpii cu neon, U_A — tensiunea de aprindere a lămpii cu neon, U_s — tensiunea de stingere a lămpii cu neon.

C și r fiind parametri cunoscuți ai circuitului oscilant, iar ϱ, U_A și U_s putînd fi măsurați, rezultă că determinarea lui τ_1 este posibilă.

Determinînd și durata τ_2 de încărcare a condensatorului [20] dată de relația:

$$(3) \qquad \tau_2 = CR \ln [(U - U_s)/(U - U_A)],$$

unde: R — valoarea rezistenței prin care se face încărcarea condensorului C de pe circuitul oscilant, iar U — tensiunea de alimentare a tubului cu gaz, se poate determina durata unui ciclu complet:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = CR \ln [(U - U_s)/(U - U_A)] + C(r + \varrho) \ln (U_A / U_s).$$

În acest caz numărul ciclurilor de relaxare căpătate în timp de o secundă, deci frecvenţa acestora, va fi dată de relaţia $N = 1/\tau$.

Cunoscînd numărul ciclurilor de relaxare descrise în timp de o secundă cît şi energia consumată pe ciclu, se poate determina puterea pe tubul de descărcare respectiv, care va fi dată de relaţia

$$P_w = \frac{W_{\text{jouli}}}{\tau_{\text{sec}}} = \frac{a_{\text{V/cm}}\, b_{\text{V/cm}}}{r_\Omega} \cdot \frac{\tau_{\text{1 sec}}}{\tau_{\text{sec}}} \cdot S_{\text{cm}^2}.$$

3. Rezultate experimentale

A. *Variaţia energiei consumate pe ciclu funcţie de valoarea capacităţii circuitului oscilant*

Dispozitivul experimental utilizat este redat în fig. 1 unde capacitatea C a circuitului oscilant este un condensator etalon „Uhlrich" variabil în domeniul 120pF...1μF, rezistenţa R a circuitului oscilant este o cutie de rezistenţe etalon, variabilă în domeniul 100 KΩ...1 MΩ, tubul de descărcare LN este o lampă cu neon „Osram" cu electrozi cilindrici compacţi, coaxiali, rezistenţa r este o cutie de rezistenţă neinductivă de 11110 Ω, oscilograful catodic este de tip „Tesla" cu posibilităţi de amplificare atît pe verticală cît şi pe orizontală.

Utilizînd pentru parametrii circuitului oscilant valorile $R = 300$ kΩ, $r = 200$ Ω, $U = 110$ V şi utilizînd anumite amplificări pe orizontală şi verticală la oscilograful catodic, alese în mod convenabil, s-au căpătat pentru diverse valori ale capacităţii C şi a circuitului oscilant o serie de oscilograme care reprezintă ciclurile de relaxare respective.

Parte din aceste oscilograme sînt redate în fig. 3 (v. planşa).

Ţinînd seama că tensiunea de aprindere a lămpii cu neon utilizată este $U_A = 94$ V, tensiunea de stingere $U_s = 74$ V, iar rezistenţa interioară a lămpii cu neon $\varrho = 100$ Ω, s-au putut măsura timpurile τ_1 şi τ_2, de descărcare şi încărcare a condensatorului C, din timpul unui ciclu complet. Valorile lui τ_1 şi τ_2 sînt trecute în tabelul 1.

Aria suprafeţei ciclurilor de relaxare corespunzătoare oscilogramelor din fig. 3 a fost măsurată cu ajutorul unui planimetru. Pentru fiecare valoare a capacităţii C a circuitului oscilant s-au fotografiat mai multe oscilograme, luîndu-se apoi suprafaţa medie a acestora. Valorile ariilor S (cm²) sînt redate de asemenea în tabelul 1.

Făcînd etalonarea în volţi a scărilor osciloscopului catodic s-a căpătat pentru cei doi coeficienţi de etalonare valorile: pe verticală $a = 14$ V/cm, pe orizontală $b = 12$ V/cm . 100.

Toate aceste valori permit a determina valoarea energiei consumate pe ciclu şi a puterii pe lampa cu neon, funcţie de valoarea capacităţii C a circuitului oscilant, valori ce de asemenea sînt trecute în tabelul 1.

Reprezentînd grafic variaţia ariei suprafeţei ciclului de relaxare, a energiei consumate pe ciclu şi a puterii tubului, funcţie de capacitatea C a circuitului oscilant, se capătă curbele *1*, *2* şi *3* din fig. 4.

Tabelul 1

C 10^{-9} F	τ_1 10^{-7} sec.	τ 10^{-3} sec.	S cm²	W 10^{-4} jouli	P 10^{-1} w
2	2,1	0,4	0,8	0,14	0,36
5	3,5	1	1,6	0,47	0,47
8	5,6	1,6	2,5	1,2	0,75
10	7	2	3,4	2	1
15	10	3	4,2	3,5	1,1
20	14	4	4,8	5,6	1,4
30	21	6	5,5	9,7	1,6
40	28	8	6	14	1,7
50	35	10	6,6	19	1,9
60	42	12	7,1	25	2
70	49	14	7,4	31	2,2
90	63	18	7,8	41	2,3
100	70	20	8,2	48	2,4

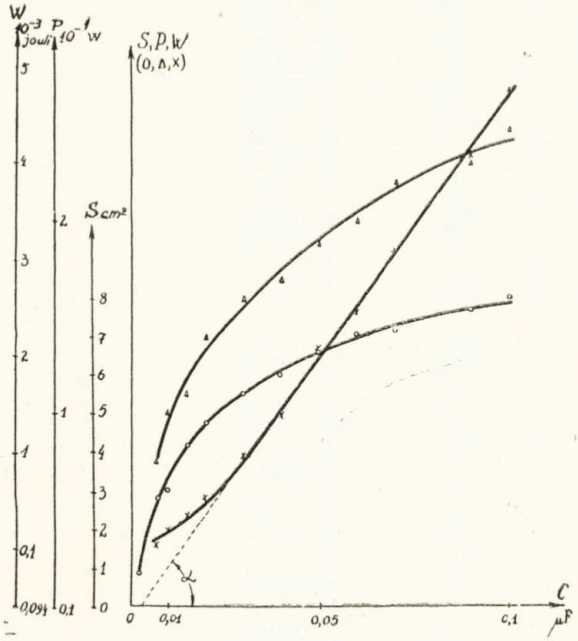


Fig. 4.

Analiza acestor curbe arată că:

a) energia consumată pe ciclu creşte atunci cînd capacitatea circuitului creşte;

b) pentru valori mici ale capacităţii C, energia consumată pe ciclu creşte aproximativ exponenţial cu valoarea capacităţii, în timp ce pentru valori mai mari ale capacităţii C, această variaţie tinde să devină liniară.

Acest lucru rezultă şi din analiza matematică a expresiei energiei. Ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2), se obţine:

$$W = \frac{ab}{r} SC(r + \varrho) \ln \frac{U_A}{U_s}.$$

Termenul $\frac{ab}{r}(r + \varrho) \ln \frac{U_A}{U_s} = K$ fiind constant rezultă:

$$W = KSC,$$

(S fiind proporţional cu capacitatea), adică variaţia de energie consumată pe ciclu este proporţională cu variaţia capacităţii C a circuitului oscilant şi cu aria S a suprafaţei ciclului de relaxare.

Pentru valori mari ale capacităţii circuitului oscilant aria suprafeţei ciclului de relaxare tinzînd către o valoare limită, deci avînd tendinţa să devină constantă, rezultă că energia pe ciclu este funcţie numai de valoarea capacităţii circuitului oscilant. În acest caz

$$W = K_1 C \quad \text{cu} \quad K_1 = \frac{ab}{r}(r + \varrho) S \ln \frac{U_A}{U_s}.$$

Considerînd că energia consumată pe ciclu, în cazul descărcării intermitente, serveşte în special la ionizarea gazului din tubul considerat, se poate da o interpretare formei curbei de variaţie a energiei consumate pe ciclu funcţie de valoarea capacităţii C.

Crescînd capacitatea C a circuitului oscilant, constanta de timp a acestuia creşte, deci durata descărcării intermitente creşte, ceea ce necesită o sporire a energiei consumate pe ciclu.

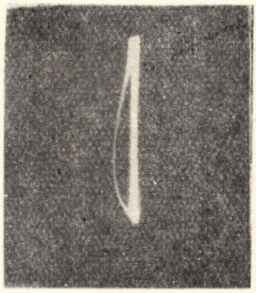
În cazul capacităţilor mici, creşterea energiei consumate pe ciclu nu se face liniar cu creşterea capacităţii circuitului oscilant, deoarece în acest caz timpul de încărcare a condensatorului este mic (de ordinul 10^{-4} sec), gazul din tub poate să rămînă parţial ionizat între două descărcări succesive ale condensatorului, ceea ce evident are drept consecinţă un consum redus pentru producerea unei noi descărcări.

Pentru capacităţi mai mari, timpul de încărcare a condensatorului fiind mai mare (de ordinul 10^{-2} sec.), datorită recombinărilor, gazul nu mai este ionizat, ceea ce face ca energia consumată pe ciclu în perioada descărcărilor intermitente să varieze liniar cu capacitatea C.

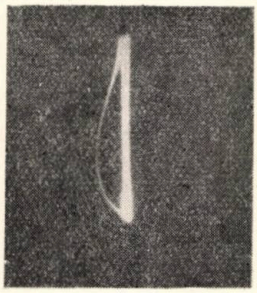
3. Curba de variaţie a puterii pe lampa cu neon urmăreşte în deaproape curba de variaţie a ariei suprafeţei ciclului de relaxare, tinzînd către o valoare limită atunci cînd capacitatea circuitului oscilant creşte.

Acest lucru rezultă şi din expresia puterii

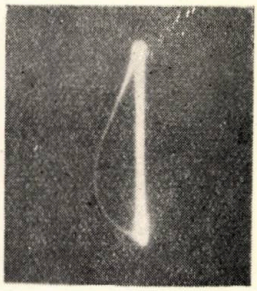
$R = 300\ K\Omega$
$r = 200\Omega$



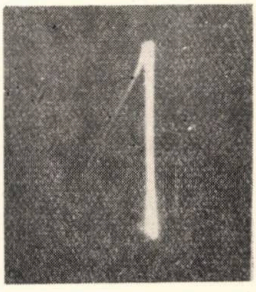
$C = 2000\ pF$



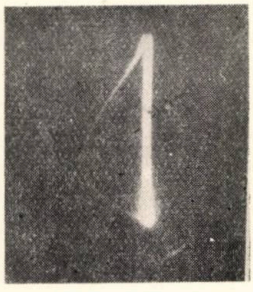
$C = 5000\ pF$



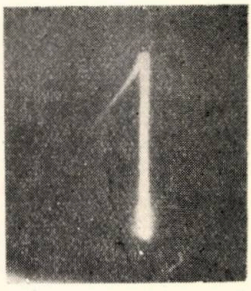
$C = 8000\ pF$



$C = 10^4\ pF$



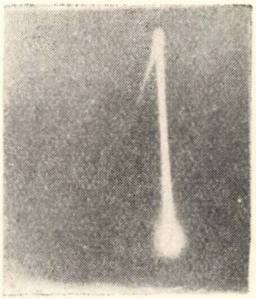
$C = 2.10^4\ pF$



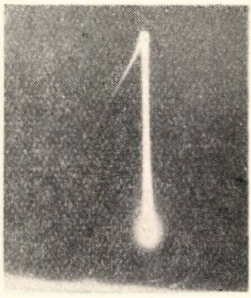
$C = 4.10^4\ pF$

Fig. 3.

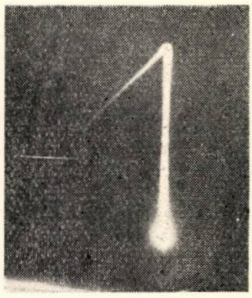
$R = 1\ M\Omega$
$C = 3.10^4\ pF$



$r' = 300\Omega$



$r' = 500\Omega$



$r' = 1\ K\Omega$

Fig. 5.

$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{ab}{r} \cdot \frac{(r+\varrho)\, S \ln (U_A / U_s)}{R \ln [(U-U_s)/(U-U_A)] + (\varrho + r) \ln (U_A / U_s)}.$$

Termenul

$$\frac{ab}{r} \cdot \frac{(r+\varrho) \ln (U_A / U_s)}{R \ln [(U-U_s)/(U-U_A)] + (r+\varrho) \ln (U_A / U_s)} = K$$

fiind constant, rezultă:

$$P = KS.$$

Pentru valori mari ale capacității C, energia consumată pe ciclu crește liniar cu capacitatea circuitului oscilant, iar durata unui ciclu variind invers proporțional cu valoarea capacității circuitului oscilant, este normal ca puterea pe lampa cu neon să tindă către o valoare limită.

B. *Variația energiei consumate pe ciclu funcție de valoarea rezistenței r*

Menținînd constantă capacitatea circuitului oscilant și anume $C = 3.10^{-8}$ F, rezistența $R = 1$ MΩ, ceilalți parametri avînd aceleași valori ca și în cazul precedent și variind rezistența r plasată în serie cu lampa cu neon am obținut pentru diverse valori ale lui r o serie de oscilograme din care redăm cîteva în fig. 5 (v. planșa).

În urma măsurării ariei S a suprafeței ciclurilor de relaxare și a timpurilor τ_1 și τ_2 de descărcare și încărcare a condensatorului în acest caz, s-a determinat de asemenea valoarea energiei consumate pe ciclu și a puterii pe lampa cu neon.

Rezultatele măsurărilor în ceea ce privește valorile lui S (cm²), W (jouli) și P (wați) sînt redate în tabelul 2.

Tabelul 2

r $10^{-3}\Omega$	τ_1 10^{-6} sec.	τ_2 10^{-1} sec.	S cm²	W 10^{-4} jouli	P 10^{-3} w
0,3	3,5	1,3	0,9	1,7	1,3
0,5	5,3	1,3	2	3,5	2,7
1	9,7	1,3	3,4	5,5	4,2
2	17	1,3	5,1	7,3	5,6
3	27	1,3	5,7	8,4	6,5
5	45	1,3	6,2	9,4	7,2
7	62	1,3	7	10	7,7
9	78	1,3	7,2	10,5	8,1
11	96	1,3	7,7	11	8,5

Reprezentînd grafic variația ariei suprafeței ciclului de relaxare, a energiei consumate pe ciclul de relaxare și a puterii pe lampa cu

neon, funcţie de valoarea rezistenţei r, s-au căpătat curbele *1*, *2* şi *3* din fig. 6.

Analiza acestor curbe arată că:

a) atît energia consumată pe un ciclu de relaxare cît şi puterea pe lampa cu neon, cresc atunci cînd valoarea rezistenţei r pusă în serie cu lampa cu neon, creşte;

b) pentru valori mari ale rezistenţei r, atît energia consumată pe ciclu cît şi puterea pe tub tind către o valoare limită, adică ele urmăresc în de-aproape curba de variaţie a ariei suprafeţei ciclului de relaxare funcţie de variaţia lui r.

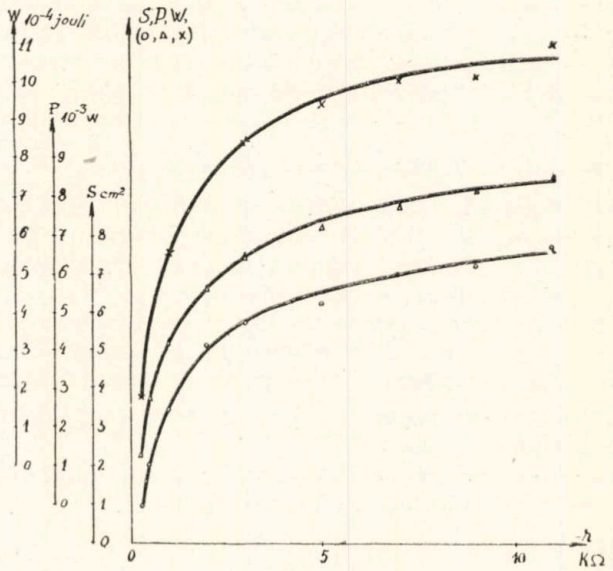


Fig. 6.

Acest lucru rezultă şi din expresiile matematice ale energiei consumate pe ciclu şi ale puterii pe tub.

S-au făcut determinări experimentale şi asupra altor modele de lămpi cu neon şi anume: lămpi cu electrozi în spirală, lămpi cu electrozi în formă de ciupercă şi lămpi cu electrozi cilindrici din sită. Rezultatele obţinute sînt similare celor din cazul lămpii cu electrozi cilindrici coaxiali compacţi.

4. Concluzii

1. Plecîndu-se de la posibilitatea obţinerii la un osciloscraf catodic a ciclurilor de relaxare în cazul descărcărilor intermitente ale unui condensator printr-o lampă cu neon cu electrozi cilindrici coaxiali compacţi, deci de la posibilitatea măsurării ariei suprafeţei ciclului de relaxare, se poate determina valoarea energiei consumate pe ciclu, dacă se determină în prealabil şi durata descărcării intermitente.

2. Determinînd durata completă a unui ciclu, dată de suma timpurilor de încărcare şi descărcare a condensatorului, din cadrul unei descărcări intermitente, se poate determina şi puterea pe lampa cu neon în cazul acestor descărcări.

3. Atît energia consumată pe ciclu cît şi puterea pe tub nu sînt constante ci cresc atunci cînd capacitatea circuitului oscilant creşte, sau cînd rezistenţa r pusă în serie cu tubul cu neon creşte.

4. Energia consumată pe ciclu, pentru valori mici ale capacităţii circuitului oscilant, creşte exponenţial cu creşterea capacităţii C, în timp ce pentru valori mari ale acestei capacităţi creşterea este liniară. În cazul variaţiei rezistenţei r, energia creşte o dată cu creşterea rezistenţei r tinzînd însă pentru valori mari ale acestei rezistenţe către o limită.

5. Puterea pe tub creşte de asemenea atît cu creşterea valorii capacităţii C, cît şi cu creşterea rezistenţei r tinzînd însă în ambele cazuri către o valoare limită atunci cînd capacitatea, circuitului oscilant, C sau rezistenţa r au valori mari.

6. Rezultate asemănătoare s-au obţinut şi cu alte lămpi cu neon în care forma electrozilor este diferită; de exemplu lămpi cu electrozi în spirală, lămpi cu electrozi în ciupercă, sau lămpi cu electrozi cilindrici din sită.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Abbraham et Bloch, Ann. de Phys., 1919, **12**, p. 237.
2. van der Pol B., Phil. Mag., 1923, **2**, p. 978.
3. Liénard A., RGE, 1928, **23**, pp. 901 et 946.
4. Rocard Y., Onde Électrique, 1937, **16**, p. 395.
5. Abelé J., Rev. Gén. des Sci., 1946, **53**, p. 68.
6. Leyshon W. A., Proc. Roy. Soc., 1929—1930, **42**, p. 157.
7. Laporte M., J. de Phys. 1937, **8**, p. 332.
8. Blum E., Ann. de Phys., 1938, **31**, p. 585.
9. Moussiegt J., Ibid., 1949, **4**, p. 593.
10. Taylor a. Stephenson, Phil. Mag., 1925, **49**, p. 1081.
11. Clarkson W., Phil. Mag., 1927, **4**, pp. 121, 849, 1002 a. 1341.
12. Penning F. M., Phys. Ztschr., 1926, **27**, S. 187.
13. Walle H., Ibid., 1926, **27**, S. 473.
14. Anthouard, J. de Phys., 1927, **8**, p. 522.
15. Haak, Ann. de Phys., 1927, **84**, S. 110.
16. Rothe, Phys. Ztschr., 1930, **31**, S. 520.
17. Reich a. Depp, Phys. Rev., 1934, **20**, p. 245.
18. Sloane R. W., Phyl. Mag., 1937, **23**, p. 534.
19. Richardson L. F., Proc. Roy. Soc., 1937, **132**, p. 293.
20. Laszlo T. J., Rev. St. V. Adamachi, 1947, **XXXIII**, p. 1951.
21. Luca E., Petrescu V. şi Reus N., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1958, **IV(VIII)**, *1—2*, pp. 289—296.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗРАСХОДОВАННОЙ ЭНЕРГИИ, ПО ЦИКЛУ, ПРИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

(Резюме)

Определяется израсходованная энергия, по циклу, при релаксационных колебаниях, полученных перемежающимися разрядами конденсатора в неоновую лампу с

цилиндрическими, коаксиальными, компактными электродами, при помощи измерении пчощади релаксационного цикла, полученного в электронно-лучевом осциллографе и длительности перемежающегося разряда. При измерении полной продолжительности цикла, появляется также и возможность определения мощности неоновой лампы в случае этих перемежающихся разрядов.

Экспериментальным путем доказывается:

1) Израсходованная, по циклу, энергия и мощность неоновой лампу не являются постоянными, а растут одновременно с величиной ёмкости колебательной цепи, а также и с величиной сопротивления в последовательном соединении с неоновой лампой.

2) Израсходования, по циклу, энергия растет, приблизительно, экспоненциально с ёмкостью колебательной цепи — для ее малых величин, а для больших — рост является линейным.

При изменении величины сопротивления в последовательном соединении с неоновой лампой, израсходованная, по циклу, энергия растет одновременно с ростом сопротивления, стремясь к пределу при больших величинах этого сопротивления.

3) Мощность неоновой лампы при растет росте ёмкости колебательной цепи, а также и при росте сопротивления в последовательном соединении с неоновой лампой, стремясь, однако, в обоих случаях к предельным величинам, в случае больших величин ёмкости и сопротивления.

Подобные результаты были получены и при других типах неоновых ламп.

SUR LA DÉTERMINATION DE L'ÉNERGIE CONSOMMÉE PAR CYCLE, DANS LE CAS DES OSCILLATIONS DE RELAXATION

(Résumé)

On détermine l'énergie consommée par cycle, dans le cas des oscillations de relaxation, obtenues à l'aide de la décharge intermitente d'un condensateur sur un tube à néon à électrodes cylindriques coaxiaux, compacts, en mesurant l'aire de la surface du cycle de relaxation obtenu à l'écran d'un oscillographe cathodique et la durée de la décharge intermitente. Si on mesure la durée complète d'un cycle, on peut déterminer la puissance de la décharge sur le tube à néon, dans le cas de ces décharges intermitentes.

On aboutit, par voie expérimentale, aux conclusions suivantes:

1) L'énergie consommée par cycle et la puissance de la décharge ne restent pas constantes; alles augmentent au fur et à mesure que la valeur de la capacité du circuit oscillant et la valeur de la résistence asociée en série avec le tube à néon, augmentent.

2) L'énergie consommée par cycle augmente d'une manière exponentielle par rapport à l'augmentation de la valeur de la capacité du circuit oscillant, pour des petites valeurs de celle-ci; pour des grandes valeurs de la capacité l'augmentation est linéaire.

Si on varie la valeur de la résistence placée en série avec la tube à néon, l'énergie consommée par cycle augmente lorque la valeur de la résistence augmente; ele tend vers une valeur limite pour des grandes valeurs de cette résistence-ci.

3) La puissance de la décharge sur le tube à néon augmente lorsque la valeur de la capacité du circuit oscillant et la résistence asocieé en série avec le tube à néon, augmentent. Elle tend vers une valeurs limite pour des grandes valeurs de la capacité et de la résistence

On a obtenu des résultats semblables avec d'autres types de tubes à néon.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621.314.2

INFLUENŢA ARMONICILOR PARE ASUPRA PRINCIPALILOR PARAMETRI AI AMPLIFICATOARELOR MAGNETICE CU ÎNFĂŞURĂRILE DE LUCRU LEGATE ÎN SERIE

DE

I. BEJAN, GH. ŞERBAN şi V. CORLĂŢEANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26—29 iunie 1958

1. Amplificatoarele magnetice sînt aparate destinate să servească în tehnica reglajului şi controlului automat a diferitelor mărimi electrice, de exemplu: reglajul tensiunii generatoarelor sincrone, reglajul vitezei motoarelor de curent continuu şi a celor de curent alternativ, şi de asemenea, poate funcţiona ca transformator de măsură (transductor) pentru curent continuu.

Dezvoltarea pe care a luat-o, în ultimul timp, fabricarea şi utilizarea lor, precum şi diversitatea schemelor în care şi-au găsit aplicaţii, se datoreşte avantajelor pe care le prezintă faţă de amplificatoarele electronice şi amplidine şi anume, amplificatoarele magnetice, sînt aparate statice, robuste, cu durata de utilizare practic nelimitată, se pot construi pentru orice puteri, au preţ de cost redus, etc.

După cum se ştie, funcţionarea amplificatoarelor magnetice se bazează pe neliniaritatea caracteristicii materialelor feromagnetice, magnetizate concomitent în curent continuu şi în curent alternativ. Această proprietate a fost pusă în evidenţă şi utilizată de V. P. Vologdin în scopul multiplicării frecvenţei, în anul 1911. Alţi numeroşi cercetători, printre care N. D. Papaleksi, K. I. Şenfer, M. A. Rozemblat, L. A. Bessonov, E. Alexanderson, H. F. Storm ş. a. au dezvoltat şi perfecţionat teoria, metodele de calcul şi tehnologia de fabricaţie a acestor aparate.

2. În anumite scheme, în componenţa cărora intră amplificatoarele magnetice, curentul de comandă nu trece în mod brusc de la valoarea zero, la o valoare corespunzătoare stării de saturaţie, cum se presupune de obicei, ci este variat în mod continuu între aceste limite. Pe de altă parte, impedanţa pe care circuitul de comandă o opune armonicilor pare, nu poate fi considerată totdeauna infinită. Pe baza acestor consideraţii rezultă că în circuitul de comandă pot circula armonice de ordin par ale curentului de sarcină. Existenţa acestor armonice poate modifica valorile parametrilor principali faţă de cazul absenţei armonicilor.

În lucrarea de faţă ne propunem să studiem experimental pe un model de amplificator magnetic, cu înfăşurările de lucru legate în serie, construit de noi, influenţa pe care o exercită prezenţa armonicilor pare, induse în circuitul de comandă, asupra principalilor parametri ai acestuia şi anume: coeficientul de amplificare după putere K_p, coefi-

cientul de amplificare după curent K_I şi a raportului dintre curentul de funcţionare şi curentul de mers la gol, numit şi coeficient de multiplicitate K_m.

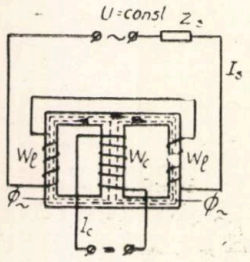


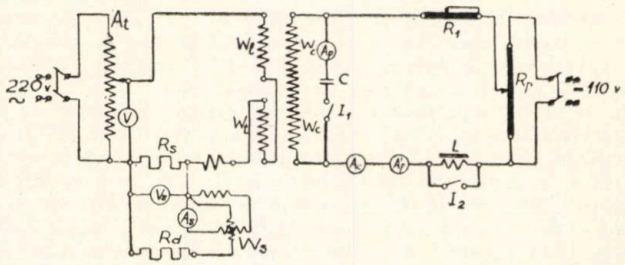
Fig. 1

În schema din fig. 1 s-a notat cu w_1 numărul de spire al înfăşurării de lucru parcursă de curentul I_s, w_c — numărul de spire al înfăşurării de comandă parcursă de curentul continuu I_c şi cu Z_s — impedanţa sarcinii.

3. Amplificatorul magnetic construit în vederea studiului experimental are următoarele caracteristici :

puterea maximă comandată—1500 w, tensiunea de alimentare a circuitului de lucru — 220 V, curentul de lucru în lipsa premagnetizării cu curent continuu — 1,2 A, curentul de sarcină în prezenţa curentului maxim de premagnetizare — 9 A, curentul maxim de comandă — 7 A. Miezul magnetic este de tipul cu 3 coloane şi a fost construit din table de oţel de transformator avînd secţiunea coloanei centrale 8×8 cm^2, secţiunea coloanelor laterale şi a culaselor 5×8 cm^2, iar dimensiunile ferestrei $8\times4{,}5$ cm^2. Înfăşurarea de comandă, dispusă pe coloana centrală are $w_c = 400$ spire cu secţiunea de 2,5 mm^2; înfăşurarea de lucru are cîte $w_1 = 126$ spire pe fiecare coloană laterală cu secţiunea de 2,5 mm^2. Rezistenţa înfăşurărilor de comandă — $R_c = 1{,}16\ \Omega$ iar rezistenţa uneia din înfăşurările de lucru — $R_1 = 0{,}345\ \Omega$.

Schema de montaj folosită în încercările experimentale este dată în fig. 2.



Fig, 2

Alimentarea circuitului de lucru s-a făcut cu o tensiune practic sinusoidală, reglabilă prin intermediul autotransformatorului A_t. Ca sarcină s-a folosit o rezistenţă activă variabilă. Circuitul de comandă a fost alimentat cu curent continuu, reglabil printr-un montaj potenţiometric; în vederea menţinerii constante a rezistenţei din circuitul înfăşurării de comandă, schema a fost completată cu reostatul R_1, constructiv identic cu potenţiometrul R_p. Pentru a scoate în relief efectul armonicilor pare de curent, în paralel cu înfăşurările de comandă s-a legat condensatorul C avînd o capacitate de 90 μF, iar în serie s-a legat în circuit inductanţa cu miez de fier L. În cazul cînd armonicile pare sînt lăsate să acţioneze liber în circuitul de comandă, întrerupătoarele I_1 şi I_2 sînt închise; limitarea efectului armonicilor se face

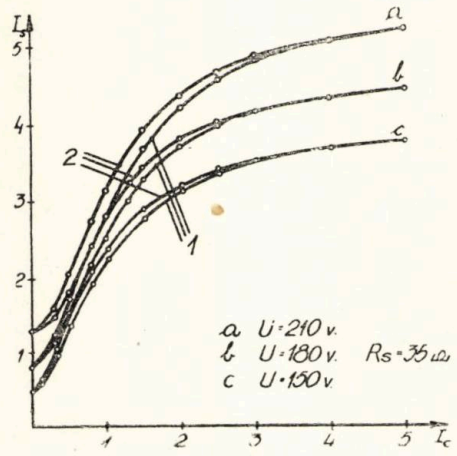


Fig. 3

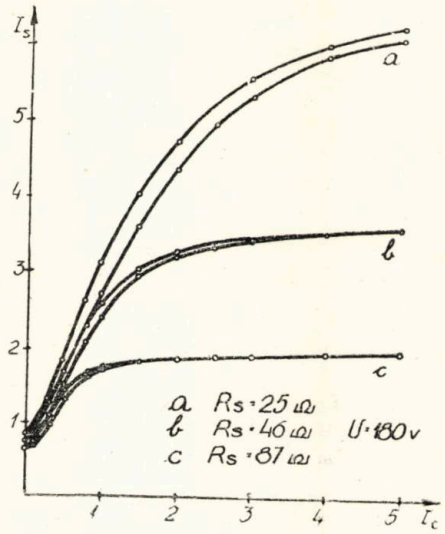


Fig. 4

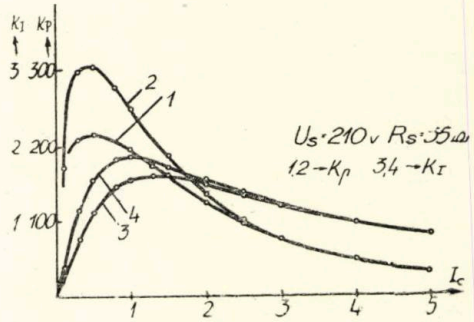


Fig. 5

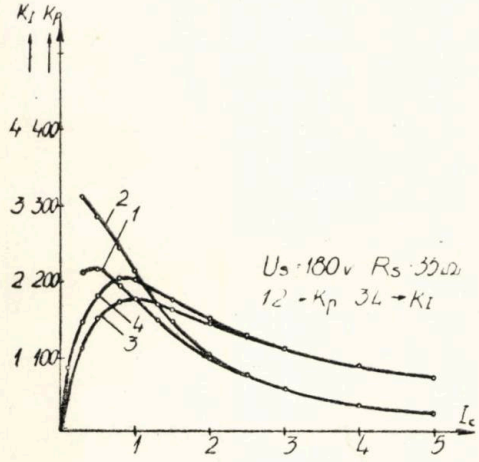


Fig. 6

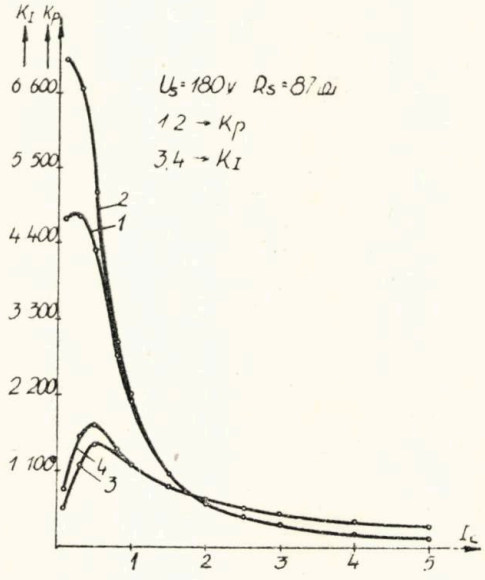


Fig. 7

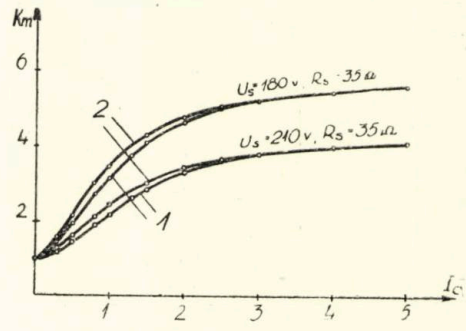


Fig. 8

PLANŞA I

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1948

deschizînd aceste întrerupătoare. În circuitul de lucru s-au măsurat: curentul de sarcină I_s, puterea de sarcină P_s, tensiunea la bornele sarcinii U_s şi tensiunea de alimentare U. În circuitul de comandă s-au măsurat: curentul de comandă I_c şi valoarea eficace a armonicilor pare I_p; în serie cu ampermetrul magnetoelectric care măsoară curentul de comandă I_c s-a montat un ampermetru electromagnetic a cărui indicaţie depinde şi de valoarea armonicilor pare din acest circuit. Din diferenţa patratelor celor două lecturi rezultă valoarea eficace a armonicilor pare din această derivaţie.

Încercările experimentale s-au făcut dînd rezistenţei de sarcină anumite valori care s-au menţinut constante şi s-a variat tensiunea de alimentare în limitele 120...210 V. Din valorile măsurate, au fost reprezentate grafic pentru fiecare valoare a tensiunii şi rezistenţei, caracteristica $I_s = f(I_c)$, coeficientul de amplificare după putere $K_p = f(I_c)$, coeficientul de amplificare după curent $K_I = f(I_c)$ şi coeficientul de multiplicitate $K_m = f(I_c)$. Coeficienţii menţionaţi au fost calculaţi cu ajutorul relaţiilor:

$$K_p = (P_s - P_{0s})/(R_c I_c^2), \quad K_I = (I_c - I_{0s})/I_c, \quad K_m = I_s/I_{0s},$$

unde P_s şi I_s reprezintă puterea comandată şi curentul de sarcină la curentul de comandă $I_c \neq 0$; P_{0s} şi I_{0s} reprezintă aceleaşi mărimi cînd $I_c = 0$.

În fig. 3 s-a reprezentat variaţia curentului de sarcină I_s cu curentul de comandă I_c la $R_s = 35\,\Omega$ şi tensiunile de alimentare de 210 V (*a*), 180 V (*b*) şi 150 V (*c*). Curbele *1* sînt ridicate cînd efectul armonicilor pare este limitat, iar curbele *2* corespund cazului cînd armonicile pare lucrează liber în circuit. Din toate aceste curbe rezultă că efectul armonicilor se manifestă puternic în domeniul nesaturat de funcţionare a amplificatorului magnetic, dar dispare complet la un grad mai avansat de saturaţie. Efectul armonicilor pare este de asemenea redus în cazul valorilor mici ale curentului de premagnetizare.

Fig. 4 reprezintă variaţia curentului de sarcină cu curentul de comandă $I_s = f(I_c)$ la diverse valori ale rezistenţei de sarcină, tensiunea de alimentare fiind menţinută constantă la 180 V. Efectul armonicilor, ca urmare a efectului de saturaţie, scade pe măsura creşterii rezistenţei de sarcină.

Fig. 5, 6 şi 7 reprezintă $K_p = f(I_c)$, curbele *1* şi *2* şi $K_I = f(I_c)$, curbele *3* şi *4* şi anume, în fig. 5, $U = 210$ V şi $R_s = 35\,\Omega$, în fig. 6, $U = 180$ V şi $R_s = 35\,\Omega$, iar în fig. 7, $U = 180$ V iar $R_s = 87\,\Omega$. Curbele *1* şi *3* sînt ridicate la montajul cu armonicile limitate, iar curbele *2* şi *4*, în cazul cînd armonicile pare lucrează liber. Analizînd curbele din fig. 5 şi 6, constatăm că o dată cu creşterea tensiunii de alimentare, valorile maxime ale coeficienţilor K_p şi K_I se deplasează spre valorile mari ale curentului de premagnetizare. De asemenea se observă că prezenţa armonicilor pare deplasează valorile maxime ale coeficienţilor de amplificare după curent şi putere către valori mai mici ale curenţilor

de comandă, o dată cu scăderea tensiunii U sau o dată cu mărirea rezistenţei de sarcină (fig. 6 şi 7).

În ce priveşte variaţia coeficientului de multiplicitate (fig. 8), acesta urmăreşte legea de variaţie a curentului $I_s = f(I_c)$, încît concluziile trase privind efectul armonicilor asupra curentului de sarcină sînt valabile şi în ce priveşte efectul asupra coeficientului de multiplicitate.

Pentru a pune în evidenţă mai clar influenţa armonicilor pare din punct de vedere cantitativ, s-au calculat rapoartele dintre coeficienţii K_{p1}, K_{I1}, K_{m1}, în prezenţa armonicilor pare de curent, pe de o parte, şi coeficienţii K_{p2}, K_{I2}, şi K_{m2}, determinaţi pentru aceleaşi valori ale curentului de comandă, în cazul cînd armonicile pare sînt limitate. S-au extras valorile maxime ale acestor rapoarte, adică

$$100\ K_{p1}/K_{p2\,max} = K_{p\,max}\,\%, \quad 100\ K_{I1}/K_{I2\,max} = K_{I\,max}\,\%,$$
$$100\ K_{m1}/K_{m2\,max} = K_{m\,max}\,\%$$

şi au fost reprezentate astfel: în fig. 9, 10 şi 11 — $K_{p\,max}$, $K_{I\,max}$ şi $K_{m\,max}$ funcţii de R_s, pentru mai multe valori, constante, ale tensiunii de alimentare, în fig. 12, $K_{p\,max} = f(U)$, pentru diverse valori ale rezistenţei de sarcină. Deoarece pe porţiunea corespunzătoare valorilor foarte mici ale curenţilor de premagnetizare (pînă la 0,1 A) influenţa armonicilor este mică, la stabilirea coeficienţilor de mai sus nu s-a luat în consideraţie acest domeniu.

Fig. 9 relevă că atunci cînd creşte R_s, efectul armonicilor pare se micşorează. La valori mici ale rezistenţei de sarcină precum şi la valorile cele mai mari la care am lucrat, valorile relative ale lui K_p cresc cu tensiunea de alimentare. Curba trasată la tensiunea de 210 V pune în evidenţă faptul că atunci cînd circuitul magnetic al amplificatorului este saturat, datorită creşterii tensiunii de alimentare, alura curbei se modifică. Valorile maxime ale acestui coeficient, în condiţiile de lucru alese, pot atinge 160%.

Din fig. 10 se vede că curbele $K_{I\,max} = f(R_s)$ prezintă un maxim pentru anumite valori ale rezistenţei de sarcină. Valoarea maximă constatată de noi este de aproximativ 150%, atinsă la tensiunea cea mai mare (210 V). Dealtfel, în general, coeficientul $K_{I\,max}$ creşte o dată cu creşterea tensiunii, fără a exista o relaţie de proporţionalitate între valorile tensiunii şi valorile acestui coeficient.

Fig. 11 arată că limitele de variaţie ale lui $K_{m\,max}$ sînt mai restrînse decît la ceilalţi doi coeficienţi. Valoarea maximă care se poate obţine pentru $K_{m\,max}$ nu depăşeşte 120%. Cu creşterea rezistenţei de sarcină coeficientul $K_{m\,max}$ suferă o uşoară scădere.

În ce priveşte influenţa tensiunii, se observă că $K_{m\,max}$ creşte o dată cu tensiunea pînă la anumite valori ale acesteia, iar la tensiuni şi mai mari $K_{m\,max}$ scade

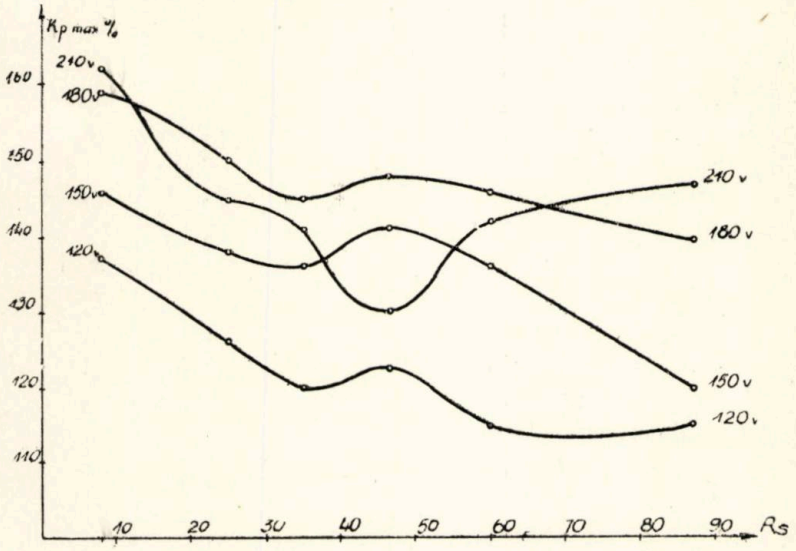


Fig 9

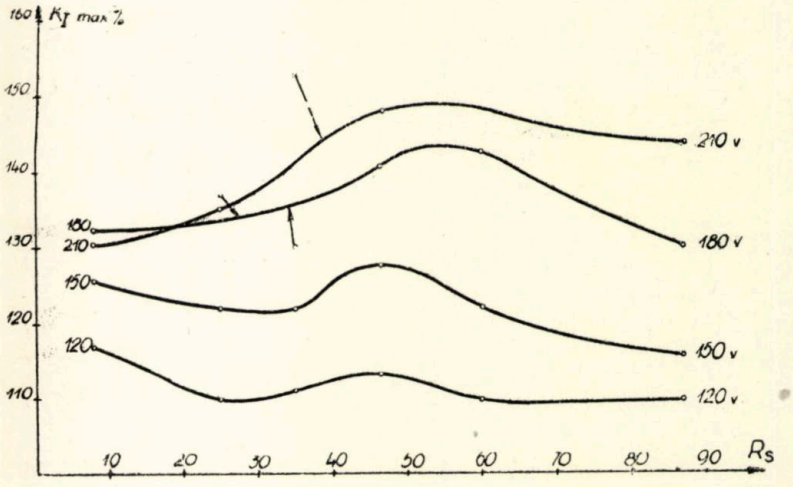


Fig. 10

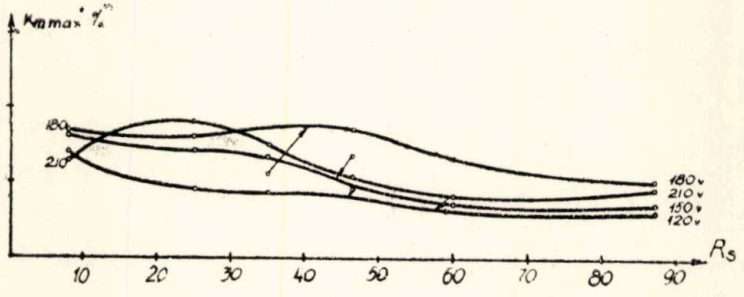


Fig. 11

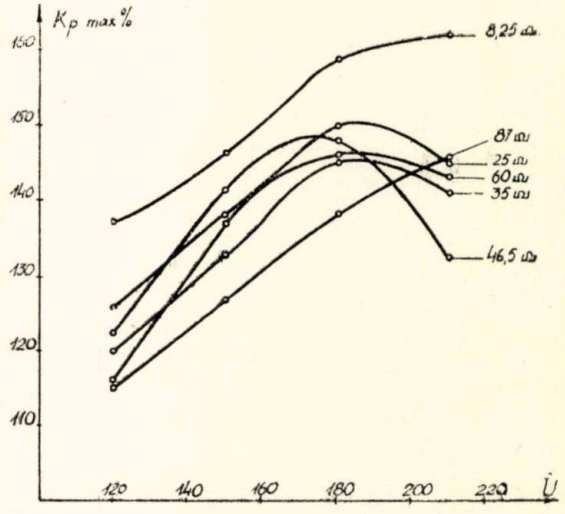
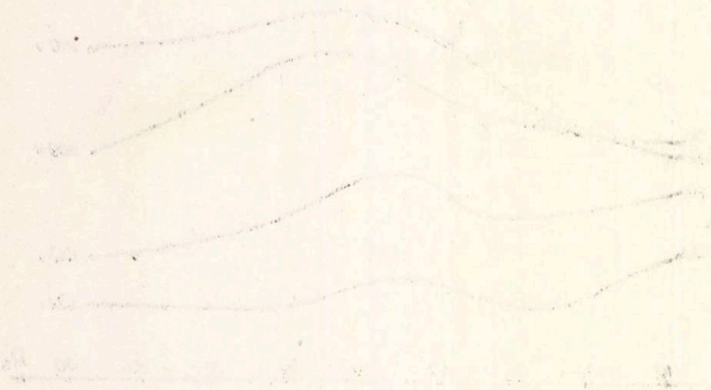
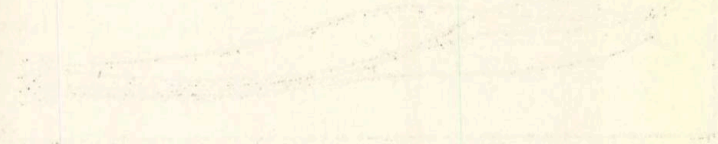


Fig. 12

PLANŞA II





Coeficientul $K_{p\,max}$ creşte o dată cu creşterea tensiunii pînă cînd se resimte efectul saturaţiei. Acest efect se manifestă prin micşorarea lui $K_{p\,max}$ la tensiunile mari (fig. 12).

Concluzii

Pe amplificatoarele construite şi cu montajul folosit (fig. 2) s-a urmărit influenţa exercitată de armonicile pare de curent din circuitul de comandă asupra parametrilor K_p, K_I şi K_m. Din încercările făcute reies următoarele concluzii mai importante:

1. Influenţa armonicilor pare se resimte în mod deosebit în funcţionarea amplificatorului pe porţiunea rectilinie a caracteristicii intrare-ieşire şi anume, în prezenţa acestor armonici coeficienţii K_p, K_I şi K_m au valori mai mari decît în absenţa lor.

2. Prezenţa armonicilor pare face ca valorile maxime ale coeficienţilor K_p şi K_I să se deplaseze spre valorile mici ale curenţilor de comandă cînd rezistenţa de sarcină creşte sau cînd scade tensiunea de alimentare.

3. Valorile raportului $K_{p\,max}$ scad o dată cu creşterea rezistenţei de sarcină (fig. 9), însă cresc atunci cînd creşte tensiunea (fig. 12). Dacă tensiunea creşte peste o anumită valoare, forma curbei se modifică, prezentînd chiar un minim la o anumită valoare a lui R_s.

4. Curba coeficientului $K_{I\,max}$ prezintă un maxim pentru o anumită valoare a rezistenţei de sarcină; cu creşterea tensiunii, $K_{I\,max}$ creşte pînă la o anumită valoare şi apoi scade.

5. Coeficientul de multiplicitate $K_{m\,max}$ este influenţat într-o măsură relativ mică de către rezistenţa de sarcină şi de tensiunea de alimentare.

6. În cazul montajului folosit, diferenţele maxime constatate între valorile coeficienţilor menţionaţi, în prezenţa armonicilor şi în absenţa lor, ating circa 60% pentru $K_{p\,max}$, 50% pentru $K_{I\,max}$ şi 18% pentru $K_{m\,max}$.

De influenţa armonicilor pare asupra parametrilor studiaţi este necesar să se ţină seamă în cazul amplificatoarelor magnetice destinate să funcţioneze pe întreg domeniul caracteristicii intrare-ieşire.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Electrotehnică şi Maşini Electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Сторм Г. Ф., Магнитные усилители, И. Л., М., 1957, (перевод из англ.).
2. Розенблат М. А., Магнитные усилители, Советское радио, М., 1956.
3. Иосифьян А. Г. и Каган Б. М., Основы следящего привода, ГЭИ, М.—Л., 1954,

ВЛИЯНИЕ ЧЁТНЫХ ГАРМОНИК НА ГЛАВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МАГНИТНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВКЛЮЧЁННЫМИ РАБОЧИМИ ОБМОТКАМИ

(Резюме)

Авторы исследуют опытным путём, на схеме рис. 2, влияние чётных гармоник тока управления на параметры K_p, K_I и K_m магнитного усилителя. Главные выводы следующие:

1. Влияние чётных гармоник особенно проявляется при работе магнитного усилителя на прямолинейную часть характеристики вход-выход.

2. Присутствие чётных гармоник ведет к перемещению максимума K_p и K_I к малым величинам тока управления при увеличении нагрузочного сопротивления или при падении напряжения.

3. Величины $K_{p\ max}$ уменьшаются при увеличении нагрузочного сопротивления (рис. 9), а при увеличении напряжения — увеличиваются (рис. 12).

4. Кривая $K_{I\ max}$ имеет максимум при некоторой величине R_s; при увеличении напряжения $K_{I\ max}$ растёт до некоторой величины, но уменьшается при больших напряжениях.

5. Величины нагрузочного сопротивления и напряжения относительно мало влияют на коэффициент кратности $K_{m\ max}$.

6. Максимальные разности, замеченные в исследуемом устройстве, между величинами указанных коэффициентов в присутствии и отсутствии чётных гармоник достигает около 60% для $K_{p\ max}$, 50% для $K_{I\ max}$ и 18% $K_{m\ max}$.

Пренебрежение влияния чётных гармоник не оказывается возможным в случае магнитных усилителей работающих на всей области характеристики вход-выход.

L'INFLUENCE DES HARMONIQUES DE RANG PAIR SUR LES PRINCIPAUX PARAMÈTRES DES AMPLIFICATEURS MAGNÉTIQUES AYANT LES ENROULEMENTS DE TRAVAIL CONNECTÉS EN SÉRIE

(Résumé)

Les Auteurs ont étudié par voie expérimentale l'influence exercée par les harmoniques de rang pair du courant de commande sur les paramètres K_p, K_I et K_m d'un amplificateur magnétique, en utilisant le schéma donné dans la fig. 2. L'analyse des résultats obtenus permet d'aboutir aux suivantes conclusions essentielles:

1. L'influence des harmoniques de rang pair se manifeste notamment lorsque le point de fonctionnement de l'amplificateur magnétique est situé sur la portion rectiligne de la caractéristique entrée-sortie.

2. La présence des harmoniques de rang pair produit un déplacement du maximum de K_p et K_I vers les petites valeurs du courant de comande, lorsque la résistence de charge augmente ou bien lorsque la tension d'alimentation diminue.

3. Les valeurs de $K_{p\ max}$ diminuent lorsque la résistence de charge augmente (fig. 9), mais augmentent avec l'augmentation de la tension (fig. 12). Si la tension dépasse une certaine valeur de R_s cette courbe présente un minimum.

4. La courbe de $K_{I\ max}$ présente un maximum pour une certaine valeur de la résistence de charge. À l'augmentation de la tension, $K_{I\ max}$ augmente d'abord jusqu'à une certaine valeur, mais diminue aux tensions plus grandes.

5. Le coefficient de multiplicité $K_{m\ max}$ est relativement peu influencé par les valeurs de la résistence de charge et de la tension d'alimentation.

6. Utilisant le montage donné dans la fig. 2, les différences maxima constatées entre les valeurs des coefficients mentionnés, lors de la présence et, respectivement, de l'absence des harmoniques de rang pair, ont atteint pour $K_{p\ max}$ - 60%, pour $K_{I\ max}$ - 50%, pour $K_{m\ max}$ - 18%, environ

L'influence des harmoniques de rang pair ne peut pas être négligée dans le cas des amplificateurs magnétiques destinés à fonctionner sur toute la caractéristique entrée-sortie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

538.222

STUDIUL VÎSCOZITĂŢII MAGNETICE LA OŢELURILE CARBON, ÎN FUNCŢIE DE OBOSEALĂ

DE
GH. ILIESCU, D. BĂRBULESCU, GH. SAVIN şi V. PETRESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Introducere

Prezenta lucrare face parte dintr-o problemă mai largă intitulată: *Studiul vîscozităţii magnetice în funcţie de solicitările mecanice.*

Există în prezent un mare număr de teorii care încearcă să explice natura ruperii metalelor prin oboseală. Astfel, unii explică oboseala prin existenţa unor transformări ireversibile care ar avea loc în metal, alţii, prin oboseala pe seama lunecărilor care au loc în cristali, iar în sfîrşit alţii atribuie oboseala, defectelor interioare şi microfisurilor de la suprafaţa metalelor [1]. Nici una din teoriile oboselii n-a fost însă confirmată pe deplin de rezultatele experimentale. Un mare număr de ipoteze, atribuind totuşi oboseala unor transformări interne de structură, ne-a determinat să încercăm a aprecia starea de oboseală a unei epruvete, folosind manifestările vîscozităţii magnetice. Prin vîscozitate magnetică se înţelege procesul de variaţie a magnetizării corpului feromagnetic după încetarea variaţiei cîmpului magnetizant, excluzînd variaţia magnetizării datorită curenţilor turbionari şi a eventualelor transformări de natură fizică sau chimică.

L. Neél [2] a stabilit teoretic legile vîscozităţii magnetice, care ulterior au fost verificate şi experimentate. El atribuie manifestările vîscozităţii magnetice la două cauze:

a) difuzia atomilor de carbon şi azot în interiorul reţelei cristaline (descoperită de Snoek [3]) dă naştere vîscozităţii de difuzie;

b) fluctuaţiile termice pot ajuta pereţii de separaţie dintre domeniile elementare să străbată obstacolele care se opun propagării lor. Acestea provoacă vîscozitatea magnetică de fluctuaţie descoperită de F. Preisach [4].

În legătură cu cercetările noastre este important să scoatem în evidenţă anumite caracteristici ce disting cele două specii de vîscozitate magnetică.

Vîscozitatea de difuzie nu se observă decît la unele substanţe şi numai între anumite limite de temperatură. Ea provoacă micşorarea permeabilităţii iniţiale pe măsură ce timpul scurs de la demagnetizare creşte. Se distinge de vîscozitatea de fluctuaţie deoarece poate avea manifestări anormale în anumite puncte ale ciclului de histerezis şi în anumite condiţii de lucru. Variaţia de inducţie care se datoreşte vîscozităţii de difuzie este proporţională cu susceptibilitatea diferenţială totală.

Vîscozitatea de fluctuaţie se manifestă la toate substanţele feromagnetice şi variază puţin cu temperatura. Ea nu afectează permeabilitatea iniţială. Variaţia de inducţie datorită manifestării vîscozităţii de fluctuaţie este proporţională cu susceptibilitatea diferenţială ireversibilă.

2. Procedeul de lucru

Oţelurile carbon, studiate de noi, manifestă la temperatura mediului ambiant şi vîscozitate de difuzie. Am verificat acest fapt căutînd să obţinem manifestări anormale după tehnica folosită de Alexandra Mitkevici [5].

Vîscozitatea de fluctuaţie are manifestările cele mai puternice pe porţiunea pantei maxime a ciclului de histerezis. Din această cauză noi am efectuat măsurările la cîmpul coercitiv unde susceptibilitatea diferenţială ireversibilă este maximă şi deci şi vîscozitatea de fluctuaţie este maximă (în acest punct se poate neglija vîscozitatea de difuzie în raport cu cea de fluctuaţie).

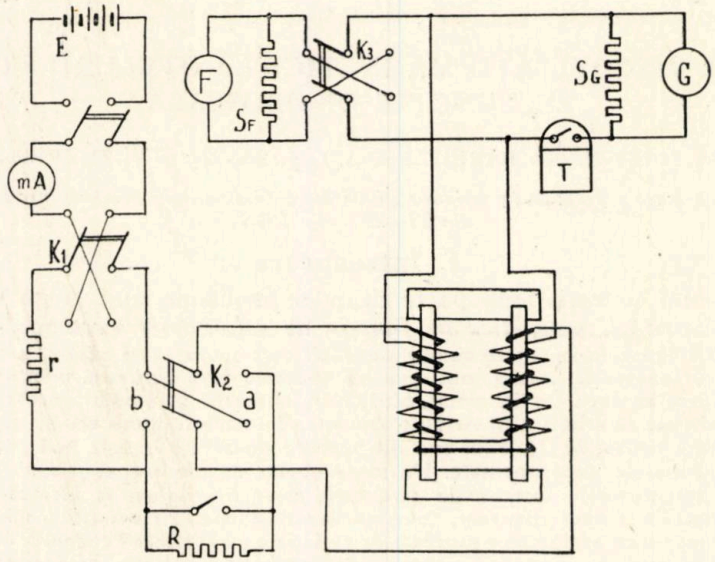


Fig. 1

Încercările la oboseală le-am realizat cu ajutorul unei maşini construite la noi după modelul clasic, solicitarea la care au fost supuse epruvetele fiind încovoierea rotativă după un ciclu alternant simetric. Epruvetele au fost executate sub formă conică de tipul în consolă conform GOST-2860-45. La execuţia lor s-a ţinut seama de toate recomandările indicate de literatură, inclusiv prelucrarea suprafeţei, care s-a făcut mecanic prin şlefuire cu carborundum fin.

Oţelurile asupra cărora am făcut încercări pînă în prezent sînt oţeluri carbon (OL), pe de-o parte pentru că sînt cele mai răspîndite în construcţiile de maşini, pe de altă parte fiindcă au o compoziţie chimică mai simplă, iar elementele străine, pe care le conţin sub formă de impurităţi, sînt în cantităţi mici.

Numărul de cicluri a fost măsurat în funcţie de timpul de mers al maşinii. Eforturile unitare maxime au fost luate în conformitate cu indicaţiile ce se găsesc în literatură pentru oţelurile respective, iar încercările au fost făcute pentru valori mai mici, egale şi mai mari decît rezistenţa la oboseală. Motorul, care acţionează dispozitivul de încercare la oboseală, are o viteză de 1450 rot/minut pentru a nu produce o încălzire nepermisă a epruvetei în timpul lucrului. La intervale, ce corespund la aproximativ 2×10^6 cicluri, epruveta era scoasă, răcită pînă la tem-

peratura ambiantă și apoi supusă încercărilor magnetice după care era demagnetizată și supusă în continuare la încercarea de oboseală.

Pentru măsurări am folosit schema din fig. 1 constînd dintr-un dispozitiv de măsură obișnuit pentru trasarea ciclului de histerezis după metoda Ewing, cu unele completări necesare pentru măsurarea vîscozității magnetice. În acest scop epruveta de încercat face parte dintr-un circuit magnetic închis cu ajutorul altei epruvete identice (martor) și a două culise executate din tole de transformator. Bobinele magnetizante sînt legate în serie și alimentate de un acumulator de mare capacitate.

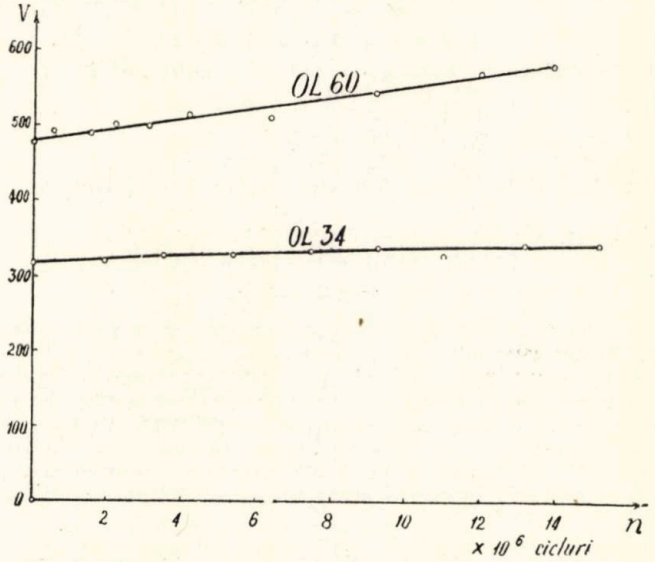


Fig. 2

Cele două bobine de măsură, de cîte 10000 spire, sînt conectate în serie, putînd fi legate fie la un fluxmetru, fie la un galvanometru. Măsurarea vîscozității magnetice s-a făcut la trei secunde după momentul stabilirii cîmpului, ceea ce ne-a permis să eliminăm complet efectele curenților turbionari. În acest scop, galvanometrul se introducea în circuit prin intermediul unui releu de timp cu contacte în mercur.

3. Concluzii

Din măsurătorile efectuate pînă în prezent rezultă următoarele:

1. Vîscozitatea magnetică de fluctuație este sigur influențată de gradul de oboseală al epruvetei, ceea ce ne îndreptățește să credem că în metalul obosit au loc schimbări de structură. N-am observat însă efectele ce se manifestă asupra vîscozității de difuzie[1]).

2. Vîscozitatea magnetică de fluctuație crește cu numărul de cicluri așa cum arată curbele din fig. 2 și anume, mai mult pentru oțelurile tari și mai puțin pentru cele moi.

[1]) În lucrarea *Les travaux récents de l'Institut de Recherches Métallurgiques de Saarbruck dans le domaine de la fatigue*, publicată în mai 1955, P. Laurent întreprinde

3. Valoarea vîscozităţii magnetice este uşor variabilă de la o epruvetă la alta chiar pentru acelaşi material, ceace s-ar putea explica prin eventualele defecte interne ale oţelurilor.

4. S-a observat, în acelaşi timp, o tendinţă de creştere a cîmpului coercitiv. Creşterea vîscozităţii la cîmpul coercitiv se datoreşte unui proces de îndreptare a spatelui ciclului de histerezis (creşterea pantei).

Cercetările în acest domeniu sînt extrem de laborioase, ele vor fi continuate necesitînd încă un volum mare de încercări.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Electrotehnică şi Maşini Electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Cazand R., *La fatigue des métaux*, Dunod, Paris, 1937, p. 29.
2. Neél L., J. Phys. Rad., 1951, **12**, p. 339.
3. Snoek J. L., Physica, 1938, **5**, p. 663.
4. Preisach F., Z. f. Physik, 1935, **94**, S. 517.
5. Mitkevitch A. V., J. Phys. Rad., 1936, **7**, p. 133.
6. Laurent P., *Colloque de Fatigue*, Springer-Verlag, Berlin, 1956, p. 141.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ УГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ ПОДВЕРЖЕННОЙ УСТАЛОСТИ

(Резюме)

Изучаются изменения магнитной вязкости пробирок из углеродистой стали, вызванные усталостью при ротационном движении.

Для этого, пробирка, подверженная усталости, вводится в магнитную цепь замыкающуюся при помощи двух кулис и одной пробирки-свидетель (неусталой).

Измеряется амплитуда магнитной вязкости при коэрцитивном поле (максимальной магнитной вязкости) через три секунды после прекращения изменения намагничивающегося поля. Измерение амплитуды производится после каждых, приблизительно, 2.10^6 циклов ротационного сгибания. Заключается, что магнитная вязкость возрастает с числом циклов.

SUR LA VISCOSITÉ MAGNÉTIQUE DE L'ACIER-CARBON SOUMIS À LA FATIGUE

(Résumé)

On étudie les modifications de la viscosité magnétique des éprouvettes d'acier-carbon, dues aux sollicitations à la fatigue produites par la flexion rotative.

L'éprouvette déjà fatiguée et l'une non fatiguée servant de temoin sont introduites dans un circuit magnétique qu'on ferme par deux portes à coulisse.

On procède à la mesure de l'amplitude de la viscosité magnétique d'un point du champ coërcitif (pour le maximum de la viscosité magnétique), à des intervalles égaux de temps (trois secondes), après la cessation de la variation du champ magnétisant.

On effectue cette mesure d'amplitude après des étapes de fatigue successives, évaluées approximativement par 2.10^6 cycles de flexion rotative. On arrive à la conclusion que la viscosité magnétique augmente avec le nombre des cycles.

---

măsurări magnetice pentru determinarea oboselii. Procedeul folosit de autorul citat se deosebeşte fundamental de cel folosit de noi. El măsoară variaţia inductanţei unei bobine alimentate la frecvenţa de 8000 Hz, al cărei miez este tocmai epruveta care este supusă la un efort de oboseală, la tracţiune-compresiune alternativă. Autorul citat constată că după încetarea efortului de oboseală, inductanţa epruvetei variază în timp, efect numit de autor „trenaj analog cu trenajul magnetic". Ca amplitudine a trenajului el consideră variaţia inductanţei stabilită la trei minute după suprimarea efortului de oboseală şi constată că acesta depinde de condiţiile de încercare şi că „deasupra limitei de oboseală creşte, cînd numărul de cicluri se măreşte".

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621.315.1

CÎTEVA PROBLEME PRIVIND FUNCŢIONAREA LINIILOR OMOGENE ÎN REGIM PERMANENT, PERIODIC, NEARMONIC

DE

HUGO ROSMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26-29 iunie 1958

1. Extinderea pentru cazul circuitelor funcţionînd în regim permanent, periodic, *nearmonic*, a metodei simbolice de studiu (în planul lui Gauss) a circuitelor funcţionînd în regim permanent, periodic, armonic, a constituit obiectul a numeroase tentative. Cele mai fructuoase s-au dovedit a fi studiile efectuate în această direcţie de W. Quade (1934) [1], de acad. C. Budeanu (1935) [2] şi, mai recent, de B. A. Rozenfeld (1949) [3].

Astfel, Quade consideră spaţiul funcţional al tuturor funcţiilor periodice reale $f(t)$ de perioadă $T = 2\pi/\omega$, sumabile la pătrat după Lebesgue în intervalul T. Funcţiilor $f(t)$ ale acestui spaţiu li se pot ataşa vectori, $\vec{F}$; metrica în acest spaţiu se introduce ca de obicei, produsul scalar fiind dat de:

$$(\vec{F}, \vec{G}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, g(t)\, dt \tag{1}$$

de unde se poate deduce lungimea vectorului $\vec{F}$

$$F = \sqrt{(\vec{F}, \vec{F})} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\, dt} \tag{2}$$

şi unghiul φ dintre $\vec{F}$ şi $\vec{G}$

$$(\vec{F}, \vec{G}) = FG \cos \varphi . \tag{3}$$

Metoda Quade constă în utilizarea relaţiilor dintre vectori (reprezentînd curenţi şi tensiuni) şi în construirea diagramelor vectoriale bi- şi tri-dimensionale pentru cazurile cînd aceşti vectori sînt într-un plan bi- sau tri-dimensional.

Acad. Budeanu arată că relaţiile care există între valorile eficace totale şi cele ale armonicilor de tensiune şi curent:

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_k^2 + \cdots, \quad I^2 = I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_k^2 + \cdots \tag{4}$$

sînt susceptibile de o reprezentare vectorială într-un spaţiu multidimensional euclidian [1]) sub forma:

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \cdots + \vec{U}_k + \cdots, \quad \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \cdots + \vec{I}_k + \cdots \tag{5}$$

Fiecare grup de vectori $\vec{U}_k, \vec{I}_k$, $(k = 1, 2, \cdots)$ se găseşte în cîte un plan făcînd între ei, în fiecare din aceste plane, unghiurile φ_k, iar toate aceste plane sînt normale absolut între ele, avînd deci un singur punct comun în spaţiul considerat multidimensional.

B. A. Rozenfeld construieşte pentru studiul circuitelor electrice în regim permanent periodic, nearmonic, o metodă simbolică, folosind o algebră hipercomplexă (într-un spaţiu Hilbert), care generalizează metoda simbolică utilizată în studiul circuitelor electrice în regim permanent, periodic, armonic. Această metodă preconizează ataşarea pe lîngă fiecare funcţie

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \tag{6}$$

a unui vector (hipercomplex)

$$\hat{F} = \sum_{k=0}^{\infty} (1_k a_k + \mathrm{j}_k b_k) \tag{7}$$

funcţiile $1_k, \mathrm{j}_k$ fiind ortonormate în sensul metricii (1). Dacă în acest spaţiu se introduce produsul vectorial, asociativ şi distributiv (faţă de adunare), spaţiul vectorial cu o astfel de înmulţire este un spaţiu Hilbert. Algebra constituită este comutativă şi reprezintă o sumă directă a corpului numerelor reale (generat de 1_0) şi a mulţimii numărabile [2]) de corpuri de numere complexe (generate de perechea de elemente 1_k şi j_k).

Elementul unitate al algebrei este:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1_k = 1. \tag{8}$$

De asemenea:

$$1_k^2 = 1_k, \mathrm{j}_k^2 = -1_k, 1_k \mathrm{j}_k = \mathrm{j}_k 1_k = \mathrm{j}_k, 1_k \mathrm{j}_l = \mathrm{j}_l 1_k = 1_k 1_l = \mathrm{j}_k \mathrm{j}_l = 0, (k \neq l). \tag{9}$$

În sfîrşit, semnalăm relaţia importantă

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{j}_k k\omega)^m, \tag{10}$$

m fiind un întreg (pozitiv sau negativ) oarecare.

2. În cele ce urmează vom aplica metoda simbolică (hipercomplexă) la studiul funcţionării liniilor omogene în regim permanent, periodic, nearmonic.

Se consideră o linie omogenă avînd parametrii primari lineici: R, L — parametri longitudinali şi G, C — parametri transversali. Într-o secţiune a liniei situată la distanţa x de bornele primare ale liniei, ecuaţiile tensiunii şi intensităţii de curent sînt (de ex. [5]):

---

1) *Notă la corectură.* Recent [4], Vlad Ionescu a arătat că fenomenele deformante se descriu prin clase de funcţii care satisfac proprietăţilor unui spaţiu Hilbert.

2) Spaţiul are o mulţime numărabilă de dimensiuni.

$$(11)\qquad -\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t},$$

unde:

$$(12)\qquad u = \sum_{k=0}^{\infty}(U'_k \cos k\omega t + U''_k \sin k\omega t), \quad i = \sum_{k=0}^{\infty}(I'_k \cos k\omega t + I''_k \sin k\omega t).$$

Ataşînd valorilor instantanee u şi i, mărimile hipercomplexe:

$$(13)\qquad \hat{U} = \sum_{k=0}^{\infty}(1_k U'_k + j_k U''_k), \qquad \hat{I} = \sum_{k=0}^{\infty}(1_k I'_k + j_k I''_k),$$

ecuaţiile (11) devin:

$$(14)\qquad -\frac{d\hat{U}}{dx} = \left(R + \sum_{k=0}^{\infty} j_k k\omega L\right)\hat{I} = \hat{Z}_s \hat{I}, \quad -\frac{d\hat{I}}{dx} = \left(G + \sum_{k=0}^{\infty} j_k k\omega C\right)\hat{U} = \hat{Y}_d \hat{U},$$

sau

$$(15)\qquad \frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = \hat{Z}_s \hat{Y}_d \hat{U}, \quad \frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = \hat{Z}_s \hat{Y}_d \hat{I}$$

unde s-a avut în vedre relaţia (10).

Sistemul de ecuaţii (15) este întru totul analog celui ce se obţine în regim armonic; soluţionarea lui se face în acelaşi mod obţinîndu-se soluţiile:

$$(16)\qquad \begin{cases} \hat{U}_x = \frac{1}{2}(\hat{U}_1 - \hat{Z}_c \hat{I}_1)\, e^{\hat{\gamma}x} + \frac{1}{2}(\hat{U}_1 + \hat{Z}_c \hat{I}_1)\, e^{-\hat{\gamma}x} = \hat{U}_1 \operatorname{ch} \hat{\gamma}x - \hat{Z}_c \hat{I}_1 \operatorname{sh} \hat{\gamma}x, \\ \hat{I}_x = \frac{1}{2\hat{Z}_c}(\hat{U}_1 - \hat{Z}_c \hat{I}_1)\, e^{\hat{\gamma}x} + \frac{1}{2\hat{Z}_c}(\hat{U}_1 + \hat{Z}_c \hat{I}_1)\, e^{-\hat{\gamma}x} = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_c} \operatorname{sh} \hat{\gamma}x + \hat{I}_1 \operatorname{ch} \hat{\gamma}x, \end{cases}$$

sau

$$(17)\qquad \hat{U}_1 = \hat{U}_x \operatorname{ch} \hat{\gamma}x + \hat{I}_x \hat{Z}_c \operatorname{sh} \hat{\gamma}x, \quad \hat{I}_1 = \hat{U}_x \frac{\operatorname{sh} \hat{\gamma}x}{Z_c} + \hat{I}_x \operatorname{ch} \hat{\gamma}x,$$

unde

$$(18)\qquad \hat{\gamma} = \sqrt{\hat{Z}_s \hat{Y}_d} = \sqrt{(R + \sum_{k=0}^{\infty} j_k k\omega L)(G + \sum_{k=0}^{\infty} j_k k\omega C)}$$

reprezintă *constanta de propagare*, iar

$$(19)\qquad \hat{Z}_c = \sqrt{\frac{\hat{Z}_s}{\hat{Y}_d}} = \sqrt{\frac{R + \sum_{k=0}^{\infty} j_k k\omega L}{G + \sum_{k=0}^{\infty} j_k k\omega C}}$$

reprezintă *impedanţa caracteristică* a liniei.

Astfel, studiul propagării undelor de tensiune şi de curent de-a lungul unei linii omogene funcţionînd în regim permanent, periodic, nearmonic, a cărui importanţă practică este evidentă în cazul reţelelor funcţionînd în regim deformant, sau în cazul liniilor de telecomunicaţii, se poate efectua destul de simplu pe această cale, păstrînd un strîns paralelism cu procedeul analog utilizat în cazul regimului permanent armonic.

4. Într-o Notă anterioară [6] am reuşit să extindem la studiul cîmpurilor electromagnetice în regim permanent, periodic, nearmonic, teoria fenomenelor deformante, elaborată de acad. C. Budeanu [7].

În cele ce urmează vom arăta posibilitatea integrării studiului regimului energetic al liniilor omogene funcţionînd în regim permanent, periodic, nearmonic, în teoria generală a fenomenelor deformante. Precizăm că unele date, în această direcţie, au fost furnizate de către însăşi acad. C. Budeanu [8].

5. Se consideră ecuaţiile diferenţiale (11) ale tensiunii şi intensităţii de curent într-o secţiune a unei linii omogene.

Amplificînd prima ecuaţie cu i, a doua ecuaţie cu u şi sumînd, se obţine legea de conservare a energiei, în unitatea de timp şi pe unitatea de lungime a liniei:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ui) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) = -(Ri^2 + Gu^2). \tag{20}$$

În regim permanent armonic:

$$u = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t + \Psi_U),\quad i = \sqrt{2}\,I\sin(\omega t + \Psi_I),$$

iar ecuaţiile (11) se pot scrie, sub forma simbolică:

$$-\frac{\mathrm{d}\bar{U}}{\mathrm{d}x} = (R + \mathrm{j}\omega L)\bar{I},\qquad -\frac{\mathrm{d}\bar{I}}{\mathrm{d}x} = (G + \mathrm{j}\omega C)\bar{U}. \tag{21}$$

Din (21), amplificînd prima ecuaţie cu $\overset{*}{I}$ şi conjugata celei de a doua ecuaţii cu $\bar{U}$, prin sumare se obţine:

$$-\frac{\mathrm{d}(\bar{U}\overset{*}{I})}{\mathrm{d}x} = RI^2 + GU^2 + \mathrm{j}2\omega\left(\frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2}CU^2\right) \tag{22}$$

de unde rezultă legea de conservare a puterii active şi reactive, pe unitatea de lungime a liniei:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(UI\cos\varphi_{UI}) = -RI^2 - GU^2,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(UI\sin\varphi_{UI}) = -2\omega\left(\frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2}CU^2\right) \tag{23}$$

unde

$$\Psi_U - \Psi_I = \varphi_{UI}. \tag{24}$$

Dacă regimul liniei, permanent, periodic, este nearmonic, atunci, folosind dezvoltările în serii Fourier, avem:

$$(25)\quad u=\sum_{k=0}^{\infty}u_k=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}U_k\sin\left(k\omega t+\Psi_{U_k}\right),\quad i=\sum_{k=0}^{\infty}i_k=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}I_k\sin\left(k\omega t+\Psi_{I_k}\right)$$

cu

$$(26)\qquad \Psi_{U_0}=\Psi_{I_0}=\pi/2.$$

Ţinînd seama de ecuaţiile (25), expresia (22), a bilanţului energetic, devine:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k i_k+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}u_p i_q\right)+$$

$$(27)\quad +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}C\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2+\frac{1}{2}C\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}u_p u_q+\frac{1}{2}L\sum_{k=0}^{\infty}i_k^2+\frac{1}{2}L\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}i_p i_q\right)=$$

$$=-R\sum_{k=0}^{\infty}i_k^2-R\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}i_p i_q-G\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2-G\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}u_p u_q,\ (p\neq q).$$

Folosind un rezultat obţinut recent de către prof. Edm. Nicolau [9], se poate arăta că dacă distribuţia de tensiuni şi de intensităţi de curent, pe o linie omogenă, este rezultanta unei infinităţi numărabile de distribuţii parţiale, ceea ce constituie cazul studiat în acest paragraf (v. relaţiile (25)), atunci:

$$(28)\qquad \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_p i_q)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}Cu_p u_q+\frac{1}{2}Li_p i_q\right)\right]=$$

$$=-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(Ri_p i_q+Gu_p u_q),\ (p\neq q).$$

Ţinînd seama de (28), din (27) rezultă:

$$(29)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_k i_k)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}Cu_k^2+\frac{1}{2}Li_k^2\right)\right]=-\sum_{k=0}^{\infty}(Ri_k^2+Gu_k^2),$$

aşadar teorema suprapunerii efectelor se poate aplica la legea conservării energiei şi în consecinţă, în cazul cînd regimul de funcţionare al unei linii omogene este permanent, periodic, nearmonic, legea de conservare a energiei se poate aplica individual, fiecărei armonici, în parte. Rezultă de aici că *atît puterea activă cît şi puterea reactivă, pe fiecare unitate de lungime a liniei este egală cu suma puterilor active, respectiv reactive, corespunzătoare fiecărei armonici*, adică:

$$(30)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}U_k I_k\cos\varphi_{U_k I_k}=-\sum_{k=0}^{\infty}(RI_k^2+GU_k^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}U_k I_k\sin\varphi_{U_k I_k}=-2\sum_{k=0}^{\infty}k\omega\left(\frac{1}{2}LI_k^2-\frac{1}{2}CU_k^2\right),$$

unde

$$\psi_{U_k} - \psi_{I_k} = \varphi_{U_k I_k}. \tag{31}$$

Relațiile (30) sînt întrutotul analoage, celor similare, care se obțin în cazul circuitelor cu constante concentrate.

6. Cu ajutorul relației (28) se poate stabili legea de conservare a puterilor deformante elementare. Într-adevăr, ținînd seama de rezultatul menționat, obținut de prof. Edm. Nicolau [9], pentru fiecare grup de armonici de rang $p-q$, avem:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_p i_q + u_q i_p) + \frac{\partial}{\partial t}(Cu_p u_q + Li_p i_q) = -2(Ri_p i_q + Gu_p u_q). \tag{32}$$

Ținînd seama de relațiile (25), expresia (32) devine:

$$\begin{aligned}
&\nabla [U_p I_q \sin(p\omega t + \Psi_{U_p}) \sin(q\omega t + \Psi_{I_q}) + \\
&+ U_q I_p \sin(q\omega t + \Psi_{U_q}) \sin(p\omega t + \Psi_{I_p})] + \\
&+ \omega C U_p U_q [p \cos(p\omega t + \Psi_{U_p}) \sin(q\omega t + \Psi_{U_q}) + \\
&+ q \cos(q\omega t + \Psi_{U_q}) \sin(p\omega t + \Psi_{U_p})] + \\
&+ \omega L I_p I_q [p \cos(p\omega t + \Psi_{I_p}) \sin(q\omega t + \Psi_{I_q}) + \\
&+ q \cos(q\omega t + \Psi_{I_q}) \sin(p\omega t + \Psi_{I_p}) = \\
&= -2 [R I_p I_q \sin(p\omega t + \Psi_{I_p}) \sin(q\omega t + \Psi_{I_q}) + \\
&+ G U_p U_q \sin(p\omega t + \Psi_{U_p}) \sin(q\omega t + \Psi_{U_q})],
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\left(\nabla \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right).$$

Expresia (33) trebuind să fie satisfăcută, oricare ar fi timpul t, rezultă relațiile:

$$\begin{aligned}
&\nabla [U_p I_q \sin(\Psi_{I_q} - \Psi_{U_p}) + U_q I_p \sin(\Psi_{I_p} - \Psi_{U_q})] - \\
&- \omega (p-q) [C U_p U_q \cos(\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p}) + L I_p I_q \cos(\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p})] = \\
&= -2 [R I_p I_q \sin(\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p}) + G U_p U_q \sin(\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p})],
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla [U_p I_q \cos(\Psi_{I_q} - \Psi_{U_p}) + U_q I_p \cos(\Psi_{I_p} - \Psi_{U_q})] + \\
&+ \omega (p-q) [C U_p U_q \sin(\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p}) + L I_p I_q \sin(\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p})] = \\
&= -2 [R I_p I_q \cos(\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p}) + G U_p U_q \cos(\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p})],
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\nabla [U_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{U_p}) + U_q I_p \sin (\Psi_{I_p} + \Psi_{U_q})] +$$

$$(35) \quad + \omega (p+q) [C U_p U_q \cos (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p}) + L I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p})] =$$

$$= -2 [R I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p}) + G U_p U_q \sin (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p})],$$

$$\nabla U_p I_q \cos (\Psi_{I_q} + \Psi_{U_p}) + U_q I_p \cos (\Psi_{I_p} + \Psi_{U_q})] -$$

$$(37) \quad - \omega (p+q) [C U_p U_q \sin (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p}) + L I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p})] =$$

$$= -2 [R I_p I_q \cos (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p}) + G U_p U_q \cos (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p})], \quad (p \neq q).$$

Relațiile (34), (35), (36) și (37) pun în evidență conservarea puterilor deformante elementare, pentru perechi de armonici de rang p, respectiv q. Extinzînd aceste relații la totalitatea perechilor de armonici care alcătuiesc spectrul undelor de tensiune și de curent, se obțin relațiile:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \nabla [U_p I_q \sin (\Psi_{I_q} - \Psi_{U_p})] - \frac{1}{2} \omega (p-q) [C U_p U_q \cos (\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p}) + \right.$$

$$(38) \quad \left. + L I_p I_q \cos (\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p})] \right\} = - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [R I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p}) +$$

$$+ G U_p U_q \sin (\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p})],$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \nabla [U_p I_q \cos (\Psi_{I_q} - \Psi_{U_p})] + \frac{1}{2} \omega (p-q) [C U_p U_q \sin (\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p}) + \right.$$

$$(39) \quad \left. + L I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p})] \right\} = - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [R I_p I_q \cos (\Psi_{I_q} - \Psi_{I_p}) +$$

$$+ G U_p U_q \cos (\Psi_{U_q} - \Psi_{U_p})],$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \nabla [U_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{U_p})] + \frac{1}{2} \omega (p+q) [C U_p U_q \cos (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p}) + \right.$$

$$(40) \quad \left. + L I_p I_q \cos (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p})] \right\} = - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [R I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p}) +$$

$$+ G U_p U_q \sin (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p})],$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \nabla [U_p I_q \cos (\Psi_{I_q} + \Psi_{U_p})] - \frac{1}{2} \omega (p+q) [C U_p U_q \sin (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p}) + \right.$$

$$(41) \quad \left. + L I_p I_q \sin (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p})] \right\} = - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [R I_p I_q \cos (\Psi_{I_q} + \Psi_{I_p}) +$$

$$+ G U_p U_q \cos (\Psi_{U_q} + \Psi_{U_p})], \quad (p \neq q).$$

Utilizînd procedeul preconizat de catre acad. C. Budeanu [1], cu ajutorul relaţiilor de conservare (38), (39), (40) şi (41) se poate determina expresia puterii deformante, pentru fiecare unitate de lungime a liniei.

Institutul Politehic, Iaşi,
Catedra de Electrotehnică şi Maşini Electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Quade W., Arch. für Elektrot., 1934, **18**, S. 130—138.
2. Budeanu C., Bull. de Math. et de Phys. de l'Éc. Polyt. de Bucarest, 1935, **7**, *1-3*.
3. Розенфельд Б. А., Труды сем. по вект. и тенз. ан., 1949, **7**, стр. 381—387.
4. Ionescu V., Electrotehnica, 1958, **6**, *8*, pp. 280—286.
5. Rădulet R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, **IV**, Tipogr. şi Litogr. M. I., Buc., 1956, pp. 14—15.
6. Rosman H., Şt. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Fizică şi şt. tehn., 1958, **9**, *1*, pp. 71—91.
7. Budeanu C., *Puissances réactives et fictives*, IRE, Buc., 1927.
8. — Electricitatea, 1930, *3*, pp. 124—131.
9. Nicolau E., St. şi cerc. de fizică, 1954, **5**, *1—2*, pp. 395—414.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАСАЮЩЕСЯ РАБОТЫ ГОМОГЕННЫХ ЛИНИЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ, ПЕРИОДИЧЕСКОМ, НЕГАРМОНИЧЕСКОМ, РЕЖИМЕ

(Резюме)

В первой части заметки применяется символический (гиперкомплексный) метод [3] в изучении работы гомогенных линий в установившемся, периодическом, негармоническом режиме; получаются, написанные в симболической форме, уравнения (17) напряжения и тока в сечении линии.

Во второй части заметки применяется теория искажающих явлений в изучении энергетического режима гомогенных линий работающих в установившемся, периодическом, негармоническом режиме ; получаются уравнения (34), (35), (36) и (37) выявляющие сохранение элементарных искажающих мощностей.

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE FONCTIONNEMENT DES LIGNES HOMOGÈNES EN RÉGIME PERMANENT, PÉRIODIQUE, NONHARMONIQUE

(Résumé)

Dans la première partie de cette Note on applique la méthode symbolique (hypercomplexe) [3] à l'étude des lignes homogènes fonctionnant en régime permanent, périodique, nonharmonique. On obtient, sous forme symbolique, les équations (17) de la tension et du courant daus une section de la ligne.

Dans la deuxième partie de cette Note on applique la théorie des phénomènes déformants à l'étude du régime énergétique des lignes homogènes fonctionnant en régime permanent, périodique, nonharmonique. On obtient les relations (34)...(37) qui mettent en évidence la conservation des puissances déformantes élémentaires.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621-231

К РАСЧЕТУ НАИМЕНЬШИХ РАЗМЕРОВ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИМСЯ ВЕДОМЫМ ЗВЕНОМ

В. Я. БЕЛЕЦКИЙ

Расчет наименьших кулачковых механизмов с поступательно движущимся звеном, касающимся кулачка острием или роликом, дан впервые докт. техн. наук проф. В. Т. Костицыным [1] и [2]. Автором предложен графоаналитический [3] и аналитический [4] методы расчета наименьших размеров. В настоящей заметке приводится упрощенный аналитический метод.

Согласно формулам (4) и (7) работы [4]:

$$R = \delta f \frac{ds}{d\varphi}\left(1 + 2\frac{h - s}{l}\right) - s \tag{1}$$

и

$$l = \sqrt{2\delta f} \cdot \sqrt{(h - s)\frac{ds}{d\varphi}}, \tag{2}$$

где (см. рис. 1): R — радиус центровой (теоретической) шайбы кулачка, l—длина направляющей ведомого звена, s — перемещение ведомого звена, отсчитываемое от начального положения, h — сумма величин максимального размаха ведомого звена H и радиуса ролика r, δ — коэффициент запаса против самозаклинивания ведомого звена в направляющих, f — коэффициент трения ведомого звена в направляющих, φ— угол поворота кулачка.

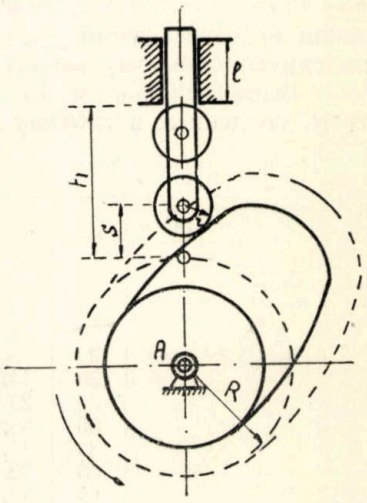


Рис. 1.

Наименьшие допустимые размеры механизма определяются наименьшей допустимой величиной суммы $R + l$. Чтобы установить последнюю достаточно выполнить следующие несложные расчеты.

Разбить величину угла поворота кулачка за время удаления ведомого звена φ_y на ряд равных частей. Для каждой из этих частей по известному закону движения ведомого звена определить величины s и

$\frac{ds}{d\varphi}$. Подставить последние, а также заданные величины δ, f и h в уравнение (2) и найти величину l. Вычислить по уравнению (1) величину R, а затем определить сумму $R+l$. В результате получим совокупность значений суммы $R+l$. Наибольшее из этих значений определяет минимально допустимые размеры механизма, а следовательно, и искомые величины R_{min} и l_{min}.

Если при этом одна из величин R_{min} либо l_{min} окажется неконструктивно малой, нужно поступить следующим образом. Выбирая в первом случае подходящее значение l, найти с помощью уравнения (1) наибольшую из величин R, которую и следует принять за радиус центровой шайбы. Если же приходится задаваться величиной R, то искомое значение l—это наибольшее из значений, получаемых по формуле

$$l=2(h-s)/\left[(R+s)/\left(\frac{ds}{d\varphi}\delta f\right)-1\right], \tag{3}$$

вытекающей из уравнения (1).

В заключение приведем числовой пример.

Пример. Определить наименьшие размеры центрального кулачкового механизма по следующим данным: максимальный размах ведомого звена $H=120$ мм, радиус ролика $r=5$ мм, следовательно, $h=120+5=125$ мм, величина угла поворота кулачка за время удаления ведомого звена $\varphi_y=90°$, ускорение ведомого звена изменяется по синусоидальному закону, $\delta=2$ и $f=0{,}1$,

Выполняя расчет по приведенной выше схеме, получаем результаты, сведенные в таблицу 1.

Таблица 1

φ^0	s	$\frac{ds}{d\varphi}$	l	R	$l+R$
0	0	0	0	—	—
10	1,3	18	28	34	62
20	8,6	63	51	60	111
25	14,4	90	60	70	130
30	25,6	114	64	66	130
35	30,0	135	68	73	141
40	47,3	147	64	53	117
50	72,6	147	52	16	68
60	95,6	114	36	—	—
70	111,3	63	17	—	—
80	118,6	18	7	—	—
90	120,0	0	0	—	—

Из приведенных данных видно, что допустимые наименьшие размеры механизма получим при $l+R=141$ мм, причем $l_{min}=68$ мм и $R_{min}=73$ мм.

По этим величинам l и R вычисляем фактические значения коэффициента запаса против самозаклинивания механизма по формуле

$$\delta_{\Phi} = (R + S) / \left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} f \left(1 + 2 \frac{h - s}{l} \right) \right], \tag{4}$$

получаемой на основании уравнения (1). Результаты представлены на рис. 2 в виде графика.

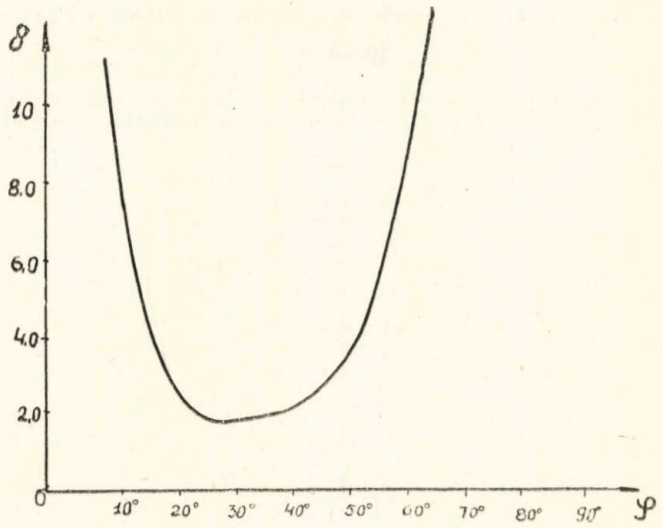


Рис. 2.

В тех случаях, когда требуется получить более точные значения величин R и l, следует воспользоваться методом, изложенным в работе [4].

Поступило 19 XI 1958

Одесский Технологический Институт
им. И. В. Сталина, СССР

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Костицын В. Т., Методы расчета наименьших размеров кулачковых механизмов со штангой в прямолинейных направляющих, Труды семинара по теории машин и механизмов, 1947, **3**, *12*.
2. — О наименьших размерах кулачковых механизмов, Вестник машиностроения, 1947, *9*.
3. Белецкий В. Я., К теории динамического проектирования кулачковых механизмов, Вестник инженеров и техников, 1949, *2*.
4. — О расчете наименьших размеров центральных и смещенных кулачковых механизмов, Труды Одесского технологического института имени И. В. Сталина, 1955, **7**.

CALCOLO DELLE DIMENSIONI MINIME DEI MECCANISMI A CAMME PROVVISTI DALL'ORGANO MOTORE IN ATTO DI MOTO TRASLATORIO

(Sunto)

L'A. seguendo l'ordine di idee esposte negli articoli [3], [4] presenta un metodo simplificato per il calcolo delle dimensioni minime dei meccanismi a came provvisti delle organo motore in atto di moto traslatorio.

CALCULUL DIMENSIUNILOR MINIME ALE MECANISMELOR CU CAME AVÎND ORGANUL CONDUCĂTOR ÎN TRANSLAŢIE

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei expusă în [3], [4], prezintă o metodă analitică simplificată de calcul a dimensiunilor minime ale mecanismelor cu came avînd organul conducător în translaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621 – 231

STUDIUL PROBLEMELOR DE SINTEZĂ A MECANISMELOR CU CAME PLANE PRIN METODA TENSORIALĂ

DE

D. MANGERON și CORNELIU DRĂGAN

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Institutului Politehnic din Iași, din 26-29 iunie 1958

1. Într-o lucrare monografică cu totul recentă acad. I. I. Artobolevski [1], [2] a rezolvat cu succes greaua sarcină de a analiza profund marile progrese realizate la scară mondială în domeniul Teoriei mecanismelor și mașinilor în perioada scursă între cele două conferințe unionale de TMM ținute la Moscova respectiv în 1954 și 1958.

În această perioadă s-au obținut, în particular, rezultate importante și esențiale în studiul mecanismelor cu came. Ținînd seama de aplicațiile la scară largă a unor astfel de mecanisme în mașinile automate, în vederea reproducerii diferitelor legi de mișcare a organelor de lucru a mașinilor executoare, diferiți cercetători au acordat o mare atenție analizei legilor mișcărilor periodice a organelor de lucru precum și legăturii existente între aceste legi și structura mecanismelor cu came sau geometria profilelor camelor. Astfel, monografiile lui N. I. Levitski [3], [4], în deosebi prima, conțin întregul complex al acestor probleme legate de proiectarea rațională a mecanismelor cu came. Fundamentala monografie a lui H. A. Rothbart [1, p. 12] trece în revistă construcția mecanismelor cu came plane și spațiale, studiindu-se în deosebi problema legilor de mișcare a organelor conduse date sub forma de polinoame. K. V. Tir [5] se consacră studiului problemei de alegere și de evaluare calitativă a legilor mișcării periodice cristalizînd cu totul recent seria studiilor proprii și acea a numeroaselor cercetări sovietice și străine în [6], iar S. N. Kojevnikov [7], alegerii parametrilor celor mai favorabili ținînd seama de unghiul de transmisie. L. N. Reșetov [8] proiectează came în formă de disc de dimensiuni minime, iar V. A. Zinoviev [9] dezvoltă metodele analitice de analiză cinematică a mecanismelor cu came plane. Teoria unor clase de mecanisme cu came și pîrghii a fost elaborată de J. Müller [10], iar C. N. Neklutin [11] studiază camele din punctul de vedere dinamic și al proiectării ținînd seama de procesele vibratorii. Cu acest prilej și-au găsit loc aparate de investigație matematică puternice și din ce în ce mai complicate, cum sînt, de pildă, calculul virial, calculul simbolic, metode analitice etc., elaborate în ultimii ani de F. M. Dimentberg, S. G. Kislițîn, I. F. Moroșkin, G. St. Kalitzin, J. Denavit, R. Beyer, R. S. Hartenberg, autorii acestei note ș. a. [12] ... [26].

2. Un mecanism cu came, constituit dintr-un lanț cinematic spațial sau plan, oricît de complex, conține unul sau mai multe circuite simple închise [20], astfel încît batiul să aparțină fiecărui circuit. Se poate întotdeauna suprima rola, dacă organul condus o are, înlocuind profilul real al camei prin profilul teoretic al ei, profilele real și teoretic fiind curbe echidistante, distanța între ele, măsurată pe normală, fiind egală cu raza rolei.

Într-un mecanism cu camă plană, organul condus poate avea o mișcare de translație, una de rotație sau o mișcare paralelă cu un plan fix (planul mecanismului).

Asocierea dintre camă şi organul condus se face printr-o cuplă cinematică superioară. Sinteza unui astfel de mecanism constă în determinarea profilului teoretic al camei, cunoscîndu-se legea de mişcare a organului condus, în concordanţă cu procesul tehnologic al maşinii care conţine mecanismul considerat, precum şi legea de mişcare a camei. Este necesară verificarea ulterioară a profilului, astfel încît unghiul de transmitere să varieze între anumite limite prescrise şi mecanismul în ansamblul său să nu depăşească un anumit gabarit.

În cele ce urmează, folosind metoda tensorială elaborată în [20], se rezolvă problema sintezei mecanismelor cu came plane.

3. Fie mecanismul cu camă plană reprezentat în fig. 1. Cama I_2^* se roteşte în jurul axei articulaţiei din O_3, unghiul de rotaţie al camei fiind notat cu θ. Sistemul de axe de coordonate $O_3 x_{21}^* x_{22}^* x_{23}^*$ este solidar cu organul I_2^*, axa $O_3 x_{23}^*$ fiind axa articulaţiei din O_3, iar sistemul de axe de coordonate $O_0 x_{01} x_{02} x_{03}$ ese solidar cu or-

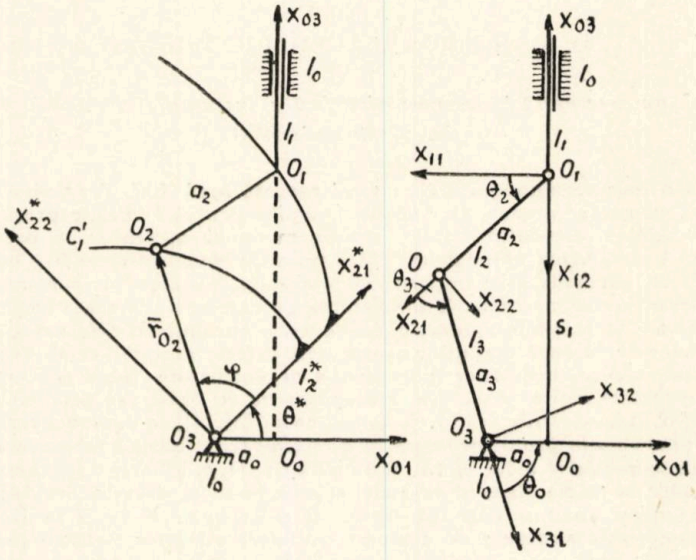


Fig. 1.

ganul fix I_0. Axa $O_0 x_{01}$ este perpendiculara coborîtă din O_3 pe direcţia de alunecare $O_0 x_{03}$ a cuplei de translaţie care asociază organele I_1 şi I_0.

Legea de mişcare a camei, presupusă cunoscută, se poate prezenta sub una din formele $\theta^* = \theta^*(t)$ sau $\omega^* = \mathrm{d}\theta^*/\mathrm{d}t = \omega^*(t)$ sau $\varepsilon^* = \mathrm{d}^2\theta^*/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}\omega^*/\mathrm{d}t = \varepsilon^*(t)$. Curba C_1 este profilul real al camei sau profilul ei teoretic, dacă organul condus I_1 este prevăzut cu rolă. Curba C_1' este locul geometric, în planul $O_3 x_{21}^* x_{22}^*$, al centrului de curbură O_2 în punctul de contact O_1 cu organul I_1 al curbei de profil C_1. Ecuaţia curbei este $a_3 = r_{O_2} = r_{O_2}(\varphi)$. Se notează cu a_2 raza de curbură a curbei C_1 în punctul O_1. Organul condus I_1 are, faţă de batiul I_0, o mişcare de translaţie rectilinie şi legea sa de mişcare este dată sub una din formele $s_1 = s_1(\theta^*)$ sau $v_1 = \mathrm{d}s_1/\mathrm{d}t = v_1(\theta^*)$ sau $a_1 = \mathrm{d}^2 s_1/\mathrm{d}t^2 = a_1(\theta^*)$.

Această lege de mişcare se presupune cunoscută şi trebuie determinat profilul adecvat al camei.

Cupla cinematică superioară, ce asociază organele I_2^* şi I_1 poate fi înlocuită cu un lanţ cinematic deschis fictiv, format dintr-un organ I_2 de lungime a_2, în general variabilă, şi două articulaţii, una situată în centrul de curbură O_2 al profilului camei, iar alta în O_1 — centrul rolei dacă organul I_1 are rolă — sau dacă nu, O_1 reprezintă extremitatea organului condus care vine în contact cu profilul camei. Mecanismului cu camă i se poate substitui mecanismul fictiv format din organele $I_0\, I_1\, I_2\, I_3\, I_0$, reprezentat în dreapta fig. 1 şi la care asocierea organelor se face numai cu cuple inferioare. Axele de coordonate solidare cu aceste organe sînt reprezentate în figură, la fel şi variabilele cuplelor cinematice. Acest din urmă mecanism este un mecanism bielă-manivelă plan cu biela de lungime variabilă, în general, legea de variaţie a lungimii bielei fiind tocmai legea de variaţie a lungimii razei de curbură a profilului camei. Din figură se vede că $\theta_0 = 180^0 - (\theta^* + \varphi)$, $r_{O_2} = a_3$, iar a_0 este excentricitatea mecanismului cu camă. Aplicînd metoda tensorială elaborată în [20], mecanismului bielă-manivelă înlocuitor, se ajunge la ecuaţia tensorială caracteristică lui, adică

$$T^{(0,0)} = T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(0,3)} = E, \tag{1}$$

în care tensorii de poziţie ai organelor lanţului cinematic închis fictiv $I_0\, I_1\, I_2\, I_3\, I_0$ sînt

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ s_1 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \cos\theta_2 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ a_2 \sin\theta_2 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 \cos\theta_3 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ a_3 \sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 \cos\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & -\sin\theta_0 \\ a_0 \sin\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

După efectuarea calculelor se obţine

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & -a_{24} & 0 & -a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

în care s-a notat

$$\begin{cases} a_{21} = -a_2 \cos\theta_2 - a_3 \cos(\theta_2+\theta_3) - a_0 \cos(\theta_0+\theta_2+\theta_3), \; a_{22} = \cos(\theta_0+\theta_2+\theta_3), \\ a_{41} = s_1 - a_2 \sin\theta_2 - a_3 \sin(\theta_2+\theta_3) - a_0 \sin(\theta_0+\theta_2+\theta_3), \; a_{24} = \sin(\theta_0+\theta_2+\theta_3). \end{cases} \tag{3}$$

Identificînd componentele ambilor tensori din (2), şi ţinînd seama de (3), se deduce $-\cos(\theta_0 + \theta_2 + \theta_3) = 1$, adică $\theta_2 + \theta_3 = 180^0 - \theta_0$, dar $\theta_0 = 180^0 - (\theta^* + \varphi)$, de unde

$$\theta_2 + \theta_3 = \theta^* + \varphi \tag{4}$$

şi prin urmare

$$-a_2 \cos\theta_2 - a_3 \cos(\theta^* + \varphi) + a_0 = 0, \tag{5}$$

$$s_1 - a_2 \sin\theta_2 - a_3 \sin(\theta^* + \varphi) = 0. \tag{6}$$

Rezolvînd ecuaţiile (5) şi (6), necunoscutele fiind θ_2 şi a_2, se obţin relaţiile

$$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left\{ [s_1 - a_3 \sin(\theta^* + \varphi)]/[a_0 - a_3 \cos(\theta^* + \varphi)] \right\}, \tag{7}$$

$$a_2 = \sqrt{a_0^2 + a_3^2 + s_1^2 - 2 a_0 a_3 \cos(\theta^* + \varphi) - 2 s_1 a_3 \sin(\theta^* + \varphi)}. \tag{8}$$

Dacă se alege funcţia $\theta^* = \theta^*(\varphi)$, cunoscîndu-se funcţiile $s_1 = s_1(\theta^*)$, $a_3 = a_3(\varphi)$ şi valoarea lui a_0, ecuaţia (4) reprezintă *legea de variaţie a razei de curbură a profilului camei*. Profilul real sau teoretic al camei este înfăşurătoarea cercurilor de rază a_2 trasate din punctele O_2 ale curbei C_1'.

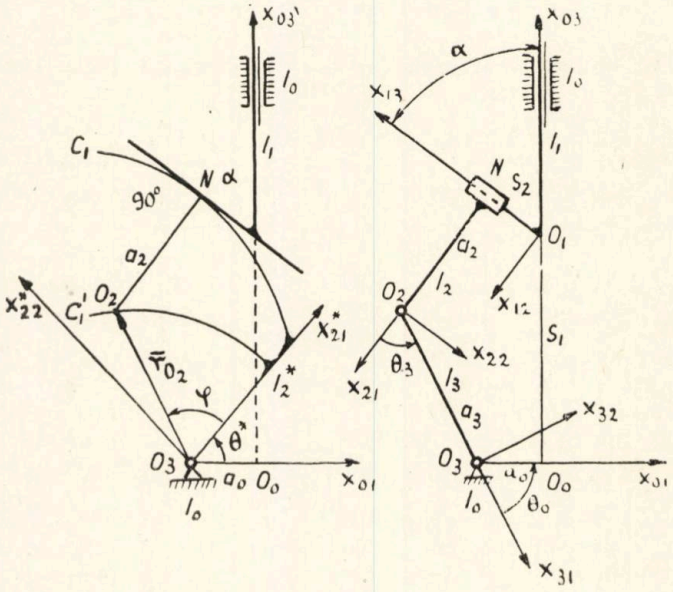


Fig. 2.

În fig. 2 este arătat un alt tip de mecanism cu camă. Organul condus este prevăzut cu un disc plan ce face unghiul dat α cu direcţia de alunecare a cuplei de translaţie care asociază organul condus la batiu. Discul rămîne mereu tangent la profilul camei şi deci punctul de contact N dintre acesta şi curba de profil C_1 nu este, în general, extremitatea organului condus O_1. Lanţul cinematic fictiv, echivalent cuplei cinematice superioare, este format din organul I_2, articulaţia din O_2 şi cupla de translaţie din N. Mecanismul cu camă poate fi deci înlocuit prin mecanismul format din organele $I_0\ I_1\ I_2\ I_3\ I_0$, în care asociaţia organelor este realizată numai cu ajutorul unei cuple cinematice inferioare. În figură sînt notate axele de coordonate solidare cu organele mecanismului înlocuitor, precum şi variabilele cuplelor cinematice. Tensorii de poziţie ai acestor organe sînt:

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}, \quad T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3\cos\theta_3 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ a_3\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0\cos\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & -\sin\theta_0 \\ a_0\sin\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

iar $\theta_1 = 90^0$, $\theta_2 = 90^0$, $\eta = 90^0$.

Ecuaţia tensorială caracteristică mecanismului este

$$T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(0,3)} = E,$$

adică

$$(9) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & -a'_{22} & 0 & a'_{42} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a'_{41} & -a'_{42} & 0 & -a'_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

în care s-a notat

$$(10) \qquad \begin{cases} a'_{21} = -a_2\cos\alpha - s_2\sin\alpha - a_3\cos(\alpha+\theta_3) - a_0\cos(\alpha+\theta_3+\theta_0), \\ a'_{41} = s_1 - a_2\sin\alpha + s_2\cos\alpha - a_3\sin(\alpha+\theta_3) - a_0\sin(\alpha+\theta_3+\theta_0), \\ a'_{22} = \cos(\alpha+\theta_3+\theta_0), \quad a'_{42} = \sin(\alpha+\theta_3+\theta_0). \end{cases}$$

Identificînd componentele tensorilor din ambii membri ai ecuaţiei tensoriale (9) şi ţinînd seama de (10) se deduce $-\cos(\alpha+\theta_3+\theta_0) = 1$, dar $\theta_0 = 180^0 - (\theta^* + \varphi)$ şi deci

$$(11) \qquad \theta_3 = \theta^* + \varphi - \alpha.$$

Se obţin astfel următoarele două ecuaţii

$$(12) \qquad -a_2\cos\alpha - s_2\sin\alpha - a_3\cos(\theta^* + \varphi) + a_0 = 0,$$

$$(13) \qquad s_1 - a_2\sin\alpha + s_2\cos\alpha - a_3\sin(\theta^* + \varphi) = 0,$$

din care se obţin necunoscutele a_2 şi s_2 date prin

$$(14) \qquad s_2 = a_0\sin\alpha - s_1\cos\alpha + a_3\sin(\theta^* + \varphi - \alpha),$$

$$(15) \qquad a_2 = a_0\cos\alpha + s_1\sin\alpha - a_3\cos(\theta^* + \varphi - \alpha).$$

Ecuaţia (15) reprezintă legea de variaţie a razei de curbură a profilului camei.

Organul condus al unui mecanism cu camă plană poate fi asociat la batiu printr-o articulaţie şi în acest caz el execută o mişcare de rotaţie oscilatorie. În fig. 3 este reprezentat un astfel de mecanism la care organul condus este profilat. Curba C_2

reprezintă curba de profil a camei I_2^*. Curba C_2' este, în planul $O_3 x_{21}^* x_{22}^*$ solidar cu cama I_2^*, locul geometric al centrelor de curbură O_2 ale curbei de profil C_2 corespunzător punctelor de contact K. Se presupune că este dată ecuaţia $r_{O_2} = r_{O_2}(\varphi_2)$, în care $r_{O_2} = a_3$. Curba C_1 este curba de profil a organului condus I_1^*, iar curba C_1' este locul geometric al centrelor de curbură O_1 ale curbei C_1 corespunzător punctelor K de contact, în planul $O_0 x_{11}^* x_{12}^*$, solidar cu organul condus I_1^*. Se face ipoteza că este dată relaţia $r_{O_1} = r_{O_1}(\varphi_1)$, în care s-a notat $r_{O_1} = a_1$. Legea de mişcare a organului condus I_1^*, presupusă cunoscută, este dată sub una din formele $\theta_1^* = \theta_1^*(\theta_2^*)$, sau $\omega_1^* = \mathrm{d}\theta_1^*/\mathrm{d}t = \omega_1^*(\theta_2^*)$, sau $\varepsilon_1^* = \mathrm{d}^2\theta_1^*/\mathrm{d}t^2 = \varepsilon_1^*(\theta_2^*)$. Se notează prin R_1^* şi R_2^* razele de

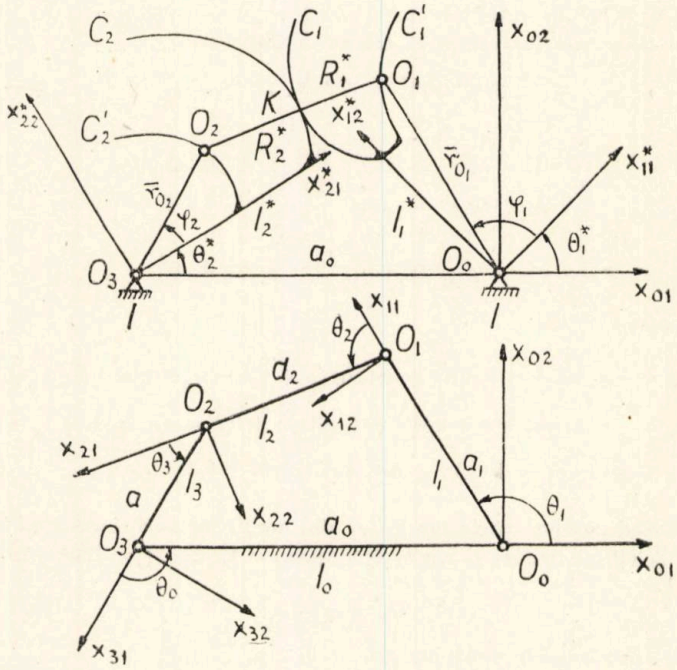


Fig. 3.

curbură, corespunzătoare punctului de contact K_1, ale curbelor C_1 şi C_2. Cupla cinematică superioară care asociază organele I_1^* şi I_2^* poate fi înlocuită cu un lanţ cinematic fictiv, deschis, format din organul I_2 de lungime $a_2 = R_1^* + R_2^*$, în general variabilă, şi două articulaţii situate în cele două centre de curbură O_1 şi O_2. Mecanismul cu camă este deci echivalent cu mecanismul patrulater articulat plan format din organele $I_0\, I_1\, I_2\, I_3\, I_0$, asocierea lor fiind făcută numai cu ajutorul articulaţiilor $r_{O_2} = a_1$ şi $r_{O_3} = a_3$. Axele de coordonate solidare cu aceste organe sînt reprezentate în figură ca şi variabilele cuplelor cinematice. Din fig. 3 se constată că $\theta_0 = \theta_2^* + \varphi_2$ şi $\theta_1 = \theta_1^* + \varphi_1$. Tensorii ce definesc poziţiile relative ale organelor I_1, I_2, I_3, I_0 sînt:

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\cos\theta_1 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ a_1\sin\theta_1 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2\cos\theta_2 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ a_2\sin\theta_2 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3\cos\theta_3 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ a_3\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0\cos\theta_0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0 \\ a_0\sin\theta_0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ecuaţia tensorială caracteristică circuitului simplu închis $I_1\ I_2\ I_3\ I_0$ este

$$T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(0,3)} = E,$$

care în acest caz devine

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a''_{21} & a''_{22} & -a''_{32} & 0 \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

$a''_{21}, a''_{22}, a''_{31}, a''_{31}$ fiind date prin

$$\begin{cases} a''_{21} = a_1\cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) + a_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + a_0\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_0), \\ a''_{31} = a_1\sin\theta_1 + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) + a_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + a_0\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_0), \\ a''_{22} = \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_0),\ a''_{32} = \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_0). \end{cases} \tag{17}$$

Identificînd componentele tensorilor din ambii membri ai ecuaţiei tensoriale (16) şi ţinînd seama de (17), se deduce $\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_0)=1$, $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_0=360°$, dar $\theta_1 = \theta_1^* + \varphi_1$, $\theta_0 = 180° - (\theta_2^* + \varphi_2)$, adică

$$\theta_2 + \theta_3 = 180° - \theta_1^* - \varphi_1 + \theta_2^* + \varphi_2. \tag{18}$$

Se obţin următoarele ecuaţii

$$a_1\cos(\theta_1^*+\varphi_1) + a_2\cos(\theta_1^*+\varphi_1+\theta_2) - a_3\cos(\theta_2^*+\varphi_2) + a_0 = 0, \tag{19}$$

$$a_1\sin(\theta_1^*+\varphi_1) + a_2\sin(\theta_1^*+\varphi_1+\theta_2) - a_3\sin(\theta_2^*+\varphi_2) = 0, \tag{20}$$

din care necunoscutele θ_2 şi a_2 rezultă date de

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{a_0\sin(\theta_1^*+\varphi_1) - a_3\sin(\theta_1^*+\varphi_1-\theta_1^*-\varphi_2)}{a_3\cos(\theta_1^*+\varphi_1-\theta_2^*-\varphi_2) - a_0\cos(\theta_2^*+\varphi_1) - a_1}, \tag{21}$$

$$a_2^2 = a_3^2 + a_1^2 + a_0^2 - 2a_3a_1\cos(\theta_1^*+\varphi_1-\theta_2^*-\varphi_2) - 2a_3a_0\cos(\theta_2^*+\varphi_2) + 2a_1a_0\cos(\theta_1^*+\varphi_1). \tag{22}$$

Pe lîngă legea de mişcare a organului condus de I_1^*, se mai presupune cunoscută legea de variaţie a razei de curbură $R_1^* = R_1^*(\varphi_1)$ şi curbele C_1' şi C_2', adică funcţiile $a_1 = a_1(\varphi_1)$ şi $a_3 = a_3(\varphi_2)$. Dacă se alege funcţia $\theta_1^* = \theta_1^*(\varphi_1)$, rezultă $\theta_2^* = \theta_2^*(\varphi_2)$ şi se alege valoarea lui a_0. Ecuaţia

$$R_2^* = a_2 - R_1^* \tag{23}$$

reprezintă legea de variaţie a razei de curbură a profilului camei. Profilul camei, real sau teoretic, este înfăşurătoarea cercurilor de rază R_2^* trasate din punctele O_2 ale curbei C_2'.

În fig. 4 este reprezentat un mecanism cu camă la care organul condus este o bară articulată la batiu a cărei extremitate se reazemă de profilul camei, adică un levier

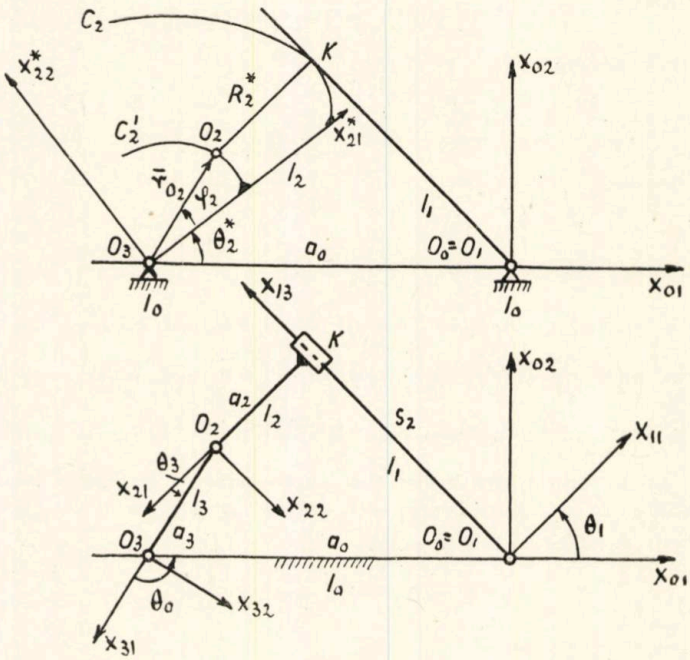


Fig. 4.

oscilant de lungime constantă. Acest mecanism este un caz particular al mecanismului caracterizat prin ecuaţiile (16), (17), în care $\varphi_1 = 0$, $R_1^* = 0$, $a_1 = \text{const.}$, $\theta_1 = \theta_1^* + 90^0$, $a_2 = R_1^*$, $\theta_3 = 180^0 - \theta_1 - \theta_2 + \theta_2^* + \varphi_2$. Ecuaţiile (21) şi (22) devin

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-a_3 \sin(\theta_1 - \theta_2^* - \varphi_2) + a_0 \sin\theta_1}{a_3 \cos(\theta_1 - \theta_2^* - \varphi_2) - a_0 \cos\theta_1 - a_1}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} a_2^2 = {} & a_3^2 + a_1^2 + a_0^2 - 2a_3 a_1 \cos(\theta_1 - \theta_2^* - \varphi_2) - \\ & - 2a_3 a_0 \cos(\theta_2^* + \varphi_2) + 2a_1 a_0 \cos\theta_1 . \end{aligned} \tag{25}$$

Dacă levierul oscilant este suficient de lung pentru a putea rămîne mereu tangent la profilul camei, se obţine mecanismul din fig. 5, la care organul condus este deci un levier oscilant de lungime variabilă. Lanţul cinematic fictiv deschis, echivalent cuplei cinematice superioare este format din organul I_2, articulaţia din O_2 şi cupla de translaţie din K, $a_2 = R_2^*$ în general variabil. Mecanismul echivalent este format din organele I_0, I_1, I_2, I_3, I_0, asocierea dintre organe făcîndu-se numai cu ajutorul cuplelor inferioare. Tensorii de poziţie ai organelor I_1, I_2, I_3, I_0 sînt:

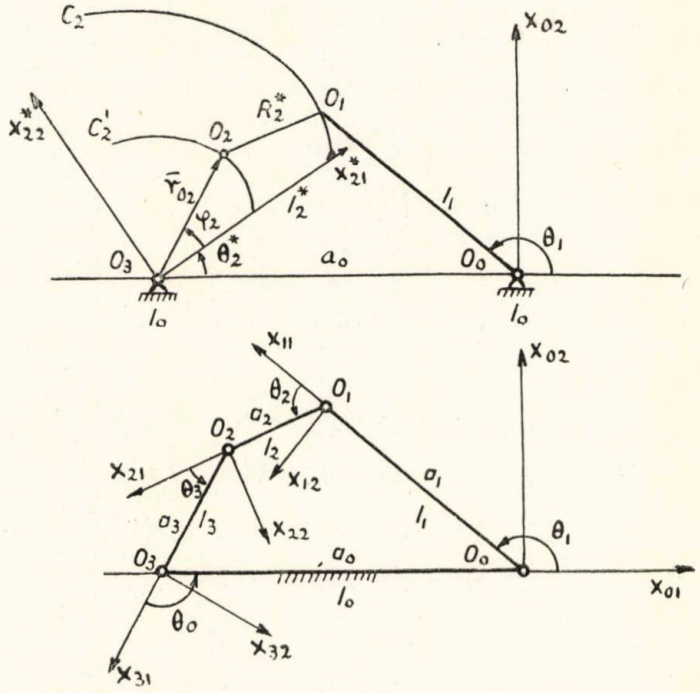


Fig. 5.

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ s_2 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3\cos\theta_3 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ a_3\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0\cos\theta_0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0 \\ a_0\sin\theta_0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ecuaţia tensorială caracteristică lanţului cinematic simplu închis $I_1\, I_2\, I_3\, I_0$ este

$$T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(0,3)} = E,$$

care în acest caz devine

$$(26)\qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a'''_{21} & -a'''_{22} & a'''_{32} & 0 \\ a'''_{31} & -a'''_{32} & -a'''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

în care s-a notat

$$(27)\qquad \begin{cases} a'''_{21} = -a_2\cos\theta_1 - s_2\sin\theta_1 - a_3\cos(\theta_1+\theta_3) - a_0\cos(\theta_0+\theta_1+\theta_3), \\ a'''_{31} = -a_2\sin\theta_1 + s_2\cos\theta_1 - a_3\sin(\theta_1+\theta_3) - a_0\sin(\theta_0+\theta_1+\theta_3), \\ a'''_{22} = \cos(\theta_0+\theta_1+\theta_3), \quad a'''_{32} = \sin(\theta_0+\theta_1+\theta_3). \end{cases}$$

Identificînd componentele tensorilor din ambii membri ai ecuaţiei tensoriale (26) ţinînd seama de (27), se obţine $\cos(\theta_0+\theta_1+\theta_3) = -1$, $\theta_0+\theta_1+\theta_3 = 180^\circ$, dar $\theta_0 = 180^\circ - (\theta_2^\star + \varphi_2)$, adică

$$(28)\qquad \theta_1 + \theta_3 = \theta_2^\star + \varphi_2$$

şi următoarele două ecuaţii

$$(29)\qquad a_2\cos\theta_1 + s_2\sin\theta_1 + a_3\cos(\theta_2^\star+\varphi_2) - a_0 = 0,$$

$$(30)\qquad a_2\sin\theta_1 - s_2\cos\theta_1 + a_3\sin(\theta_2^\star+\varphi_2) = 0,$$

din care se obţin necunoscutele a_2 şi s_2 date prin

$$(31)\qquad a_2 = a_0\cos\theta_1 - a_3\cos(\theta_1 - \theta_2^\star - \varphi_2),$$

$$(32)\qquad s_2 = a_0\sin\theta_1 - a_3\sin(\theta_1 - \theta_2^\star - \varphi_2).$$

Legea de mişcare a organului condus $\theta_1 = \theta_1(\theta_2^\star)$ este presupusă dată; la fel curba C_2', adică $a_3 = a_3(\varphi_1)$. Dacă se alege $\theta_2^\star = \theta_2^\star(\varphi_2)$ şi valoarea lui a_0, ecuaţia (31) reprezintă legea de variaţie a razei de curbură a curbei C_2 de profil a camei, căci $a_2 = R_2^\star$.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Артоболевский И. И., Современное состояние теории машин и механизмов în volumul Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, АН СССР., М., 1958.
2. Mangeron D., Bogdan R., Bul. Inst. Iaşi, 1958, **4**, (**8**), *1—2*, pp. 471—478.
3. Левитский Н. И., Методы расчета кулачковых механизмов, М., Машгиз, 1954.
4. — Кулачковые механизмы, Всесоюзный Заочный Политехнический Институт, М., 1955.

5. Тир К. В., Научные записки Ин-та Машиноведения АН УССР, 1956, **4**, *3*.
6. — Комплексный расчет кулачковых механизмов, М., Киев, 1958.
7. Кожевников С. Н., Труды Днепропетр. металл. ин-та, 1954, **32**.
8. Решетов Л. Н., Проектирование дисковых кулачков наименьших габаритов în volumul Вопросы Теории механизмов и машин, Машгиз, М., 1955.
9. Зиновьев В. А., Труды Ин-та Машиноведения АН СССР, Семинар по теории машин и механизмов, **15**, *58*, 1955, стр. 38—45.
10. Müller J., Maschinenbautechnik, 1957, **6**, *2*, S. 118—123.
11. Neklutin C. N, Machine Design, 1954, **26**, *12*, pp. 190—198.
12. Denavit J., Hartenberg R. S., J. Appl. Mech., 1955, **22**, *2*, pp. 215—222.
13. Denavit J., *Transactions of the Fourth Conference on Mechanisms*, Purdue University, 1958, pp. 81—104.
14. Beyer R., *Transactions of the Fifth Conference on Mechanisms* Purdue University, 1958, pp. 141—163.
15. Дименберг Ф. М., Определение положений пространственных механизмов, АН СССР, М., 1950.
16. Кислицын С. Г., Труды семинара по ТММ, **14**, *51*, 1954, стр. 51—75.
17. Морошкий Ю. Ф., Ibid., **14**, *54*, 1954, стр. 25—50.
18. Левитский Н. И., Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов în volumul Итоги Второго Всесоюзного Совещания по ТММ, М., 1958, стр. 24-29.
19. Kalitzin G. St., Acta technica Acad. scient. Hungaricae, 1955, **11**, *3—4*.
20. Mangeron. D., Drăgan C., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **3** (**7**), *1—2*, pp. 151—164.
21. — Rev. de Méc. appl., 1957, **2**, *1*, pp. 145—156.
22. — Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1958, **4** (**8**), *1*—2, pp. 327—338.
23. Drăgan C., Ibid., 1957, **3** (**7**), *3—4*, pp. 175—184.
24. *** Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории машин и механизмов (под ред. акад. И. И. Артоболевского, АН СССР Ин-т Машиноведения, М., (в печати).
25. *** *Berichte der Verhandlung der Dresdener Tagung für Getriebelehre*, Technische Hochschule, Dresden (im Druck).
26. *** *Proceedings of the Fifth Conference on Mechanisms*, Purdue University, Lafayette, Indiana, 1958, p. 239.
27. *** Основые проблемы теории машин и механизмов, М., АН СССР, 1956, (под ред. акад. И. И. Артоболевского).

ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

(Резюме)

Акад. И. И. Артоболевский в своем обширном докладе посвященном современному состоянию теории машин и механизмов [1], представленным на Втором Всесоюзном Совещании по основным проблемам ТММ (Москва, 24...28 марта 1958 г.), глубоко проанализировав работы по ТММ, опубликованные в научных журналах за период истекший после Первого Совещания по ТММ (Москва, 14...16 июня 1954 г.) и установив главнейшие направления дальнейшего развития ТММ, имеющего решающее значение для развития машиностроения и поднятия его уровня на ещё более высокую степень развития, остановился [1, стр. 12...13], на ряде важных и существенных результатов полученных в исследовании кулачковых механизмов.

Авторы, исходя из определений тензоров положения характеризующих рассматриваемую кинематическую пару, специфических тензоров цепей или же циклов и тензорных уравнений, характеризующих конфигурацию простой замкнутой кинематической цепи, или же простого замкнутого цикла, приведенных наряду с тензором скорости в [20], исследуют ряд задач синтеза плоских механизмов схематически представленных на рис. 1...5 и выражаемых соотношениями (1)...(32). Примененный тензорный метод позволяет выразить, как и в случае исследования кинематики кривошипно-шатунного пространственного механизма [22] или же кинематики кулисных пространственных механизмов [27] (этот же вып. Изв. ЯПИ), аналогично символическому методу [12] и проблематике геометрии сложных кинематических цепей [17], предельно лаконическими

формами, основные уравнения кинематики плоских кулачковых механизмов, разносторонне рассмотренных многими авторами в трудах недавно проведенных совещаний по Теории машин и механизмов [24]...[27].

A NEW TENSOR METHOD IN THE SYNTHESIS OF TWO-DIMENSIONAL CAM MECHANISMS

(Summary)

In the last years it has always been tried from various angles to bridge the gap between science and practice by using a very extensive introduction of various scientific procedures in the science of mechanisms [1]. Important investigations was developed concerning cinematic and dynamic analysis of cam mechanisms.

This paper presents a new tensor method in the synthesis of two-dimensional cam mechanisms. The elaborated method, developed in [20] and applied in [22] to study the special Slider-Crank space lincages and other mechanisms, is to be compared with the elegant procedures concerning a set of recent studies related to the kinematic notations for lower-pair mechanisms based on matrices and with the tensor method exposed during the Moscow Conference on the Theory of Machines and Mechanisms of March [24], the Dresden Mechanisms Conference of September [25], and the Purdue University Fifth Conference on Mechanisms of October 1958 [26].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621 – 231

К ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ[1)]

Д. МАНЖЕРОН, КОРНЕЛИУ ДРЭГАН, Н. ИРИМИЧУК и ОКТАВ МУНТЯНУ

Выдержка из доклада представленного на научной сессии Ясского Политехнического Института от 19—21 мая 1956 г.

1. Известная работа В. П. Горячкина [1], посвященная задаче о структуре и кинематике пространственных механизмов земледельческих машин, послужила началом систематических исследований пространственных механизмов, всё более и более внедряющихся в современную технику, в особенности в рамках решения фундаментальной проблемы автоматизации производственных процессов, продолженных в последние годы различными методами, среди которых значительные результаты, касающиеся определения положений пространственных механизмов, были достигнуты Ф. М. Диментбергом, С. Г. Кислицыным и Ю. Ф. Морошкиным [3], [4], используя, развитую А. П. Котельниковым, стройную теорию винтового исчисления[2)].

2. В статье находящейся в печати в другом научном журнале, один из авторов настоящей заметки пришел, развивая метод „винтов", к ряду теорем относящихся к пространственному обобщению метода приведенных ускорений любого порядка, примененного с успехом в ряде работ к задачам анализа и синтеза плоских механизмов[3)].

Из ряда теорем, касающихся исследования пространственных и, в частности, сферических механизмов или же „движений" в пространствах постоянной кривизны, приводится следующая

Теорема I. Геометрическое место точек M_n определяемых векторным уравнением

$$\bar{r}_{M_n} = \bar{r}_M + \lambda_n \bar{a}_M^{(n)}, \tag{1}$$

где $\bar{a}_M^{(n)}$ ускорение n-го порядка точки M прямои (D)

Замечания при корректуре. 1) Библиография расширена введением некоторых работ вышедших после проведения цитируемого доклада авторов.

2) Акад. И. И. Артоболевский дал, в рамках обширного доклада представленного на пленарном заседании Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории Машин и Механизмов (Москва, 24 ... 28 марта 1958 г.) [2], глубокий анализ современного состояния ТММ и подходов к решениям важнейших задач в области механики машин, обеспечивающих быстрый прогресс комплексной проблематики автоматизации производственных процессов, установив при этом и главнейшие направления дальнейшего развития ТММ.

3) Эти исследования продолжились затем в свете новых результатов Н. С. Вабищева [13], [14] касающихся изображения на одной плоскости пространственных объектов при помощи, несколько им измененной, плановой аксонометрии и продолжаются [16] при разработке метода векторных цилиндрических ксординат (см. так же и этот выпуск Известий ЯПИ).

(2) $$\bar{r}_M = \bar{r}_0 + \mu_M \bar{u}, \quad \bar{u}^2 = 1,$$

принадлежащей к некоторому твердому телу в общем пространственном движении, а λ_n и μ_M — параметры, — прямая (D_n) образующая с данной, (D), угол θ_n, данный

(3) $$\cos\theta_n = \left[1 - \lambda_n (A_n - A_n(\bar{u}))\right] \left\{ \left[\bar{u} + \lambda_n (\bar{\omega} \times \bar{u})^{(n)}\right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

и находящаяся от (D) на расстоянии d_n определяемом формулой

(4) $$d_n = \lambda_n (\bar{a}_0^{(n)} \times \bar{C}^{(n)}) / \sqrt{\bar{C}^{(n)} \cdot \bar{C}^{(n)}}, \quad \bar{C} = \bar{\omega} - \bar{u}(\bar{\omega} \cdot \bar{u}),$$

причем прямая несущая d_n характеризуется верзором

(5) $$\bar{p}_n = \bar{C}^{(n)} / \sqrt{\bar{C}^{(n)} \cdot \bar{C}^{(n)}}$$

и пересекает (D) и (D_n) соответственно в точках

(6) $$\bar{r}_n = \bar{r}_0 + \mu_n \bar{u}; \quad \bar{r}_n^{\star} = \bar{r}_0 + \mu_n \bar{u} + d_n \bar{p}_n,$$

где

(7) $$\begin{cases} \mu_n = \dfrac{\bar{a}_0^{(n)} \cdot \bar{C}^{(n)}}{\bar{C}^{(n)} \cdot \bar{C}^{(n)}} \cdot \dfrac{\bar{F}_n \cdot \bar{u} - \lambda_n \bar{E}_n \cdot \bar{C}^{(n)}}{\bar{E}_n \cdot \bar{u}}, \\ \bar{E}_n = \bar{\omega}(\bar{u} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{u})^{(n)}) - \bar{u}(\bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{u})^{(n)}), \\ \bar{F}_n = \bar{\omega}(\bar{u} \cdot \bar{C}^{(n)}) - \bar{u}(\bar{\omega} \cdot \bar{C}^{(n)}), \end{cases}$$

а A_n и $A_n(\bar{u})$ даются (10), (11).

3. Полученные результаты разрабатываются и отдельными коллективами в рамках применения к ТММ метода приведенных ускорений любого порядка „изоклинных крестов", определяемых уравнением

(8) $$\theta_n = \text{const.},$$

тогда как метод приведенных ускорений любого порядка соответствующий

(9) $$\lambda_n = (A_n - A_n(\bar{u}))^{-1} \quad \text{или же} \quad \theta_n = \pi/2,$$

где

(10) $$\begin{cases} A_{n+1} = \dot{A}_n + \bar{\omega} \cdot \bar{B}_n, \quad \bar{B}_{n+1} = \dot{\bar{B}}_n - \bar{\omega} A_n, \\ A_1 = \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}, \quad \bar{B}_1 = \bar{\omega}^{(2)}, \quad (\dot{} \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t), \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

а $A_n(\bar{u})$ образуется из A_n „расслоением по $\bar{u}$", однозначно получаемым следуя нижеприведенным определениям

(11) $$\begin{cases} A_1(\bar{u}) = (\bar{\omega} \cdot \bar{u})(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \quad \text{при} \quad A_1 = (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}); \\ A_2(\bar{u}) = 3(\bar{\omega}^{(2)} \cdot \bar{u})(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \quad \text{при} \quad A_2 = 3(\bar{\omega}^{(2)} \cdot \bar{\omega}); \\ A_3(\bar{u}) = 4(\bar{\omega}^{(3)} \cdot \bar{u})(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) + 3(\bar{\omega}^{(2)} \cdot \bar{u})(\bar{\omega}^{(2)} \cdot \bar{u}) - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega})(\bar{\omega} \cdot \bar{u})(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \\ \text{при} \quad A_3 = 4(\bar{\omega}^{(3)} \cdot \bar{\omega}) + 3(\bar{\omega}^{(2)} \cdot \bar{\omega}^{(2)}) - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega})(\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \quad \text{и т. д.}, \end{cases}$$

будучи широко использован многими авторами [5]..[11], [15] в исследованиях плоских механизмов, служит развитию графо-аналитических методов анализа и синтеза пространственных механизмов и представляет собою пространственное обобщение плоских „прямоугольных крестов" Котельникова, введенных им лишь для обыкновенных ускорений [12].

Ясский Политехнический Институт,
Кафедра механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячкин В. П., Собрание Сочинений, т. **2**, Селхозиздат, М., 1949 г.
2. Артоболевский И. И., в Сборнике Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории механизмов и машин, М., 1958, стр. 11.
3. Левитский Н. И., Ibid., стр. 24.
4. Дименберг Ф. М., Кислицын С. Г., в Сборнике Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории машин и механизмов, М., 24—28 марта 1958 г. (в печати).
5. Манжерон Д. И., Дрэган К., Ibid. (в печати).
6. Mangeron D., Drăgan C., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **3** (**7**), *3—4*, pp. 161—174.
7. Зильберман Я. С., Ibid., 1957, **3** (**7**), *1—2*, стр. 165 — 174.
8. Manafu V., Ibid., 1956, **2** (**6**), *1—2*, pp. 311—320.
9. Mangeron D., Drăgan C., Munteanu O., Ibid., 1956, **2** (**6**), *3 — 4*, pp. 263—282.
10. Mangeron D., Drăgan C., Svijevschi V., Rev. Méc. appl., 1957, **2**, *1*, pp. 145—156.
11. Mangeron D., Bogdan R., Studii şi Cercetări de Mecanică aplicată, 1958, **9**, *4*, pp. 1093—1098.
12. Котельников А. П., Заметка по графической динамике, Труды Краснознаменного мех.-маш. Ин-та им. Баумана, каф. Теор. мех., 1937, вып. *29 — 30*, стр. 3—27.
13. Вабищ'ев Н. С., О графических методах механики. Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук. Лен. ордена ТКЗ Инж.-Стр. Ин-т, Л., 1957, стр. 8—13.
14. — Вып. *32*, Лен. ордена ТКЗ Инж. - Стр. Ин-т, Л., 1957, стр. 2—42.
15. Манжерон Д., ДАН, 1955, **102**, *5*, стр. 897-898; Ibid., **112**, *1*, 1957, стр. 27-28.
16. Irimiciuc N., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **3** (**7**), *3—4*, pp. 195—200.

SOPRA I METODI GRAFO-ANALITICI CONCERNENTI LO STUDIO DEI MECCANISMI SPAZIALI

(Sunto)

Gli autori stabiliscono, all'occasione della Terza Conferenza scientifica organizzata presso l'Istituto Politecnico di Iaşi il 19...21 Maggio 1956, una serie di risultati concernenti la cinematica dei meccanismi spaziali e gli atti di moto sopra una sfera e nelle varietà a curvatura costante. Nella Nota si riproduce il seguente teorema riguardante i *metodi di accelerazioni ridotte di ordine qualunque* raggruppati in „croci isocline" (l'estensione della nozione di „croce" ortogonale piana introdotta da A. P. Kotelnikov per le accelerazioni ordinarie [12]).

Teorema 1. *Il luogo geometrico dei punti* M_n *definiti dalla equazione vettoriale (1) ove* M *percorre una retta* (D), *appartenente ad un solido rigido in atto di moto spaziale generale, è una retta* (D_n) *che forma con* (D) *l'angolo* θ_n *dato dalla (3), allorchè la minima distanza* d_n *tra* (D) *e* (D_n), *di retta portante dal versore (5) e dei punti d'intersezione con la* (D) *e* (D_n) *(6), (7), è data dalla (4).*

I risultati conseguiti sono utilizzati nei lavori da seguire nella luce della nozione di accelerazione ridotta di ordine qualunque introdotta da uno degli autori [15] e dei metodi di calcolo viriale [2]...[4].

ASUPRA METODELOR GRAFO-ANALITICE DE STUDIU A MECANISMELOR SPAŢIALE

(Rezumat)

Într-o comunicare prezentată la cea de a III-a sesiune ştiinţifică a cadrelor didactice ale Institutului Politehnic Iaşi din 19...21 mai 1956 autorii au stabilit un şir de teoreme interesînd cinematica mecanismelor spaţiale şi în deosebi cinematica mişcărilor

pe o sferă şi pe varietăţi cu curbură constantă. Partea aplicativă a teoremelor stabilite îşi are ca punct de plecare următoarea teoremă relativă la distribuţia cîmpurilor de acceleraţii de ordin oarecare constituită în mulţimi de „cruci izocline" (extensiunea noţiunii de cruce ortogonală sau pur şi simplu de cruce, introdusă în cazul mişcării paralele cu un plan fix de A. P. Kotelnikov [12] pentru acceleraţii ordinare sau de primul ordin).

Teorema 1. *Locul geometric al punctelor* M_n *definite prin ecuaţia vectorială (1), în care* M *parcurge o dreaptă* (D) *dată prin ecuaţia (2) şi care aparţine unui solid rigid în mişcare generală în spaţiu este o dreaptă* (D_n) *ce formează cu* (D) *un unghi* θ_n *dat de (3), distanţa minimă între cele două drepte fiind (4), suportul perpendicularei comune avînd versorul (5) şi punctele de intersecţie cu* (D) *şi* (D_n) *date prin (6), (7).*

Rezultatele obţinute sînt folosite în vederea elaborărilor ulterioare în lumina noţiunii de acceleraţie redusă de ordin oarecare în mişcare spaţială generală introdusă de unul dintre autori şi a metodelor de calcul virial [2]...[4].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621 – 231

APLICAREA TENSORILOR DE POZIŢIE LA STUDIUL UNOR PROBLEME DE SINTEZĂ A MECANISMELOR CU CAME SPAŢIALE

DE

CORNELIU DRĂGAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26–29 iunie 1958

1. În ultimul deceniu s-au obţinut progrese remarcabile, cristalizate de acad. I I. Artobolevski şi N. I. Levitski în [1], [2], sau înserate în [3], realizate în deosebi de cercetători sovietici, în cadrul rezolvării celor mai grele probleme de cinematica mecanismelor spaţiale şi anume acelea de determinare a poziţiei mecanismelor. Cu acest prilej, în lucrările lui F. M. Dimentberg şi S. G. Kislîţîn [3] şi I. F. Moroşkin [8] şi-au găsit loc metodele de investigaţie matematică puternică şi de înalt nivel, cum sînt metoda calculului virial şi metoda analitică a afinorilor, iar în lucrările lui J. Denavit şi R. S. Hartenberg [10], [11], G. S. Kalitzin [5] şi R. Beyer [12] metodele de calcul simbolic şi matricial. Teoria generală şi principiile de proiectare a mecanismelor spaţiale cu came de tipul conoidelor a fost dezvoltată în lucrările lui L. P. Riftin [13], care a folosit de asemenea calculul virial, metodele analitice de studiu a unor tipuri de mecanisme spaţiale cu came a fost aplicat în lucrările lui T. N. Gendzehadze [14], K. V. Tir [16] a cristalizat cu totul recent într-o carte seria de studii proprii şi acea a numeroaselor cercetări sovietice şi străine iar R. C. Johnson, H. A. Rothbart, R. L. Droke, J. Hirschhorn, Ph. Barkan, C. N. Neklutin [15] au expus variate rezultate relative la studiul mecanismelor cu came la Conferinţa de TMM de la Universitatea Purdue.

În cele ce urmează, urmînd ordinea de idei a lucrărilor [16]...[19], în care se elaborează şi se aplică metodă tensorială la studiul mecanismelor plane şi spaţiale, se studiază unele probleme de sinteză a mecanismelor cu came spaţiale.

2. *Mecanisme cu culise cilindrice.* La o camă cilindrică curba de profil este curba mediană a canalului. Se consideră cilindrul de rază medie $R_{med} = R_\omega + R_{\omega_0}$, care se roteşte în jurul axei sale geometrice cu viteza unghiulară ω_2^*. Se desfăşoară acest cilindru. Mişcarea de rotaţie a cilindrului este echivalentă, din punctul de vedere al mişcării organului condus, cu o mişcare de translaţie de viteză liniară $v_2^* = R_{med}\,\omega_2^*$ a desfăşuratei de-a lungul unei direcţii perpendiculare pe axa cilindrului. Problema de sinteză este aceeaşi chiar dacă profilul camei este executat în partea frontală a cilindrului şi nu sub formă de canal săpat pe suprafaţă laterală a cilindrului.

În fig. 1 este reprezentată desfăşurata unei came cilindrice, organul condus care o înlocuieşte are o mişcare de translaţie. Direcţia de alunecare a cuplei de translaţie care îl asociază la batiu este paralelă cu axa cilindrului, adică perpendiculară pe direcţia de deplasare a desfăşuratei. Sistemul de axe de coordonate $O^* x_{21}^* x_{22}^*$ este solidar cu

desfăşurata I_2^* şi are faţă de batiul I_0 o mişcare de translaţie cu viteza v_2^*. Legea de mişcare a camei cilindrice, presupusă cunoscută, se prezintă sub forma $\omega_2^* = \omega_2^*(t)$, $\theta^* = \int \omega_2^*(t)\,dt$. Cazul cel mai des întîlnit în construcţia de maşini este $\omega_2^* = \text{const.}$, $\theta^* = \omega_2^* t + \theta_0$. Legea de mişcare a desfăşuratei I_2^* apare sub forma

$$\overline{O^*O_0} = \int v_2^*\,dt + \text{const.} = R_{\text{med}} \int \omega_2^*(t)\,dt + \text{const.}$$

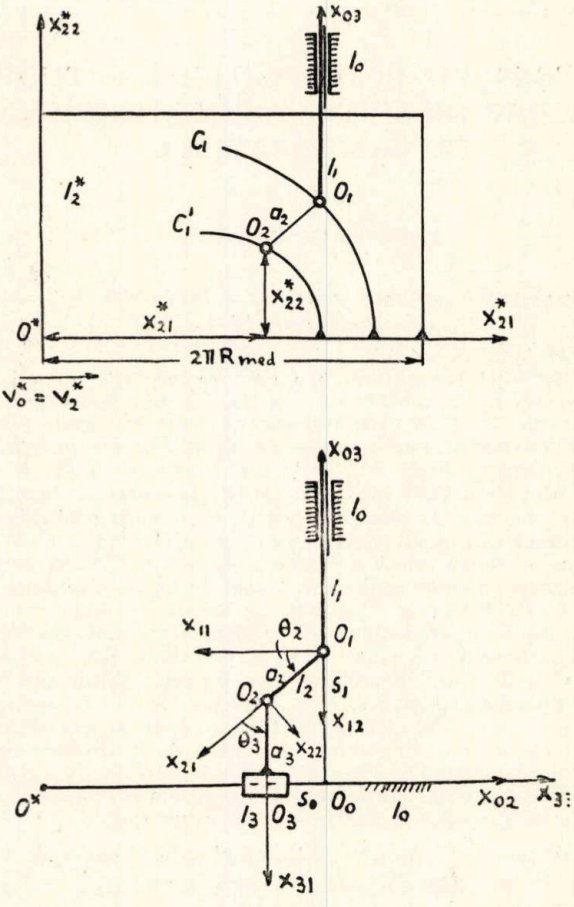


Fig. 1.

Sistemul de axe de coordonate solidar cu batiul I_0 este $O_0\, x_{01}\, x_{02}\, x_{03}$. Curba C_1 este mediana canalului, iar curba C_1' este locul geometric, în planul $O^* x_{21}^* x_{22}^*$, solidar cu desfăşurata, al centrului de curbură O_2 al curbei mediane C_1 corespunzător punctului de contact O_1 cu organul I_1. Se notează prin a_2 mărimea razei de curbură a curbei C_1 în punctul O_1. Ecuaţia curbei C_1' se alege convenabil şi se prezintă sub forma $x_{22}^* = x_{22}^*(x_{21}^*)$. Legea mişcării de translaţie a organului I_1 faţă de batiul I_0, presupusă cu-

noscută, este $s_1 = s_1(\theta^*)$. Deoarece $\overline{O^*O_0} = R_{\text{med}}\,\theta^*$, rezultă că legea de mișcare se poate scrie sub forma $s_1 = s_1(\overline{O^*O_0})$. Cupla cinematică superioară, care asociază organele I_2^* și I_1, poate fi înlocuită cu un lanț cinematic deschis fictiv, format din organul I_2 de lungime a_2, în general variabilă, și două articulații situate în punctele O_1 și O_2. Mecanismul fictiv înlocuitor este format din organele $I_0\,I_1\,I_2\,I_3\,I_0$ și este reprezentat în fig. 1. Axele de coordonate solidare cu organele sînt reprezentate în figură, la fel variabilele cuplelor cinematice inferioare. Se vede că $s_0 = \overline{O^*O_0} - x_{21}^*$ și $a_3 = x_{22}^*$. Tensorii de poziție ai organelor $I_0\,I_1\,I_2\,I_3\,I_0$ sînt:

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2\cos\theta_2 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ a_2\sin\theta_2 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3\cos\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 \\ a_3\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ecuația tensorială caracteristică mecanismului fictiv înlocuitor este

$$T^{(0,0)} = T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(0,3)} = E, \tag{1}$$

care se transcrie în cazul considerat sub forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) \\ a_{41} & 0 & -\cos(\theta_2+\theta_3) & \sin(\theta_2+\theta_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

a_{31}, a_{41} fiind date prin

$$\begin{cases} a_{31} = -a_2\cos\theta_2 - a_3\cos(\theta_2+\theta_3) + s_0\sin(\theta_2+\theta_3), \\ a_{41} = s_1 - a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) - s_0\cos(\theta_2+\theta_3). \end{cases} \tag{3}$$

Identificînd componentele tensorilor din ambii membri ai ecuației (2) și ținînd seama de (3), se deduce $\sin(\theta_2+\theta_3) = 1$, $\theta_2 + \theta_3 = 90°$ și următoarele două ecuații

$$-a_2\cos\theta_2 + s_0 = 0, \tag{4}$$

$$s_1 - a_2\sin\theta_2 - a_3 = 0, \tag{5}$$

din care se determină necunoscutele a_2 și θ_2 prin

$$a_2^2 = s_0^2 + (s_1 - a_3)^2, \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = (s_1 - a_3)/a_0. \tag{7}$$

Alegînd relația $x_{21}^* = x_{21}^*(\overline{O^*O_0})$, se obține

(8) $$a_2^2 = \left[\overline{O^*O_0} - x_{21}^*(\overline{O^*O_0})\right]^2 + \left[s_1(\overline{O^*O_0}) - x_{22}^*(x_{21}^*)\right]^2,\ a_2 = a_2(\overline{O^*O_0}),$$

adică tocmai legea de variație a razei de curbură a curbei mediane a canalului C.

În fig. 2 este arătată desfășurarea camei cilindrice și mecanismul fictiv înlocuitor pentru o cămă cilindrică, în cazul cînd organul condus are o mișcare de rotație osci-

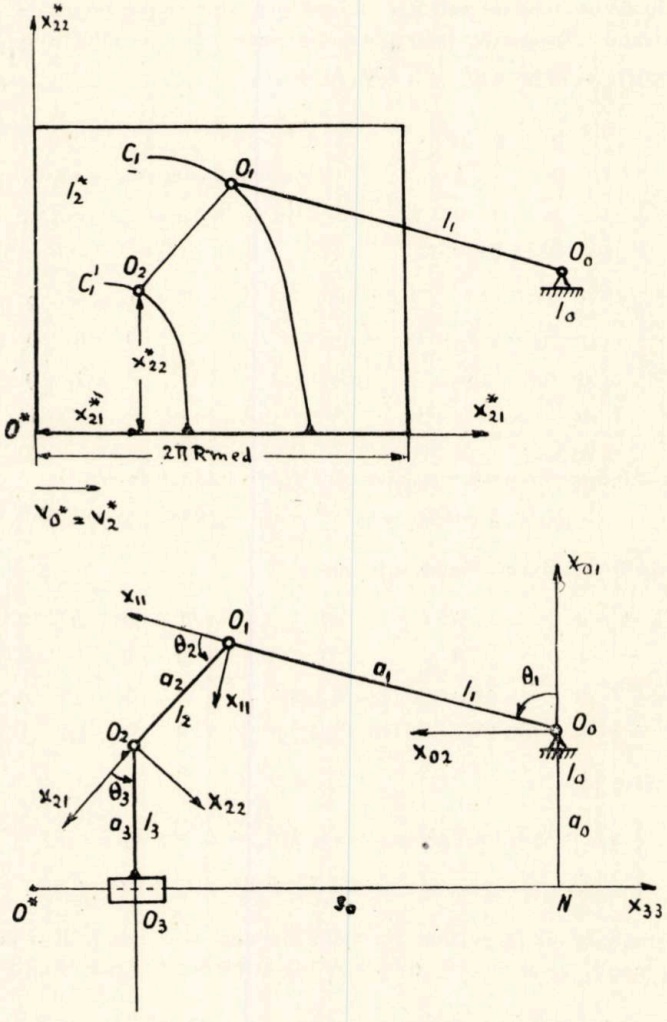


Fig. 2.

latorie. Legea mișcării organului I_1 față de batiul I_0, presupusă cunoscută, este $\theta_1 = \theta_1(\theta^*)$, deci $\overline{O^*N} = R_{med}\,\theta^*$, deci $\theta_1 = \theta_1(\overline{O^*N})$. Din figură se deduce că $s_0 = \overline{O^*N} - x_{21}^*$ și $a_3 = x_{22}^*$. Tensorii de poziție ai organelor mecanismului fictiv înlocuitor sînt:

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\cos\theta_1 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ a_1\sin\theta_1 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{(2,1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2\cos\theta_2 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ a_2\sin\theta_2 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3\cos\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 \\ a_3\sin\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T^{(0,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ s_0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ecuația tensorială ce caracterizează mecanismul fictiv înlocuitor este

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & -a'_{22} & a'_{32} & 0 \\ a'_{31} & -a'_{32} & -a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

în care s-a notat

$$\begin{cases} a'_{21} = a_1\cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) + a_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) - a_0\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) - \\ \qquad - s_0\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3), \\ a'_{31} = a_1\sin\theta_1 + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) + a_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) - a_0\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + \\ \qquad + s_0\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3), \\ a'_{22} = \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3), \quad a'_{32} = \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3). \end{cases} \tag{10}$$

Identificînd componentele tensorilor din ambii membri ai ecuației (9) și ținînd seama de (10) se obține $-\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) = 1$, adică $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 180°$ și următoarele ecuații

(11) $a_1\cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) - a_3 + a_0 = 0$, (12) $a_1\sin\theta_1 + a_2\sin(\theta_1+\theta_2) - s_0 = 0$,

din care se determină necunoscutele a_2 și θ_2 prin

$$a_2^2 = (s_0 - a_1\sin\theta_1)^2 + (a_3 - a_0 - a_1\cos\theta_1)^2, \tag{13}$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left[(s_0 - a_1\sin\theta_1)/(a_3 - a_0 - a_1\cos\theta_1)\right] - \theta_1, \tag{14}$$

Alegînd relația $x^*_{21} = x^*_{21}(\overline{O^*N})$, se obține

$$a_2 = a_2(\overline{O^*N}), \tag{15}$$

adică legea de variație a razei de curbură a curbei mediane a canalului C_1.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Mecanică și Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Артоболевский И. И., в сборнике Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основым проблемам ТММ, М., 1958, стр. 6—23.
2. Левитский Н. И., Ibid., стр. 24—29.

3. Диментберг М. Ф., Кислицин С. Е., в сборнике Труды II-го Съезда по основным проблемам ТММ, АН СССР, Ин-т Машиноведния, М., 1958 (впечати).
4. Манжерон Д., Дрэгнн К., Ibid., (в печати).
5. Калицин Г., Ibid., (в печати).
6. Тир К. В., Ibid., (в печати).
7. Шаумян Г. А., Ibid., (в печати).
8. Морошкин Ю. Ф., ДАН, **91**, *4*, 1953, стр. 745–748 ; Ibid., **119**, *1*, 1958, стр. 38–41.
9. *** *Berichte über die Verhandlungen der Dresdener Tagung für Getriebelehre*, Technische Hochschule Dresden, DDR., (im Druck).
10. Denavit J., Hartenberg R. S., J. Appl. Mech., 1955, **22**, *2*, pp. 215—222.
11. Denavit J., *Transactions of the Fourth Conference on Mechanisms*, Purdue University, 1958, pp. 81—104.
12. Beyer R., *Transactions of the Fifth Conference on Mechanisms*, Purdue University, 1958, pp. 141—163.
15. Rothbart H. A. a. o., Ibid., 1958, pp. 21—90.
16. Mangeron D., Drăgan C., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **3(7)**, *1-2*, pp. 151-164.
17. — Ibid., 1958, **4(8)**, *1—2*, pp. 327—338.
18. — Acest Buletin, pp. 275—286.
19. Drăgan C., Ibid., **3(7)**, *3—4*, 1957, pp. 175—184.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРОВ ПОЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ СИНТЕЗА КУЛАЧКОВЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

(Резюме)

Автор, продолжая исследования начатые в [16] и примененные затем к различным важным для практики плоским и пространственным механизмам в [17]...[19], излагает, после беглого обзора смежных работ представленных на недавне проведенных совещаниях по ТММ и в особенности на Втором Всесоюзном Совещании по основным проблемам ТММ (председатель Оргкомитета акад. И. И. Артоболевский [1]), при помощи тензоров положения, главные проблемы задач синтеза кулачковых пространственных механизмов, кристаллизованные формулами (1)...(15) и рис. 1...2.

APPLICATION D'UNE NOUVELLE MÉTHODE TENSORIELLE À LA SYNTHÈSE DES MÉCANISMES AUX CAMES DE L'ESPACE

(Résumé)

Pour la résolution de l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie des mécanismes et des machines, à savoir, celui de la détermination des configurations des chaînes cinématiques et des mécanismes de l'espace [1]) on a utilisé nombre de méthodes parmi lesquelles on doit citer : la méthode des lieux géométriques, celle de la représentation sphérique, la méthode du calcul virial, la méthode analytique et tout récemment la méthode des notations symboliques [1], [2], la méthode des accélérations réduites d'ordre quelconque [4], etc.

On expose ci-dessus quelques formes tensorielles des équations intéressant la synthèse des mécanismes aux cames de l'espace. La formation des équations (1)...(15) tout en se référant aux figures 1 et 2 a à la base l'élaboration du tenseur de position de l'organe I_ν par rapport à l'organe $I_{\nu-1}$, l'utilisation du tenseur vitesse et du tenseur spécifique d'une chaîne cinématique tant que l'explicitation de l'équation de fermeture, établis dans [16] et appliqués déjà à l'étude des mécanismes aux cames plans, des mécanismes de bielle-manivelle de l'espace et des mécanismes à coulisse de l'espace [17]...[19].

1) Voir le rapport consacré à l'analyse profonde des travaux intéressant la théorie des mécanismes et des machines parus depuis les séances de la Conférence des Mécanismes (Moscou, Juin 1954), présenté par le prof. I. I. Artobolevski de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. à la seconde Conférence concernant les problèmes fondamentaux de la TMM (Moscou, 24...28 mars 1958) [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621 – 231

ASUPRA MECANISMELOR PATRULATERE FĂRĂ LEGĂTURI PASIVE ÎN SENSUL REŞETOV

DE

OCTAVIAN MUNTEANU şi GH. TUDOR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi din 26—29 iunie 1958

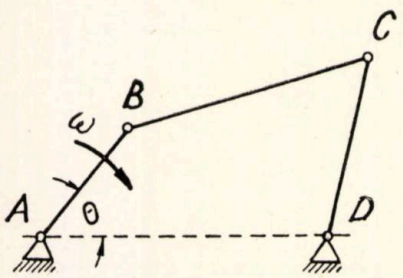
1. Prof. dr. N. I. Levitski, în raportul său consacrat rezultatelor lucrărilor secţiei de analiză şi sinteză a mecanismelor, prezentat la şedinţa plenară de închidere a celei de a doua Consfătuiri Unionale de Teoria Mecanismelor şi Maşinilor (Moscova, 24...28 martie 1958), subliniind însemnătatea întrpătrunderii problemelor de analiză şi sinteză ce au caracterizat lucrările lui D. Mangeron, C. Drăgan, G. D. Ananov, N. I. Kolcin, L. N. Reşetov susţinute în cadrul consfătuirii, arată, în ordinea de idei ce interesează acest articol, că lucrarea prof. dr. L. N. Reşetov permite să se obţină nemijlocit, pe baza teoriei structurii mecanismelor, rezultate practice şi concluzii ce se referă atît la analiza cît şi la sinteza mecanismelor.

2. Într-o notă precedentă, înserată în fascicula anterioară a acestui Buletin, s-au stabilit variantele posibile ale unor mecanisme plane fără legături pasive şi s-a subliniat rolul de seamă ce-l joacă astfel de mecanisme în tehnica modernă şi în problema fundamentală a automatizării, ce interesează îndeaproape toate ramurile industriei noastre. Pe baza clasificării cuplelor cinematice dată de L. N. Reşetov [7] se studiază în nota de faţă variantele posibile pentru clasa mecanismelor patrulatere. Mecanismele considerate se obţin prin adăugirea unei diade de specia I...V la un mecanism de clasa I-a. Pentru fiecare variantă se indică numărul de legături pasive. În forma iniţială, un astfel de mecanism se compune din $n = 4$ organe, $p_5 = 4$ cuple de clasa V-a.

Utilizînd formula lui Dobrovolski pentru mecanismele de familia 3-a, rezultă $M = 1$ (gradul de mobilitate). Conform formulei lui Malîşev, adaptată pentru cazul legăturilor pasive, se obţine

$$q = 1 - 6(n - 1) + 5p_5 + 4p_4 + p_3 .$$

Cu ajutorul acestei formule se stabileşte numărul legăturilor pasive pentru fiecare variantă. Pentru fiecare schemă structurală fundamentală se arată tabelar soluţiile posibile şi se recomandă ca în construcţia de maşini să fie adoptate acelea care au mai puţine legături pasive.



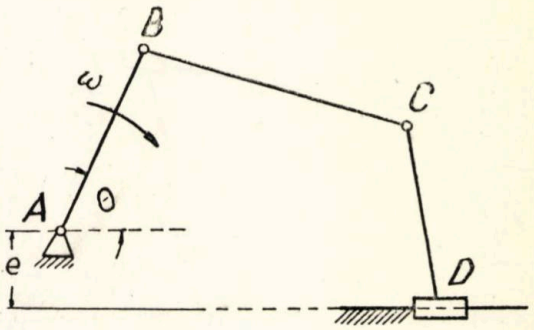
Tabelul 1

Patrulater format cu o diadă de specia I-a

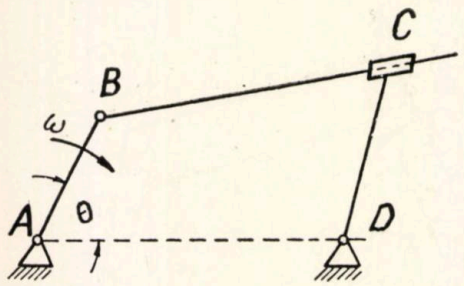
Cuple cinematice după clasificarea lui Reşetov				Nr. de cuple cinematice şi clasa lor			Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	*B*	*C*	*D*	p_3	p_4	p_5	*q*	
V_3	V_3	V_3	V_3	—	—	4	3	Necesită prelucrări foarte precise şi ajustări la montaj.
IV_2	V_3	V_3	V_3	—	1	3	2	Necesită paralelismul axelor cuplelor ceea ce măreşte costul de fabricaţie şi asamblare.
V_3	IV_2	V_3	V_3	—	1	3	2	
V_3	V_3	IV_2	V_3	—	1	3	2	
V_3	V_3	V_3	IV_2	—	1	3	2	
IV_2	IV_2	V_3	V_3	—	2	2	1	Mecanismele construite după aceste scheme pot transmite eforturi mari şi elimină parţial ajustările la montare în cazul cînd nu este respectat paralelismul axelor.
IV_2	V_3	IV_2	V_3	—	2	2	1	
IV_2	V_3	V_3	IV_2	—	2	2	1	
V_3	IV_2	IV_2	V_3	—	2	2	1	
V_3	IV_2	V_3	IV_2	—	2	2	1	
V_3	V_3	IV_2	IV_2	—	2	2	1	
III_{22}	V_3	V_3	V_3	1	—	3	1	
V_3	III_{22}	V_3	V_3	1	—	3	1	
V_3	V_3	III_{22}	V_3	1	—	3	1	
V_3	V_3	V_3	III_{22}	1	—	3	1	
III_{22}	IV_2	V_3	V_3	1	1	2	0	Scheme de această formă sînt utilizate în cazul cînd axele de rotaţie ale manivelei şi balansierului nu sînt riguros paralele.
III_{22}	V_3	IV_2	V_3	1	1	2	0	
III_{22}	V_3	V_3	IV_3	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	IV_2	V_3	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	V_3	IV_2	1	1	2	0	
V_3	V_3	III_{22}	IV_2	1	1	2	0	Dintre aceste scheme se recomandă a fi alese mecanismele patrulatere raţionale.
V_3	IV_3	III_{22}	V_3	1	1	2	0	
V_3	IV_3	V_3	III_{22}	1	1	2	0	
V_3	V_3	IV_2	III_{22}	1	1	2	0	
IV_2	III_{22}	V_3	V_3	1	1	2	0	
IV_2	V_3	III_{22}	V_3	1	1	2	0	
IV_2	V_3	V_3	III_{22}	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	III_{22}	V_3	2	—	2	0	Gradul de mobilitate $M=2$ conform formulei lui Malîşev pentru mecanisme spaţiale. A 2-a mobilitate este pasivă, biela avînd posibilitatea de rotire în jurul propriei axe fără a influenţa mişcarea celorlalte organe.

Tabelul 2

Patrulater format cu o diadă de specia 2-a



Cuple cinematice după clasificarea lui Reşetov				Nr. de cuple cinematice şi clasa lor			Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	*B*	*C*	*D*	p_2	p_4	p_5	*q*	
V_3	V_3	V_3	V_2	—	—	4	3	Paralelismul axelor cuplelor *A*, *B*, *C* şi perpendicularitatea direcţiei cuplei prismatice din *D* trebuie riguros asigurate.
IV_2	V_3	V_3	V_2	—	1	3	2	Perechea rotoidă sau cea prismatică poate fi înlocuită printr-o pereche cilindrică.
V_3	IV_2	V_3	V_2	—	1	3	2	
V_3	V_3	IV_2	V_2	—	1	3	2	
V_3	V_3	V_3	IV_2	—	1	3	2	
IV_2	IV_2	V_3	V_2	—	2	2	1	Funcţionarea mecanismelor din această categorie este asigurată prin paralelismul axelor cuplelor de rotaţie, respectiv a celor cilindrice.
IV_2	V_3	IV_2	V_2	—	2	2	1	
IV_2	V_3	V_3	IV_2	—	2	2	1	
V_3	IV_2	IV_2	V_2	—	2	2	1	
V_3	IV_2	V_3	IV_2	—	2	2	1	
V_3	V_3	IV_2	IV_2	—	2	3	1	
III_{22}	V_3	V_3	V_2	1	—	3	1	
V_3	III_{22}	V_3	V_2	1	—	3	1	
V_3	V_3	III_{22}	V_2	1	—	3	1	
III_{22}	V_3	V_3	IV_2	1	1	2	0	Variantele dau mecanisme raţionale care nu necesită ajustări la montaj şi prezintă siguranţă în funcţionare.
III_{22}	IV_2	V_3	V_2	1	1	2	0	
III_{22}	V_3	IV_2	V_2	1	1	2	0	
IV_2	III_{22}	V_3	V_2	1	1	2	0	
IV_2	V_3	III_{22}	V_2	1	1	2	0	
V_3	V_3	III_{22}	IV_2	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	IV_2	V_2	1	1	2	0	
IV_2	V_3	IV_2	IV_2	—	3	1	0	
IV_2	IV_2	V_3	IV_2	—	3	1	0	
V_3	IV_2	IV_2	IV_2	—	3	1	0	
IV_2	IV_2	IV_2	V_2	—	3	1	0	



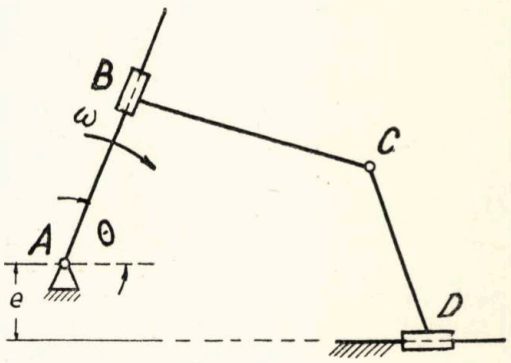
Tabelul 3

Patrulater format cu o diadă de specia 3-a

Cuple cinematice după clasificarea lui Reşetov				Nr. de cuple cinematice şi clasa lor			Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	*B*	*C*	*D*	p_3	p_4	p_5	*q*	
V_3	V_3	V_2	V_3	—	—	4	3	Necesită prelucrări precise şi ajustări la montaj.
IV_2	V_3	V_2	V_3	—	1	3	2	Axul perechii cilindrice, respectiv ghidajul cuplei de translaţie din *C*, trebuie să fie perpendiculare pe axele cuplelor din *A*, *B* şi *D*.
V_3	IV_2	V_2	V_3	—	1	3	2	
V_3	V_3	IV_3	V_3	—	1	3	2	
V_3	V_3	V_2	IV_2	—	1	3	2	
IV_2	IV_2	V_2	V_3	—	2	2	1	Schemele cuprind cîte 2 perechi cilindrice a căror prelucrare este simplă. Variantele ce posedă o pereche sferică permit mişcarea relativă a organelor asamblate în jurul a trei axe eliminînd necesitatea paralelismului axelor celorlalte cuple de rotaţie.
IV_2	V_3	IV_2	V_3	—	2	2	1	
IV_2	V_3	V_2	IV_2	—	2	2	1	
V_3	IV_2	IV_2	V_3	—	2	2	1	
V_3	IV_2	V_2	IV_2	—	2	2	1	
V_3	V_3	IV_2	IV_2	—	2	2	1	
III_{22}	V_3	V_2	V_3	1	—	3	1	
V_3	III_{22}	V_2	V_3	1	—	3	1	
V_3	V_3	V_2	III_2	1	—	3	1	
III_2	IV_2	V_2	V_3	1	1	2	0	Mecanismele realizate după aceste variante asigură o funcţionare bună, dimensiunile organelor şi ale perechilor cinematice permiţînd compensarea impreciziilor de prelucrare. Lipsa legăturilor pasive este foarte avantajoasă căci reduce timpul de fabricare şi asamblare.
III_2	V_3	IV_2	V_3	1	1	2	0	
III_2	V_3	V_2	IV_2	1	1	2	0	
IV_2	III_{22}	V_2	V_3	1	1	2	0	
IV_2	V_3	V_2	III_{22}	1	1	2	0	
V_3	IV_2	V_2	III_{22}	1	1	2	0	
V_3	V_3	IV_2	III_{22}	1	1	2	0	
IV_2	V_3	IV_2	IV_2	—	3	1	0	
V_3	IV_2	IV_2	IV_2	—	3	1	0	
IV_2	IV_2	V_2	IV_2	—	3	1	0	
IV_2	IV_2	IV_2	V_3	—	3	1	0	

Tabelul 4

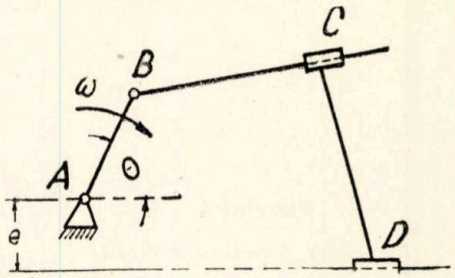
Patrulater format cu o diadă de specia 4-a



Cuple cinematice după clasificarea lui Reşetov				Nr. de cuple cinematice şi clasa lor			Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	*B*	*C*	*D*	p_3	p_4	p_5	*q*	
V_3	V_2	V_3	V_2	—	—	4	3	Necesită prelucrări precise şi ajustări la montaj.
V_3	V_2	IV_2	V_2	—	1	3	2	La prelucrări necorespunzătoare apar presiuni în cuplele cinematice şi frecări foarte însemnate care pot bloca mişcarea.
V_3	IV_2	V_3	V_2	—	1	3	2	
V_3	V_3	V_3	IV_2	—	1	3	2	
IV_2	V_2	V_3	V_2	—	1	3	2	
V_3	IV_2	V_3	IV_2	—	2	2	1	Cupla cilindrică poate înlocui atît cupla prismatică cît şi cea rotoidă; cupla sferică nu poate înlocui cupla prismatică.
V_3	IV_2	IV_2	V_2	—	2	2	1	
V_3	V_2	IV_2	IV_2	—	2	2	1	
IV_2	V_2	IV_2	V_2	—	2	2	1	
IV_2	IV_2	V_3	V_2	—	2	2	1	
IV_2	V_2	V_3	IV_2	—	2	2	1	
V_3	V_2	III_{22}	V_2	1	—	3	1	
III_{22}	V_2	V_3	V_2	1	—	3	1	
V_3	IV_2	IV_2	IV_2	—	3	1	0	Printr-o montare judicioasă se pot înlătura impreciziile introduse de cupla cilindrică, asamblarea făcîndu-se fără ajustări.
IV_2	V_2	IV_2	IV_2	—	3	1	0	
IV_2	IV_2	V_3	IV_2	—	3	1	0	
IV_2	IV_2	IV_2	V_2	—	3	1	0	
III_{22}	IV_2	V_3	V_2	1	1	2	0	
III_{22}	V_2	IV_2	V_2	1	1	2	0	
III_{22}	V_2	V_3	IV_2	1	1	2	0	
V_3	IV_2	III_{22}	V_2	1	1	2	0	
V_3	V_2	III_{22}	IV_2	1	1	2	0	

Tabelul 5

Patrulater format cu o diadă de specia 5-a



Cuple cinematice după clasificarea lui Reşetov				Nr. de cuple cinematice şi clasa lor			Nr. legăturilor pasive	Observaţii
A	*B*	*C*	*D*	p_3	p_4	p_5	*q*	
V_3	V_3	V_2	V_2	—	—	4	3	Necesitatea prelucrări foarte precise şi ajustări la montaj.
V_3	V_3	V_2	IV_2	—	1	3	2	Cupla cilindrică poate înlocui cupla rotoidă şi cea prismatică.
V_3	V_3	IV_2	V_2	—	1	3	2	
V_3	IV_2	V_2	V_2	—	1	3	2	
IV_2	V_3	V_2	V_2	—	1	3	2	
IV_2	IV_2	V_2	V_2	—	2	2	1	Prin introducerea celor două cuple cilindrice, respectiv a cuplei sferice, se uşurează condiţiile de asamblare, iar mecanismele rezultate prezintă siguranţă în funcţionare.
IV_2	V_3	IV_2	V_2	—	2	2	1	
IV_2	V_3	V_2	IV_2	—	2	2	1	
V_3	IV_2	IV_2	V_2	—	2	2	1	
V_3	V_3	IV_2	IV_2	—	2	2	1	
V_3	IV_2	V_2	IV_2	—	2	2	1	
III_{22}	V_3	V_2	V_2	1	—	3	1	
V_3	III_{22}	V_2	V_2	1	—	3	1	
IV_2	III_{22}	V_2	V_2	1	1	2	0	Cupla cilindrică şi cea sferică oferă posibilitatea de compensare a impreciziilor de prelucrare, iar asamblarea se poate face fără ajustări speciale.
III_{22}	IV_2	V_2	V_2	1	1	2	0	
III_{22}	V_3	IV_2	V_2	1	1	2	0	
III_{22}	V_3	V_2	IV_2	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	IV_2	V_2	1	1	2	0	
V_3	III_{22}	V_2	IV_2	1	1	2	2	

Alte variante au loc dacă AB are mişcare de translaţie.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

О ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМАХ БЕЗ ПАССИВНЫХ СВЯЗЕЙ

(Резюме)

Авторы продолжают исследования механизмов без пассивных связей в смысле Решетова помещенные в предыдущим выпуске этих Изв. ЯПИ.

SUR LES MÉCANISMES QUADRILATÈRES SANS LIAISONS PASSIVES

(Résumé)

Les Auteurs suivent l'ordre d'idées de l'article inséré dans le volume précédent de ce Bulletin.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

ASUPRA UNOR ASPECTE GRAFICE ALE DISTRIBUŢIEI VITEZELOR ŞI ACCELERAŢIILOR PUNCTELOR UNUI SOLID RIGID ÎN MIŞCARE GENERALĂ

DE

N. IRIMICIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

În cele ce urmează, mărginindu-ne la problema distribuţiei vitezelor şi acceleraţiilor de primul ordin, ale punctelor unui solid rigid în mişcare generală, se obţin, folosindu-ne de *coordonate vectoriale cilindrice* introduse în [1] şi studiate apoi în [2], următoarele rezultate [1]) pentru care s-au păstrat notaţiile anterioare :

1. Aspecte grafice ale distribuţiei vitezelor

I. *Locul geometric al extremităţilor vectorilor viteze coplanare* [2]) *reduse ale punctelor unui segment aparţinînd unui solid în mişcare generală este o dreaptă* $(\Delta^{*}_{0A_c})$ *formînd cu direcţia proiecţiei segmentului pe planul reprezentării, unghiul dat de relaţia :*

$$(1)\qquad \cos\left(\Delta^{*}_{0A_c}, \overline{u}_{\theta^r_{0A}}\right) = \frac{\cos \Psi_{0A} + \omega^r_c \sin \Psi_{0A} \sin\left(\theta^{\omega} - \theta^r_{0A}\right)}{\left|\cos \Psi_{0A}\left(\overline{u}_{\theta^r_{0A}} + \omega^r_a \overline{u}_{\theta^r_{0A}+\frac{\pi}{2}}\right) + \omega^r_c \sin \Psi_{0A}\, \overline{u}_{\theta^{\omega}-\frac{\pi}{2}}\right|}$$

II. *Locul geometric al punctelor reprezentînd variaţia proiecţiilor axiale* [2]) *ale vectorilor de poziţie ai extremităţilor vitezelor axiale reduse ale punctelor unui segment aparţinînd unui solid în mişcare generală, în funcţie de distanţele punctelor la polul legat de solid considerat pe segment, este o dreaptă, formînd cu axa absciselor unghiul dat de relaţia :*

$$(2)\qquad tq\varphi^{v}_{0A} = \sin \Psi_{0A} - \omega^r_c \cos \Psi_{0A} \sin\left(\theta^{\omega} - \theta^r_{0A}\right).$$

III. *Diferenţele dintre proiecţiile vitezelor coplanare reduse ale punctelor unui segment aparţinînd unui solid în mişcare generală şi proiecţia vitezei coplanare reduse a polului invariabil legat de solid — pol considerat pe segment —, pe direcţia proiecţiei coplanare a segmentului, sînt proporţionale cu distanţele punctelor la pol.*

2. Aspecte grafice ale distribuţiei acceleraţiilor

IV. *Locul geometric al acceleraţiilor coplanare reduse ale punctelor unui segment aparţinînd unui solid în mişcare generală, este o dreaptă* $\Delta^{**}_{0A_c}$, *formînd cu proiecţia pe planul reprezentării a segmentului, unghiul dat de relaţia :*

---

1) Demonstraţiile complete şi un şir de aplicaţii interesînd în deosebi Teoria mecanismelor şi maşinilor, sînt reproduse în Dizertaţia de candidat în ştiinţe elaborată de autor.

2) Aici denumirile de „componentă radială", respectiv „componentă normală", introduse în lucrările [1], [2], au fost înlocuite cu acele mai adecvate de *„componentă coplanară"* respectiv *„componentă axială"*.

(3) $$\cos\left[\Delta^{**}_{0A_c}, \overline{u_{\theta^r_{0A}}}\right] =$$

$$\| \frac{\varepsilon^r_c \sin \Psi_{0A} \sin(\theta^\varepsilon - \theta^r_{0A}) + (\overline{\omega^r}\,\overline{\varrho_{0A}})\,\omega^r_c \cos(\theta^\omega - \theta^r_{0A}) + (1-\omega^{r^2}) \cos \Psi_{0A}}{\left|\varepsilon^r_c \sin \Psi_{0A}\, \overline{u_\theta}^\varepsilon - \frac{\pi}{2} + \varepsilon^r_a \cos \Psi_{0A}\, \overline{u_{\theta^r_{0A}}} + \frac{\pi}{2} + (\overline{\omega^r}\,\overline{\varrho_{0A}})\,\omega^r_c\, \overline{u_\theta}^\omega + (1-\omega^{r^2}) \cos \Psi_{0A}\, \overline{u_{\theta^r_{0A}}}\right|}.$$

V. *Locul geometric al punctelor reprezentînd variaţia proiecţiilor axiale ale vectorilor de poziţie ai extremităţilor acceleraţiilor axiale reduse ale punctelor unui segment aparţinînd unui solid în mişcare generală, este o dreaptă formînd cu axa absciselor unghiul* $\varphi_{a_{0A}}$ *dat de relaţia :*

(4) $$\operatorname{tg} \varphi_{a_{0A}} = \varepsilon^r_c \cos \Psi_{0A} \sin(\theta^r_{0A} - \theta^\varepsilon) + (\overline{\omega^r}\,\overline{\varrho_{0A}})\,\omega^r_a - (1-\omega^{r^2}) \sin \Psi_{0A}.$$

VI. *Diferenţele dintre proiecţiile acceleraţiilor coplanare reduse ale punctelor unui segment aparţinînd unui solid în mişcare generală şi proiecţia acceleraţiei coplanare reduse a polului invariabil legat de solid şi situat pe segment, pe direcţia proiecţiei coplanare a segmentului, sînt proporţionale cu distanţele punctelor la pol.*

3. Aceste rezultate, dat fiind rolul din ce în ce mai vădit în tehnica modernă a acceleraţiilor de ordin superior, vor fi extinse într-o lucrare elaborată în colectiv, consacrată studiului comparativ al diferitelor metode grafo-analitice interesînd cinematica sistemelor materiale, în lumina datelor stabilite prin teorema generală I din [6] referitoare la problema distribuţiei acceleraţiilor reduse de ordin oarecare.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Irimiciuc N., Bul. Instit. Polit. Iaşi, 1957, **3 (7)**, *3—4*, pp. 195—200.
2. Irimiciuc N. şi Klepper I., Ibid., 1957, **3 (7)**, *3—4*, pp. 205—210.
3. Геронимус Н. И., Очерки о корифеях русской механики, М. ГИИТЛ, 1952.
4. Левитский Н. И., Итоги работы секции по анализу и синтезу механизмов în volumul Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории машин и механизмов, под ред. акад. И. И. Артоболевского, Ин-т Машиноведения АН СССР, М., 1958.
5. Манжерон Д. и Дрэган К. Применение метода приведенных ускорений в Теории машин и механизмов în volumul Труды Второво Всесоюзного Совешания по основным проблемам Теории машин и механизмов, АН СССР, Ин-т Машиноведения, М., (sub tipar).
6. Mangeron D., Drăgan C., Irimiciuc N. şi Munteanu O., Acest Buletin pp. 284—288.

К ГРАФИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

(Резюме)

Автор излагает, на основании [1]...[6], в рамках метода векторных цилиндрических, координат, некоторые теоремы интересующие графическую пространственную кинематику твёрдых тел.

SUL PROBLEMA GRAFICO DI DISTRIBUZIONE SPAZIALE DELLE VELOCITÀ E DELLE ACCELERAZIONI NEI CORPI RIGIDI IN ATTO DI MOTO

(Sunto)

L'A. espone alcuni teoremi di cinematica spaziale dei corpi rigidi basandosi sul' metodo delle coordinate vettoriali cilindriche [1]...[2], nell'ordine delle idee stabilito in [1]...[6].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

531.25

DETERMINAREA PE CALE GRAFICĂ A POZIŢIEI CENTRELOR DE GREUTATE LA CORPURI OARECARI

DE

N. IRIMICIUC şi IZU KLEPPER

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

Problema determinării poziţiei centrelor de greutate ale corpurilor prin metode cît mai expeditive, este una din problemele importante ale tehnicii. Între aceste metode, cele grafice se bucură de o deosebită atenţie din partea inginerilor.

În cazul plăcilor omogene plane, determinarea pe cale grafică a poziţiei centrelor de greutate se face, după cum se ştie, cu ajutorul a două poligoane funiculare.

În Nota de faţă autorii, în baza metodei coordonatelor vectoriale cilindrice, introdusă de unul din ei [4], extind metoda grafică din cazul plan la cazul corpurilor oarecare în spaţiu.

Vectorul de poziţie al centrului de greutate al unui solid omogen, împărţit într-un număr finit de n corpuri simple, cărora li se cunosc atît poziţiile centrelor de greutate, determinate prin vectorii de poziţie $\bar{r}_{G_\sigma}$, cît şi volumele V_σ, e dat de relaţia:

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_{\sigma=1}^{n} V_\sigma \bar{r}_{G\sigma}}{\sum_{\sigma=1}^{n} V_\sigma} \tag{1}$$

căreia îi corespund, în coordonate vectoriale cilindrice, relaţiile echivalente:

$$\bar{r}_{G_c} = \frac{\sum_{\sigma=1}^{n} V_\sigma \bar{r}_{G\sigma_c}}{\sum_{\sigma=1}^{n} V_\sigma} \tag{2a}$$

$$\bar{r}_{G_a} = \frac{\sum_{\sigma=1}^{n} V_\sigma \bar{r}_{G\sigma_a}}{\sum_{\sigma=1}^{n} V_\sigma}, \tag{2b}$$

$\bar{r}_{G\sigma_c}$ şi $\bar{r}_{G\sigma_a}$ fiind componentele coplanare (paralele la planul reprezentării), respectiv axiale (după axa reprezentării) ale vectorilor $\bar{r}_{G\sigma}$.

Se observă însă că expresia (2a) poate fi interpretată ca fiind relaţia ce determină vectorul de poziţie al centrului unui sistem de vectori paraleli, situaţi în planul reprezentării, cu punctele de aplicaţie în proiecţiile pe acest plan ale centrelor de greutate parţiale şi avînd mărimile proporţionale cu volumele corespunzătoare. De asemenea, relaţia (2b) poate fi interpretată ca fiind relaţia ce determină vectorul de poziţie al centrului aceluiaşi sistem de vectori, dar avînd punctele de aplicaţie pe axa reprezentării, în proiecţiile pe această axă ale centrelor de greutate parţiale, corespunzătoare.

Rezultă de aici următoarele construcţii grafice necesare pentru determinarea poziţiei centrului de greutate :

a) *Pentru determinarea poziţiei proiecţiei centrului de greutate pe planul reprezentării se vor efectua construcţiile obişnuite pentru cazul plan,—cele două poligoane funiculare rotite la 90° unul faţă de altul —, cu deosebirea că în poligonul forţelor se vor lua, de astă dată, forţe proporţionale cu volumele părţilor componente ale solidului. Punctele de aplicaţie vor fi proiecţiile pe planul reprezentării, ale centrelor de greutate ale părţilor componente.*

b) *Pentru determinarea proiecţiei pe axa reprezentării a centrului de greutate, se va construi un nou poligon funicular, pentru aceleaşi forţe de mai înainte, aplicate însă în proiecţiile pe axa reprezentării a centrelor de greutate parţiale, proiecţia căutată fiind dată de intersecţia axei reprezentării cu paralela dusă la direcţia comună a forţelor, prin punctul de intersecţie al laturilor extreme ale poligonului funicular.*

Construcţiile grafice se simplifică, reducîndu-se în cazul corpurilor cilindrice drepte cu secţiuni normale oarecare, numai la construcţia a două poligoane funiculare care să dea poziţia centrului de greutate al secţiunii de bază luată în planul reprezentării, iar în cazul corpurilor de revoluţie, numai la construcţia unui singur poligon funicular, care să dea poziţia centrului de greutate pe axa de revoluţie, luată ca axă a reprezentării.

Institutul Politehnic Iaşi,
Catedra de Mecanică şi Mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Bălan Şt. şi Beiu-Paladi Ernest, *Curs de Mecanică teoretică*, Lit. MIC, Buc., 1957.
2. Stoenescu Al. şi Silaş, *Curs de Mecanică teoretică*, Ed. Tehnică, Buc., 1957.
3. Buzdugan Gh., *Curs de Rezistenţa materialelor*, Ed. Tehnică, Buc., 1956.
4. Irimiciuc N., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **3** (**7**), *3—4*, pp. 195—200.

ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

(Резюме)

Изучается графическое определение положения центра масс, основанное на методе „цилиндрических векторных координат", введённом одним из авторов [4].

LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE LA POSITION DES CENTRES DE MASSES DES CORPS QUELCONQUES

(Résumé)

La Note présente l'extension, basée sur la méthode des „coordonnées véctorielles cylindriques" elaborée par l'un des Auteurs [4], de la méthode graphique, connue pour le cas plan, de la détermination des centres de masses, pour le cas des corps quelconques dans l'espace.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621.2

RELAŢII ANALITICE PENTRU CALCULUL REZISTENŢEI TOTALE LA DEPLASARE A UNUI LANŢ CU ROLE, GREU, PE UN GHIDAJ CURBILINIU VERTICAL

DE

VITALIE BELOUS

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

1. Introducere

Literatura tehnică de specialitate [1], [2], [3], [4], [5] nu pune la dispoziţia proiectantului o relaţie de calcul a rezistenţelor la deplasare pe un ghidaj curbiliniu vertical, fundamentată din punct de vedere teoretic şi accesibilă, în acelaşi timp, din punct de vedere al volumului de calcul; scopul acestei lucrări este deducerea unei astfel de relaţii.

În ipoteza simplificatoare că lanţul este inextensibil şi forţele de inerţie neglijabile, fenomenele care produc rezistenţa totală la deplasare pe ghidaj, sînt :

a) apăsarea rolelor pe ghidaj, datorită înfăşurării lanţului ;

b) apăsarea suplimentară a rolelor, datorită greutăţii lor proprii ;

c) apăsarea suplimentară a rolelor, ca urmare a creşterii treptate a forţelor din lanţ, datorită greutăţii proprii ;

d) greutatea rolelor ;

e) frecarea în articulaţiile lanţului, în punctele de înfăşurare şi desfăşurare.

Întrucît rezistenţa totală la deplasare pe un ghidaj este diferenţa dintre forţele F_d şi F_i, este suficient să se găsească relaţia între aceste forţe. Relaţia între forţele F_{k+1} şi F_0 (fig. 1) (rolele fiind încărcate după aceeaşi lege) fiind cunoscută din lucrarea [6], este necesar a se stabili dependenţa între forţele F_0 şi F_i şi între forţele F_d şi F_{k+1}.

2. Relaţia între forţele F_0 şi F_i (între $F'_i = F_i(1+\psi)$ şi F_0)

Asupra rolei i acţionează următoarele forţe (fig. 2):

N — forţa normală de reacţiune a ghidajului ; $w'N = N\operatorname{tg}\varrho$ — rezistenţa la deplasare a rolei, $w' = \operatorname{tg}\varrho$ fiind coeficientul de rezistenţă la deplasare ; $F_i(1+\psi) = F'_i$ — forţa din ramura ce se înfăşoară, incluzînd rezistenţa datorită frecării în prima articulaţie ; F_0 — forţa din eclisa următoare ; G — greutatea repartizată pe rolă.

Ecuaţia de echilibru a acestor forţe, proiectată pe tangenta şi normala pe ghidaj dă sistemul de ecuaţii:

$$F_0 \cos(\varphi/2) - N \operatorname{tg} \varrho - F_i' \cos(\vartheta_i - \beta_i) - G \cos(\alpha_i + \vartheta_i) = 0,$$
$$F_0 \sin(\varphi/2) - N + F_i' \sin(\vartheta_i - \beta_i) + G \sin(\alpha_i + \vartheta_i) = 0,$$

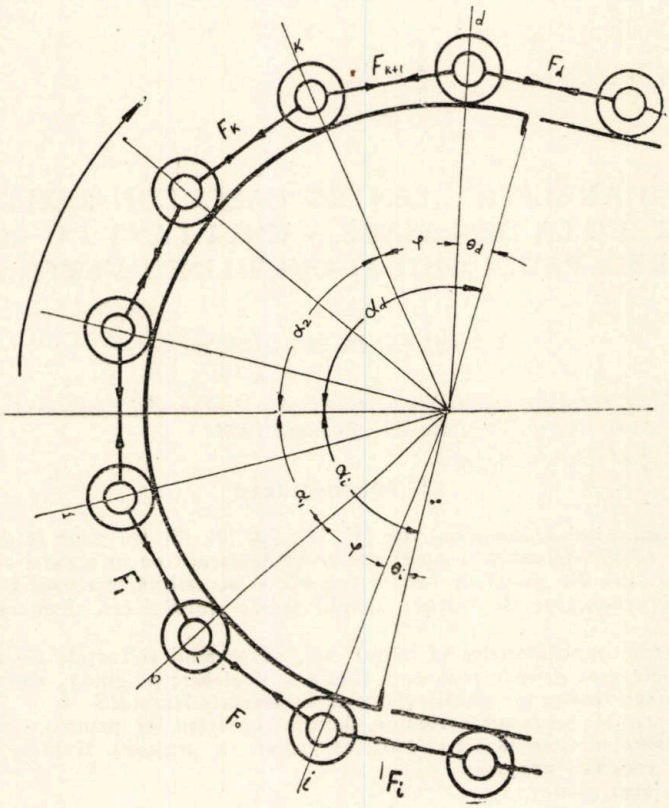


Fig. 1.

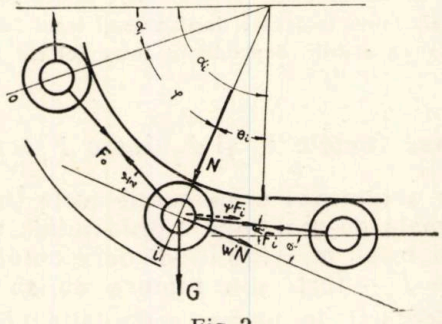


Fig. 2.

din care rezultă:

(1) $F_0 = F_i' \cos(\vartheta_i - \beta_i - \varrho) / \cos(\varphi/2 + \varrho) + G \cos(\alpha_i + \vartheta_i - \varrho) / \cos(\varphi/2 + \varrho)$.

3. Relația între forțele F_{k+1} și F_d (între $F'_d = F_d(1-\psi)$ și F_{k+1})

Procedînd ca și în cazul rolei i, se obține sistemul:

$$F'_d \cos(\vartheta_d - \beta_d) - N \operatorname{tg} \varrho - F_{k+1} \cos(\varphi/2) - G \cos(\alpha_d - \vartheta_d) = 0,$$
$$F'_d \sin(\vartheta_d - \beta_d) - N + F_{k+1} \sin(\varphi/2) + G \sin(\alpha_d - \vartheta_d) = 0,$$

din care rezultă:

$$(2)\quad F'_d = F_{k+1} \cos(\varphi/2 - \varrho)/\cos(\vartheta_d - \beta_d + \varrho) + G \cos(\alpha_d - \vartheta_d - \varrho)/\cos(\vartheta_d - \beta_d + \varrho).$$

Folosind relațiile (1), (2) precum și relația [1]):

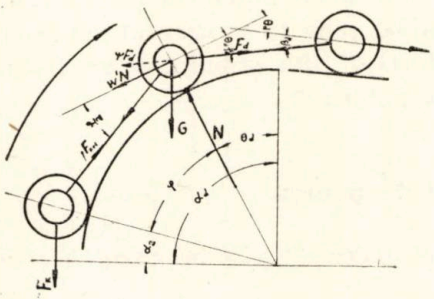


Fig. 3.

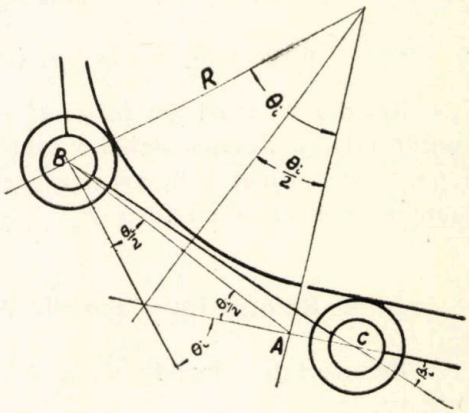


Fig. 4.

$$F_{k+1} = F_0 \varepsilon^{k+1} + qR[\sin(\alpha_2 - 2\varrho + \varphi/2) - \varepsilon^{k+1} \sin(\alpha_1 - 2\varrho - \varphi/2)]/\cos(\varphi/2),$$

prin înlocuiri succesive, și făcînd $\alpha_1 = \alpha_i + \vartheta_i + \varphi$, $\alpha_2 = \alpha_d - \varphi - \vartheta_d$, $G = 2qR\sin(\varphi/2)$ și $\cos(\varphi/2 - \varrho)/\cos(\varphi/2 + \varrho) = \varepsilon$ se obține, după o serie de transformări trigonometrice, relația:

$$(3)\quad \begin{aligned} F'_d = {} & F'_i \varepsilon^{k+2} \cos(\vartheta_i - \beta_i - \varrho)/\cos(\vartheta_d - \beta_d + \varrho) + \\ & + qR \cos(\varphi/2 + \varrho)[\sin(\alpha_d - 2\varrho + \varphi/2 - \vartheta_d) - \\ & - \varepsilon^{k+3} \sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2 + \vartheta_i)]/[\cos(\varphi/2)\cos(\vartheta_d - \beta_d + \varrho)]. \end{aligned}$$

Întrucît apar ca variabile unghiurile ϑ_i, β_i, ϑ_d și β_d se elimină unghiurile β_i, β_d, ϑ_d exprimîndu-le funcție de ϑ_i.

Relațiile între β_i și ϑ_i și între β_d și ϑ_d sînt analoage:

$$(*)\qquad \beta_i = \vartheta_i^2/(2\varphi)\ ,\ \beta_d = \vartheta_d^2/(2\varphi).$$

1) v. [6], relația (4).

Într-adevăr, din triunghiul ABC (fig. 4) rezultă:

$2R\sin(\varphi/2)/\sin(\vartheta_i/2) = 2R\sin(\vartheta_i/2)/\sin\beta_i$, $\sin\beta_i = \sin^2(\vartheta_i/2)/\sin(\varphi/2)$

și întrucît unghiurile ϑ_i, β_i și φ sînt mici, se pot aproxima sinusurile prin arcele corespunzătoare și se obțin relațiile (*).

Știind pe de altă parte că $\vartheta_i + \vartheta_d = \vartheta$, ϑ fiind pentru un transportor dat constant, și reprezentînd diferența între unghiul ghidajului $\alpha = \alpha_d - \alpha_i$ și unghiul dintre rolele i și d, relația (3) devine:

$$F_d' = F_i'\varepsilon^{k+2}\cos[\vartheta_i - \vartheta_i^2/(2\varphi) - \varrho]/\cos[\vartheta - \vartheta_i - (\vartheta - \vartheta_i)^2/(2\varphi) + \varrho] +$$

$$(4) \qquad + qR\cos(\varphi/2 + \varrho)[\sin(\alpha_d - 2\varrho + \varphi/2 - \vartheta + \vartheta_i) -$$

$$- \varepsilon^{k+3}\sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2 + \vartheta_i)]/\{\cos(\varphi/2)\cos[\vartheta - \vartheta_i - (\vartheta - \vartheta_i)^2/(2\varphi) + \varrho]\}.$$

Rezultă că mărimea forței F_d este variabilă, funcție de poziția rolei i (unghiul ϑ_i). Relația stabilită este valabilă pînă în momentul cînd rola d părăsește ghidajul, moment în care forța F_d din ramura ce se desfășoară se confundă cu forța F_{k+1}, adică pentru $0 < \vartheta_i < \vartheta$.

4. Relația între forțele F_d' și F_i' pentru $\varphi > \vartheta_i > 0$.

Relația între forțele F_0 și F_i' este aceeași, ca și în cazul precedent (v. (1)).

În ce privește relația între forțele F_{k+1} și F_0 nu se mai poate exprima prin formula (4) din lucrarea [6] întrucît rola k nu mai este încărcată după aceeași lege ca rolele $0, \ldots, k-1$.

Vom putea scrie însă relația între F_k și F_0 substituind în formula (4) din lucrarea [6] k cu $k-1$ și α_2 cu $\alpha_2 - \varphi$ (fig. 4).

Rezultă:

$$F_k = F_0\varepsilon^k + qR[\sin(\alpha - 2\varrho - \varphi/2) - \varepsilon^k\sin(\alpha_1 - 2\varrho - \varphi/2)]/\cos(\varphi/2)$$

sau făcînd înlocuirile $\alpha_2 = \alpha_d - \vartheta_d'$ și $\alpha_1 = \alpha_i + \varphi + \vartheta_i$, se obține:

$$F_k = F_0\varepsilon^k + qR[\sin(\alpha_d - 2\varrho - \varphi/2 - \vartheta_d') - \varepsilon^k\sin(\alpha_i - 2\varrho + \varphi/2 + \vartheta_i)]/\cos(\varphi/2).$$

Prin analogie cu relația (2) se obține:

$$F_d' = F_k\cos(\varphi/2 - \varrho)/\cos(\vartheta_d' - \beta_d' + \varrho) + G\cos(\alpha_d - \vartheta_d' - \varrho)/\cos(\vartheta_d' - \beta_d' + \varrho).$$

Înlocuind succesiv și făcînd $G = qR\sin(\varphi/2)$, $\vartheta_d' = \varphi + \vartheta - \vartheta_i$, $\beta_d' = (\varphi + \vartheta - \vartheta_i)^2/(2\varrho)$, după o serie de transformări trigonometrice, se obține:

$$F'_d = F'_i \varepsilon^{k+1} \cos[\vartheta_i - \vartheta_i^2/(2\varphi) - \varrho]/\cos[\varphi/2 + (\vartheta_i - \vartheta)^2/(2\varphi) + \varrho] +$$

$$(5) \qquad + qR\cos(\varphi/2 + \varrho)[\sin(\alpha_d - 2\varrho - \varphi/2 + \vartheta_i - \vartheta) -$$

$$-\varepsilon^{k+2}\sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2 + \vartheta_i)]/\{\cos(\varphi/2)\cos[\varphi/2 + (\vartheta_i - \vartheta)^2/(2\varphi) + \varrho]\}.$$

În calculele curente ale rezistențelor la deplasare, nu interesează variațiile forței de tracțiune funcție de unghiul ϑ_i, aceste variații fiind neglijabile; de aceea se recomandă utilizarea cazului particular al relației (4) cînd $\vartheta_i = 0$ și $\vartheta = 0$, corespunzător cazului cînd unghiul de înfășurare $\alpha_d - \alpha_i = \alpha$ este un multiplu al unghiului φ și cînd prima rolă intră pe ghidaj, ultima rolă fiind pe cale de a ieși de pe ghidaj.

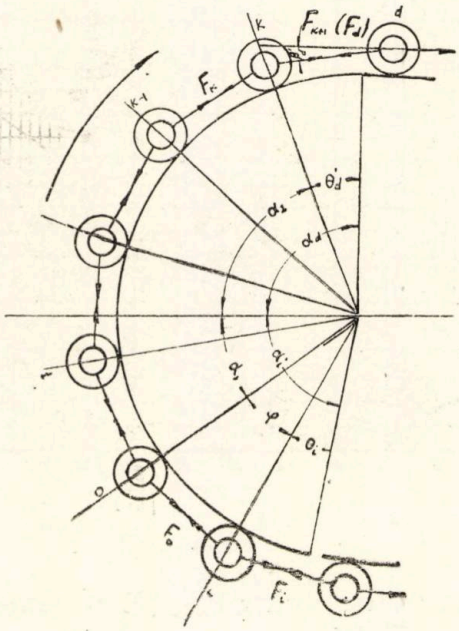


Fig. 5.

Se recomandă această relație din următoarele motive: a) este acoperitoare, b) este simplu de manevrat, c) reprezintă singurul caz cînd se pot separa pierderile din sectorul curbiliniu, în toate celelalte cazuri, primele role din sectoarele rectilinii sînt încărcate suplimentar datorită sectorului curbiliniu.

Relația (4) devine în acest caz:

$$F'_d = F'_i \varepsilon^{k+2} + qR\cos(\varphi/2 + \varrho)[\sin(\alpha_d - 2\varrho + \varphi/2) -$$

$$(6) \qquad -\varepsilon^{k+3}\sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2)]/[\cos(\varphi/2)\cos\varrho],$$

sau făcînd aproximațiile $\cos(\varphi/2+\varrho)/[\cos(\varphi/2)\cos\varrho] \approx 1$ și $\varepsilon^{k+2} \approx e^{w'\alpha}$, $\varepsilon^{k+3} \approx e^{w'(\alpha+\varphi)}$ [1]) se obține:

$$F_d' = F_i' e^{w'\alpha} + qR\left[\sin(\alpha_d - 2\varrho + \varphi/2) - e^{w'(\alpha+\varphi)} \sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2)\right].$$

Știind însă că $F_d' = F_d(1-\psi)$ iar $F_i' = F_i(1+\psi)$ rezultă:

$$F_d = F_i e^{w'\alpha}(1+\psi)/(1-\psi) + qR\left[\sin(\alpha_d - 2\varrho + \varphi/2) - e^{w'(\alpha+\varphi)} \sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2)\right]/(1-\psi).$$

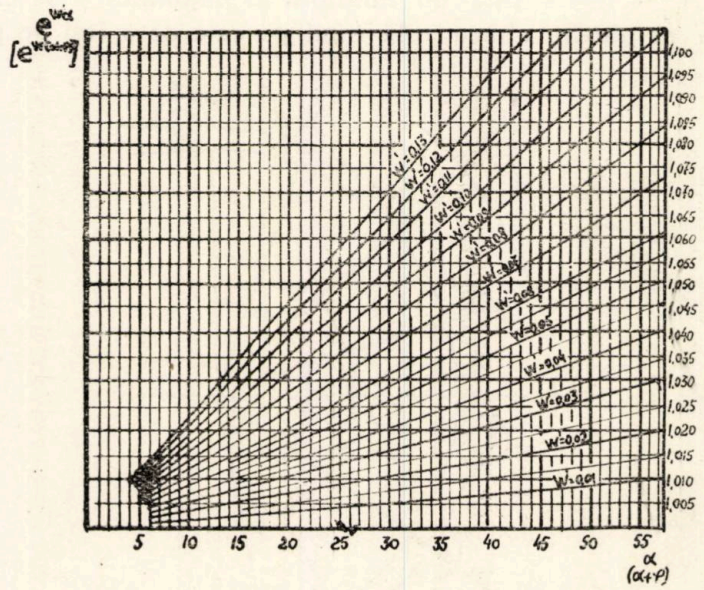


Fig. 6.

Făcînd diferența între forțele F_d și F_i se obține expresia finală a rezistenței totale la deplasare:

---

1) Într-adevăr:

$$\varepsilon^{k+2} = \{[1 + w' \operatorname{tg}(\varphi/2)]/[1 - w' \operatorname{tg}(\varphi/2)]\}^{(\alpha_d-\alpha_i)/\varphi} =$$

$$= 1\{+w'[\operatorname{tg}(\varphi/2)]/[(\varphi/2)] + w'^2[\operatorname{tg}^2(\varphi/2)]/[2(\varphi/2)^2] + \cdots\}^{\alpha_d-\alpha_i} \approx (1 + w' + w'^2/2 + \cdots)^{\alpha_d-\alpha_i}$$

iar

$$e^{w'\alpha} \approx (1 + w'/1! + w'^2/2! + \cdots)^{\alpha_d-\alpha_i}$$

deci

$$\varepsilon^{k+2} \approx e^{w'\alpha} \quad \text{și} \quad \varepsilon^{k+3} \approx e^{w'(\alpha+\varphi)}.$$

$$W = F_i[e^{w'\alpha}(1+\psi)/(1-\psi) - 1] + qR[\sin(\alpha_d - 2\varrho + \varphi/2) - e^{w'(\alpha+\varphi)}\sin(\alpha_i - 2\varrho - \varphi/2)]/(1-\psi). \quad (7)$$

În această relație: F_i — forța din ramura de lanț ce se înfășoară pe ghidaj; $\psi = \mu_1 d/(2R)$ — coeficientul de pierderi datorită rigidității lanțului, μ_1 fiind coeficientul de frecare în articulația lanțului, d — diametrul bolțului lanțului, R — raza de curbură a ghidajului; e — baza logaritmilor naturali; w' — coeficientul de rezistență la deplasare al lanțului, determinat experimental sau calculat după relația cunoscută $w' = \beta(u_2 d_2 + 2k)/D$; $\alpha = \alpha_d - \alpha_i$ — unghiul de înfășurare al ghidajului, rotunjit pînă la valoarea multiplului imediat superior al unghiului φ; φ — unghiul dintre două role consecutive; q — greutatea pe metru liniar a lanțului și a eventualei sarcini; α_d și α_i — unghiurile de intrare și de ieșire din ghidaj, măsurate după regula stabilită în lucrarea [6], adică:

Originea de măsurare a unghiurilor este cea trigonometrică, atunci cînd sensul deplasării lanțului este cel trigonometric, iar în caz contrar, decalată cu π. Sensul pozitiv de măsurare a unghiurilor este sensul deplasării lanțului.

Pentru ușurarea aplicării relației (7) se prezintă graficul din fig. 6.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Organe de Mașini

BIBLIOGRAFIE

1. Спиваковский А. О. и Руденко Н. Ф., Подъёмно-транспортные машины, Машгиз, М., 1949, стр. 661 и 665.
2. Спиваковский А. О. и Дьячков В. К., Транспортирующие машины, Машгиз, М., 1955, стр. 32.
3. Бовин Т. М. и сотр., Эскалаторы, Машгиз, М., 1955, стр. 208—213.
4. * * * Машиностроение, **9**, Машгиз, М., 1950, стр. 1033.
5 Men S. A., *Mașini și instalații de transport*, **I**, I.D.T., Buc. p. 15?. (trad. din l. rusă).
6. Belous V., Bulet. Inst. Polit., Iași 1957, **3**, (**7**), *1 — 2*, pp. 195—202.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЙ ДВИЖЕНИЮ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ НАПРАВЛЯЮЩИМ НАГРУЖЕННОЙ РОЛИКОВОЙ ЦЕПИ

(Резюме)

Устанавливаются аналитические уравнения сопротивлений по криволинейными вертикальным направляющим, нагруженной роликовой цепи принимая во внимание тяжесть нагруженного гибкого органа (цепь с роликами) усилие в нагибающей ветви, трение в шарнирах цепи и разнообразные законы нагружения первого и последнего ролика, находящихся по направляющей.

Устанавливается и приближенное уравнение для практических расчетов.

RELATIONS ANALYTIQUES POUR LE CALCUL DE LA RÉSISTENCE TOTALE AU DÉPLACEMENT D'UNE CHAINE À ROLES, CHARGÉE, SUR GUIDAGES CURVILIGNES VERTICALES

(Résumé)

On déduit les relations analytiques de la résistence totale au déplacement d'une chaine à roles, chargée, sur des guidages curvilignes verticales, en tennant compte du poids propre de l'organ portant chargé, de l'effort minime et du frottement dans les articulations.

On déduit aussi une relation aproximative.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4. 1958

621.2

O ÎMBUNĂTĂŢIRE A SUPAPELOR

DE

GÉRARD d'ALBON, C. CIOBANU, DAN URSESCU şi MARCEL GUTMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Introducere

În multe maşini cu supape în care se circulă gaze, laminarea puternică ce se produce la începutul deschiderii şi la sfîrşitul închiderii, este un proces ce micşorează randamentul şi puterea utilă. La fel, în cazul lichidelor, în aceste faze se produc căderi mari de presiune la debite mici. Adeseori, micşorarea acestor căderi de presiune ar fi utilă.

În cele ce urmează, vom arăta cum printr-o profilare raţională a supapei, care se realizează printr-o modificare constructivă relativ simplă, se pot obţine îmbunătăţiri apreciabile în sensul arătat. Pentru a preciza noţiunile, considerăm o supapă obişnuită (fig. 1) ce se află la o deschidere redusă corespunzînd unei înălţări h. Secţiunea deschisă, măsurată normal la direcţia mişcării fluidului este:

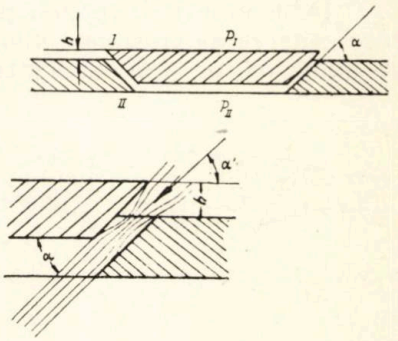


Fig. 1.

$$\sigma_t = \pi\, d\, h \cos\alpha. \tag{1}$$

În cazul unui debit Q_0 (kg/sec.), viteza teoretică în secţiune este:

$$c_t = Q_0\, v \,/\, (\pi\, d\, h \cos\alpha), \tag{2}$$

unde v este volumul specific al fluidului la starea lui din secţiunea considerată.

Dacă n-ar exista şi alte pierderi decît cele datorite anulării la presiune constantă a vitezei c_t la intrarea în spaţiul II, căderea teoretică de presiune ar satisface relaţiile generale:

$$\frac{c_t^2}{2g} = \int_{p_{II_t}}^{p_I} v\, \mathrm{d}\, p \quad \text{şi} \quad p\, v^k = p_I\, v_I^k = \text{const.} \tag{3}$$

unde k este exponentul adiabatic. Această cădere de presiune poate fi dedusă şi din valoarea entalpiei în jet la ieşire (i_{II}):

$$i_{II_t} = i_I - A\, c_t^2/(2g). \tag{4}$$

Pentru lichide şi, de asemenea, în cazul unei mici variaţii de presiune, la gaze, v poate fi considerat constant în procesul detentei şi:

$$c_t^2/(2g) = v\Delta p = v\,(p_I - p_{II_t}),$$

încît

$$\Delta p = c_t^2\,\gamma/(2g) = Q_0^2\, v/[2g\,(\pi d h \cos\alpha)^2]. \tag{5}$$

În realitate căderea de presiune este mai mare decît aceea ce verifică aceste relaţii căci intervin frecări care fac ca rezistenţa să crească şi în afară de aceasta, vîna fluidă suferă o îngustare, sub valoarea σ_t, care are aspectul din fig. 1, în unele cazuri, iar în alte cazuri un aspect diferit, secţiunea minimă putînd fi găsită în vîna fluidă după ieşirea din supapă.

Datorită acestei îngustări secţiunea utilă reală este mai mică şi viteza reală mai mare decît cea teoretică:

$$\sigma_u = \alpha\,\sigma_t < \sigma_t,$$

şi

$$C > C_t\,, \quad \Delta_p = p_I - p_{II} > \Delta p_t = p_I - p_{II_t}.$$

Rezultatul este o cădere de presiune mai mare decît cea teoretică.

Îmbunătăţirile supapei, pe care le urmărim noi, trebuie să micşoreze căderea de presiune Δp la un debit şi o deschidere dată şi acest lucru se poate obţine prin executarea supapei cu un profil special studiat.

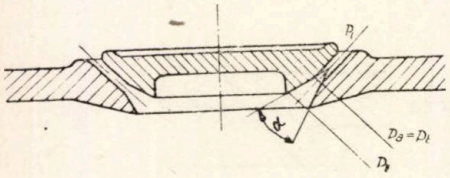


Fig. 2.

Mijloacele pe care le-am pus în studiu privesc ambele aspecte şi anume:

a) îmbunătăţirea profilului la intrare, astfel ca să se împiedice sau să se micşoreze dezlipirea şi contracţia vînei fluide. În felul acesta secţiunea utilă se apropie de cea geometrică şi viteza maximă reală C de cea teoretică C_t;

b) profilul la ieşire se completează cu un difuzor, astfel ca viteza să se micşoreze treptat cu creşterea presiunii de ieşire şi pierderile prin viteză reziduală să scadă.

Aspectul, în urma acestor modificări, ce privesc scaunul şi supapa, este cel din fig. 2.

Modificarea a) de la intrare, dacă reuşeşte să împiedice dezlipirea vînei fluide de pereţi, în porţiunea convergentă şi în cea de secţiune constantă, reduce viteza maximă la valoarea sa teoretică şi căderea de

presiune la o valoare apropiată de acea teoretică. Această modificare este eficace și la deschiderile mari ale supapei.

Modificarea b) de la ieșire micșorează viteza de ieșire și căderea de presiune poate fi micșorată astfel chiar sub valoarea teoretică a supapei normale.

Într-adevăr, în porțiunea divergentă (fig. 2) viteza va avea o scădere treptată, presiunea statică crescînd corespunzător relațiilor clasice și p_{II} devine mai mare decît p_a.

În primă aproximație, dacă considerăm $\gamma = \text{const.}$,

$$p_{II_t} - p_{a_t} = \gamma (C_a^2 - C_{II}^2) / (2g).$$

Dacă se notează cu $\varphi_x = a_x / b_x$ raportul secțiunii normale la cea mărită cu ajutorul difuzorului, cu Δp_{nt_x} căderea teoretică de presiune pe o supapă normală și cu Δp_{mt_x} căderea de presiune teoretică pe o supapă echivalentă, modificată la o aceeași înălțare, avem :

$$\Delta p_{mt_x} / \Delta p_{nt_x} = C_{b_x}^2 / C_{a_x}^2 = \varphi_x^2 .$$

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA CENTRALĂ 1948

Aceste relații sînt suficiente pentru a ne permite să judecăm importanța practică a procedeului. De exemplu, la o supapă de 25 mm diametru se poate ușor prevedea o porțiune divergentă care să mărească secțiunea de trei ori în cazul unei înălțări de un milimetru, păstrînd pentru unghiul α de divergență valori admisibile. În acest caz, la același debit instantaneu circulat, căderea de presiune se va reduce teoretic la 1/9 din valoarea celei de pe suprafața normală.

2. Limitele eficacității procedeului

În cazul vitezei critice, atinse în secțiunea minimă, evident debitul nu mai crește, oricît ar crește diferența de presiune $p_I - p_{II}$. Deci profilarea de la ieșire a supapelor, în regimul unor mari căderi de presiune, nu modifică nimic : atît debitul cît și energia transformată în căldură nu sînt influențate de acest profil. Profilarea de la intrare poate avea o influență și în acest caz, căci împiedicînd dezlipirea vînei fluide, mărește secțiunea critică.

Dacă se analizează funcționarea mașinilor cu supape în care circulă gaze : mașini cu vapori, compresoare, mașini cu combustie internă, se vede că cel mai adesea, presiunile în spațiile separate de supape se află într-un raport încă depărtat de cel critic.

La deschideri mari, difuzorul de la ieșire intervine de asemenea puțin, căci φ în acest caz tinde spre unitate.

Evident, se poate executa un difuzor destul de lung, astfel încît să avem o îmbunătățire apreciabilă chiar și la deschiderea maximă a supapei, dar acest lucru implică o mărire considerabilă a greutății și a spațiului ocupat de supapă care ar face în genere execuția nepractică.

3. Instalaţ'a experimentală

Din cele expuse anterior, reiese clar că experimentarea este necesară, atît pentru a verifica practic prevederile enunţate principial, cît mai ales pentru a putea studia profile de supape speciale cînd se cunoaşte concret rolul lor funcţional.

Dispozitivul experimental, conform schemei reprezentată în fig. 3, a fost realizat pentru a studia calităţile supapelor de diverse profile în regim permanent. Primele experienţe au fost făcute pentru a verifica prevederile privind eficacitatea difuzorului de la ieşire, în cazul aerului.

Acest dispozitiv permite în regim permanent măsurarea debitului şi a căderilor de presiune pe supapă.

Prin jocul ventilelor *2* şi *3* se variază debitul. Tubul Venturi *4* cu manometrul diferenţial cu apă *5*, permit determinarea debitului.

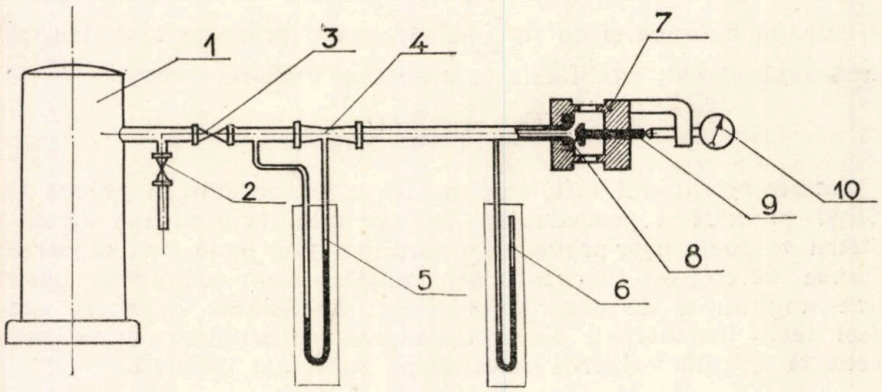


Fig. 3.

Manometrul cu mercur *6* indică presiunea dinaintea supapei *9*. Supapa evacuează într-o cameră cu deschideri largi, în care presiunea este practic egală cu cea atmosferică, deci manometrul *6* indică $p = p_I - p_{II}$.

Un dispozitv micrometric acţionînd tija supapei *9* permite înălţarea ei cu cantităţi indicate de comparatorul *10*.

Întreaga instalaţie a fost alimentată de la un rezervor tampon de aer comprimat.

În experienţele noastre, făcute pentru început numai spre a verifica prevederile privind eficacitatea difuzorului de ieşire, am procedat ca mai sus. Într-o altă serie de măsurători s-a utilizat o schemă similară, numai că măsurarea debitului se făcea cu ajutorul unei diafragme standard. Ambele instalaţii ne-au permis să măsurăm debitele în funcţie de căderea de presiune pe supapă, pentru diverse înălţări cunoscute ale supapei.

Presiunea p_{II} în toate măsurătorile a fost egală cu presiunea atmosferică. Măsurătorile se efectuau în modul următor:

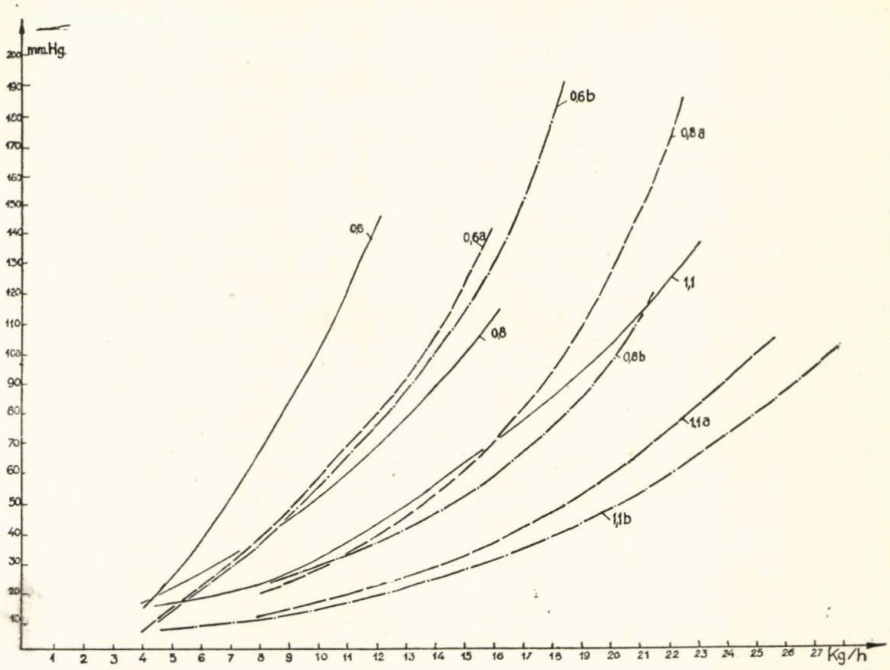

mm.Hg.
0,6b
0,8a
0,6
0,6a
1,1
0,8
0,8b
1,1a
1,1b
Kg/h

Fig. 6.

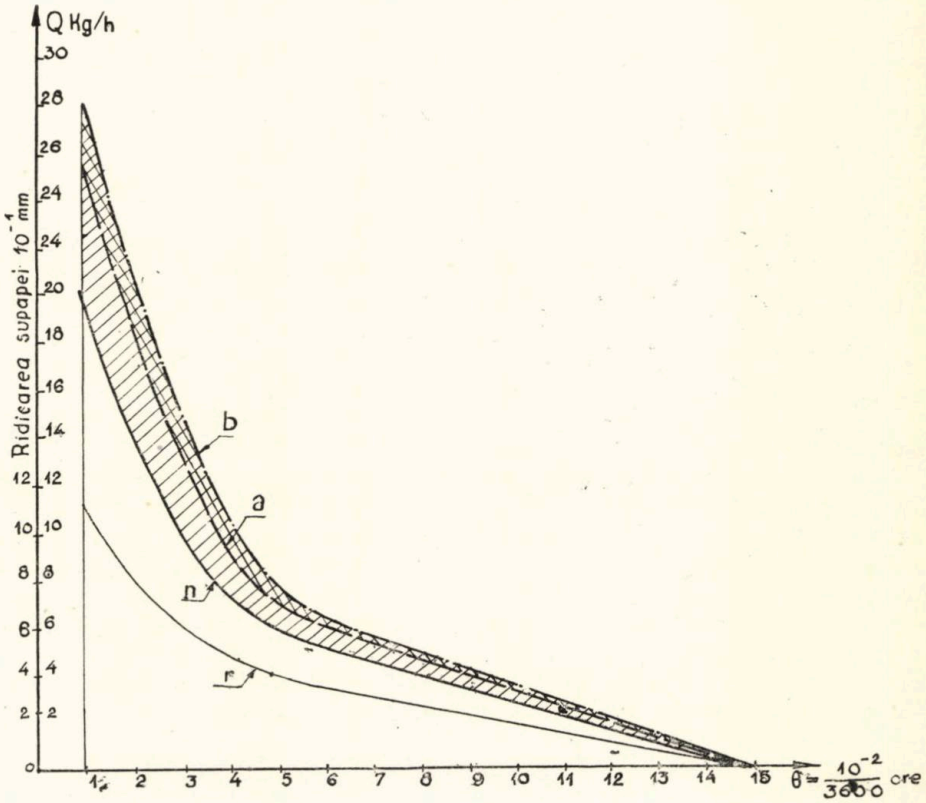

Q Kg/h
Ridicarea supapei 10⁻¹ mm
b
a
n
r
θ = 10⁻² / 3600 ore

Fig 7.

Pentru supapa normală (fig. 4) se menținea o înălțare constantă și se determinau debitele corespunzătoare diverselor valori ale presiunii p_1; operația se repeta pentru diverse înălțări cuprinse între 0,4 mm pînă la 1,2 mm. Apoi măsurătorile se repetau pe o supapă prevăzută cu un profil special care forma între scaun și supapă, un difuzor la ieșirea fluxului gazos, conform schemei *a* din fig. 5. La terminarea acestor măsurători se făcea o a doua modificare a supapei, conform schemei *b* din fig. 5, care consta într-o rotunjire a profilului la intrare. Pe supapa astfel modificată se repeta întreaga serie de măsurători.

În afară de măsurătorile făcute cu supapa din fig. 4, cu modificările din fig. 5 s-au mai făcut măsurători pe o supapă cu diametrul de 16 mm, pe care însă nu s-a studiat decît modificarea de tip *a*. Rezultatele au fost similare pentru ambele supape în ceea ce privește modificarea de tip *a*. Parte din rezultatele obținute pentru supapele din fig. 4 și 5 sînt reprezentate în fig. 6.

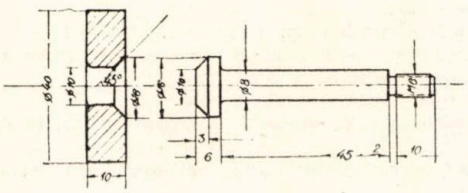


Fig. 4.

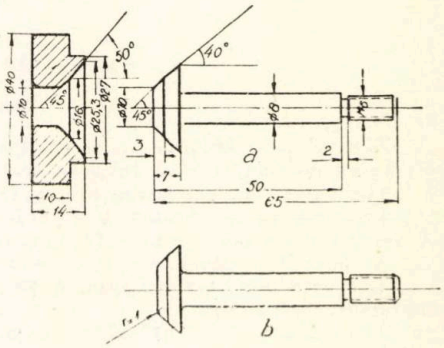


Fig. 5.

Liniile pline arată relația dintre debit și căderea de presiune pentru supapa normală. Liniile întrerupte și marcate cu *a*, arată aceeași relație pentru supape cu modificarea de tip *a*, iar liniile trase cu punct-linie și marcate cu *b*, arată aceeași relație pentru supapa cu modificare de tip *b*.

Pe fiecare linie este marcată înălțarea supapei în milimetri.

4. Concluzii

Experiențele făcute confirmă calitativ prevederile teoretice și arată că, printr-o modificare constructivă simplă a profilului de trecere prin supape, integrala timp-secțiune eficace a lor poate fi sensibil îmbunătățită. Pentru a ilustra acest lucru, am construit curbele din fig. 7, în care sînt arătate variațiile debitului cu timpul, pentru o curbă de închidere prezumtivă a supapei marcate cu $r, h = f$ (timp), pentru supapa normală, modificată *a* și modificată *b*. Suprafețele haşurate sînt echivalente cu creșterea cantității de fluid circulate, obținută prin îmbunătățirile succesive ale supapei.

Aplicarea acestei supape la mașinile cu aburi, la compresoare și la motoarele cu combustie internă, atît la admisie cît și la evacuare, ar

aduce o îmbunătăţire a randamentului şi o mărire a puterii maşinii. Profilul optim al supapei ar trebui studiat experimental în mod special pentru fiecare aplicaţie în parte.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Maşini Termice

ОБ УЛУЧШЕНИИ ВЕНТИЛЕЙ

(Резюме)

Авторы предлагают метод рационального профилирования вентилей для достижения чувствительного улучшения кпд и полезной мощности или же уменьшения падения давления в соотвествующих установках.

AN AMELIORATION OF VALVES

(Summary)

The valve is designed so as to allow the passing of the flow at outlet through a diverging portion formed between seat and disk.

The valve thus conceived causes, in similar conditions, a lesser throttling.

Thus the valve, through a slight constructive modification becomes equivalent to a valve the integral time — efficient section of which, is a better one.

At inlet it is equal to a valve whose closing rate is higher, etc.

The principle may be applied to steam-engines, internal combustion engines, compressors and pumps.

The efficiency of the valve was studied experimentally and the results are presented in fig. 6.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621.16

STUDIU ANALITIC REFERITOR LA INFLUENŢA SCURTĂRII CURSEI LA MAŞINILE ALTERNATIVE

DE

GÉRARD D'ALBON, I. VRABIE ŞI DAN URSESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 19 — 21 mai 1956

Criteriile de proiectare privind problemele legate de viteza pistonului şi de raportul cursă/diametru, indicate de tratatele clasice, cuprind domenii de alegere destul de largi, şi duc uneori la indicaţii contradictorii.

În afară de aceasta, unele criterii nu ţin seamă de toţi parametrii, de care alegerea raţională a acestor valori este dependentă. O analiză a acestor aspecte, se poate face dacă urmărim consecinţele ce le are modificarea raportului dintre lungimea s a cursei şi diametrul D. Această analiză este uşurată de faptul că dacă păstrăm toate elementele constante, inclusiv diametrul, la o serie ipotetică de maşini, şi variem cursa, cu condiţia păstrării unei viteze medii constante a pistonului, puterea indicată a maşinilor din această serie este aceeaşi. Studiul de faţă revine deci la compararea unor maşini cu piston de curse diferite la care păstrăm anumite caractere constante pentru a lămuri aceste aspecte.

După părerea noastră, aceasta este calea cea mai simplă pentru a pune în evidenţă dependenţa proprietăţilor maşinii de raportul s/D.

Presupunem că avem o serie de maşini a căror cursă totală s a pistonului variază de la una la alta. Diametrul D al pistonului, presiunea medie indicată p_i, viteza medie a pistonului c_m, raportul L/R dintre lungimea bielei şi a manivelei, deschiderile maxime de admisie $f_{a\ max}$ şi de evacuare $f_{e\ max}$ şi raportul dintre volumul spaţiului vătămător şi volumul cursei V_0/V sînt cantităţile ce le presupunem păstrate constante la diversele maşini.

De asemenea, toate aceste maşini sînt presupuse similare din toate punctele de vedere, deci ele îşi păstrează neschimbate toate caracterele, în afară de acelea ce se schimbă în mod obligator în urma variaţiei lungimii cursei. Ele au acelaşi sistem de distribuţie, sînt alimentate la fel şi au aceeaşi presiune la condensator.

Excepţie la cele enunţate face presupunerea pe care am admis-o referitor la spaţiul vătămător care nu poate fi micşorat proporţional cu mărimea cursei, dacă se păstrează acelaşi sistem de distribuţie. La sfîrşit vom reveni asupra acestei chestiuni.

1. Viteza maşinii

Viteza maşinii este dată de relaţia:

$$n = 30\ c_m/s \tag{1}$$

unde: n — viteza maşinii (rot/min.); c_m — viteza medie a pistonului (m/sec.); s — cursa pistonului (m).

Din (1) rezultă $ns = 30\,c_m = \text{const.}$, căci c_m este presupus constant.

Deci viteza n a maşinii este invers proporţională cu s.

2. Puterea indicată a maşinii

Este dată de relaţia:

$$P_i = sS.2n.\,p_i/4500 \tag{2}$$

unde: P_i — puterea indicată a maşinii (CP); S — secţiunea utilă a pistonului, presupusă pentru simplificare aceeaşi pentru ambele feţe ale pistonului, (cm^2). Ea este constantă' căci diametrul D este constant; p_i — presiunea medie indicată (kg/cm^2).

Dacă ţinem seama de (1) avem:

$$P_i = \frac{p_i S\, c_m}{75} = \text{const.}$$

Deci puterea indicată a maşinilor de curse diferite este aceeaşi dacă s-au păstrat constante cantităţile fixate ca atare.

3. Cuplul mediu

Cuplul mediu C_m este:

$$C_m = 4500\,P_e/(2\pi n) = 4500\eta_m\,P_i/(2\pi n)$$

unde: C_m — cuplul mediu (kgm); P_e — puterea efectivă (CP); η_m — randamentul mecanic al maşinii.

Dacă ţinem seama de (1) avem:

$$C_m = 75\,\eta_m\,P_i\,s/(\pi\,c_m)\,. \tag{3}$$

După cum vom vedea mai departe η_m variază foarte puţin cînd se schimbă cursa în condiţiile fixate, aşa că:

$$75\,\eta_m\,P_i\,s/c_m \cong \text{const.}$$

Valoarea medie a cuplului creşte aproximativ proporţional cu cursa.

4. Valorile instantanee ale cuplului

În cele ce urmează, analizăm separat cuplul motor şi forţele provocate de presiunea din cilindru, analiza forţelor de inerţie fiind tratată separat.

Dacă considerăm o diagramă în care sînt reprezentate valorile instantanee ale cuplului în funcţie de timp, atunci atît abscisele cît şi ordonatele sînt aproximativ proporţionale cu s. Adică reprezentările sînt aproximativ asemenea între ele şi dimensiunile lor liniare sînt proporţionale cu s. Această condiţie ar fi riguros îndeplinită, dacă s-ar neglija influenţa frecărilor asupra cuplului. Vom demonstra întîi acest lucru şi apoi vom căuta să vedem în ce măsură această condiţie este îndeplinită la maşinile noastre.

Trebuie deci să arătăm că pentru acelaşi unghi α parcurs de manivelă, măsurat de la punctul mort, atît timpul necesar parcurgerii acestui unghi, cît şi valoarea instantanee a cuplului pentru poziţia unghiulară α a butonului de manivelă, sînt proporţionale la diversele maşini, cu cursele lor s. Pentru aceasta să notăm cu T durata în secunde a unui ciclu:

$$T = 2\,s/c_m\,. \tag{4}$$

De asemenea să notăm cu t durata parcurgerii unghiului α:

$$t = \alpha\, T/2\pi = \alpha s/\pi\, c_m.$$

Deci timpul este proporțional cu cursa.

Dacă neglijăm influența pierderilor prin frecare asupra cuplului, valoarea instantanee a cuplului este:

$$C = (p_A - p_B)\, Ss \sin(\alpha + \beta)/(2 \cos \beta),$$

unde: $p_A - p_B$ — diferența dintre presiunile pe cele două fețe ale pistonului; β — unghiul pe care-l face biela cu prelungirea tijei pistonului. (Mașina este presupusă cu mecanism normal). Valoarea lui β este aceeași la toate mașinile, pentru aceeași valoare a lui α, căci L/R este presupus același la toate mașinile. Deci și valoarea instantanee a cuplului la diferitele mașini este proporțională cu cursa lor.

În realitate, la diversele mașini, aceste reprezentări nu vor fi asemeni decît cu o mică aproximație.

Cuplul instantaneu real este influențat de frecările mecanice, însă această influență este mică, căci randamentul mecanic are o valoare destul de ridicată ($\eta_m = 0{,}8...0{,}92$) și nu este prea mult influențat de variația cursei, în condițiile stabilite de noi, după cum vom vedea în cele ce urmează.

5. Forțe instantanee în tijă datorită presiunii

Valoarea forței instantanee F în tijă este:

$$F = (p_A - p_B)\, S.$$

Cu aceeași aproximație pe care am făcut-o la reprezentarea cuplului instantaneu cu timpul, reprezentarea variației forței în tijă în timpul unui ciclu este aceeași la toate mașinile în ce privește mărimea forței F, iar în ce privește valorile timpului, ele sînt proporționale cu s. Forța maximă în tijă va fi aproximativ aceeași la toate mașinile

6. Vitezele și accelerațiile în mecanismul principal

Avînd în vedere că s-a păstrat constant raportul L/R, toate reprezentările mișcărilor pistonului, tijei, capului de cruce, și cu o aproximație oarecare și aceea a bielei, sînt asemenea între ele pentru diversele mașini. Atît deplasările cît și timpul sînt proporționale cu cursa pentru aceeași poziție unghiulară a butonului de manivelă.

Vitezele instantanee pentru diferitele valori ale unghiului α vor fi aceleași, căci vitezele instantanee sînt derivatele spațiului în raport cu timpul și atît spațiul cît și timpul, pentru aceleași valori a lui α, sînt proporționale cu s

Fie, de exemplu, pentru o mașină dată și pentru o valoare dată a lui α, $v_{(1,\alpha)}$ valoarea vitezei:

$$v_{(1,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\, l_1}{\mathrm{d}\, t_1},$$

l_1 fiind spațiul parcurs pînă la timpul t_1.

Pentru o altă mașină, de cursă $s_2 = m s_1$, vom avea:

$$v_{(1,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\, l_2}{\mathrm{d}\, t_2} = \frac{\mathrm{d}\, m\, l_1}{\mathrm{d}\, m\, t_1} = \frac{\mathrm{d}\, l_1}{\mathrm{d}\, t_1}$$

căci m este o constantă.

Fie $\gamma_{(1,\alpha)}$ și $\gamma_{(2,\alpha)}$ valorile accelerațiilor pentru cele două mașini, pentru o aceeași valoare a lui α:

$$\gamma_{(1,\alpha)} = \frac{dv_1}{dt_1} = \frac{d\left(\frac{dl_1}{dt_1}\right)}{dt_1}, \qquad \gamma_{(2,\alpha)} = \frac{dv_2}{dt_2} = \frac{d\left(\frac{dl_1}{dt_1}\right)}{dt_2} = \frac{d\left(\frac{dl_1}{dt_1}\right)}{m dt_1}$$

sau :

$$\gamma_{(2,\alpha)} = \gamma_{(1,\alpha)}/m \,. \tag{7}$$

Acceleraţiile instantanee, pentru aceleaşi valori a lui α sînt, pentru diversele maşini, invers proporţionale cu cursele lor.

7. Forţele în mecanism datorite acceleraţiilor maselor

Observăm că toate piesele cu mişcare alternativă au lungimi proporţionale cu cursa.

Dacă notăm cu M_1 masa unei piese cu mişcare alternativă la prima maşină şi cu M_2, masa aceleiaşi piese la a doua maşină, atunci $M_2 \simeq m M_1$.

Forţele instantanee F_a datorite acceleraţiei vor fi :

$$F_{a_1} = M_1 \gamma_{(1,\alpha)} \text{ şi } F_{a_2} = M_2 \gamma_{(1,\alpha)} \cong m M_1 \gamma_{(1,\alpha)}/m = F_{a_1}.$$

Relaţia este numai aproximativă, căci masele pistonului, a capului de cruce şi a butonului de manivelă nu se pot micşora proporţional cu cursa.

În concluzie putem spune că forţele datorite acceleraţiilor vor avea o variaţie destul de mică, crescînd pentru maşinile cu curse mici.

8. Volantul maşinii

Deoarece dorim aici să comparăm mai ales diversele maşini şi deoarece mecanismele comparate au un grad destul de însemnat de similitudine, putem folosi formula aproximativă şi simplă pentru determinarea greutăţii volantului :

$$G = C P_e/(\delta n v^2),$$

erorile comise pentru utilizarea acestei formule simplificate avînd o aceeaşi influenţă asupra tuturor maşinilor.

In această formulă : G — greutatea volantului (kg) (presupunînd întreaga masă concentrată în bandaj); C — o constantă a cărei valoare este aproximativ 69500; P_e — puterea efectivă a maşinii ; δ — gradul de iregularitate admis şi v — viteza tangenţială.

Dacă avem în vedere că viteza tangenţială ce o putem alege pentru volant este limitată, de obicei de faptul că volantul serveşte şi ca roată de transmisie, atunci putem presupune că v este acelaşi pentru toate maşinile.

Cum puterea efectivă este şi ea aproximativ aceeaşi pentru toate maşinile, putem trage concluzia că greutatea totală a volantului pentru un acelaşi grad de iregularitate va fi invers proporţională cu viteza n a maşinii şi deci, conform relaţiei (1), proporţională cu cursa.

9. Diametrul fusului axului principal

Socotind că efortul principal ce-l suportă fusul este datorit greutăţii volantului, vom avea, aproximativ, proporţionalitate între secţiunea totală a fusului şi greutatea volantului. Deci :

$$\pi d^2 / 4 - K' G = K' K s$$

de unde

$$d \cong K'' \sqrt{s} \,.$$

Aproximația la această relație este într-adevăr destul de mare, dacă avem în vedere că fusul nu se calculează numai la forțe tăietoare și că numai greutatea volantului variază aproximativ cu cursa, celelalte forțe din mecanism rămînînd aproximativ constante cînd variază cursa. Dar socotim pentru studiul de față suficientă această relație pe care o vom folosi mai mult ca o indicație pentru a putea studia randamentul mecanic.

10. Vitezele și accelerațiile în mecanismul de distribuție

Am făcut ipotezele că mecanismul de distribuție este de aceeași natură pentru toate mașinile și că deschiderea maximă este aceeași atît pentru admisie cît și pentru evacuare. Vom preciza acum ce înțelegem prin aceeași natură a mecanismului de distribuție și vom căuta să arătăm de ce aceste ipoteze erau necesare pentru a avea o similitudine între diversele diagrame indicate. După ce am precizat astfel noțiunile, vom păși la calculul vitezelor și al accelerațiilor în mecanismul de distribuție.

Observăm întîi că debitul de vapori atît la evacuare cît și la admisie trebuie să fie același la diversele mașini, pentru o aceeași valoare a lui α, dacă dorim ca presiunea din cilindru să fie aceeași:

$$D_v = c\,S - (S\,s + V_0)\frac{dv}{dt} = c\,S - (S\,s' + V_0)\frac{\omega dv}{d\alpha}$$

unde: D_v — debitul de vapori (în volume); dv — variația volumului specific al vaporilor din cilindru cu timpul; ω — viteza unghiulară a mașinii; s' — valoarea instantanee a cursei presupuse, corespunzătoare unghiului parcurs α.

Am văzut că c_m este același la toate mașinile pentru o aceeași valoare a lui α, deci și $c_m s$ este același. Să arătăm că și cantitatea $(S\,s' + V_0)\frac{\omega dv}{d\alpha}$ trebuie să fie aceeași la toate mașinile la o aceeași valoare a lui α, dacă dorim ca presiunea din cilindru să fie aceeași.

Pentru aceasta observăm că $S\,s' + V_0$ este proporțional cu s, căci atît s' cît și V_0 sînt proporționale cu s, iar ω este invers proporțional cu s.

Presiunea din cilindru fiind aceeași la toate mașinile pentru aceeași valoare a lui α și $p_a - p_c$, diferența dintre presiunea din camera de admisie și cea din cilindru va fi aceeași.

Viteza teoretică a vaporilor este dată de relația:

$$\frac{w'^2}{2g} = \frac{\varphi^2 w^2}{2g} = \int_{p_a}^{p_c} v\,dp\,.$$

Dacă considerăm că variația volumului specific est mică:

$$w = \frac{1}{\varphi}\sqrt{2g\,(p_a - p_c)\,v}\,.$$

În această relație: w' — viteza teoretică a vaporilor; w — viteza lor reală; φ — un coeficient, același la toate mașinile; v — volumul specific.

Toate cantitățile de care depinde w fiind aceleași la diversele mașini, în condițiile stabilite, valoarea lui va fi aceeași pentru o aceeași valoare a lui α.

Debitul are ca expresie:

$$D_v = w\,f_u\,.$$

Dacă dorim ca debitul să fie același pentru o aceeași variație a lui α la toate mașinile, este necesar ca secțiunile utile f_u să fie și ele aceleași pentru o aceeași valoare a lui α.

Natura distribuției la diversele mașini fiind aceeași, raportul între secțiunea utilă și cea reală este același și deci și secțiunile reale f trebuie să fie aceleași la di-

versele maşini, pentru o aceeaşi valoare a lui α, dacă dorim să realizăm o aceeaşi presiune a vaporilor în cilindru la toate maşinile pentru o aceeaşi valoare a lui α.

Vom analiza acum care sînt variaţiile vitezelor şi ale acceleraţiilor de la o maşină la alta, pentru o valoare dată a lui α.

Fie a valoarea variabilă a deschiderii, măsurată pe direcţia cursei organului de distribuţie şi h a doua dimensiune a deschiderii, care este o valoare constantă, aceeaşi pentru toate maşinile, deoarece toate au acelaşi diametru şi această valoare este obişnuit dependentă de diametru. Atunci:

$$f = a\,h.$$

Viteza organului de distribuţie va fi:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t}$$

iar acceleraţia

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}\,t^2}.$$

Să vedem care sînt valorile acestor cantităţi pentru un acelaşi α la două maşini cu cursele s_1 şi s_2, $(s_2 = m\,s_1)$.

Deoarece f_{max} şi a_{max} sînt aceleaşi la toate maşinile, cursa organului de distribuţie este şi ea aceeaşi la toate maşinile. Şi deoarece mecanismul distribuţiei exterioare este presupus şi el acelaşi la toate maşinile, cantitatea variabilă $\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,\alpha}$ este aceeaşi la toate maşinile, pentru aceeaşi valoare a lui α. Să notăm această cantitate pentru valoarea particulară a lui α, cu z:

$$z_\alpha = z_{(1,\alpha)} = z_{(2,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\,a_1}{\mathrm{d}\,\alpha} = \frac{\mathrm{d}\,a_2}{\mathrm{d}\,\alpha}.$$

Vitezele v_1 şi v_2 pentru maşinile de curse s_1 şi s_2 sînt:

$$v_{(1,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\,a_1}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,a_1}{\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\omega_1}} = z_\alpha\,\omega \quad \text{şi} \quad v_{(2,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\,a_2}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,a_2}{\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\omega_2}} = z_\alpha\,\omega.$$

În aceste relaţii ω_1 şi ω_2 reprezintă vitezele unghiulare ale maşinilor de curse s_1 şi s_2.

Vitezele unghiulare fiind invers proporţionale cu cursele, înseamnă că vitezele instantanee ale organelor de distribuţie sînt invers proporţionale cu cursa.

Acceleraţiile $\gamma_{(1,\alpha)}$ şi $\gamma_{(2,\alpha)}$ sînt:

$$\gamma_{(1,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\,v_{(1,\alpha)}}{\mathrm{d}\,t} = \omega_{(1,\alpha)}\,\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}$$

dar $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\omega_1}$ şi deci

$$\gamma_{(1,\alpha)} = \omega^2_{(1,\alpha)}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}.$$

De asemenea

$$\gamma_{(2,\alpha)} = \frac{\mathrm{d}v_{(2,\alpha)}}{\mathrm{d}t} = \omega_{(2,\alpha)}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \omega^2_{(2,\alpha)}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Acceleraţiile sînt proporţionale cu patratul vitezei unghiulare şi deci invers proporţionale cu patratul cursei.

11. Forțele și lucrul mecanic de frecare în mecanismul de distribuție

Forțele de frecare sînt neschimbate. De asemenea drumul parcurs pe ciclu de toate punctele mecanismului de distribuție este același.

Lucrul mecanic pierdut pe ciclu, prin frecări, în mecanismul de distribuție, este de asemenea același.

Forțele datorite accelerațiilor sînt proporționale cu accelerațiile și deci invers proporționale cu patratul cursei. Acest lucru are o deosebită importanță, căci constituie unul din factorii principali care limitează posibilitățile de micșorare a cursei.

Lucrul mecanic pierdut în unitatea de timp prin frecări în mecanismul de distribuție este proporțional cu n și va fi deci invers proporțional cu s.

12. Studiul consumului de vapori

Din datele studiate pînă acum se va putea trage o concluzie asupra variației randamentului mecanic al mașinii. Mai trebuie însă, pentru a putea trage concluziile finale, să studiem și modul cum variază cu cursa, consumul de vapori al diferitelor mașini care au, după cum am văzut, aceeași putere indicată.

Pentru aceasta va trebui să studiem variația pierderilor prin condensație la admisie, variația pierderilor prin lipsă de etanșeitate și să analizăm mai amănunțit influența spațiului vătămător.

13. Pierderile prin condensație

Deși aceste pierderi nu privesc decît mașinile care nu au o suficientă supraîncălzire a vaporilor, totuși, pentru a da un caracter mai general acestui studiu, vom urmări și variația cu cursa a acestor pierderi.

Cantitatea condensatului produs pe ciclu este proporțională cu cantitatea totală de căldură schimbată în timpul admisiei între vapori și pereți.

Fie $\mathrm{d}Q$ cantitatea de căldură schimbată cu pereții în timp ce butonul de manivelă parcurge unghiul $\mathrm{d}\alpha$:

$$\mathrm{d}Q = \varrho\,(t_a - t_p)\,z\,\mathrm{d}t = \varrho\,(t_a - t_p)\,z\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\omega},$$

unde ϱ — coeficientul de trecere a căldurii (cal/grad. m^2); $t_a - t_p$ — diferența de temperatură dintre vapori și pereți cînd butonul de manivelă ocupă poziția corespunzătoare unghiului α; z — suprafața pereților (m^2).

Din cauza similitudinii diagramei presiunilor, $t_a - t_p$ va fi aproximativ același la toate mașinile. De asemenea coeficientul de trecere a căldurii ϱ.

Suprafața pereților în contact cu vaporii (z) variază puțin, căci suprafața spațiului vătămător este aceeași la toate mașinile. Totuși, spre sfîrșitul cursei de admisie, valoarea lui z este mai mare la mașinile cu cursă lungă.

Cantitatea de vapori condensați pe ciclu este proporțională cu schimbul total de căldură Q, efectuat în timpul admisiei:

$$Q = \frac{1}{\omega}\int_0^{\alpha_1} \varrho\,z\,(t_a - t_p)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Valoarea integralei este aceeași pentru toate mașinile, dacă neglijăm mica variație a lui z.

Cum ω este invers proporțional cu cursele diverselor mașini, putem enunța propoziția:

Consumul de vapori pe ciclu datorit condensațiilor, dacă se neglijează variațiile suprafeței z, este proporțional cu cursa diverselor mașini.

Dacă luăm în considerație și variația lui z, atunci consumul de vapori pe ciclu prin condensație va crește ceva mai repede decît proporțional cu lungimea cursei, după

o lege pe care n-o putem preciza, fără a face ipoteze concrete de detaliu asupra construcţiei maşinilor, ceea ce ar depăşi obiectul acestui studiu.

Consumul de vapori prin condensaţie, raportat la CP oră, dacă neglijăm variaţia lui z, este de forma:

$$G_c = K \omega n.$$

Cum n este constant, acest consum este independent de lungimea cursei.

Dacă se consideră variaţia lui z, atunci se poate trage concluzia justă că acest consum scade puţin cînd cursa este mai scurtă.

Atragem atenţia că această relaţie, ce se poate stabili riguros dacă se consideră cunoscut raportul dintre suprafaţa spaţiului vătămător şi D^2, nu are nimic de-a face cu relaţiile empirice ce stabilesc consumul de vapori pentru diversele tipuri de maşini. Aceste diverse relaţii empirice consideră consumul de vapori prin condensaţie pentru maşinile construite cu un raport S/D uzual, pe cînd relaţia dată în studiul de faţă este obţinută în ipoteza că se păstrează un diametru constant şi cursa variază.

Credem că drumul urmat pentru stabilirea acestei relaţii ar putea conduce la stabilirea unui criteriu mai exact a consumului de vapori prin condensaţie, în cazul uzual.

Cele stabilite relativ la condensaţiile la admisie, produse prin schimbul de căldură cu pereţii, sînt valabile şi pentru stabilirea variaţiei schimbului de căldură cu pereţii şi în cazul cînd nu avem condensaţii la admisie.

14. Pierderile prin lipsă de etanşeitate

În timpul d t în care se parcurge de către manivela maşinii arcul d α pierderile prin lipsă de etanşeitate în cilindru sînt:

$$\mathrm{d}\, g_e = \pi D \varepsilon (p_A - p_B)^{1/2} \mathrm{d}\, t$$

unde g_e — consumul de vapori prin lipsa de etanşeitate pe ciclu este:

$$g_e = \frac{\pi D \varepsilon}{\omega} \int_0^{2\pi} (p_A - p_B)^{1/2} \mathrm{d}\, \alpha .$$

În aceasă relaţie ε este un coeficient constant ce depinde de natura vaporilor, de natura construcţiei maşinilor şi de gradul lor de uzură. În ipoteza noastră el are aceeaşi valoare pentru toate maşinile, neavînd nici un motiv de a varia cu cursa, dacă se presupune viteza medie a pistonului aceeaşi la toate maşinile.

Deoarece $p_A - p_B$ este acelaşi la toate maşinile, pentru o aceeaşi valoare a lui α, valoarea integralei va fi aceeaşi la toate maşinile, astfel că consumul de vapori pe ciclu prin lipsă de etanşeitate este proporţional cu cursa.

Consumul de vapori din lipsă de etanşeitate, raportat la CP oră, este acelaşi la toate maşinile, căci sn este constant şi acest consum este invers proporţional cu s, după cum s-a stabilit, şi proporţional cu n.

15. Randamentul mecanic al maşinilor

Este imposibil a da o relaţie exactă pentru a indica variaţia randamentului mecanic cu cursa maşinilor. Vom căuta totuşi să facem o analiză a diferitelor pierderi mecanice şi să prevedem într-o oarecare măsură care poate fi variaţia randamentului mecanic.

Pierderile mecanice cuprind:

A. Forţa motrică necesară pentru a acţiona pompa condensatorului şi pompele de gresaj.

B. Forța motrică corespunzătoare frecărilor și anume:
a) frecările volantului cu aerul,
b) frecările fuselor arborelui principal în paliere,
c) frecările pistonului și ale tijei,
d) frecările capului de cruce,
e) frecările în articulațiile bielei și
f) frecările în sistemul de distribuție.

A. Forța motrică necesară organelor auxiliare rămîne constantă, ea neputînd fi influențată de variația cursei și depinzînd de puterea totală a mașinii.

a) Pentru același tip de volant, avînd în vedere că viteza tangențială este aceeași la toate mașinile și diametrul volantului proporțional cu cursa, aceste pierderi vor fi proporționale cu patratul cursei.

b) Aceste frecări au o expresie de forma:

$$P_b = (\pi n d/60)^{1,5}.$$

În această relație d reprezintă diametrul fusului și este aproximativ proporțional cu $\sqrt{s}$. Viteza n este invers proporțională cu s, iar K o constantă ce depinde de eforturile mecanice și de greutatea volantului, variind deci de la o mașină la alta.

Cum eforturile mecanice sînt aproximativ aceleași, iar greutatea volantului proporțională cu cursa, K crește aproximativ proporțional cu cursa.

Putem trage concluzia că P_b va fi de forma:

$$P_b \cong K' (\sqrt{s})^{1,5} = K'(s)^{3/4}.$$

În această nouă relație K' este o constantă, aceeași la toate mașinile.

c) Frecările pistonului și ale tijei rămîn neschimbate, după cum s-a arătat în § 11.

d) Frecările capului de cruce rămîn și ele constante, (v. § 11.)

e) Frecările în articulațiile bielei fiind datorite unor mișcări de rotație de aceeași amplitudine la toate mașinile și forțele fiind aceleași, lucrul de frecare necesar va fi pe ciclu, același, la toate mașinile. Cum numărul de cicluri este invers proporțional cu s, aceste frecări sînt invers proporționale cu cursa.

f) Frecările în sistemul de distribuție, după cum s-a arătat în § 11, sînt invers proporționale su s.

Cum la o mașină obișnuită 50% din pierderile mecanice totale sînt datorite frecărilor în palierele arborelui principal și frecărilor volantului cu aerul și cum aceste frecări cresc cu cursa, iar frecările în mecanismul de distribuție și în articulațiile bielei cresc invers proporțional cu cursa, putem prevedea că pierderile mecanice se compensează parțial cînd variază cursa, dar totuși vom avea o ușoară creștere a lor, cînd cursa crește.

Randamentul mecanic η_m va scădea lent cînd va crește cursa.

16. Influența spațiului vătămător

În acest studiu noi am presupus că spațiul vătămător scade o dată cu cursa așa fel, încît raportul V_0/V rămîne constant.

În construcția mașinilor acest lucru nu poate fi realizat. Volumul minim al spațiului vătămător ce poate fi realizat la o mașină dată, depinde de sistemul de distribuție ales, de sistemul de construcție a cilindrului și de diametrul pistonului. V_0 este în realitate, din motive pur constructive, independent de cursă și raportul V_0/V crește cînd cursa scade, dacă se păstrează aceleași condiții de construcție a mașinilor. Din această cauză, datorită binecunoscutei influențe a spațiului vătămător, diagrama indicată a diverselor mașini, dacă s-ar prezenta variația presiunii din cilindru cu unghiul α, nu mai este aceeași la toate mașinile și randamentul mașinilor cu cursă mai scurtă este scăzut.

Considerațiile expuse în această lucrare n-au deci decît valoarea unui studiu teoretic făcut într-o ipoteză specială, care nu se ivește în condiții riguros identice în practică.

Dar din această ipoteză, după cum se va vedea, se pot trage concluzii practice deosebit de importante.

17. Consideraţiuni asupra uzurii

O analiză sumară a influenţei cursei asupra, uzurii nu poate fi generalizată la seria noastră de maşini, din considerente uşor de înţeles.

Problema uzurii prezentînd importanţă economică nu poate fi totuşi neglijată şi de aceea vom da asupra ei acele indicaţii care nu restrîng generalitatea studiului.

Pentru mecanismul principal frecvenţa trecerilor pentru toate piesele ce se mişcă prin translare este invers proporţională cu cursa şi deci în egale condiţii, uzura la acelaşi număr de ore de funcţionare va fi invers proporţională cu cursa.

Deci înlocuirea pieselor la maşinile de cursă scurtă va fi mai frecventă, însă vom beneficia de faptul că piesele de înlocuit vor fi de dimensiuni mai mici.

Pentru suprafeţele de frecare prin rotire, vitezele tangenţiale nu mai cresc invers proporţional cu cursa, pentru că se micşorează diametrele şi creşterea uzurii va fi mai puţin importantă. Acest lucru este valabil mai ales pentru piesele principale, unde greutatea redusă a volantului şi diametrul micşorat permit executarea palierului la un diametru mai mic.

Uzura mecanismului de distribuţie este mult crescută cînd scade cursa deoarece atît frecvenţa cît şi viteza cresc pentru piesele ce se freacă prin mişcări de translaţie.

Concluzii

Din cele studiate se pot enunţa următoarele concluzii :

a) Dacă avem o serie de maşini de curse diferite la care se păstrează constante caracterele enunţate, atunci ele au aceeaşi putere indicată şi un acelaşi randament indicat. Randamentul mecanic va creşte foarte lent cînd cursele sînt mai mici (§ 2 şi 15).

b) Cum greutatea totală a maşinilor (s-a arătat că şi volantul are o greutate mai mică şi un diametru mai mic pentru un acelaşi grad de iregularitate (§ 8)) costul lor şi spaţiul total ocupat de maşini scade, cînd cursa scade, din punct de vedere economic avem interes să construim maşini cu o cursă cît mai mică.

Evident că această concluzie este valabilă numai în acele cazuri unde o viteză redusă nu este impusă de utilizare, ca în cazul locomotivelor cu aburi.

c) Viteza n (rot/min.) creşte invers proporţional cu cursa (§ **1**).

Acest lucru nu constituie o dificultate tehnică, căci vitezele actuale ale maşinilor cu aburi cu piston sînt în general inferioare celor industrial necesare.

d) Din punct de vedere tehnic, scăderea cursei nu prezintă nici o dificultate şi echivalenţa maşinilor de curse diferite este perfect riguroasă în afară de schimbul de căldură cu pereţii (§ **13**) care este însă în favoarea maşinilor cu cursă mai scurtă şi mai repezi. Dificultăţile nu apar decît din punct de vedere constructiv şi mecanic.

e) Reprezentarea vitezelor pentru toate piesele mecanismului principal cu mişcarea alternativă, în funcţie de unghiul α, este aceeaşi, acceleraţiile însă cresc invers proporţional cu cursa (§ **6**).

Acest lucru este însă parţial compensat de faptul că masele se micşorează cînd scade cursa (§ **7**).

f) Adevăratele dificultăţi în ceea ce priveşte micşorarea cursei se ivesc în legătură cu distribuţia. Ca să avem o aceeaşi diagramă a presiunilor din cilindru în funcţie de unghiul α, pentru toate maşinile, de diferite curse, trebuie ca reprezentarea variaţiei deschiderilor distribuţiei în funcţie de unghiul α să fie aceeaşi la toate maşinile (§ **10**). Atunci vitezele în mecanismul de distribuţie sînt invers proporţionale cu cursa şi acceleraţiile invers proporţionale cu pătratul cursei (§ **10**).

g) Ca să putem evita dificultăţile ce se ivesc în mecanismul de distribuţie şi în acelaşi timp să putem micşora volumul spaţiului vătămător, pe măsură ce maşinile proiectate sînt cu o cursă mai scurtă, trebuie ca mecanismul de distribuţie să fie din ce în ce mai perfect.

De altfel, se observă în evoluţia maşinilor cu aburi o creştere a vitezelor uzuale, care a mers concomitent cu perfecţionarea sistemelor de distribuţie.

Concluzii practice privind proiectarea

Analiza noastră a avut drept scop de a face înţelese urmările ce le are mărirea vitezei de rotaţie a maşinii, mărire care nu se poate concepe în multe cazuri, respec-

tînd raportul s/D, indicat de normele uzuale. De asemenea sperăm că va permite o judecată mai clară în ceea ce privește alegerea parametrilor n, s/D și c_m.

După proiectarea diagramei indicate și determinarea presiunii medii indicate p_i, volumul corespunzător cursei utile, este determinat.

De aici mai departe desfășurarea logică a proiectării are căi diferite, după cum viteza de rotație n_a a mașinii este sau nu impusă.

În cazul cînd această viteză este impusă, parametrii: D, s, c_m și s/D sînt dependenți și alegerea unuia din ei îi determină pe toți ceilalți. Din această cauză, pentru cilindrii de mare putere și deci de mare volum util, în cazul valorilor mari a lui n aplicarea criteriilor uzuale pentru c_m și s/D poate fi contradictorie.

În această situație mașina este totuși realizabilă și va fi mai economică decît o mașină de viteză mai mică care s-ar încadra în criteriile uzuale privind valorile lui s/D.

Practic, în acest caz se va alege o valoare maximă uzuală admisibilă pentru c_m și se va admite pentru raportul s/D valoarea ce reiese din această condiție.

Trebuie să remarcăm că în această situație dificultățile la viteze mari, care apar, după cum am amintit, numai în mecanismul de distribuție, nu ar fi cu nimic modificate de modificarea raportului s/D, prin singurul mijloc disponibil, adică prin mărirea vitezei c_m peste limitele uzuale.

Într-adevăr n fiind dat, valoarea debitului instantaneu de abur și durata fazelor de distribuție sînt independente de c_m și s/D. Singurul mijloc de acțiune în această situație este alegerea unei distribuții ptorivite.

Din cercetările noastre a reieșit că cea mai potrivită distribuție ar fi o distribuție cu deschideri multiple în capac, pentru admisie și evacuare în echicurent, comandată de piston.

În cazul cînd viteza de rotire n nu-i impusă, mașina cea mai economică va fi aceea mai rapidă, compatibilă cu sistemul de distribuție ales, aceasta chiar dacă raportul s/D este sub limitele uzuale.

Ne impunem o viteză medie c_m a pistonului în apropierea limitei superioare și alegem viteza de rotație cea mai mare, compatibilă cu distribuția. Practic, verificarea compatibilității se face aplicînd unul din criteriile de laminare pe de o parte și pe de altă parte controlînd dacă se poate realiza constructiv un raport V_0/V al volumului spațiului vătămător la volumul cursei, în limitele admisibile. Dacă valoarea nu depășește mult valorile recomandate putem corecta parțial efectele dăunătoare mărind compresia.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Mașini Termice

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УКОРАЧИВАНИЯ ХОДА У МАШИН ПЕРЕМЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

(Резюме)

Исследуются, аналитическим путём, ряд паровых машин, у которых сохраняются конструктивные и функциональные параметры постоянными, кроме хода поршня и параметры зависящие от него взяты переменными.

Средняя скорость поршня c_m и данное среднее давление p_1 взяты постоянными.

Заключается:

а) вес машины по единице мощности уменьшается при укорачивании хода и растет скорость n машины;

б) рост скорости не вызывает каких либо недоразумений в главном механизме, кроме износа;

в) при равных условиях, скорости в распределительном механизме растут обратно пропорционально квадрату хода.

ANALYTIC STUDY ON THE INFLUENCE OF THE SHORTENING OF THE STROKE

(Summary)

Here is an analytical study by a series of steam engines, where all the structural and functional parametres remain constant except the piston stroke and the parametres depending on it, which are considered variable.

The average speed of piston c_m and medium pressure p_i should remain constant.

The main conclusions drawn from this study are:

a) the weight of the engines on Kw decreases with the shortening of the stroke while the speed n of the engines increases;

b) no difficulty arises regarding the main mechanism with increase of speed except that of wear;

c) at even conditions the increase of speeds in the distributing mechanism is inversly proportional to the stroke and the accelerations are inversly proportional to the square of stroke.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

621.18;518·3

NOMOGRAME PENTRU CALCULUL ARDERII TURBELOR ÎN FOCARELE CAZANELOR DE ABUR

DE

AURELIAN SIMIONESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 23—29 iunie 1958

În scopul valorificării turbelor din ţara noastră pentru a fi arse în focarele cazanelor de abur, s-a întocmit o serie de nomograme pentru a uşura proiectarea instalaţiilor ce folosesc acest fel de combustibil.

Au mai fost întocmite nomograme pentru determinarea unor parametri ce intervin în calculul termic al cazanelor de abur şi dintre acestea se menţionează nomogramele întocmite de A. E. Nitkevici [1], *Nomograme termotehnice*, apărute în editura tehnică în 1950 [2], nomogramele lui G. Bărănescu [3] şi nomogramele lui P. Rosin şi R. Fehling [8].

Nomogramele întocmite de A. E. Nitkevici permit să se calculeze parametrii produselor de ardere în funcţie de umiditatea redusă a combustibilului, adică în funcţie de umiditatea care revine la 1000 kcal din puterea calorifică a combustibilului.

Colecţia de *Nomograme termotehnice* cuprinde o serie de diagrame pentru determinarea unor mărimi ca: puterea calorifică, aerul de ardere teoretic necesar, etc., funcţie de conţinutul componentelor principale ale combustibilului.

G. Bărănescu prezintă o serie de diagrame generalizate, în care sînt trecute valorile entalpiei totale, a entropiei totale şi a greutăţii moleculare a gazelor produse prin arderea unor amestecuri combustibile ce conţin două sau mai multe din elementele C, H, O, N în funcţie de temperatură, precum şi entalpia gazelor produse prin arderea metanului:

În sfîrşit nomogramele lui P. Rosin şi R. Fehling permit să se determine cantitatea de aer necesară arderii, volumul şi entalpia gazelor arse în funcţie de puterea calorifică a combustibilului.

În lucrarea de faţă sînt prezentate o serie de nouă nomograme întocmite pentru calculul arderii turbelor din cele cinci zăcăminte care se exploatează la noi în ţară şi anume: Poiana Stampei, Dersca-Dorohoi, Miercurea-Ciuc, Mîndra-Făgăraş şi Călăţele-Huedin.

Aceste nomograme permit să se determine direct, fără a fi nevoie de calcule suplimentare, unele elemente principale din calculul termic al cazanelor de abur şi anume: cantitatea de aer necesară arderii, volumul gazelor arse, presiunile parţiale ale gazelor triatomice uscate şi ale vaporilor de apă, entalpia gazelor arse, pierderile de căldură datorite gazelor evacuate pe coş, consumul orar de combustibil şi volumul focarului.

La întocmirea acestor nomograme s-au folosit datele analizelor chimice şi tehnice efectuate de către un colectiv condus de prof. I. Blum [4].

Tabelul 1

Compoziţia elementară şi caracteristicile chimico-tehnice ale turbelor

		Poiana Stampei	Călăţele Huedin	Mîndra Făgăraş	Miercurea-Ciuc	Dersca Dorohoi
Carbon	C^l	50,24	45,77	42,20	45,96	35,15
Hidrogen	H^l	5,42	5,14	4,38	4,43	3,70
Sulf comb	S^l_v	0,08	0,03	0,14	0,28	3,44
Azot	N^l	0,98	1,79	0,99	1,58	1,75
Oxigen	O^l	30,03	34,01	25,55	26,05	23,21
Umiditate	U^l	10	10,47	10,54	13,43	11,58
Cenuşă	C^l_{en}	3,25	2,79	16,20	8,27	21,17
Substanţe volatile	V^v	61,64	63,45	49,56	52,64	39,97
Puterea calorifică inferioară	P_i	4304	3975	3601	3972	3027

În prima nomogramă s-a reprezentat cantitatea de aer necesară arderii unui kg de combustibil la diferiţi coeficienţi ai excesului de aer α şi la diverse sorturi de combustibili. Cantitatea de aer teoretic necesară arderii se calculează cu relaţia [5, p. 24]:

$$V_0 = 0{,}0889(C^l + 0{,}375\,S^l_v) + 0{,}265\,H^l - 0{,}0333\,O^l \ \text{Nm}^3/\text{kg},$$

cantitatea reală de aer fiind:

$$V = \alpha V_0 \ \text{Nm}^3/\text{kg}.$$

Pentru aflarea volomului gazelor produse prin arderea combustibilului s-a întrebuinţat relaţia [5, p. 24], [6, p. 28]:

$$V_g = V_{CO_2} + V_{SO_2} + V_{N_2} + V_{O_2} + V_{H_2O} = 1{,}866\,(C^l + 0{,}375\,S^l_v)/100 + 0{,}79\,\alpha V_0 +$$

$$+ 0{,}8\,N^l/100 + 0{,}21\,V_0(\alpha - 1) + (9\,H^l + U^l + 0{,}1293\,\alpha V_0 d)/80{,}4 \ \text{Nm}^3/\text{kg}.$$

Cu ajutorul acestei relaţii s-a trasat nomograma II. Coeficientul excesului de aer a fost luat pînă la valoarea $\alpha = 1{,}7$ încît să permită evaluarea volumului gazelor arse în lungul întregului traseu de la focar şi pînă la coşul de fum, ţinîndu-se astfel cont de infiltraţia aerului fals ce pătrunde în instalaţie.

În scopul determinării presiunilor parţiale ale gazelor triatomice uscate şi ale vaporilor de apă, ce sînt necesare la calcularea coeficienţilor de trecere a căldurii prin radiaţie, s-au întocmit nomogramele III şi IV. Presiunile parţiale respective sînt calculate cu relaţiile [5, p. 24], [6, p. 28]:

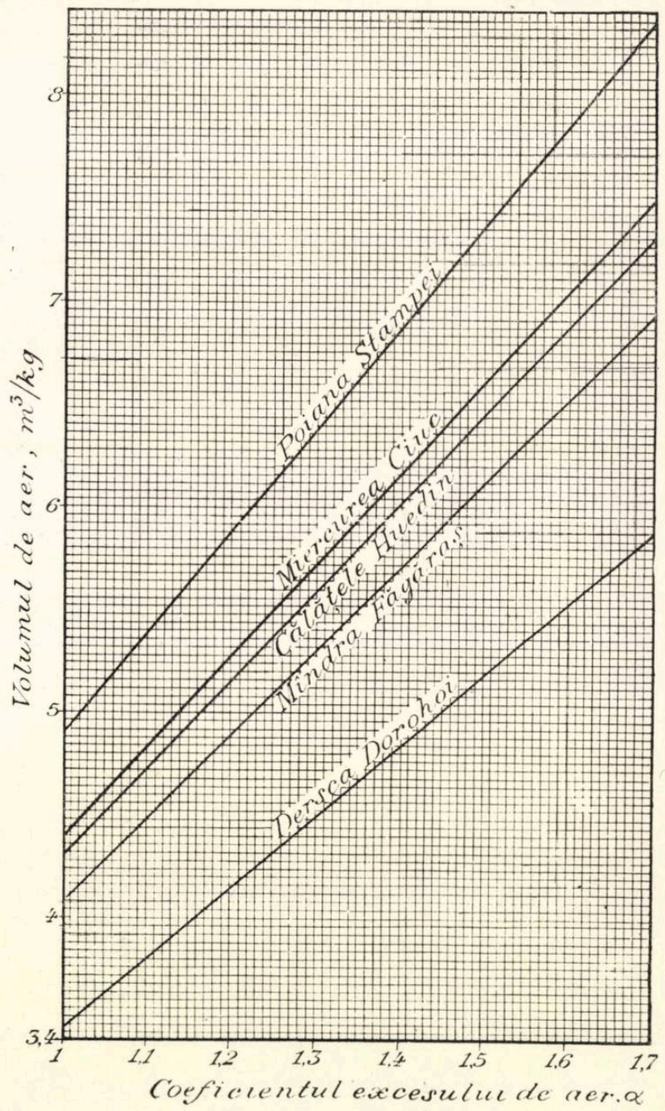


Fig. 1. — Aerul necesar arderii combustibilului.

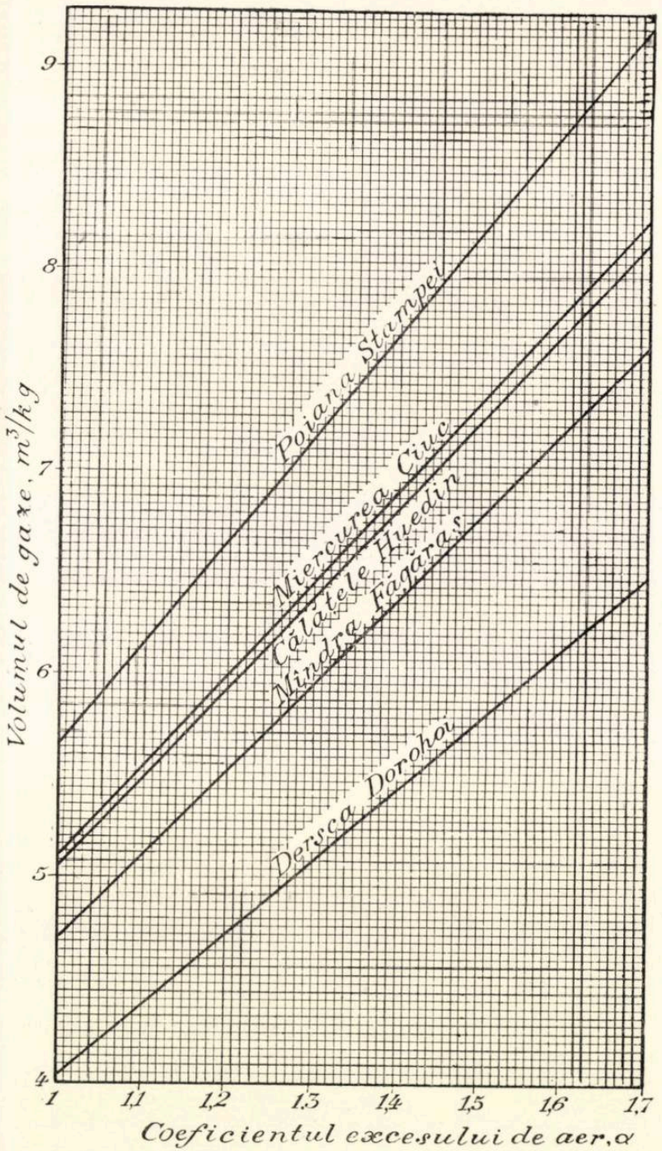


Fig. 2.— Volumul gazelor produse prin arderea combustibilului.

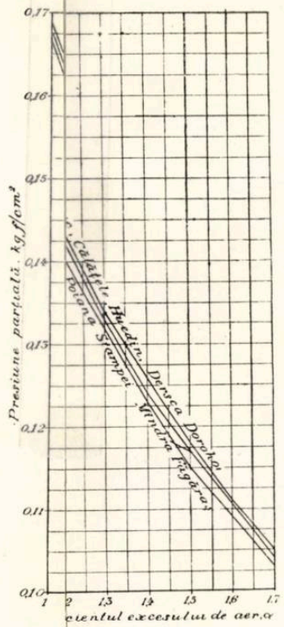


Fig. 3. — Presiunea parțială a gazelor triatomice uscate.

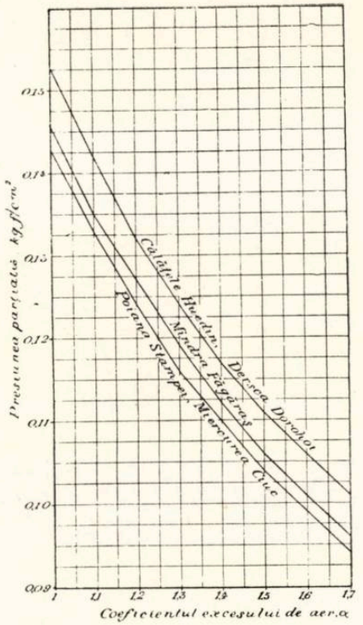


Fig. 4 — Presiunea parțială a vaporilor de apă din gazele arse.

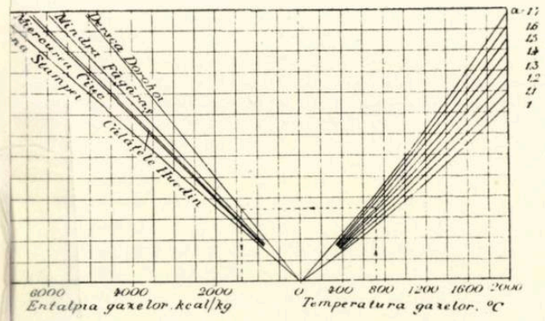


Fig. 5. — Entalpia gazelor arse, 0—2000°C.

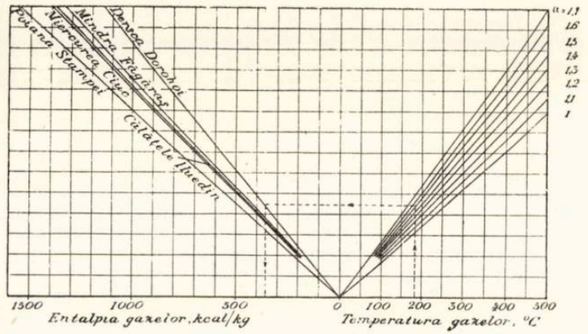


Fig. 6. — Entalpia gazelor arse, 0-500°C.

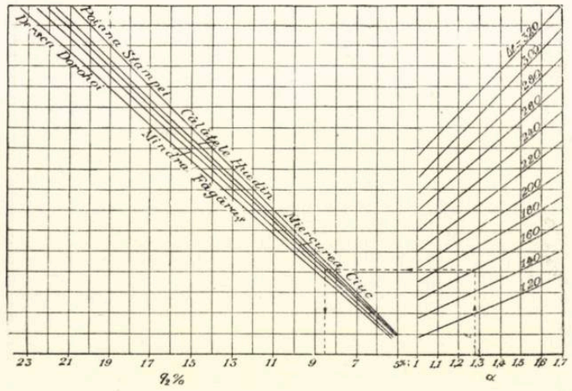


Fig. 7. — Pierderile de căldură prin gazele arse evacuate pe coş.

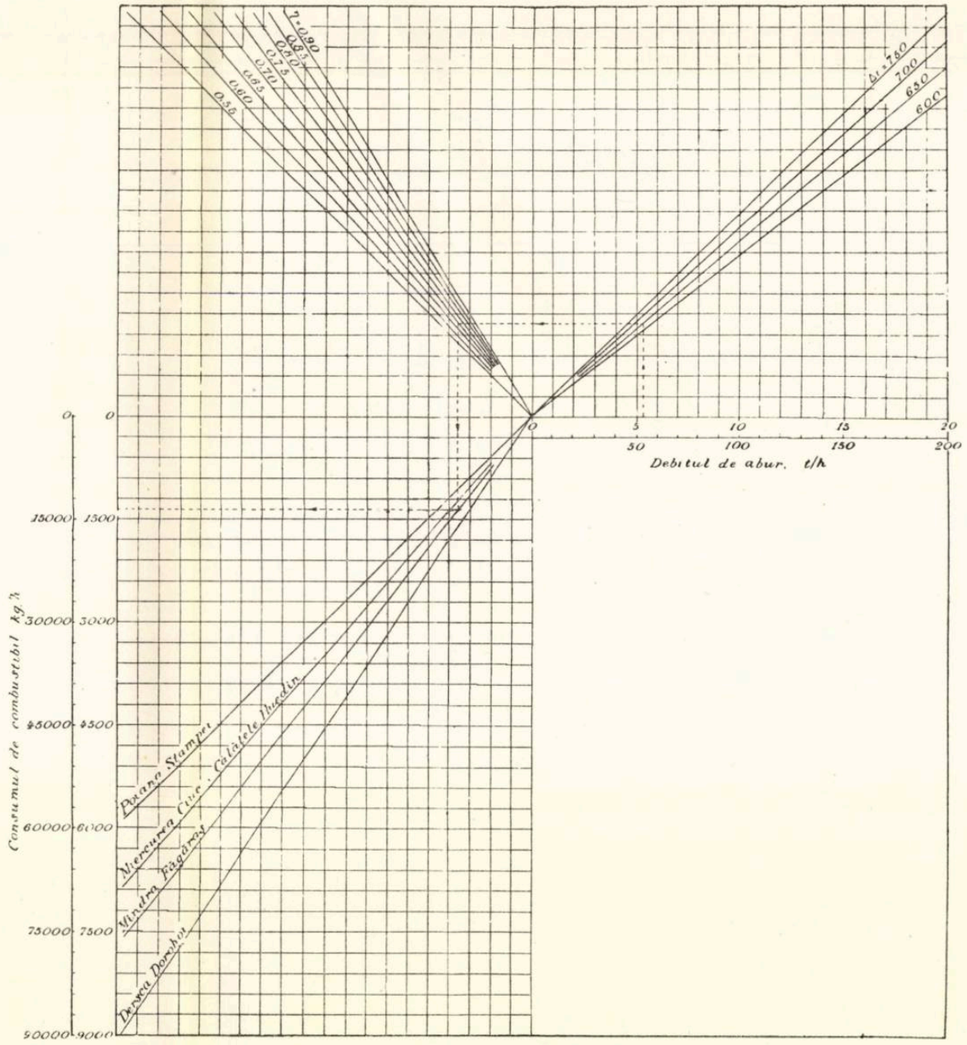


Fig. 8. — Consumul de combustibil.

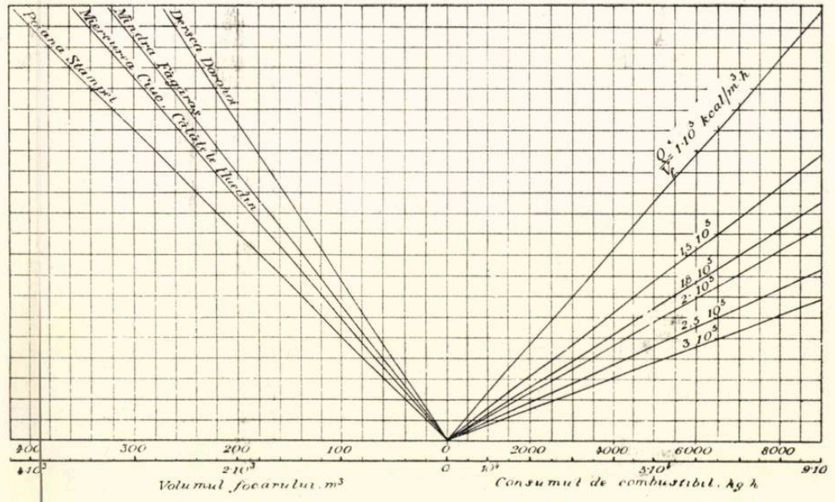
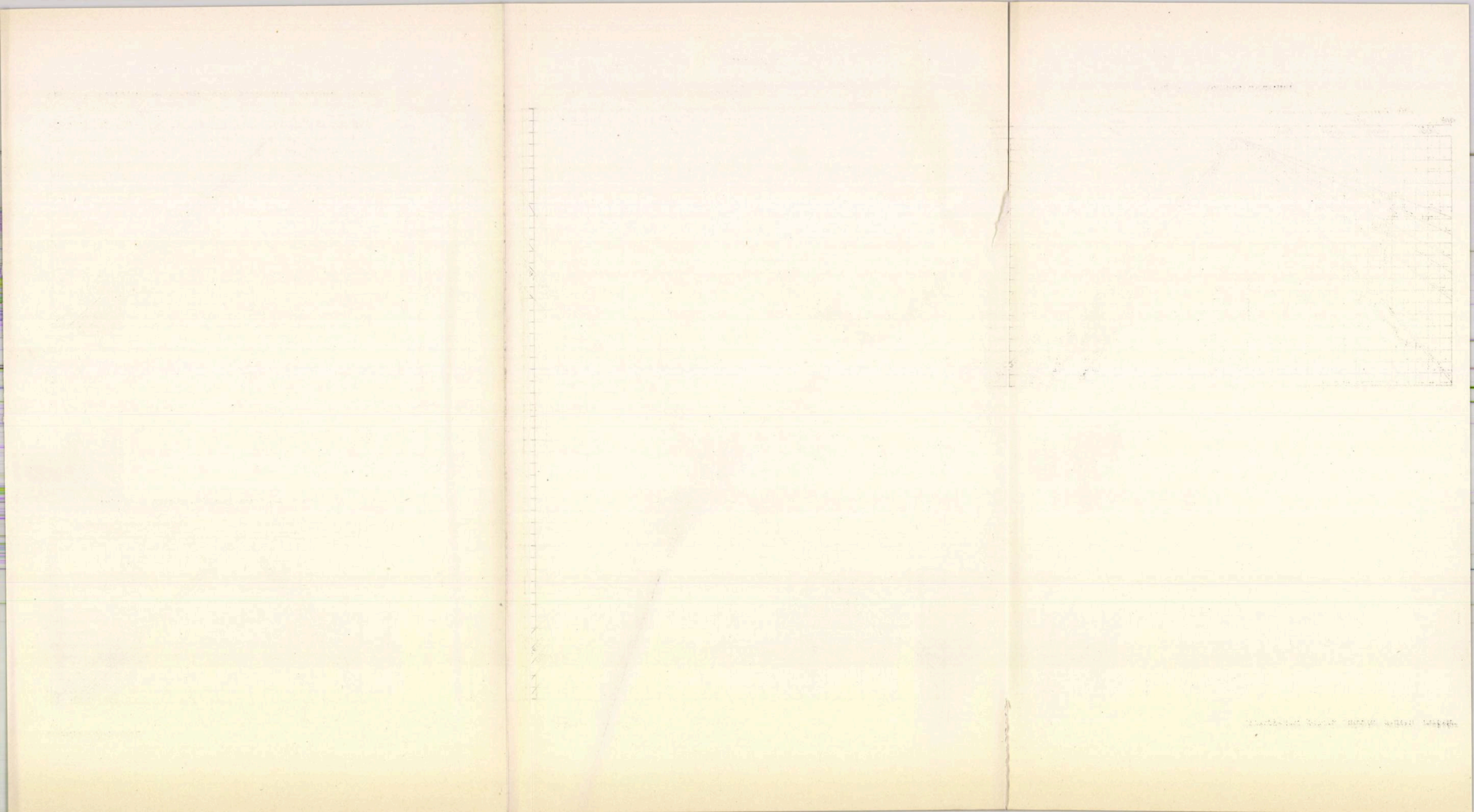


Fig. 9. — Volumul focarului.

PLANŞA II



$$p_{RO_2} = V_{RO_2} / V_g \text{ şi } p_{H_2O} = V_{H_2O} / V_g .$$

Cu ajutorul nomogramei V se determină entalpia gazelor arse funcţie de temperatura gazelor arse, de coeficientul excesului de aer şi de sortul de combustibil, nomograma fiind întocmită pentru temperatura gazelor arse între 0°C şi 2000°C. Pentru evaluarea entalpiilor gazelor arse în diversele suprafeţe auxiliare ale cazanului de abur ca în preîncălzitorul de aer şi eventual în economizorul de apă, s-a trasat nomograma VI. Nomogramele V şi VI au fost calculate cu ajutorul relaţiei [7, p. 223]:

$$I = V_{RO_2}(c.t)_{RO_2} + V_{N_2}(c.t)_{N_2} + V_{O_2}(c.t)_{O_2} + V_{H_2O}(c.t)_{H_2O} \text{ kcal/kg.}$$

Pentru ca diagrama să fie trasată cu precizie mare entalpiile gazelor arse au fost calculate din 100 în 100°C.

Pierderile de căldură datorită gazelor evacuate sînt prezentate în nomograma VII, în funcţie de coeficientul excesului de aer α, de diferenţa de temperaturi Δt dintre gazele arse şi aerul din mediul înconjurător şi de sortul de combustibil.

Relaţia de calcul întrebuinţată are următorul aspect [7, p. 235]:

$$q_2 = 100\,(\sum V c\, t_{ev} - Q_a - Q_c) / P_i \, {}^0/_0$$

în care: $Q_a = \alpha\, V_0\, c_a\, t_a$ — entalpia aerului din mediul înconjurător iar $Q_c = [c^u\,(100 - U^l) / 100 + U^l / 100]\, t$ — entalpia combustibilului.

Nomograma VIII permite să se determine consumul de combustibil, cunoscîndu-se debitul de abur al cazanului, variaţia de entalpie Δi a aburului şi a apei, randamentul cazanului η şi sortul de combustibil. Nomograma are două scări, pentru debite de abur sub şi peste 20 t/h. Calculele au fost efectuate cu relaţia [7, p. 234]:

$$B = D\, \Delta_i / (\eta_i\, P_i).$$

În sfîrşit nomograma IX permite aflarea volumului focarului cunoscînd consumul orar de combustibil, solicitarea termică a volumului de focar Q/V şi sortul de combustibil. Relaţia de calcul este [6, p. 59]:

$$V_f = B\, P_i / \left(\frac{Q}{V_f}\right).$$

Concluzii

1. Nomogramele prezentate permit să se determine direct, fără a fi nevoie de calcule suplimentare, unele elemente principale ale calculului termic al cazanelor de abur ce ard în focar turbă.

2. Prin folosirea acestor nomograme se economiseşte timp în proiectare, prin simpla citire a acestora se înlocuiesc circa 221 operaţii matematice necesare la calculul analitic al proiectului.

Institutul Politehnic, Iaşi,
Catedra de Termotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Ницкевич Е. А., Проектирование котельных агрегатов, ГЭИ, М.—Л., 1951, стр. 57—64.
2. * * * *Nomograme termotehnice,* Ed. tehn., Buc., 1950.
3. Bărănescu G., *Calculul proceselor de ardere,* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1955.
4. Blum I. şi colab, St. şi cerc. de energ., 1953, **6**, *1—2*, pp. 65—80.
5. * * * Тепловой расчет котельных агрегатов (Нормативный метод), ГЭИ, М.-Л., 1957.
6. * * * Нормы теплового расчета котельного агрегата, ГЭИ, М.,—Л., 1952.
7. * * * Справочник теплотехника предприятий черной металлургии, Металлургиздат, 1953.
8. Rosin P. et Fehling R., *Le diagramme „It" de la combustion,* ed. Dunod, Paris, 1935, (traduit de l'allemand).

НОМОГРАММЫ РАСЧЁТА СЖИГАНИЯ ТОРФА В ТОПКАХ ПАРОВЫХ КОТЛОВ

(Резюме)

Предлагается серия из девяти номограмм, при помощи которых непосредственно определяются, без дополнительных расчётов, некоторые главные элементы теплового расчёта паровых котлов, а именно: количество воздуха необходимое горению, объем отходящих газов, парциальное давление сухих трёхатомных газов и водяных паров, условное прив денное теплосодержание дымовых газов, потеря тепла с отходящими газами, расход топлива, объём топки.

Пользование указанных номограмм значительно сокращает время расчёта.

Обяснение рисйнкев

Рис. 1. — Приведенный объем воздуха.
Рис. 2. — Приведенный объем газов.
Рис. 3. — Парциальное давление сухих трехатомных газов.
Рис. 4. — Парциальное давление водяных паров.
Рис. 5. — Условное приведенное теплосодержание дымовых газов, 0...2000° Ц.
Рис. 6. — Условное приведенное теплосодержание дымовых газов, 0... 500° Ц.
Рис. 7. — Потеря тепла с отходящими газами.
Рис. 8. — Расход топлива.
Рис. 9, — Объем топки.

NOMOGRAMMES POUR LE CALCUL DE LA COMBUSTION DES TOURBES DANS LES FOYERS DES CHAUDIÈRES À VAPEUR

(Résumé)

L'auteur élabore les nomogrammes 1...9 pour le calcul de la combustion des tourbes de la République Populaire Roumaine, dans les foyers des chaudières à vapeur.

Ces nomogrammes tout en réduisant le temps de l'élaboration des projets, permettent à déterminer directement quelquesuns des éléments principaux du calcul thérmique des chaudières à vapeur à savoir : la quantité d'air nécessaire à la combustion complète, le volume des gaz de combustion, la pression partielle des gaz triatomiques secs et de la vapeur d'eau, l'enthalpie des gaz de combustion, les pertes de chaleur dues aux gaz évacués par la cheminée, la consommation de combustible et le volume de la chambre de combustion.

Explication des figures

Fig. 1. — Air nécessaire à la combustion du combustible.
Fig. 2. — Volume des gaz produits par la combustion du combustible.
Fig. 3. — Pression partielle des gaz triatomiques secs.
Fig. 4. — Pression partielle de vapeur d'eau.
Fig 5. — Enthalpie des gaz de combustion 0.. 2000°C.
Fig. 6. — Enthalpie des gaz de combustion 0 ... 500°C.
Fig. 7. — Pertes dues aux gaz évacués par la cheminée.
Fig. 8. — Consommation de combustible.
Fig. 9. — Volume de la chambre de combustion.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

660

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA EVAPORĂRII PICĂTURILOR UNOR SOLVENŢI ORGANICI

DE

I. CURIEVICI, M. MARINESCU şi FLORIN VĂLU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

1. Consideraţii generale

Studiul evaporării picăturilor de lichid prezintă importanţă pentru toate domeniile de inginerie chimică în care are loc un transfer de căldură şi masă între o fază continuă şi o fază dispersă, sub formă de picături. Totodată, evaporarea picăturilor de apă prezintă un deosebit interes în meteorologie, iar evaporarea picăturilor de combustibili lichizi, în studiul motoarelor cu ardere internă. În ultima vreme problema evaporării picăturilor de apă a fost studiată şi din punctul de vedere al tehnicii stingerii focului [13].

În cele ce urmează prezentăm unele cercetări experimentale asupra evaporării picăturilor de toluen şi de alcool etilic. Rezultatele obţinute, pe lîngă interesul intrinsec, permit şi verificarea unor relaţii de calcul propuse în literatură.

2. Lucrări anterioare

Cercetările asupra evaporării picăturilor de lichid sînt relativ puţin numeroase. Consideraţiile teoretice şi încercările experimentale ale lui Morse [1] au fost reluate în 1926 de către Şuleikin [2], iar după 1930 de către Findeisen [3], Fuks [4] şi M. ten-Bosch [5]. Toţi aceşti autori studiază evaporarea picăturilor în aer liniştit, respectiv la numere $Re = 0$.

Primul studiu teoretic şi experimental de mare amploare este cel al lui Frössling [6] relativ la evaporarea în aer a picăturilor de apă, benzen, nitrobenzen şi a sferelor de naftalen la diferite viteze relative a picăturilor faţă de aer.

După o serie de alte cîteva studii menţionate în bibliografie [7]...[11], în anul 1952 a apărut studiul lui Ranz şi Marshall [12] iar în 1957 studiul lui Radusch [13]. Studiul lui Ranz şi Marshall aduce contribuţii teoretice şi experimentale de bază în acest domeniu.

3. Baze teoretice

M. ten-Bosch [5] a studiat teoretic problema schimbului de căldură de la aer la picături sferice la viteză relativă nulă şi a stabilit relaţia

$$\alpha = \lambda/R. \tag{1}$$

Ţinînd seama că $Nu = \alpha d/\lambda$, relaţia (1) mai poate fi scrisă sub forma:

$$Nu = 2. \tag{2}$$

În cazurile interesante pentru practică, viteza relativă a picăturilor faţă de aer este însă diferită de zero.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care descrie schimbul de căldură şi masă la evaporarea picăturilor în cazul general, deci şi la viteze relative diferite de zero, este dat în literatură [6], [12]. Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii nu este posibilă, în schimb se poate stabili că soluţia este dată de ecuaţiile criteriale de forma:

$$Nu = f(Re, Pr), \tag{3}$$

$$Nu' = f(Re, Sc(p - p_A)_{med}/p). \tag{4}$$

Ecuaţiile (3) şi (4) sînt analoage şi funcţiile f care definesc pe Nu şi Nu' au aceeaşi formă, cu deosebirea că în ecuaţia (3) intervine criteriul Pr, pe cînd în ecuaţia (4) intervine în locul lui produsul $Sc\,(p-p_A)_{med}/p$.

Considerînd raportul $(p - p_A)_{med}/p$ apropiat de unitate, în ecuaţia (4) poate rămîne numai criteriul Sc.

Prin particularizarea sistemului iniţial de ecuaţii diferenţiale, respectiv a ecuaţiilor (3) şi (4), pentru cazul unei viteze relative nule, trebuie să obţinem:

$$Nu = Nu' = 2{,}0, \tag{5}$$

în deplină concordanţă cu ecuaţia (2).

Datele experimentale asupra transferului de masă la evaporarea picăturilor sferice cu viteză relativă finită, pot fi corelate printr-o ecuaţie de forma celei utilizate de Frössling [6]:

$$Nu' = 2{,}0 + K_1 Sc^m Re^n. \tag{6}$$

Ţinînd seama de identitatea funcţiilor f din ecuaţiile (3) şi (4) înseamnă că ecuaţia transferului de căldură va fi de forma:

$$Nu = 2{,}0 + K_2 Pr^p Re^q. \tag{7}$$

În ecuaţiile (6) şi (7) avem deci:

$$K_1 = K_2 = \text{const.}, \; p = m, \; q = n.$$

Ecuaţiile (6) şi (7) satisfac condiţia impusă de relaţia (5) la $Re = 0$.

Pe baza determinărilor experimentale efectuate la apă, anilină, şi benzen, Ranz şi Marshall [12] au propus următoarele relaţii de calcul:

$$Nu = 2{,}0 + 0{,}6\,Pr^{1/3} Re^{1/2}, \tag{8}$$

$$Nu' = 2{,}0 + 0{,}6\,Sc^{1/3} Re^{1/2}. \tag{9}$$

Ecuaţiile (8) şi (9) precizează constantele din ecuaţiile (6) şi (7).

Ranz şi Marshall [12] arată că nu numai datele lor experimentale, ci şi celelalte date disponibile în literatură asupra evaporării picăturilor, confirmă valabilitatea ecuaţiilor (8) şi (9).

Recent Radusch [13] a propus pe baza unor consideraţii teoretice o corecţie a termenului constant din relaţia (8) şi implicit şi din relaţia (9). Radusch propune final relaţia:

$$Nu = 2{,}83 + 0{,}6\,Pr^{1/3} Re^{1/2}, \tag{10}$$

spre a ţine seama de prezenţa peliculei saturate cu vapori din jurul picăturii.

La baza demonstraţiei lui Radusch, stă echivalarea ecuaţiei generale a evaporării cu altă ecuaţie stabilită teoretic de către Findeisen [3] pentru picături cu viteză relativă nulă. Utilizînd apoi ecuaţia lui Lewis, Radusch conchide că la $Re = 0$

$$Nu = 2{,}83, \tag{11}$$

ceea ce duce evident la relaţia (10) pentru cazul unor viteze relative diferite de zero

În lucrarea lui Radusch [13] se dau și unele date experimentale, referitoare la evaporarea picăturilor de apă la temperaturi de 160°C și 220°C pentru confirmarea relației (10)

4. Metoda experimentală

Studiul evaporării picăturilor se face printr-o microtehnică care constă în esență în formarea unor picături cu diametre de ordinul 1...2 mm și alimentarea lor, la diametru constant, în timpul evaporării într-un curent de aer.

Schema instalației folosite este dată în fig. 1.

Picătura de lichid se formează pe vîrful unei capilare *3* cu diametrul interior de ordinul 100 microni și este alimentată așa fel ca diametrul ei să rămînă constant în timpul evaporării. Alimentarea picăturii se face prin robinetul *2* din coloana capilară *1* calibrată anterior. Alimentarea coloanei capilare se face prin robinetul *2'* din rezervorul *14*. Diametrul picăturii se urmărește cu microscopul *11* prevăzut cu ocular micrometric. Cantitatea de lichid evaporată se citește cu luneta *12* pe coloana capilară divizată în mm.

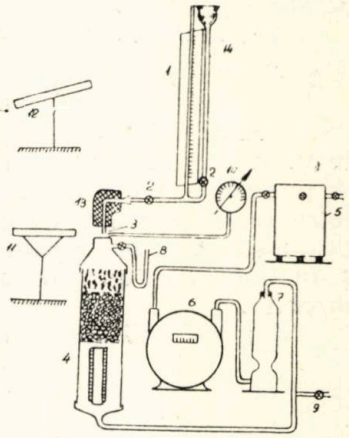


Fig. 1.— Instalația pentru cercetarea experimentală a evaporării lichidelor.
1. capilară, *2.* robinet, *3.* vîrful capilarei, *4.* încălzitor electric, *5.* compresor de aer, *6.* debitmetru, *7.* coloană de uscare, *8.* manometru, *9.* robinet, *10.* galvanometru, *11.* microscop cu ocular micrometric, *12.* lunetă, *13.* manșon de vată, *14.* rezervor cu lichid de experiență.

Pentru a crea o viteză relativă între picătură și aer, sub picătură se suflă un curent de aer. Aerul este trimis de compresorul *5* prin debitmetrul *6* și coloana de uscare cu silicagel *7* spre încălzitorul electric *4*. Prin robinetul *9* s-a controlat umiditatea aerului.

Picătura se suspendă astfel încît partea ei inferioară să se găsească la 2 ... 3 mm deasupra ajutajului de ieșire a aerului, deoarece după indicațiile din literatură [12] la această distanță se păstrează încă viteza din ajutaj.

Temperatura aerului s-a măsurat cu un termocuplu cupru-constantan etalonat în prealabil. În general temperatura a putut fi menținută constantă cu o precizie de $\pm$ 0,5°C.

Temperatura picăturii a fost apreciată ca fiind egală cu temperatura termometrului umed. În unele cazuri, această ipoteză a fost verificată prin plasarea unui termocuplu în centrul picăturii.

Pentru a elimina un aport suplimentar de căldură sensibilă prin lichidul de alimentare a picăturii și a elimina astfel necesitatea unei corecții corespunzătoare, capilara a fost învelită într-un manșon de vată *13* udat cu lichidul de lucru. În felul acesta, lichidul de alimentare a picăturii a avut o temperatură sensibil apropiată de temperatura picăturii.

Presiunea curentului de aer la ieşirea din ajutajul încălzitorului s-a măsurat cu un manometru *8*.

5. Metoda de calcul

La baza calculului numerelor Nu şi Nu' stau următoarele ipoteze:

a) temperatura la suprafaţa picăturii este peste tot aceeaşi şi egală cu temperatura din interiorul picăturii;

b) proprietăţile de transfer ale amestecului de vapori şi aer care constituie pelicula din jurul picăturii sînt cele ale aerului la o temperatură egală cu media aritmetică între temperatura curentului de aer şi temperatura picăturii.

Valoarea Nu' se obţine înlocuind datele experimentale în relaţia:

$$(12) \quad \mathrm{Nu}' = K_g\, d\, M_m\, (p - p_A)_{\mathrm{med}}/(D\varrho) = G'\, d\, M_m\, (p - p_A)_{\mathrm{med}}/(p_A D\varrho).$$

Pentru calculul numărului Nu, respectiv a valorii coeficientului α, se utilizează, în cazul general, ecuaţia bilanţului termic complet în care se ţine seama de căldura schimbată prin convecţie şi conductibilitate între aer şi picătură, de căldura primită de picătură prin radiaţie, de căldura primită de picătură prin conductibilitate de-a lungul capilarei şi în fine de căldura sensibilă suplimentară adusă de lichidul de alimentare.

Expresia bilanţului termic este următoarea:

$$(13) \quad G'\, r = \alpha\,(t_a - t_p) + G'\, c_p\,(t_i - t_p) + 4{,}96\,(T_a^4 - T_p^4) + G'\, r \left[\frac{\Delta(\Delta p_A)}{\Delta p_A} \right].$$

Ecuaţia (13) se deosebeşte de ecuaţia bilanţului termic dată de Ranz şi Marshall [12], numai prin modificarea diferenţei de temperatură în termenul care prezintă căldura sensibilă suplimentară adusă de lichidul de alimentare, deoarece nu sînt motive ca în cazul general, să se considere că lichidul de alimentare are temperatura curentului de aer.

Ţinînd seama că valorile termenilor care reprezintă radiaţia şi conductibilitatea de-a lungul capilarei sînt neglijabile şi că în urma măsurilor experimentale luate (învelirea capilarei în vată udată), termenul care reprezintă căldura sensibilă suplimentară adusă la lichidul de alimentare poate fi de asemenea neglijat, ecuaţia (13) capătă forma de calcul:

$$(14) \quad G\, r = \pi\, d^2\, \alpha\,(t_a - t_p)\, \tau/3600.$$

6. Rezultatele experimentale

S-a studiat viteza de evaporare a picăturilor de toluen şi alcool etilic variindu-se, între anumite limite, diametrul picăturii, temperatura şi viteza curentului de aer.

O parte din datele experimentale obţinute sînt reprezentate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

Evaporarea picăturilor de to uen

Nr. exp.	d mm	w m/s	t_a °C	$Re^{1/2} Pr^{1/3}$	Nu experim.	α după relația (8) kcal/m^{2}h grad	α experim. kcal/m^{2}h grad
1	0,93	0,075	143,0	1,545	2,88	82,0	81,0
2	0,98	0,120	141,0	2,010	3,30	85,4	87,7
3	1,19	0,320	126,5	3,710	4,00	90,5	85,8
4	1,27	0,510	122,0	4,890	4,70	98,5	94,0
5	1,31	0,730	137,5	5,780	5,60	108,0	111,0
6	1,36	0,973	141,0	6,770	6,01	116,2	115,0
7	1,39	0,973	143,0	6,800	6,13	114,1	115,0
8	1,47	0,933	125,5	7,040	5,88	107,7	101,3
9	1,52	0,934	122,0	7,200	5,70	104,8	98,3
10	1,63	1,083	137,5	7,840	6,32	106,1	100,0
11	1,68	1,083	137,5	7,970	6,20	104,1	95,0
12	1,69	0,850	49,0	8,200	6,60	92,0	87,6
13	1,74	1,020	114,5	8,180	6,70	99,0	96,0
14	1,77	0,850	49,0	8,390	7,25	89,6	92,2
15	1,79	1,023	115,0	8,180	7,07	96,5	98,6
16	1,85	0,850	49,0	8,590	7,36	87,0	89,5
17	1,99	1,374	25,0	11,850	8,60	99,2	93,5
18	2,06	0,980	49,0	9,700	8,02	85,5	87,5
19	2,09	1,020	49,0	10,030	7,80	86,4	84,0
20	2,10	1,530	25,0	12,850	9,85	97,8	101,8
21	2,40	1,580	25,0	13,98	10,50	107,1	96,0

Tabelul 2

Evaporarea picăturilor de alcool etilic

Nr. exp.	d mm	w m/s	t_a °C	$Re^{1/2} Pr^{1/3}$	Nu experim.	α după relația (8) kcal/m^{2}h grad	α experim. kcal/m^{2}h grad
1	0,94	0,082	22	2,058	3,10	72,2	69,6
2	1,05	0,230	22	2,918	3,85	75,3	77,5
3	1,13	0,460	46	5,000	5,10	98,2	100,0
4	1,22	0,615	46	6,020	5,30	102,1	95,4
5	1,47	0,745	22	7,740	6,26	95,1	89,8
6	1,63	0,745	22	8,150	6,82	89,0	89,5
7	1,77	1,399	46	10,920	8,58	107,1	102,5
8	1,80	0,800	48	8,280	6,61	81,0	78,3
9	1,88	2,310	23	15,400	10,91	126,2	123,8
10	1,90	0,800	48	8,560	6,54	83,2	78,2
11	1,93	2,500	46	15,300	10,80	128,0	126,0
12	2,03	0,945	46	9,620	7,85	85,0	85,5
13	2,08	1,420	46	11,910	8,85	97,8	94,4
14	2,15	1,720	46	13,380	10,20	103,5	103,1

7. Discutarea rezultatelor

Rezultatele obţinute experimental sînt reprezentate grafic în fig. 2. Pentru comparaţie, în fig. 2 s-au trasat şi dreptele $Nu = f(Pr^{1/3} Re^{1/2})$ după ecuaţia (8) şi după ecuaţia (10).

Rezultatele experimentale obţinute de noi, verifică evident ecuaţia (8).

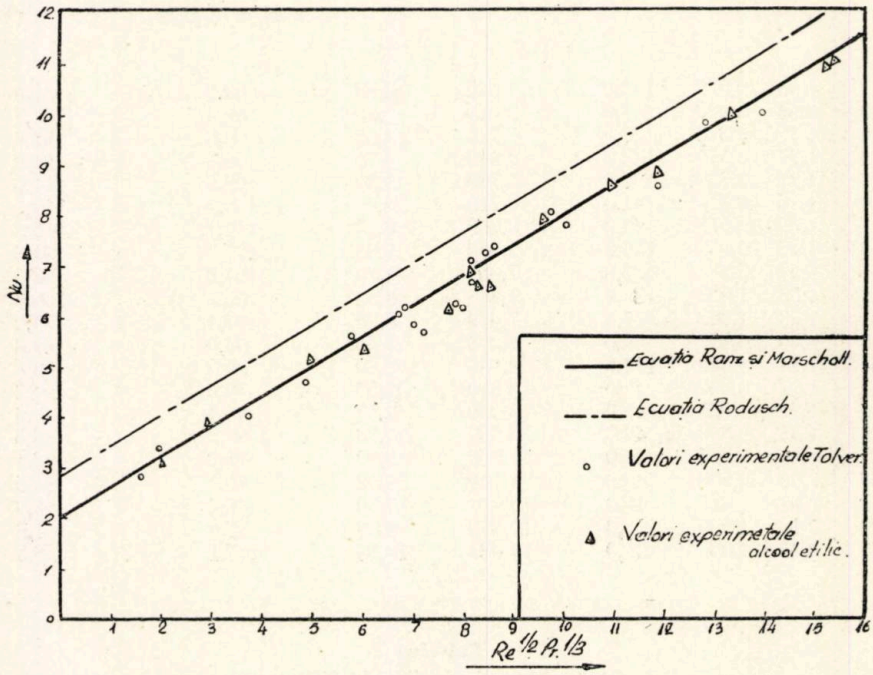


Fig. 2. — Graficul rezultatelor experimentale

Neconfirmarea experimentală a ecuaţiei propusă de Radusch se explică probabil prin faptul că în deducerea ei s-au considerat ca riguros exacte relaţiile lui Findeisen şi ale lui Lewis.

8. Concluzii

a) S-a determinat experimental viteza de evaporare a picăturilor de toluen şi de alcool etilic la diferite diametre a picăturilor şi la diferite temperaturi şi viteze ale aerului.

b) S-au calculat, plecînd de la datele experimentale, coeficienţii de trecere a căldurii α utilizîndu-se ecuaţia bilanţului termic stabilită de Ranz şi Marshall căreia i s-a adus o corecţie în termenul referitor la aportul de căldură sensibilă.

c) Rezultatele experimentale obţinute verifică relaţia lui Ranz şi Marshall pentru transferul de căldură la evaporarea picăturilor. Forma modificată a acestei ecuaţii propusă de către Radusch nu este verificată de rezultatele experimentale obţinute în această lucrare.

Notații

α — coeficient de trecere al căldurii (kcal/m²h grd);
ε — coeficient de emisie;
λ — conductibilitate termică (kcal/m h grd);
μ — viscozitatea aerului (kgf. s/m²);
ϱ — densitatea aerului;
c_p — căldura specifică la presiune constantă (kcal/kg grd);
d — diametrul picăturii (m);
D — coeficientul de difuzie a vaporilor în aer (m²/h);
g — accelerația gravitației (m/s²);
G — cantitatea de lichid evaporată (kg);
G' — cantitatea de lichid evaporată pe unitatea de suprafață în unitatea de timp (kgf/m²h);
K_g — coeficient de transfer de masă (kg/m² atm. h);
M_m — pond molecular mediu a amestecului gazos aer — vapori pe drumul de transfer;
Nu $= \alpha d/\lambda$;
Nu' $= K_g M_m d\ (p - p_A)_{med}/(D\varrho)$;
p — presiunea totală (kgf/m²);
p_a — presiunea parțială a vaporilor care difuzează (kgf/m²);
Pr $= c_p \mu g/\lambda$;
r — căldura latentă de vaporizare (kcal/kg);
R — raza picălurii (m);
Re $= wd\varrho/\mu$;
Sc $= \mu/(\varrho D)$;
t_a — temperatura aerului (°C);
t_i — temperatura lichidului la intrarea în picătură (°C);
t_p — temperatura picăturii (°C);
w — viteza aerului (m/s).

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Termotehnică și
Catedra de Industrii Organice

BIBLIOGRAFIA

1. Morse H. W., Proc. Am. Acad. Sci., 1910, **45**, p. 361.
2. Шулейкин В. В., ЖРТХО, Ч. физ., 1926, **58**, стр. 527, (citat după Ирисов А. С., Испаряемость топлив для поршневых двигателей и методы ее исследования, М., 1955).
3. Findeisen W., Meteorolog. Ztschr., 1939, S. 453.
4. Фукс Н. А., ЖЭТФ, 1934, **4**, стр. 717.
5. ten Bosch M., *Die Wärmeübertragung*, Berlin, 1936.
6. Frössling N., Gerlands Beitr. Geophys., 1938, **52**, S. 160.
7. Баранаев М. К., Усп. Химии, 1938, 7, стр. 1231.
8. Johnstone H. F. a. Kleinschmidt R. F., Trans. Am. Inst. Chem. Engrs. 1938, **34**, p. 181.
9. Kramers H., Physica, 1946, **12**, p. 61.
10. van Krevelin D. W. a. Hoftijzer P.Y., J. Soc. Chem. Ind., 1949, **68**, p. 59.
11. Meisel D. S. a. Sherwood T. K., Chem. Eng. Progress, 1950, **46**, p. 131.
12. Ranz W. E. a. Marshall W. R. Jr., Ibid., 1952, **48**, p. 141.
13. Radusch R., Chem. Ing. Tech., 1956, **28**, p. 275.
14. Treybal E. R., *Mass-transfer operations*, Mc. Graw Hill, 1954.
15. Михеев А. М., Основы теплопередач, ГЭИ, М.-Л., 1949.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ИСПАРЕНИЯ КАПЕЛЬ НЕКОТОРЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ РАСТВОРИТЕЛЕЙ

(Резюме)

После краткого обзора работ и расчётных уравнений по испарению капель чистных жидкостей, авторы излагают экспериментальные результаты, касающиеся испарения капель толуола и этилового спирта при различных диаметрах капель, температурах и скоростях воздуха.

Экспериментальные коэффициенты теплопередачи α расчитаны на основе уравнения термического баланса Ранца и Маршалла, в котором внесли поправку для члена, относящегося к физической теплоте.

Полученными опытными данными авторы проверили уравнение Ранца и Маршалла. Модифицированная форма этого уравнения, предложенная Радушем, не подтверждается экспериментальными данными, полученными авторами настоящей работы.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Установка для экспериментального исследования испарения жидкостей.
Рис. 2. — График экспериментальных результатов.

ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR L'ÉVAPORATION DES GOUTTES DE CERTAINS SOLVENTS ORGANIQUES

(Résumé)

Après une revue des travaux et des relations de calcul relatives à l'évaporation des gouttes des liquides purs, les Auteurs présentent les résultats expérimentaux obtenus, concernant la vitesse d'évaporation des gouttes de toluen et d'alcool éthylique de différents diamètres dans un courant d'air de température et vitesse variable.

Les coefficients expérimentaux α de transition de la chaleur ont été calculés en utilisant l'équation du bilan thérmique établie par Ranz et Marshall, dont seul le terme relatif à la chaleur sensible a été modifié.

Les résultats obtenus vérifient la relation (8) proposée par Ranz et Marshall pour le transfer de chaleur à l'évaporation des gouttes. La forme modifiée de cette équation (10), proposée par Radusch n'est pas vérifiée dans le cadre des expériences effectuées par les Auteurs.

Explication des figures

Fig. 1. — L'installation pour les recherches expérimentales concernant l'évaporation des liquides.
Fig. 2. — Le graphique des résultats expérimentaux.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

624.04

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

О. Н. САВИНОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство рам сельскохозяйственных машин представляет собой стержневые системы, обладающие высокой степенью статической неопределимости.

Настоящая работа представляет изложение дальнейшего развития метода распределения узловых моментов [1], [2], [3], [4]. В работе изложен способ, при помощи которого можно расчитывать сложные пространственные рамы, не прибегая к решению системы линейных уравнений, что, как известно, представляет большую трудность.

При расчете рам методом деформаций за неизвестные принимаются углы поворота узлов рамы и их линейные перемещения. Разобьем все рамы на две группы. В первую группу отнесем рамы, узлы которых имеют только угловые смещения (несвободные рамы), а во вторую группу отнесем рамы, узлы которых имеют как линейные так и угловые смещения (свободные рамы).

Принятые обозначения:

i, j, p, g, l — обозначения связей, накладываемых на узлы; φ_i, Δ_i — угловые и линейные смещения связей i; M_i, R_i — неуравновешенные моменты и силы, вызванные внешней нагрузкой и действующие на связи i; m_{ij}, r_{ij} — моменты и силы, действующие на связи i и вызванные единичными смещениями связей j; m^p_{i-j}, r^p_{i-j} — моменты и силы, действующие на концах i стержней $i-j$ и вызванные единичным смещением связи.

2. НЕСВОБОДНЫЕ РАМЫ

Пусть данная рама имеет n углов поворота узлов.

Уравнения равновесия метода деформаций можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\varphi_j + M_i = 0, \quad (i=1, 2,..., n). \tag{1}$$

Если рама обладает большим количеством связей, то приходится решать систему уравнений высокого порядка, что сопряжено с большими трудностями. Но можно избежать этого. Когда мы решаем систему уравнений равновесия (1), то мы находим такие углы φ_i от поворота на которые в связях исчезают неуравновешенные моменты. Таким образом, решение системы (1) означает одновременное уравновешивание всех связей рамы. Вместо того, чтобы одновременно уравновешивать связи (решать систему (1)), мы будем их уравновешивать последовательно. Пусть на i - ую связь нашей рамы действует наибольший неуравновешенный момент M_i. Повернем связь i на такой угол φ_i, чтобы неуравновешенный момент исчез. Величина φ_i, определится из уравнения

(2) $$m_{ii}\,\varphi_i + M_i = 0.$$

По концам стержней рамы возникнут моменты $M_{i-j} = V^i_{i-j} M_i$ где $V^i_{i-j} = m^i_{i-j} / m_{ii}$, $(j = 1, 2, ..., n)$.

После того, как связь i уравновешена относительно момента M_i, берем наибольший из оставшихся неуравновешенных моментов и поступаем с ним подобно предыдущему и т.д. Как известно, такой процесс уравновешивания сходится [4], [5]. Но часто случается, что при уравновешивании узла в выбранной плоскости, например, в плоскости xOy, в плоскостях xOz и yOz возникают неуравновешенные моменты (побочные), близкие к уравновешиваемому моменту в плоскости xOy, что ведет к нарушению быстроты сходимости приближений. Эту трудность можно обойти путем соответствующего выбора осей координат xyz.

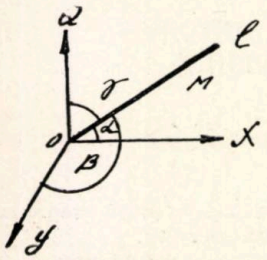


Рис. 1.

Рассмотрим произвольную систему координат xyz с центром в выбранном узле. Пусть единичные моменты (моменты, вызванные единичными углами поворота) относительно осей xyz будут:

$$m^{xx}_{ii},\ m^{xy}_{ii},\ m^{xz}_{ii};\quad m^{yx}_{ii},\ m^{yy}_{ii},\ m^{yz}_{ii};\quad m^{zx}_{ii},\ m^{zy}_{ii},\ m^{zz}_{ii}.$$

Тогда единичный момент относительно оси l (рис. 1) выражается следующим образом:

(3) $$m^l = m^{xx}_{ii}\,\xi^2 + m^{yy}_{ii}\,\eta^2 + m^{zz}_{ii}\,\zeta^2 + 2m^{xy}_{ii}\,\xi\eta + 2m^{xz}_{ii}\,\xi\zeta + 2m^{yz}_{ii}\,\eta\zeta$$

где $\xi = \cos\alpha$, $\eta = \cos\beta$, $\zeta = \cos\gamma$.

Отложим на прямой l отрезок $OM = 1/\sqrt{m^l}$. Если x, y, z координаты точки M, то $x = \xi/\sqrt{m^l}$; $y = \eta/\sqrt{m^l}$; $z = \zeta/\sqrt{m^l}$.

Теперь выражения (3) можно придать иной вид:

$$m^{xx}_{ii}\,x^2 + m^{yy}_{ii}\,y^2 + m^{zz}_{ii}\,z^2 + 2m^{xy}_{ii}\,xy + 2m^{xx}_{ii}\,xz + 2m^{yz}_{ii}\,yz = 1.$$

Полученное уравнение выражает эллипсоид.

Из аналитической геометрии известно, что оси координат можно выбрать так, чтобы уравнение эллипсоида приняло вид $m^{xx}_{ii}\,x^2 + m^{yy}_{ii}\,y^2 + m^{zz}_{ii}\,z^2 = 1$.

Итак, если за оси x, y, z взять канонические оси, то побочные моменты обратятся в нуль. Для отыскания канонических осей заметим, что для этих осей моменты m^l достигают экстремальных значений. Поэтому ищем экстремум от функции (3) при условии

(4) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Воспользовавшись методом Лагранжа, получим

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} = 2\,(m^{xx}_{ii} + \lambda)\,\xi + 2m^{xy}_{ii}\,\eta + 2m^{xz}_{ii}\,\zeta = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} = 2m^{xy}_{ii}\,\xi + 2\,(m^{yy}_{ii} + \lambda)\,\eta + 2m^{yz}_{ii}\,\zeta = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} = 2m^{xz}_{ii}\,\xi + 2m^{yz}_{ii}\,\eta + 2\,(m^{zz}_{ii} + \lambda)\,\zeta = 0. \end{cases}$$

Так как решение системы отлично от нуля, то определитель системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} m_{ii}^{xx}+\lambda & m_{ii}^{xy} & m_{ii}^{xz} \\ m_{ii}^{xy} & m_{ii}^{yy}+\lambda & m_{ii}^{yz} \\ m_{ii}^{xz} & m_{ii}^{yz} & m_{ii}^{zz}+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив это уравнение, мы найдем три значения λ, подставив которые в уравнения (4) и (5), определим ξ, η, ζ.

Заметим, что часто по смыслу задачи можно выбрать такие направления осей, относительно которых побочные моменты будут достаточно малы по сравнению с уравновешиваемыми; в этом случае отыскание канонических осей не обязательно.

3. СВОБОДНЫЕ РАМЫ

Пусть данная рама имеет m углов поворота φ и k линейно независимых смещений Δ. Если предположить, что неуравновешенные силы отсутствуют (это не ведет к ограничению общности), то уравнения равновесия будут иметь вид:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} m_{ij}\varphi_j + \sum\limits_{j=m+1}^{n} m_{ij}\Delta_j + M_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}\varphi_j + \sum\limits_{j=m+1}^{n} r_{ij}\Delta_j = 0, \quad (i = m+1, \ldots, n). \end{cases}$$

Решение системы (6) означает одновременное уравновешивание всех связей рамы относительно моментов и сил. Чтобы не решать систему уравнений (6) будем одновременно с последовательным уравновешиванием m связей относительно моментов все k связи рамы уравновешивать относительно сил. Этот прием был предложен профессором Рогицким С. А. для расчета плоских рам [2]. Возьмем связь с наибольшим неуравновещенным моментом M_p и повернем связь на такой угол φ_p, чтобы неуравновешенный момент исчез; одновременно, k связям даем такие линейные смещения, чтобы при этом не возникли неуравновешенные силы. Величина φ_p определяется из уравнения $\tilde{m}_{pp}\varphi_p + M_p = 0$.

По концам стержней рамы возникнут моменты $M_{g-l}^p = \nabla_{g-l}^p M_p$ где $\nabla_{g-l}^p = \tilde{m}_{g-l}^p / \tilde{m}_{pp}$.

Для вычисления моментов $\tilde{m}_{pp}$ и $\tilde{m}_{g-l}^p$ поворачиваем связь p на угол $\varphi_p = 1$ и вычисляем моменты m_{pp} и m_{g-l}^p без учета линейных смещений узлов. От этого поворота в k связях возникают неуравновешенные силы r_{ip}, для уравновешивания которых решаем систему уравнений:

$$(7)\quad \sum_{j=m+1}^{n} r_{ij}\Delta_j + r_{ip} = 0, \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Отсюда находим смещения Δ_j и вызванные ими дополнительные моменты m_p' и m_{g-l}'. Тогда $\tilde{m}_{pp} = m_{pp} + m_p'$, $\tilde{m}_{g-l}^p = m_{g-l}^p + m_{g-l}'$.

Нетрудно доказать, что такой процесс уравновешивания узлов рамы сходится.

Изложенный способ не удобен тем, что приходится решать системы линейных уравнений (7), порядок и число которых равно числу линейно независимых смещений. Но эту трудность можно обойти, если уравновешивание связей относительно сил производить не одновременно путем решения системы уравнений (7), а последовательно.

Пусть на i - ую связь нашей рамы действует наибольшая неуравновешенная сила R_i. Дадим i - ой связи такое смещение Δ_i, чтобы неуравновешенная сила исчезла. Величина Δ_i определится из уравнения $r_{ii}\Delta_i + R_i = 0$.

По концам стержней рамы возникнут силы $Q_{i-j} = -Q_{j-i} = V^i_{i-j} R_i$, где $V^i_{i-j} = r^i_{i-j} / r_{ii}$.

Здесь часто встречаются следующие случаи нарушения быстроты сходимости приближений.

Первый случай. Пусть L стержней нашей рамы содержат N плоскостей, в которых жесткости относительно линейных смещений велики по сравнению с жесткостями примыкающих стержней. В этом случае, при распределении неуравновешенных усилий, для вышеуказанных плоскостей найдем, что $R_i \approx R_j$; в этом случае будет иметь место нарушение быстроты сходимости. Чтобы ее усилить мы положим в первом приближении при распределении усилий, что L стержней в N плоскостях абсолютно жесткие. После уравновешивания узлов в первом приближений учитываем жесткости этих стержней как показанно на рис. 2.

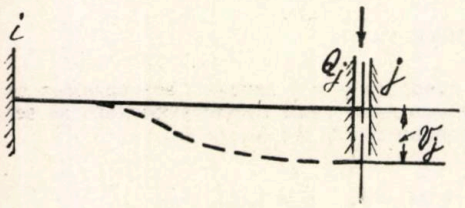


Рис. 2.

Находим смещения концов стержней V_j и нагружаем ими концы стержней, сходящихся в узлах j. Полученные при этом неуравновешенные силы распределяем обычным способом и т.д. Найдем условия, при которых такой процесс уравновешивания сходится. Для этого рассмотрим систему линейных уравнений порядка n:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum\limits_{j=h+1}^{n} a_{ij} x_j = p_i, & (i = 1, 2, \ldots, h), \\ \sum\limits_{j=1}^{h} a_{ij} x_j + \sum\limits_{j=h+1}^{n} a_{ij} x_j = p_i, & (i = h+1, \ldots, n), \quad (a_{ij} = a_{ji}). \end{cases}$$

Будем искать решение системы (8) следующими последовательными приближениями

$$(9)\quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{h} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum\limits_{j=h+1}^{n} a_{ij} x_j^{k} = p_i, & (i = 1, 2, \ldots h), \\ \sum\limits_{j=1}^{h} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum\limits_{j=h+1}^{n} a_{ij} x_j^{k+1} + a'_{ii} x_i^{k+1} + \alpha_{ii} x_i^{k} = p_i, & (i = h+1, \ldots, n), \end{cases}$$

где $a'_{ii} + \alpha_{ii} = a_{ii}$.

Если последовательность (x_j^k) сходится, т. е. имеет предел $(\overline{x_j})$, то этот предел является решением системы (8). Заметим, что если при $p_i = 0$ последовательные приближения (9) сходятся для любых начальных значений неизвестных, то и последовательные приближения (9) при $p_i \neq 0$ также будут сходится. Итак, задача свелась к определению условий сходимости последовательных приближений (9) при $p_i = 0$.

Исследуем на экстремум функцию $\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$.

Так как решение системы (8) при $p_i = 0$ дает стационарное значение функции Φ, то приращение ее в стационарной точке имеет вид $\Delta\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta x_j$.

Если положить, что квадратичная форма системы (8) положительно-определенная, то наша функция Φ в стационарной точке будет иметь минимум. Отсюда следует, что для доказательства сходимости приближений (9) достаточно показать, что для каждого шага будет иметь место неравенство $\Delta\Phi < 0$. Имеем

$$\Delta\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x_i^{k+1}\, x_j^{k+1} - x_i^k\, x_j^k).$$

После преобразований будем иметь:

$$\Delta\Phi = -\sum_{i,j=1}^{h} a_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta x_j - \sum_{i,j=h+1}^{n} a_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta x_j + 2\sum_{i=h+1}^{n} a_{ii}\,(\Delta x_i)^2.$$

Полученное выражения будет меньше нуля, если квадратичная форма

$$\text{(10)} \qquad \sum_{i,j=h+1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad \text{где} \quad \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } i \neq j, \\ a_{ii} - 2a_{ii} & \text{при } i = j, \end{cases}$$

будет положительно-определенная.

В частности, форма (10) будет положительно-определенная, если выполняется неравенство:

$$|a_{ii} - 2a_{ii}| > \sum_{\substack{j=h+1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad (i = h+1, \ldots, n).$$

Здесь предполагается, что $a_{ii} - 2a_i > 0$.

Таким образом мы доказали следующую теорему: **Для сходимости последовательных приближений (9) достаточно, чтобы матрица системы была симметрична и квадратичные формы** $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x$ **и** $\sum_{i,j=h+1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ **были положительно-определенные.**

Изложенный выше процесс уравновешивания узлов рамы относительно сил описывается уравнениями:

$$\begin{array}{l|l} \sum_{j=1}^{h} r_{ij}\, \Delta_j^{q+1} + & \sum_{j=h+1}^{k} r_{ij}\, \Delta_j^q + R_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, h), \\ \hline \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, \Delta_j^{q+1} + & \sum_{\substack{j=h+1 \\ j \neq i}}^{k} r_{ij}\, \Delta_j^{q+1} + r'_{ii}\, \Delta_i^{q+1} + g_{ii}\, \Delta_i^q + R_i = 0, \quad (i = h+1, \ldots, k) \end{array},$$

$$r'_{ii} + g_{ii} = r_{ii}, \quad N = (k-h)/2.$$

Здесь g_{ii} — жесткости примыкающих стержней.

Заметим, что квадратичная форма системы как потенциальная энергия положительно-определенная. Поэтому приближения будут сходиться, если будет положительно определенной квадратичная форма

$$\sum_{i,j=h+1}^{k} \tilde{r}_{ij}\, \Delta_i\, \Delta_j, \qquad \text{где} \quad \tilde{r}_{ij} = \begin{cases} r_{ij} & \text{при } i \neq j, \\ r_{ii} - 2g_{ii} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Более простое и более узкое условие сходимости будет:

$$|r_{ii} - 2g_{ii}| > \sum_{\substack{j=h+1 \\ i \neq j}}^{k} |r_{ij}|, \quad (i = h+1, \ldots, k).$$

Второй случай. Пусть L стержней рамы содержат N плоскостей, в которых жесткости относительно линейных и угловых смещений велики по сравнению с жесткостями примыкающих стержней. В этом случае, при распределении неуравновешенных моментов, для вышеуказанных плоскостей получим, что $M_i \approx M_j$, т. е. будет иметь место слабая сходимость. Чтобы ее усилить, мы положим, что в первом приближении L стержней в N плоскостях абсолютно жесткие относительно угловых и линейных смещений. После уравновешивания узлов в первом приближении относительно сил и моментов учитываем жесткости этих стержней по схеме, показанной на рис. 3.

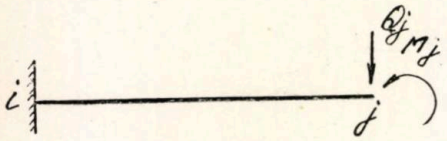


Fig. 3

Находим смещения концов стержней V_j, φ_j и нагружаем ими концы стержней, сходящихся в узлах j. Полученные при этом неуравновешенные силы и моменты распределяем обычным способом и т. д. Такой процесс уравновешивания узлов рамы описывается уравнениями:

$$h\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} m_{ij}\varphi_j^{q+1} + \sum_{j=k+1}^{h} m_{ij}\Delta_j^{q+1} + \sum_{j=h+1}^{f} m_{ij}\varphi_j^{q} + \sum_{j=f+1}^{n} m_{ij}\Delta_j^{q} + M_i = 0, \\ \sum_{j=1}^{k} r_{ij}\varphi_j^{q+1} + \sum_{j=k+1}^{h} r_{ij}\Delta_j^{q+1} + \sum_{j=h+1}^{f} r_{ij}\varphi_j^{q} + \sum_{j=f+1}^{n} r_{ij}\Delta_j^{q} = 0, \end{cases}$$

$$n-h\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} m_{ij}\varphi_j^{q+1} + \sum_{j=k+1}^{h} m_{ij}\Delta_j^{q+1} + \sum_{\substack{j=k+1 \\ i\neq j}}^{f} m_{ij}\varphi_j^{q+1} + m'_{ii}\varphi_j^{q+1} + l_{ii}\varphi_i^{q} + \sum_{j=f+1}^{n} m_{ij}\Delta_j^{q+1} + M_i = 0, \\ \sum_{j=1}^{k} r_{ij}\varphi_j^{q+1} + \sum_{j=k+1}^{h} r_{ij}\Delta_j^{q+1} + \sum_{j=h+1}^{f} r_{ij}\varphi_j^{q+1} + \sum_{\substack{j=f+1 \\ i\neq j}}^{n} r_{ij}\Delta_j^{q+1} + r'_{ii}\Delta_i^{q+1} g_{ii}\Delta_i^{q} = 0, \end{cases}$$

$$r'_{ii} + g_{ii} = r_{ii}, \quad m'_{ii} + l_{ii} = m_{ii}, \quad N = (k-h)/4,$$

l_{ii}, g_{ii} — угловые и линейные жесткости примыкающих стержней.

Сходимость приближений будет иметь место, если будет положительно-определенной квадратичная форма для матрицы:

$$\begin{Vmatrix} m_{h+1,\,h+1} - 2l_{h+1,\,h+1} & m_{h+1,\,h+2} \cdots m_{h+1,\,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n\,h+1} & r_{n,\,h+2} \cdots r_{nn} - 2g_{n,\,n} \end{Vmatrix}$$

Третий случай. Часть стержней имеет угловые жесткости, которые велики по сравнению с жесткостями примыкающих стержней (имеются ввиду определенные плоскости стержней). В этом случае также может иметь место нарушение быстроты сходимости приближений относительно моментов, но не обязательно. Если это так, то для усиления быстроты сходимости для каждого из вышеуказанных стержней следует принять за неизвестные линейные смещения узлов, угол поворота одного из узлов и

угол поворота стержня вокруг одного из узлов как абсолютно жесткого тела. Такой процесс уравновешивания сходится всегда.

В качестве примера рассмотрим раму, показанную на рис. 4.

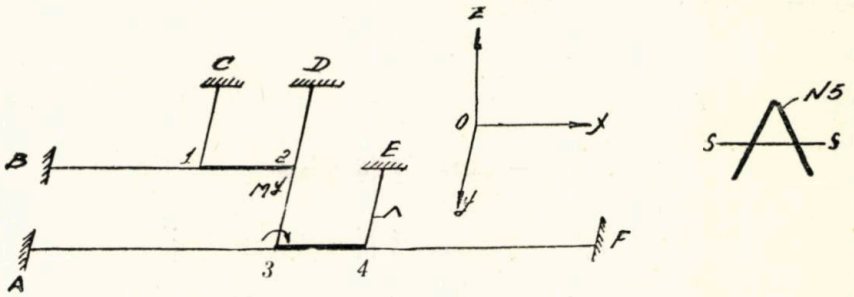


Рис. 4.

Исходные данные:

$$I_s = 4{,}61 \text{ см}^4, \quad I_d = 0{,}395 \text{ см}^4,$$

$$L_{1-C} = L_{1-B} = L_{2-D} = L_{2-3} = L_{E-4} = 40 \text{ см};$$

$$L_{1-2} = L_{3-4} = 10 \text{ см}, \quad L_{A-3} = L_{4-F} = 100 \text{ см}.$$

Величины r^p_{g-l}, m^p_{g-p} даны в таблицах 1 и 2.

При вычислении использованы формулы [6], [7]: $4EI/L$, GI_d/L, $12EI/L^3$.

Таблица 1

$g-l$	$m^{gx}_{(g-l)x}$	$m^{gy}_{(g-l)y}$
1—C	0 025	0.000816
1 -B	0.000816	0.025
2—D	0.025	0.000816
2—3	0.025	0.000816
4—E	0.025	0.000816
1—2	0.00326	0.1
3-4	0.00326	0.1
3—A	0.000326	0.01
4—F	0.000326	0.01

Таблица 2

$g-l$	$r^{gz}_{(g-l)z}$
1—C	0.000015
1—B	0.000015
2—D	0.000015
2—3	0.000015
4—E	0.000015
1—2	0.001
3—4	0.001
3—A	10
4—F	10

Таблица 3

$g-l$	$\Delta^{(1-2)z}_{(g-l)z}$	$g-l$	$\Delta^{(3-4)z}_{(g-l)z}$
1—C	0.25	3—2	0.47
1—B	0.25	4—E	0.47
2—D	0.25	3—A	0.03
2—3	0.25	4—F	0.03

Таблица 4

$g-l$	$R_1=100$	$R_2=100$	$R_3=R_4=100$
1—C	28.6	27.8	13.1
1—B	28.6	27 8	13.1
2—D	28.0	28.7	13.5
2—3	14.9	15.6	−39.6
3—A	0.84	0.84	3.4
4—F	0.84	0.84	3.4
4—E	13.13	13.13	53.2
1—2	42.7	−55.7	−26.2

Множители $4EI_s$, $12EI_s$ в таблицах опущены для удобства. В первом приближений полагаем, что стержень $1—C$ абсолютно жесток в плоскости xOz относительно линейных деформаций, а стержень $3—4$ абсолютно жесток в плоскости xOz относительно линейных и угловых деформаций.

Таблица 7

$g-l$	M^x_{g-l}	M^y_{g-l}	$g-l$	M^x_{g-l}	M^y_{g-l}
$1-C$	−0.11	− 0.034	$2-3$	− 2.3	− 1.08
$C-1$	−1.5	0.034	$3-2$	− 1.07	1.03
$1-B$	0.0183	0.015	$3-A$	0.033	54.3
$B-1$	−0.0183	1	$A-3$	− 0.033	23.5
$2-D$	1.9	− 0.0314	$4-F$	− 0.071	38.2
$D-2$	−2.9	0.0314	$F-4$	0.071	20.9
$3-4$	1.04	4.7	$4-E$	1.11	0.75
$4-3$	−1.04	−38.2	$E-4$	11.4	− 0.75
$1-2$	−0.128	0.019			
$2-1$	0.128	1.11			

Коэффициенты распределения сил даны в таблице 3. Результаты распределения неуравновешенных сил R_i даны в таблице 4. Величины $\widetilde{m}^p_{g-l}$ даны в таблице 5. Коэффициенты распределения моментов даны в таблице 6. В результате распределения неуравновешенных моментов, ролучим моменты, действующие по концам стержней рамы (таблица 7),

Поступило 28 V 1957

Московский институт механизации
и электрификации сельского
хозяйства, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогицкий С. А., Расчет плоских и пространственных рам методом последовательных приближений, ГОНТИ, М., 1939.
2. — Расчет рам, Машгиз, М., 1948.
3. Коган Л. А., Расчет ломанных статически неопределимых пространственных балок, Труды Уральского Политехнического Института, Сборник **41**, Госиздат, 1953.
4. Гаврилов Ю. М., Способы последовательных приближений для решения систем линейных уравнений в строительной механике. Диссертация на соискание степени кандидата технических наук, утверждена во Львовском Политехническом Институте, 30 IX 1954.
5. Фадеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Госиздат, М., 1950.
6. Филоненко-Бородич М. М., Курс сопротивления материалов, ч. **2**, Госиздат, М., 1950.
7. Вайнберг Д. В., Гудковский В. Г., Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений, Гостехиздат, М., 1948.

THE SUCCESSIVE APPROXIMATIONS METHOD OF FRAME CALCULATION

(Summary)

In the given work is described the method of frame calculation, which avoids the method of solution by linear equations.

CALCULUL RAMELOR SPAŢIALE PRIN METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE

(Rezumat)

Autorul expune metoda de calcul a ramelor prin care se evită folosirea sistemelor de ecuaţii liniare.

Таблица 5

$\tilde{m}^{p}_{g-l}$

$g-l$		$p=1^x$	$p=1^y$	$p=2^x$	$p=2^y$	$p=3^x$	$p=4^x$	$p=(3\text{-}4)^y$
$1-C$	x	0.0196	0.0033	—0.00246	—0.002	0.00276	—0.00246	—0.00131
	y		0.000204					
$C-1$	x	0.0196	0.0033	—0.00246	—0.002	0.00276	—0.00246	—0.00131
	y		—0.000204					
$1-B$	x	0.000204						
	y	0.0054	0.0217	0.00245	0.002	—0.00276	0.00246	0.00131
$B-1$	x	—0.000204						
	y	0.0054	0.0092	0.00246	0.002	—0.00276	0.00246	0.00131
$2-D$	x	—0.00524	0.00792	0.0025	0.0026	0.00286	—0.00252	—0.00135
	y				0.000204			
$D-2$	x	—0.00524	0.00792	0.01	0.0026	0.00236	—0.00252	—0.00135
	y				—0.000204			
$3-4$	x					0.000815	—0.000815	
$4-3$	x					—0.000815	0.000815	
$1-2$	x	0.000815		—0.000815				
	y	0.002	0.028	0.00123	—0.024	—0.00138	0.00123	0.00352
$2-1$	x	—0.000815		0.000815				
	y	0.002	—0.022	0.00123	0.026	—0.00138	0.00123	0.00352
$2-3$	x	0.0028	—0.00424	0.0176	—0.0014	0.0022	—0.00742	—0.00395
	y				0.000204			—0.000204
$3-2$	x	0.0028	—0.00424	0.0051	—0.0014	0.0147	—0.00742	—0.00395
	y				—0.000204			0.000204
$3-A$	x					0.000815		
	y	0.000407	—0.000592	0.0016	—0.000198	0.00125	0.0016	0.0109
$A-3$	x					—0.0000815		
	y	0.000407	—0.000592	0.0016	—0.000198	0.00125	0.0016	0.00389
$4-F$	x						0.0000815	
	y	—0.000407	0.000592	—0.0016	0.000198	—0.00125	—0.0016	0.0106
$F\ \ 4$	x						—0.0000815	
	y	—0.000407	0.000592	—0.0016	0.000198	—0.00125	—0.0016	0.00551
$4-E$	x	—0.00246	0.0037	—0.00996	0.00123	—0.00752	0.01504	0.00406
	y							0.000204
$E-4$	x	—0.000246	0.0037	—0.00996	0.00123	—0.00752	0.00254	0.00406
	y							—0.000204

Таблица 6

∇^{p}_{g-l}

$g-l$		$p=1^x$	$p=1^y$	$p=2^x$	$p=2^y$	$p=3^x$	$p=4^x$	$p=(3\text{-}4)^y$
$1-C$	x	1	—0.0664	—0.0614	—0.0779	0.188	—0.164	—0.0522
	y		0.00497					
$C-1$	x	0.362	0.0664	—0.0614	—0.0779	0.188	—0.164	—0.0522
	y		—0.00497					
$1-B$	x	0.0104				0.0554		
	y	0.275	0.437	0.0614	0.0779	—0.188	0.164	0.0522
$B-1$	x	—0.0104				—0.0554		
	y	0.275	0.185	0.0614	0.0779	—0.188	0.164	0.0522
$2-P$	x	—0.264	0.159	0.562	0.1	0.195	—0.163	—0.0538
	y				0.00785			
$P\ \ 2$	x	0.264	0.159	0.249	0.1	0.195	—0.163	—0.0533
	y				—0.00785			
$3-4$	x					0.0555	—0.0542	
	y							
$4-3$	x					—0.0555	0.0542	
	y							
$1-2$	x	0.0416		—0.0205				
	y	—0.102	0.563	0.0307	—0.923	—0.094	0.0818	0.026
$2-1$	x	—0.0416		0.0205				
	y	—0.102	—0.442	0.0307	1	—0.094	0.0818	0.026
$2-3$	x	0.143	—0.0853	0.438	—0.0538	0.15	—0.493	—0.158
	y				0.00785			—0.00813
$3-2$	x	0.143	—0.0853	0.127	—0.0538	1	—0.493	—0.158
	y				—0.00785			0.00813
$3-A$	x					0.00555		
	y	0.0209	—0.0119	0.0399	—0.00762	0.0848	0.116	0.434
$A-3$	x					—0.00555		
	y	0.0209	—0.0119	0.0399	—0.00762	0.0848	0.116	0.235
$4-F$	x						0.00542	
	y	—0.0209	0.0119	—0.0399	0.00762	—0.0848	—0.116	0.422
$F\ \ 4$	x						—0.00542	
	y	—0.0209	0.0119	—0.0399	0.00762	—0.0848	0.116	0.224
$4\ \ E$	x	—0.126	0.0793	—0.249	0.0474	—0.512	1	0.162
	y							0.00813
$E-4$	x	—0.126	0.0793	—0.249	0.0474	—0.512	0.169	0.162
	y							—0.00813

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

624.04

NUMBER REDUCTION OF UNKNOWNS IN THE SLOPE DEFLEXION METHOD

BY

ANTON ŞESAN

Paper presented at the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, June 26–29, 1958

1. Simplifications or generalizations of methods for elastic analysis of statically redundant structures are to be studied connecting the statical and mathematical aspects with the physical significance of the passing operations from a certain basic system to the real structure. This is particularly interesting in step by step methods which reflect the iterative resolution of the equilibrium equations corresponding to the basic system.

The classic equations of the slope-deflexion method [1], [2], contain a number of unknowns Z (φ, ψ or Δ) equal to the elastic-kinematic redundancy of the structure: $n_z = n_j + n_s$ (i.e. the number of joints n_j added whit that of independent sway mechanisms n_s).

A reduction in the number of unknowns ($n_z < n_j + n_s$) leads to important advantages in the analytic computations and especially in successive aproximations- or relaxions-methods, oving also to important increase achieved in the convergence rate.

Of the various forms of canonic equations of the slope-deflexion method [1], [2], [5], that of „active moments" is preferred as being most suitable for the study of these simplifications since the unknowns (M) are just the real out-balance moments in the chosen basic system and the coefficients (μ), are nothing else but the carry-over factors in the iterative computations.

For a classic basic system, Fig. 1, (whit all joints locked against rotation or sway displacement) these canonic equations are [5]:

$$(1a) \qquad -M_i + \sum_k \mu_{ik} M_k + \sum_A \mu_{iA} M_A + \mathfrak{M}_i = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n_j),$$

$$(1b) \qquad -M_A + \sum_k \mu_{Ak} M_k + \sum_B \mu_{AB} M_B + \mathfrak{M}_A = 0, \quad (A, B, ..., n_s),$$

in which M_i and M_A are the active moments of joint i and of sway mechanism A, respectively. The general expressions established [5] for

the influence coefficients (μ) and for the $\mathfrak{M}$ quantities, allow the use of these equations (1) in the analysis of any type of structure, and therefore the altogether iterative calculus — in a single phase — for framed stuctures of quite arbitrary shape [6].

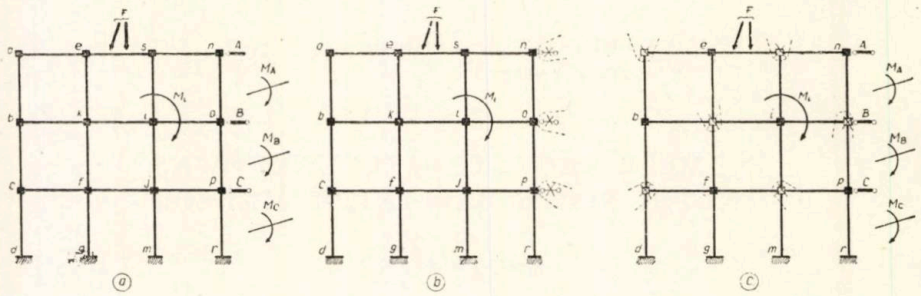


Fig. 1.

If, instead of starting from a classical basic system, Fig. 1 a, a system with joints locked against rotation but unrestrained against sway is used, Fig. 1 b, the number of unknowns is reduced to $n_z = n_j$ (for the case of independent sway mechanisms) and the following reduced equations are obtained:

$$\mu'_{ii} M_i + \sum \mu'_{ik} M_k + \mathfrak{M}'_i = 0, \qquad (i = 1,2,\ldots n_j), \tag{2}$$

which, arranged in a suitable form for iterative computation, become:

$$-M_i + \sum \mu^*_{ik} M_k + \mathfrak{M}^*_i = 0 \quad , \quad (i = 1,2,\ldots n_j). \tag{2'}$$

The factors μ^* and the values $\mathfrak{M}^*$ are given by

$$\mu^*_{ik} = \mu'_{ik} / \mu'_{ii} = (\mu_{ik} + \sum \mu_{Ak}\mu_{iA}) / (1 - \sum \mu_{iA}\mu_{Ai}), \tag{3}$$

$$\mathfrak{M}^*_i = \mathfrak{M}'_i / \mu'_{ii} = (\mathfrak{M}_i + \sum \mu_{iA}\mathfrak{M}_A) / (1 - \sum \mu_{iA}\mu_{Ai}), \tag{4}$$

relations easily obtained by adding to their canonic expression (μ_{ik}, $\mathfrak{M}_i$) the influence of the removal of sway restraints (the summed terms) and dividing the result by the coefficient of the principal unknown (μ'_{ii}), obtained in the same way. Before computing the end-moments of any member, the active moments of sway mechanisms must be previously calculated whit the relation

$$M_A = \mathfrak{M}_A + \sum_k \mu_{Ak}\mathfrak{M}_k. \tag{5}$$

The basic system in Fig. 1 c — whit joints locked against sway but with some of them unrestrained against rotation — is used in the Dašek method for an exclusively iterative analysis (1st phase only).

The carry-over factors between joints of second proximity ($i - n$, $i - p$, $i - f$, etc.) — left to be balanced — are also computed by adding to their classical expression, a correction due to the unrestrained

intermediate joints and by a new correction (corresponding to μ'_{ii}) the factor of which, in absence of equilibrium equations, is obtained by summing up the terms of a geometrical series, representing the succesive balancing with first proximity joints.

The various forms of reduced methods of analysis (analytic or iterative), may be obtained by (1) starting from basic systems partially kinematic-elastic indeterminate (statical process) or (2) eliminating some unknowns in the set of canonic equations (mathematical process) or at last (3) — the Daněk method — expressing mathematically the succesive relaxions needed to pass from the basic system to the real one (process of physical intuition). The combined use of these processes may lead to the whole range of all conceivable simplifications and generalizations.

The classical forms of the slope-deflexion method are two equation groups, corresponding to the different conditions of statical equilibrium $\left(\sum M_{ik} = 0 \text{ and } \sum F \text{ or } \sum VW = 0\right)$. Since the equilibrium conditions by the active moments method are written in an identical form for any equation (these conditions being just the relations defining each active moment), it follows that the two groups (1a) and (1b), may be united in the comprehensive form:

$$(6) \qquad -M_r + \sum_p \mu_{rp} M_p + \mathfrak{M}_r = 0, \quad (r = 1,2,\ldots n_j, A, B, \ldots).$$

As the differentiation of equilibrium conditions for the joint (i) and sway-mechanism (A)-unknowns, disappears, it follows that the reduced equations, (2) and (3), corresponding to the elimination of sway-mechanism-unknowns, may be generalized for the elimination of joint unknowns also, or even for a simultaneous elimination of joint-and sway-mechanism-unknowns, always observing of course the rule that the eliminated unknowns must be independent of each other [8]. The general form of the reduced set of equations for any (n_r) remaining unknowns, becomes:

$$(7) \qquad \mu'_{rr} M_r + \sum_p \mu'_{rp} M_p + \mathfrak{M}'_r = 0 \ , \quad (r = 1,2,\ldots n_r)$$

or

$$(7') \qquad -M_r + \sum_p \mu^*_{rp} M_p + \mathfrak{M}^*_r = 0,$$

where

$$(8) \qquad \mu^*_{rp} = \mu'_{rp} / \mu'_{rr} = (\mu_{rp} + \sum \mu_{op}\, \mu_{ro}) / (1 - \sum \mu_{ro}\, \mu_{or})$$

and

$$(9) \qquad \mathfrak{M}^*_r = \mathfrak{M}'_r / \mu'_{rr} = (\mathfrak{M}_r + \sum \mu_{ro}\, \mathfrak{M}_o) / (1 - \sum \mu_{ro}\, \mu_{or}),$$

the index o marking an unknown („active moment" of joint or sway mechanism) bound to the unknown r and eliminated from the set of equations.

The various conditions in which elimination can be carried out may be followed by reference to a frame, Fig. 2, laving 6 degrees of kinematic-elastic redundancies (4 of joints and 2 of sway mechanisms).

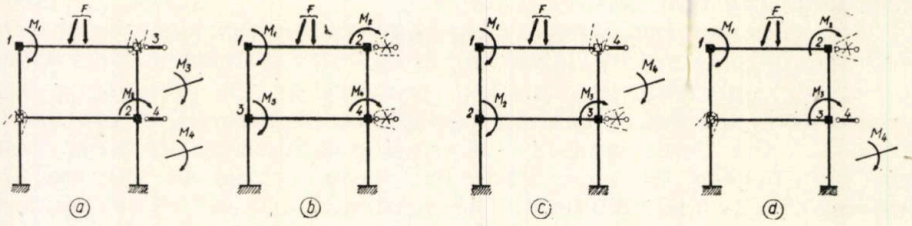


Fig. 2

The equilibrium equations for the basic system in Fig. 2a — relations (7) or (7′) for $n = 4$ — represent the analytic form of the Dašek method, generalized for simultaneous resolution of both phases of analysis. The equations (8) and (9) gives the values of carry-over factors and starting moments respectively, necessary for the iterative form of the same method, also generalized for both phases of analysis. In this case the factor o refers to the two unrestrained joints.

The corresponding equations of the basic system in Fig. 2 b, is given by equations (2) and (2′). For the basic systems (c) and (d), Fig. 2, the equilibrium equations, the carry-over factors as well as the starting values are obtained by applying the relations (7), (7′), (8) and (9), respectively, the index o refers each time to an unrestrained joint and sway mechanism. At the basic systems shown in Fig. 2, no more than two unknowns may be eliminated. In order to increase the number of eliminated unknowns, a change of unknowns becomes necessary [8], thus obtaining new independent unknowns.

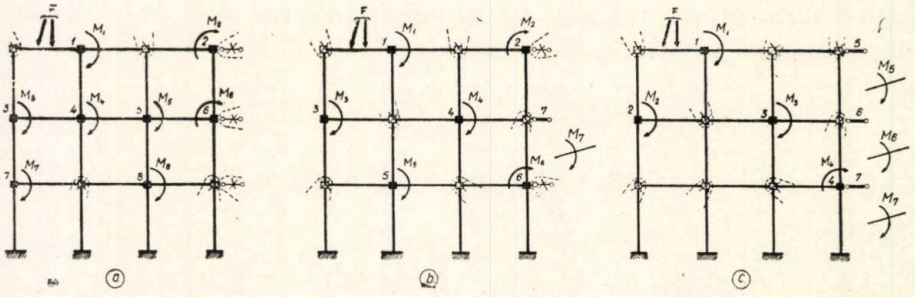


Fig. 3

In multi-storey-frames, eliminations may proceed in two phases. At the basic system shown in Fig. 3a (with 15 kinematic-elastic redundancies) in a first step the three sway-mechanism-unknowns were eliminated and in a subsequent step another group of two joint-un-

knowns (independent of each other); the number of unknowns (and equations) is thus reduced to $n_r = 10$.

At the basic system, Fig. 3b, in the first phase six joint-unknowns and in the second one two sway-mechanism-unknowns, also independent of each other, were eliminated. At the basic system shown in Fig. 3c, after relaxion of six joint restraints, two more joints were relaxed. In both these basic systems, $n_r = 7$.

In the case of the two-phase operation, described above, the general relations (7), (7'), (8) and (9) are twice applied and, at the end, they become:

$$\mu''_{ss} M_s + \sum \mu''_{sr} M_r + \mathfrak{M}''_s = 0, \qquad (s = 1,2,\ldots n'_r) \tag{10}$$

and, hence:

$$-M_s + \sum \mu^{**}_{sr} M_r + \mathfrak{M}^{**}_s = 0, \tag{10'}$$

whit

$$\mu^{**}_{sr} = \mu''_{sr} / \mu''_{ss} = (\mu^{*}_{sr} + \sum \mu^{*}_{pr} \mu^{*}_{sp}) / (1 - \sum \mu^{*}_{sp} \mu^{*}_{ps}), \tag{11}$$

and

$$\mathfrak{M}^{**}_s = \mathfrak{M}''_s / \mu''_{ss} = (\mathfrak{M}^{*}_s + \sum \mu^{*}_{sp} \mathfrak{M}^{*}_p) / (1 - \sum \mu^{*}_{sp} \mu^{*}_{ps}) \tag{12}$$

The factors calculated for the first phase are used in the computation of factors in the following one.

When a basic system for iterative computation is selected, consideration should be given not only to the number of remaining unknowns (n'_r) but also to an improvement of convergence rate achieved mainly by elimination of sway-mechanism-unknowns. Thus, in iterative computation, the scheme *a*, Fig. 3, is preferred in spite of $n'_r = 10$ against $n'_r = 7$ in the other schemes.

2. It is sometimes useful to split the analysis in two phases, in order to obtain in a first phase the unknowns values in the case of sway fixed joints (M^0_i), and in to second phase, the sway moments values (M_A), the total active moments being given by:

$$M_i = M^0_i + \sum_A \mu_{iA} M_A . \tag{13}$$

The active joint moments of the first phase are obtained by resolving the following system:

$$-M^0_i + \sum \mu_{ik} M^0_k + \mathfrak{M}_i = 0, \quad (i = 1,2,\ldots n_j), \tag{14}$$

obtained from equations (1), by putting $M_A = M_B = \ldots = 0$.

In the second phase of the analysis, M^0_i is considered as load and the equilibrium conditions are just given by the expression of the sway-active-moment:

$$\bar{\mu}_{AA} M_A + \sum \bar{\mu}_{AB} M_B + \bar{\mathfrak{M}}_A = 0, \qquad (A, B, \ldots), \tag{15}$$

or

$$(15') \qquad -M_A + \sum \bar{\mu}^{\star}_{AB} M_B + \bar{\mathfrak{M}}^{\star}_A = 0.$$

These equations contain as unknowns only sway-active-moments. The carry-over factors and the starting moments, respectively, are given by:

$$(16) \qquad \bar{\mu}^{\star}_{AB} = \bar{\mu}_{AB} / \bar{\mu}_{AA} = (\mu_{AB} + \sum \mu_{Ai}\, \mu_{iB}) / (1 - \sum \mu_{Ai}\, \mu_{iA})$$

and

$$(17) \qquad \bar{\mathfrak{M}}^{\star}_A = \bar{\mathfrak{M}}_A / \bar{\mu}_{AA} = (\mathfrak{M}_A + \sum \mu_{Ai}\, M^{0}_i) / (1 - \sum \mu_{Ai}\, \mu_{iA}).$$

3. The combined use of statical, mathematical and physical aspects has led to relations simple, united as form and general as application, indicating at the same time, all possible simplifications and generalizations, by reduction of the unknowns number, in the analytic or iterative analysis of the slope deflexion method.

Polytechnic Institute of Jassy,
Department of Strength of Materials

REFERENCES

1. Рабинович И. М., Курс строительной механики, **II**, М., Госстройиздат, 1954.
2. Guldan R., *Rahmentragwerke und Durchlaufträger*, 1942, Springer, Wien.
3. Iohannson, *Das Cross-Verfahren*, 1948, Springer, Berlin.
4. Dašek V., *Calculul construcţiilor în cadre*, 1950, Praga, (trad. în manuscris).
5. Şesan A. şi Popescu N., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1955, **6**, *3-4*, pp. 71-81.
6. Şesan A. şi Orlovschi N., Ibid., 1955, **6**, *3-4*, pp. 59-69.
7. Şesan A. şi Popescu N., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1955, **I (V)**, *1-2*, pp. 465-471.
8. Şesan A. şi Orlovschi N., Ibid., **III (VII)**, *3-4*, pp. 245-250.

О СОКРАЩЕНИИ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ В МЕТОДЕ ДЕФОРМАЦИЙ

(Резюме)

Используя формы „активных моментов" в качестве канонических уравнений метода деформаций — соотношение (1) — изучаются возможности исключения неизвестных кинематических цепей и узловых поворотов в аналитическом и итеративном расчете. Единая форма условных уравнений—соотношение (6) — ведет к обобщенным соотношениям (7), (7'), (8) и (9), которые позволяют исключение любых неизвестных (узловых или кинематической цепи) при условии их независимости.

Соотношения (13) ... (17) соответствуют сделаному в двух этапах расчету.

ASUPRA REDUCERII NUMĂRULUI DE NECUNOSCUTE ÎN METODA DEFORMAŢIILOR

(Rezumat)

Plecînd de la forma „momentelor active" ca ecuaţii canonice ale metodei deformaţiilor — relaţia (1) — se studiază posibilităţile de eliminare a necunoscutelor de lanţ cinematic şi de nod în calculul analitic şi iterativ. Forma unitară a ecuaţiilor de condiţie — relaţia (6) — conduce la relaţiile generalizate (7), (7'), (8) şi (9), care permit eliminarea oricăror necunoscute (de nod sau lanţ cinematic) — fig. 2 — cu condiţia să fie independente între ele.

Relaţiile (13)...(17) permit efectuarea calculului integral iterativ în două trepte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

624.04

USE OF „FACTORIAL MOMENTS" IN THE DETERMINATION OF INFLUENCE LINES IN STATICALLY INDETERMINATE STRUCTURES

BY

ANTON ŞESAN

Paper presented at the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, June 26—29, 1958

It has been shown [1] that, if the flexural functions (distributed load p, shear force T, bending moment M, rotation θ and deflection y) are expressed as statical (M^k) or elastic „factorial moments" (M_ρ^i), by using the relation:

$$(1) \qquad \{y, \theta, M, T, t\} = \{M_\rho^{III}, M_\rho^{II}, M^I, M^0, M^{-I}\},$$

the calculation of elastic displacements is reduced to the simplicity of a usual statical moment computation since a „factorial moment" may directly lead to another one of a different order, knowing that:

$$(2) \qquad M_\rho^i = (1/\varrho)\, M^k\, d^{i-k}/\{i-k\}! \quad , \qquad \{i-k\}! = \begin{cases} (i-k)! & \text{for } i \geqslant k, \\ 1/(k-i)! & \text{for } i < k. \end{cases}$$

The „factorial moments" may express as well the static equilibrium ($M^0 = 0$ and $M^I = 0$) as the elastic one, ($M_\rho^{II} = 0$ and $M_\rho^{III} = 0$), writing the deformation along the direction of the removed restraint (Fig. 1), or expressing the variation of distance between two points on the structure:

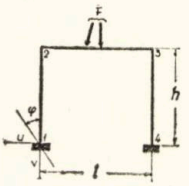


Fig. 1.

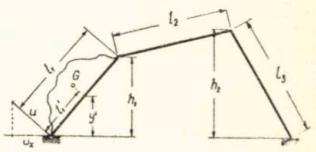


Fig. 2.

$$(3) \qquad \sum y\, \Delta M_{\rho(i)}^{II} = 0\,(\Delta l_{on}).$$

Observing that $y'/l' = y_1/h_1 = u_x/u$, Fig. 2, the elastic equilibrium conditions may also be written using, instead of the angular joints

variations $(\Delta M^{II}_{P(i)})$, the resultants of rotation components at the end of members:

$$\sum y' M^{II}_{P(G)} = 0. \tag{3'}$$

The Rieger method of „fictitious static moments" [2] uses the same relation (3') established by a more involved argument.

The substitution of the real loading with rotations, taken as *concentrated generalized loads*, $(M^{II}_{P(G)} = R)$, leads to some interesting relations bending deformations with stresses.

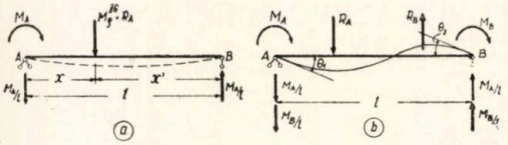


Fig. 3.

Thus, taking as substitute load at the beam loaded by a moment M_A, Fig. 3a, the real rotation, and writing the statical equilibrium conditions ($M^0 = 0$ and $M^I = 0$) for these generalized forces, the following relations are obtained:

$$R_A = \theta_A + \theta_B, \qquad (\sum M^{II}_P = 0), \tag{4}$$

$$\theta_A l - R_A x' = 0, \qquad (\sum M^{III}_{P(B)} = 0), \tag{4'}$$

hence it results $x' = 2l/3$, and

$$\theta_A + 2R_A/3 = 0. \tag{4''}$$

If the beam is loaded with two moments M_A and M_B, Fig. 3b, the generalized forces R_A and R_B (elastic factorial moments of second order—M^{II}_P) appear as substitute loading. From the equilibrium condition, we obtain, similarly:

$$\theta_A + \theta_B = R_B - R_A, \qquad (\sum M^{II}_P = 0), \tag{5}$$

$$\theta_A l + 2lR_A/3 - lR_B/3 = 0\,(\pm u), \qquad (\sum M^{III}_{P(B)} = 0), \tag{5'}$$

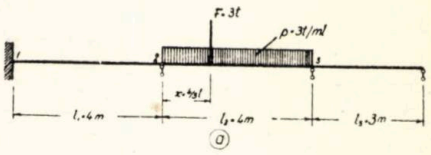
$$-2\theta_A l/3 - R_A l/3 + \theta_B l/3 = 0\,(\Delta_{R_A}), \qquad (\sum M^{III}_{P(R_B)} = 0). \tag{5''}$$

Relations (4), (4'), (4'') and (5), (5'), (5'') are indentical with those deduced purely geometrically in the „traverse method" [3], but they also acquire now a statical significance which allows an easy deduction of any generalized (or particularized) form of „traversing" between joints, and hence, a simplified analysis of statical indeterminate structures.

The use of „factorial moments" presents special advantages in determining the influence lines if it is observed that the area of the

influence line $-Y_{ab} = \int_b^a y\,dx$ — corresponds to the elastic „factorial moment" of the IVth order (M_p^{IV}).

The influence line ordinates $-y_{x(i)}$ — corresponding to the unit displacements, Fig. 4, cases I...IV, are directly computed using „factorial moments"; thus, considering constant rigidity, one has, for case I:



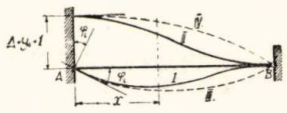


Fig. 4.

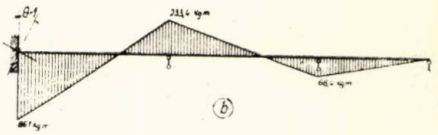


Fig. 5.

$$y_{x(i)} = lx - (4EI/l).x^2/(2EI) + (6EI/l^2).x^3/(6EI) = (1-\xi)^2\,\xi l, \qquad \xi = x/l$$

and for case II:

$$y_{x(i)} = -1 + (6EI/l^2).x^2/(2EI) - (12EI/l^3).x^3/(6EI) = -1 + \xi^2(3-2\xi)$$

and, in the same way for case IV (hinged at the right end)

$$y_{x(i)} = -1 + (3EI/l^2).x^2/(2EI) - (3EI/l^3).x^3/(6EI).$$

The determination of the influence line for the moment M_1, Fig. 5a, requires the bending moments, corresponding to a unit rotation in point 1, shown in Fig. 5b.

For the second span — which is loaded — the ordinate of the influence line for the concentraded load, the area of this influence line as far as the section $x = l_2/3$ (= 4/3 m) and the total area for the whole span, are computed.

Taking $EI = 1000$ and knowing that $V_2 = 300/4$, we firstly compute θ_2, namely:

$$\sum M^{III}_{p(3)} = (300/4).[4^3/(6.1000)] - 4\theta_2 - (233).[4^2/(2.1000)] = 0,$$

hence it follows $\theta = -0{,}264$; and then we obtain directly:

$$y_x = \sum M^{III}_{p(x)} = (300/4).(4/3)^3.[1/(3!.1000)] + 0{,}264.(4/3) - 233.(4/3)^2.[1/(2.1000)] = 0{,}176,$$

$$y_{2x} = \sum M^{IV}_{p(x)} = (300/4).(4/3)^4.[1/(4!.1000)] + 0{,}264.(4/3)^2.1/2 - 233.(4/3)^3.[1/(3!.1000)] = 0{,}152,$$

$$y_{23} = \sum M^{IV}_{p(3)} = (300/4).4^4.[1/(4!.1000)] + 0{,}264.4^2.1/2 - 233.4^3.[1/(3!.1000)] = 0{,}446.$$

This example illustrates how simple is, even for redundant structures, the determination of influence lines (ordinates and partial or total areas) when „factorial moments", are used.

Politechnic Institute of Jassy
Department of Strength of Materials

REFERENCES

1. Şesan A., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1958, **IV** (**VIII**), *1-2*, pp. 407-414.
2. Rieger J., *Calcul des Constructions hyperstatiques*, **I**, **II**, Dunod, Paris, 1931
3. Stewart R. W. u. Kleinlogel A., *Die Traversen-Methode*, Wilhelm Ernst und Sohn Verlag, Berlin, 1952.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ „ФАКТОРИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ" К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

(Резюме)

Устанавливается что „факториальные моменты" могут выражать условия статического и упругого равновесия и, что используя полный угловой поворот стержня в качестве „обобщенной силы" нагрузки, получается соотношение (3′)—соответствующее методу Ригера, а также и соотношения (4), (4′), (4″) и (5), (5′), (5″) соответствующие методу „траверсов", [приобретающего, таким образом, кроме известного чисто геометрического вида и статическую интерпретацию.

Ординаты линий влияния и их поверхности (частичные или полные) вычисляются непосредственно как упругие факториальные моменты III-го и, соответственно, IV-го порядка.

Несложность расчета илюстрируется примерами (рис. 4 и рис. 5).

FOLOSIREA „MOMENTELOR FACTORIALE" LA DETERMINAREA LINIILOR DE INFLUENŢĂ A SISTEMELOR STATIC NEDETERMINATE

(Rezumat)

Se arată că „momentele factoriale" pot exprima condiţiile de echilibru static şi elastic şi că, folosind rotirea totală a grinzii elementare drept *forţă generalizată* de încărcare, se obţine relaţia (3′) — corespunzătoare metodei Rieger — precum şi relaţiile (4), (4′), (4″) şi (5), (5′), (5″) corespunzătoare metodei traverselor, care capătă astfel şi o interpretare statică pe lîngă aspectul pur geometric, cunoscut.

Ordonatele liniei de influenţă ca şi suprafeţele lor, parţiale sau totale, se calculează direct, ca momente factoriale elastice de ordinul III, respectiv, IV. Simplitatea calculului este ilustrată prin exemplificări (fig. 4 şi fig. 5).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

624.04

COMPORTAREA SECŢIUNILOR CU PEREŢI SUBŢIRI DUBLU T, CU TĂLPI INEGALE, ÎN STADIUL ELASTO-PLASTIC

DE

M. DIACONU şi N. PREDA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26—29 iunie 1958

În prezenta lucrare ne ocupăm de determinarea poziţiei centrelor de încovoiere şi răsucire în stadiul elasto-plastic, precum şi de legătura între factorii de încărcare în stadiul limită, pentru secţiuni dublu T, cu tălpi inegale, supuse la torsiune împiedecată.

Rămîn valabile ipotezele de calcul din stadiul elastic, la care se adaogă, pentru tadiul limită, condiţia de plasticitate Huber-Mizés:

(I) $$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_c^2.$$

A. Determinarea poziţiei centrelor de încovoiere şi torsiune la secţiunea dublu T cu tălpi inegale

Centrul de încovoiere este punctul A din planul secţiunii transversale, prin care dacă trece rezultanta eforturilor unitare tangenţiale produse de forţa tăietoare T, nu avem decît încovoiere simplă, lipsind torsiunea.

Centrul de torsiune este punctul din planul secţiunii transversale în jurul căruia se roteşte secţiunea, în cazul torsiunii împiedecate.

I. *Stadiul elastic*

În stadiul elastic cele două puncte caracteristice coincid iar determinarea poziţiei lor se poate face prin mai multe metode.

Centrul de încovoiere în stadiul elastic, pentru o secţiune cu pereţi subţiri, solicitată la încovoiere de forţe ce acţionează pe linia centrelor de încovoiere, se poate determina şi din condiţia ca bimomentul eforturilor unitare normale să fie nul (fig. 1):

$$B = \int_A \sigma\, \omega_A \, dA = \sum \sigma\, \omega_A\, t_i\, ds = 0,$$

de unde:

(1) $$a_i = h\, b_2^3 t_2 / (b_1^3 t_1 + b_2^3 t_2).$$

Notînd $b_1 / b_2 = \beta$ şi $t_1 / t_2 = \gamma$ expresia (1) devine:

(2) $$a_i = h / (\beta^3 \gamma + 1).$$

Centrul de torsiune se poate determina şi din condiţia autoechilibrării eforturilor unitare normale sectoriale care apar la torsiune împiedecată (fig. 2):

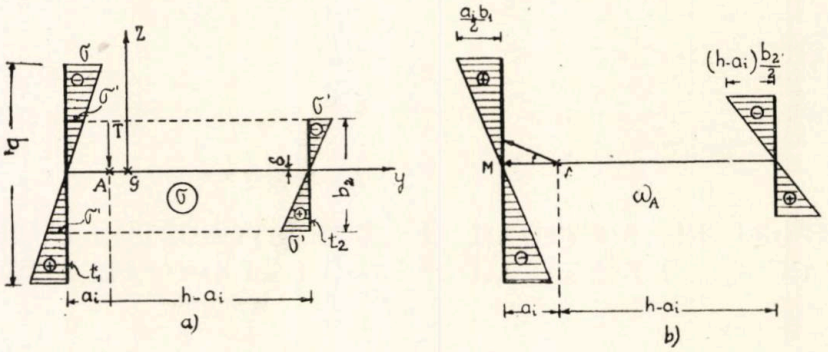


Fig. 1

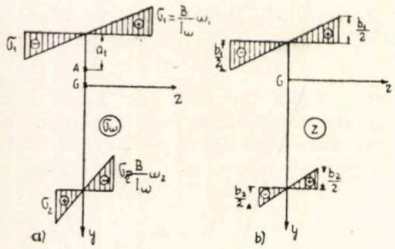


Fig. 2

$$M_y = \int_A \sigma_\omega \, z \, dA = \sum \sigma_\omega \, z \, t_i \, ds = 0.$$

Ţinînd seama că $\sigma_1 = B\omega_1 / I_\omega$ şi $\sigma_2 = B\omega_2 / I_\omega$ găsim·

$$a_i = h / (\beta^3 \gamma + 1). \tag{3}$$

Deci cele două centre coincid.

II. *Poziţia centrului de încovoiere în stadiul elasto-plastic*

O dată cu depăşirea limitei de elasticitate şi înaintarea curgerii pe secţiune, poziţia centrelor de încovoiere şi torsiune se va schimba.

Poziţia centrului de încovoiere se determină anulînd bimomentul eforturilor unitare normale σ provocate de M_y.

Se prezintă două situaţii distincte:

C a z u l 1: plastificarea numai în talpa mare (fig. 3a). Avem:

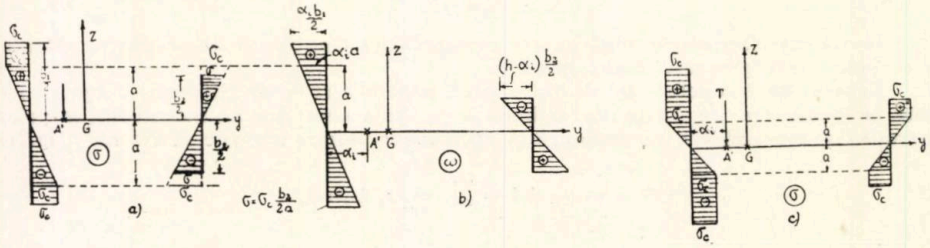


Fig. 3

$$\alpha_i = h b_2^3 t_2 / [t_1 (3 b_1^2 a - 4 a^3) + t_2 b_2^3], \tag{4}$$

în care $2a$ – întinderea sîmburelui elastic.

Limitele de aplicabilitate ale formulei (4) sînt $b_2/2 \leqslant a \leqslant b_1/2$.

Cazul 2: plastificare în ambele tălpi (fig. 3 c). În acest caz:

$$(5) \qquad a_i = h\, t_2(3\, b_2^2 - 4\, a^2) / [t_1(3\, b_1^2 - 4\, a^2) + t_2\,(3\, b_2^2 - 4\, a^2)]$$

valabilă pentru $0 \leqslant a \leqslant b_2/2$.

Cînd $a = b_2/2$ se găsește aceeași valoare pentru a_i plecînd fie de la (4), fie de la (5), ceea ce confirmă justețea rezultatelor căpătate.

În stadiul limită, cînd $a = 0$, avem:

$$(6) \qquad a_i = h\, b_2^2\, t_2 / (b_1^2\, t_1 + b_2^2\, t_2) = h/(\beta^2\, \gamma + 1).$$

Același rezultat se capătă plecînd și de la diagrama σ în stadiul limită.

Determinarea poziției centrului de încovoiere în stadiul elasto-plastic se poate face plecînd și de la considerentul că tălpile au aceeași curbură cînd forțele exterioare sînt aplicate în planul centrelor de încovoiere.

Atît pentru cazul *1* cînd $M_1/[Ea\,(Spl_1 + W_{e_1})] = M_2/(E\,I_2) = dy^2/dx^2$ cît și pentru cazul *2* cînd $M_1/[Ea\,(Spl_1 + W_{e_1})] = M_2/[Ea(Spl_2 + W_{e_2})]$ se obțin expresiile (4) și (5) de mai sus, ceea ce constituie o verificare a rezultatelor găsite.

S-au introdus notațiile: $Spl_1 = t_1\,(b_1^2/2 - a^2)$; $W_{e_1} = 2\,t_1\,a^2/3$ și cele analoage.

Particularizînd pentru secțiuni dublu T cu tălpi egale, avem $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $a_i = h/2$. Făcînd calculele pentru secțiunea cu $\beta = 2$ și $\gamma = 0{,}25$ se obține diagrama de deplasare a centrului de încovoiere cu pătrunderea curgerii, reprezentată în fig. 4 a. Pentru secțiunile dublu T cu $\gamma = 1$ și pentru valori $\beta > 1$ se dau în fig. 4 b pozițiile centrelor de încovoiere pentru stadiul elastic și cel limită.

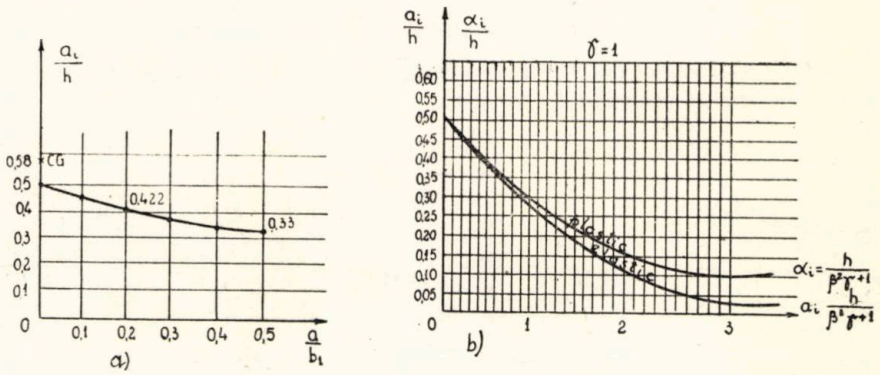


Fig. 4.

Din cele arătate, se pot trage o serie de concluzii deosebit de importante și anume

a) centrul de încovoiere al secțiunii dublu T, cu tălpi inegale, se apropie de centrul de greutate, o dată cu pătrunderea plastificării;

b) centrul de încovoiere în stadiul plastic, pentru secțiuni cu tălpi de aceeași grosime, se deplasează față de poziția lui din domeniul elastic, cu atît mai mult cu cît raportul lungimilor tălpilor este mai mare. Înseamnă că, chiar dacă în stadiul elastic forțele exterioare acționînd pe linia centrelor de încovoiere produc numai încovoiere simplă (M_y), totuși, în stadiul plastic, aceleași forțe produc și torsiune împiedecată. Dacă forțele acționează pe linia centrelor de greutate — așa cum obișnuit se întîmplă — o dată cu trecerea în domeniul plastic, momentul de torsiune se micșorează;

c) la profilul dublu T, cu tălpi egale, poziția centrului de încovoiere rămîne neschimbată în ambele domenii.

Rezultatele căpătate concordă şi cu cele stabilite de A. I. Strelbiţkaia pentru profil U [3].

III. *Poziţia centrului de torsiune în stadiul elasto-plastic*

Scriind că eforturile unitare normale sectoriale se autoechilibrează ($M_y = 0$) se ajunge la o relaţie de bază între dimensiunile secţiunii transversale şi raportul eforturilor unitare de la extremităţile tălpilor (fig. 2 a), în stadiul elastic:

$$M_y = \int_A \sigma_\omega z \, dA = 2\sigma_1 \frac{b_1}{2} \frac{1}{2} t_1 \frac{2}{3} \frac{b_1}{2} - 2\sigma_2 \frac{b_2}{2} \frac{1}{2} t_2 \frac{2}{3} \frac{b_2}{2} = 0 ,$$

de unde:

$$K\beta^2\gamma = 1 \tag{7}$$

în care $K = \sigma_1 / \sigma_2 = \omega_1 / \omega_2$.

Funcţie de dimensiunile secţiunii transversale, în stadiul plastic deosebim trei cazuri:

Cazul a) ($K = 1$, $\beta^2\gamma = 1$). Se ajunge simultan la curgere în extremităţile ambelor tălpi, la acţiunea bimomentului.

Cazul b) ($K < 1$, $\beta^2\gamma = 1/K$). Se ajunge la curgere, întîi în extremitatea tălpii mici.

Cazul c) ($K > 1$, $\beta^2\gamma = 1/K$). Se ajunge la curgere, întîi în extremitatea tălpii mari. În cazurile b) şi c) vom avea iniţial o plastificare unilaterală—într-o singură talpă — şi ulterior plastificarea bilaterală, pe care le secţiunile din cazul a), o întîlnim o dată cu depăşirea limitei de elasticitate.

III$_1$. *Plastificare unilaterală*

Cazul b). Plecînd de la diagramele σ_ω (fig. 5 a) şi ω (fig. 5d) şi scriind că $M_y = 0$ găsim poziţia centrului de torsiune:

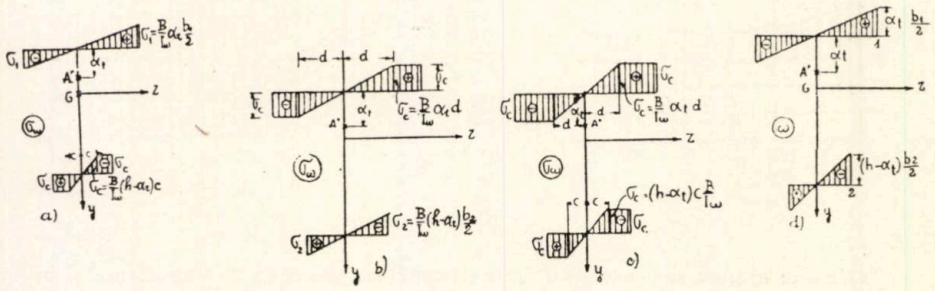


Fig. 5.

$$a_t = t^2 (3 b_2^2 c - 4 c^3) h / [b_1^3 t_1 + t_2 (3 b_2^2 c - 4 c^3)] \tag{8}$$

în care $2c$ — întinderea sîmburelui elastic pe talpa mică.

Formula (8) este valabilă pînă se atinge σ_c şi în extremitatea tălpii mari, cînd din condiţia $M_y = 0$ găsim $c = b_2 \sqrt{3 - 2\beta^2\gamma}/2 = b_2 \sqrt{3 - 2/K}/2$, deci în intervalul:

$$b_2 \sqrt{3 - 2K}/2 \leqslant c \leqslant b_2/2 . \tag{9}$$

Cînd $c = b_2/2$ regăsim pentru α_t formula din stadiul elastic.

Secțiunile cu caracteristicile $\beta^2\gamma = 3/2 = 1{,}5$ la care limita inferioară a lui c este zero $(3 - 2\beta^2\gamma = 0)$ nu se comportă bine în stadiul plastic, deoarece cînd talpa mică s-a plastificat complet, în talpa mare, abia la extremitate avem efortul unitar de curgere. Cu mult mai prost se comportă cele la care $\beta^2\gamma = 1/K > 1{,}5$.

Cazul c). Ținînd seama de diagramele σ_ω (fig. 5b) și ω (fig. 5d) și procedînd analog ca în cazul b), găsim:

$$\alpha_t = b_2^3 t_2 h / (3 b_1^2 t_1 d - 4 d^3 t_1 + b_2^3 t_2) \tag{10}$$

în care $2d$ — întinderea sîmburelui elastic în talpa mare.

Limitele de valabilitate ale formulei (10) sînt:

$$b_1\sqrt{3 - 2K}/2 \leqslant d \leqslant b_1/2. \tag{11}$$

Pentru $d = b_1/2$

$$\alpha_t = h/(\beta^3\gamma + 1) = a_t = a_i$$

iar pentru $d = b_1\sqrt{3 - 2K}/2$

$$\alpha_t = h/[\beta\sqrt{3 - 2/(\beta^2\gamma) + 1}].$$

III_2. *Plastificare bilaterală*

Pentru secțiunile a căror dimensiuni respectă relația $\beta^2\gamma = 1$, $K = 1$, cuprinse în cazul a), cît și pentru cele din cazurile b) și c), cînd curgerea a pătruns în ambele tălpi, diagrama lui σ_ω este cea din fig. 5c.

Scriind că eforturile unitare normale σ_ω se autoechilibrează, vom găsi dependența dintre lungimile zonelor elastice pe cele două tălpi:

$$c = \sqrt{\gamma d^2 + 3 b_2^2 (1 - \beta^2\gamma)/4}. \tag{12}$$

Cazul a). Legătura între c și d este liniară fiind dată de:

$$c = \sqrt{\gamma d^2} = d/\beta. \tag{13}$$

Pentru aceste secțiuni plastificarea datorită bimomentului începe simultan în ambele tălpi ($c = b_2/2$, $d = b_1/2$), iar starea limită este atinsă cînd acestea s-au

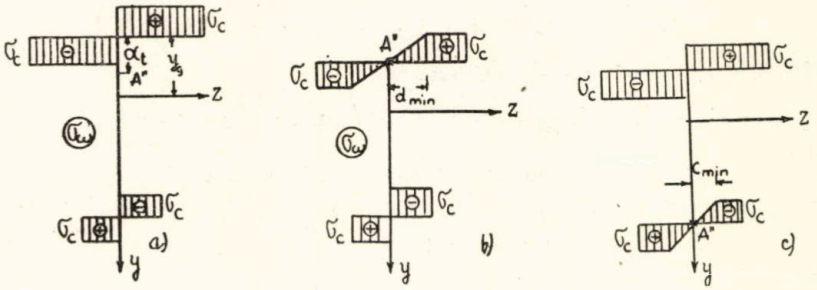


Fig 6

plastificat în întregime ($c = 0$, $d = 0$) (fig. 6 a). Pătrunderea curgerii se face cu viteze diferite în cele două tălpi, afară de cazul profilului dublu T cu tălpi egale ($\beta = 1$, $\gamma = 1$) unde viteza este aceeași (fig. 7).

Cazul b). Vom avea relaţia :

$$c = \sqrt{\gamma d^2 + 3 b_2^2 (1 - 1/K)/4}. \tag{14}$$

Cînd talpa mare lucrează numai în stadiul elastic ($d = b_1/2$), sîmburele elastic de pe talpa mică are întinderea găsită şi la plastificarea unilaterală (v. relaţia (9)). Stadiul limită (fig. 6b) al acestor secţiuni la acţiunea numai a bimomentului, se obţine pentru $c=0$, cînd :

$$d_{\min} = b_1 \sqrt{3(1-K)}/2. \tag{15}$$

Cazul c). Avem aceeaşi dependenţă ca şi în cazul b). Cînd $c = b_2/2$, $d = b_1\sqrt{3-2K}/2$, relaţie dedusă anterior (v. formula (11)).

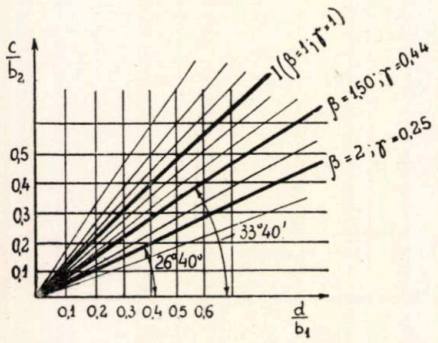


Fig. 7

În stadiul limită (fig. 6 c), $d = 0$

$$c_{\min} = b_2 \sqrt{3(1 - 1/K)}/2. \tag{16}$$

Poziţia centrului de torsiune în situaţia plastificării bilaterale, pentru cazurile a), b) şi c) se deduce scriind egalitatea expresiilor lui σ_c pe cele două tălpi (fig. 5c). Rezultă :

$$a_t = h\,c/(d + c). \tag{17}$$

Particularizînd avem :
Cazul a). $c = d/\beta$ şi deci :

$$a_t = h/(\beta + 1) \tag{18}$$

ceea ce arată că centrul de torsiune rămîne neschimbat în stadiul elastic şi plastic.

Pentru stadiul limită se mai poate deduce expresia lui a_t plecînd de la diagrama lui σ_ω (fig. 6a), scriind că avem numai torsiune împiedecată ($M_y = 0$) şi se capătă acelaşi rezultat.

Cazurile b) şi c). Avem :

$$a_t = h\sqrt{\gamma d^2 + 3 b_2^2 (1 - 1/K)/4}\,/\,[d + \sqrt{\gamma d^2 + 3 b_2^2 (1 - 1/K)/4}]. \tag{19}$$

Această distanţă se poate exprima şi funcţie de c.

În cazul b) limitele de aplicabilitate ale formulei (19) sînt :

$$0 \leqslant c \leqslant b_2 \sqrt{3 - 2/K}/2 \text{ sau } d_{\min} = b_1 \sqrt{3(1-K)}/2 \leqslant d \leqslant b_1/2.$$

În cazul c) limitele pe aplicabilitate sînt :

$$0 \leqslant d \leqslant b_1 \sqrt{3 - 2K}/2 \text{ sau } c_{\min} = b_2 \sqrt{3(1 - 1/K)}/2 \leqslant c \leqslant b_2/2.$$

În stadiul limită, care este cel mai important, vom avea :
în cazul b) $c = 0$ şi deci

$$a_t = 0; \tag{20}$$

în cazul c) $d = 0$ şi deci

$$a_t = h. \tag{21}$$

După cum se observă şi din fig. 6b şi 6c, în stadiul limită al acestei secţiuni se ajunge la existenţa unui sîmbure elastic în formă de T, iar centrul de torsiune se deplasează la intersecţia liniilor mediane a tălpii elastice cu inima.

Tabelul 1

β	γ	c/d	$a_i/h=a_t/h$	a_t/h	a_i/h	y_G/h	Observații
1,20	0,694	0,834	0,455	0,455	0,500	0,540	c—sîmbure elastic talpă mică
1,10	0,827	0,910	0,476	0,476	0,500	0,521	
1,00	1,000	0,000	0,500	0,500	0,500	0,500	d—sîmbure elastic talpă mare
0,90	1,233	1,111	0,526	0,526	0,500	0,476	
0,80	1,562	1,250	0,556	0,556	0,500	0,450	

Tabelul 2

γ	β	K	$a_i/h=a_t/h$	a_t/h	a_i/h	y_G/h	Observații
1	1,12	0,8	0,416	0	0,444	0,474	a_i — centru de încov. elastic
1	1,054	0,9	0,465	0	0,474	0,488	
1	1,00	1,0	0,500	0,5	0,500	0,500	a_t — centru de torsiune elastic
1	0,954	1,1	0,535	1	0,525	0,510	
1	0,902	1,2	0,577	1	0,545	0,524	

Tabelul 3

β	γ	K	$a_i/h=a_t/h$	a_i/h	a_t/h	y_G/h	Observații
1	1,250	0,8	0,444	0,444	0	0,450	a_i—centrul de încov.în stadiul limită
1	1,111	0,9	0,474	0,474	0	0,476	
1	1,000	1,0	0,500	0,500	0,5	0,500	a_t—centrul de tors. în stadiul limită
1	0,909	1,1	0,525	0,525	1	0,521	
1	0,833	1,2	0,545	0,545	1	0,540	

În urma celor relatate mai sus, și analizînd datele minime expuse în tabelul 1 pentru secțiunile din categoria a), din tabelul 2 pentru secțiunile cu tălpi de aceeași grosime ($\gamma = 1$), din tabelul 3 pentru secțiunile cu tălpi de aceeași lățime ($\beta = 1$) și graficul din fig. 8 se pot trage următoarele concluzii:

În stadiul elastic poziția centrelor de încovoiere și torsiune este aceeași.

În cazul pătrunderii curgerii pe secțiune poziția centrelor de încovoiere și de torsiune, în general, se schimbă.

Secțiunile din categoria a) sub acțiunea numai a bimomentului (torsiune împiedecată), ajung să se plastifice complet în stadiul limită, iar poziția centrului de torsiune rămîne neschimbată în stadiul elastic și în stadiul plastic.

Secțiunile din categoriile b) și c), în stadiul limită, sub acțiunea numai a bimomentului, nu ajung la plastificare totală— căci autoechilibrarea lui σ_ω nu s-ar mai face — rămînînd un sîmbure elastic în formă de T, iar centrul de torsiune se deplasează la intersecția tălpii elastice cu inima profilului.

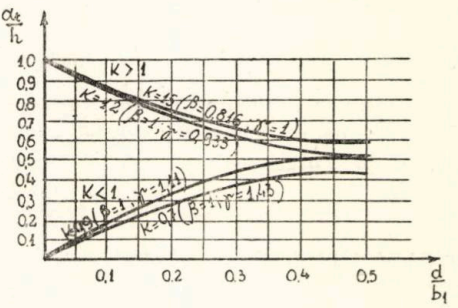


Fig. 8.

Centrul de încovoiere, la toate secţiunile dublu T, în stadiul limită, se apropie de centrul de greutate.

Din tabelul 3 se vede că la secţiunile cu $\beta = 1$ poziţia centrului de încovoiere se menţine aceeaşi în stadiul elastic şi plastic şi foarte apropiată de aceea a centrului de greutate.

Deci secţiunile dublu T cu tălpi inegale şi în special cele cu tălpi egale ($\beta = 1$, $\gamma \neq 1$) au o comportare mai bună în stadiul plastic sub sarcini transversale situate în planul $x\,O\,z$, deoarece momentul de torsiune scade.

Pentru a avea o utilizare cît mai raţională a materialului, în cazul torsiunii împiedecate, vom folosi secţiuni dublu T cu $\beta^2\gamma = 1$, $K = 1$ din categoria a), care la epuizarea capacităţii portante se plastifică complet. Secţiunea dublu T cu tălpi egale ($\beta = 1$, $\gamma = 1$) este un caz particular a celor din categoria a).

B. Legătura între factorii de încărcare, în cazul torsiunii împiedecate, în stadiul limită

În cazul torsiunii împiedecate, factorii de încărcare ce apar sînt: bimomentul B, momentul de torsiune curată M_{tc} şi momentul de încovoiere-torsiune M_ω, datorită cărora pe secţiune iau naştere eforturile unitare corespunzătoare σ_ω, τ_t şi τ_ω.

Pentru stadiul limită, ţinîndu-se seamă de ipotezele admise, se construiesc diagramele de repartiţie pe secţiune a eforturilor unitare σ şi τ, a căror expresii introduse în condiţia de plasticitate conduc la legătura de încărcare.

Vom stabili mai întîi expresiile factorilor de încărcare în stadiul limită, considerînd că acţionează pe secţiune fiecare, separat.

1. *Acţiunea bimomentului.* Cînd pe secţiune acţionează numai bimomentul, în stadiul limită, legătura între acest factor de încărcare şi eforturile unitare normale este:

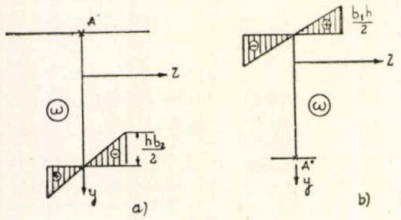


Fig. 9.

$$B_{ext} = \int_A \sigma_\omega\, \omega\, dA = \sum \sigma_\omega\, \omega\, t_i\, ds\,. \tag{22}$$

Cazul a). Ţinînd seama de diagrama σ_ω în stadiul limită (fig. 6a) şi ω (fig. 5d) se ajunge la expresia:

$$B_{ext} = (a_t\, b_1^2\, t_1 + h\, b_2^2\, t_2 - a_t\, b_2^2\, t_2)\,\sigma_c/4 = \sigma_c\, \overline{W}_\omega = B_p\,, \tag{23}$$

unde $\overline{W}_\omega$ — modulul de rezistenţă sectorial plastic şi are expresia:

$$\overline{W}_\omega = h\, b_2^2\, t_2\,/\,4. \tag{24}$$

Dacă la limita domeniului elastic, cînd $\sigma_{\omega max} = \sigma_c$, bimomentul preluat de secţiune este dat de relaţia $B_0 = \sigma_c\, W_\omega$, unde W_ω — modulul de rezistenţă sectorial elastic definit de expresia [1]:

$$W_\omega = I_\omega\,/\,\omega_{max} = [a_t^2\, b_1^2\, t_1 + b_2^3\, t_2\,(h - a_t)^2]\,/\,(12\,\omega_{max}) = b_2^2\, t_2\, h\,/\,6, \tag{25}$$

se poate trage concluzia că pentru a ajunge la epuizarea capacităţii de rezistenţă, cînd există numai bimoment, trebuie mărit acest factor de încărcare peste valoarea sa corespunzătoare limitei elastice, cu raportul $B_p\,/\,B_0 = \overline{W}_\omega/W_\omega = 1{,}5$.

---

1) Expresia lui I_ω este valabilă atît în stadiul elastic cît şi în stadiul plastic, cu observaţia că se înlocuieşte a_t cu α_t.

Cazul b). Ținînd seama de diagrama σ_ω (fig. 6b) pentru stadiul limită, de ω (fig. 9a) și că $\alpha_t = 0$ se obține:

$$B_p = h\, b_2^2\, t_2\, \sigma_c / 4, \tag{26}$$

$$\overline{W}_{\omega(K<1)} = h\, b_2^2\, t_2 / 4, \tag{27}$$

$$I_{\omega\,\mathrm{pl}} = \int_A \omega^2\, \mathrm{d}A = h^2\, b_2^2\, t_2 / 24. \tag{28}$$

Cazul c). În stadiul limită, procedînd ca mai sus (fig. 9b), se găsește:

$$B_{\mathrm{ext}} = B_p = \sigma_c \overline{W}_{\omega(K>1)}, \tag{29}$$

$$\overline{W}_{\omega(K>1)} = h\, b_1^2\, t_1 / 4. \tag{30}$$

În toate cazurile dependența dintre factorul de încărcare B și eforturile unitare normale în stadiul limită este:

a) în stadiul elastic

$$B_{\mathrm{ext}} = \sigma_c\, W_\omega; \tag{31}$$

b) în stadiul plastic

$$B_{\mathrm{ext}} = \sigma_c\, \overline{W}_\omega, \quad \overline{W}_\omega / W_\omega = 1{,}5. \tag{32}$$

2. *Acțiunea momentului de torsiune liberă* (Saint-Venant). Plecînd de la diagrama de repartiție a eforturilor unitare tangențiale în stadiul limită, cînd în secțiune acționează numai momentul de torsiune curată M_{tc} (fig. 10), se poate scrie:

$$M_{t\,\mathrm{lim}} = 2\left[\int_{A\ \text{tălpi}} \tau_c\, y\, \mathrm{d}A + \int_{A\ \text{inimă}} \tau_c\, z\, \mathrm{d}A\right] = \tau_c\,(b_1 t_1^2 + b_2 t_2^2 + h\,\delta^2)/2. \tag{33}$$

Notînd cu

$$\overline{W}_t = (b_1 t_1^2 + b_2 t_2^2 + h\,\delta^2)/2 \tag{34}$$

așa numitul modul de rezistență plastic la torsiune, dependența dintre momentul de torsiune și eforturile unitare, în stadiul limită este:

$$M_{t\ \mathrm{ext}} = M_{tp} = \tau_c \overline{W}_t. \tag{35}$$

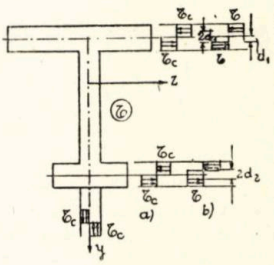


Fig. 10.

3. *Momentul de încovoiere-torsiune* ce ar conduce singur la epuizarea capacității de rezistență a secțiunii ($M_{\omega p}$) se poate deduce cu ajutorul relației:

$$M_{\omega p} = \tau_c[b_1\, t_1\, \alpha_t + (h - \alpha_t)\, b_2\, t_2] = \tau_c\, C, \tag{36}$$

deoarece $\tau_\omega = \tau_c$.

4. *Acțiunea concomitentă a lui B, M_{tc} și M_ω.* În stadiul limită, în cazul acțiunii concomitente, diagrama lui σ este cea din fig. 6a, 6b, 6c, dar făcînd substituția $\sigma_c = \sigma$ iar dependența dintre B și σ este:

$$B = \sigma \overline{W}_\omega. \tag{37}$$

Din acțiunea lui M_{tc} și M_ω, în stadiul limită, vom căpăta o diagramă rezultantă a lui τ a cărei linie neutră se va deplasa pe cele două tălpi, cu cantitățile d_1 și d_2 în raport cu linia mediană (fig. 10).

Întrucît $d_1 = \gamma d_2$, dependenţa dintre M_{tc} şi τ în stadiul limită, în cazul cercetat, este de forma:

$$M_{tc} = 2\tau [b_1 (t_1^2 / 4 - \gamma^2 d_2^2) + b_2 (t_2^2 / 4 - d_2^2) + h\delta^2 / 4], \tag{38}$$

iar cea între M_ω şi τ o vom găsi luînd momentul eforturilor unitare tangenţiale de pe zona nehaşurată a fig. 1 b faţă de centrul de torsiune:

$$M_\omega = 2\tau [b_1 \gamma d_2 a_t + b_2 d_2 (h - a_t)]. \tag{39}$$

Particularizările pentru diverse secţiuni dublu T se fac dînd diverse valori lui a_t. Eliminînd d_2 între relaţiile (38) şi (39) găsim forma generală a dependenţei dintre M_{tc}, M_ω şi τ:

$$M_{tc} = \tau \left(\overline{W}_t - M_\omega^2 (\gamma^2 b_1 + b_2) / \{2\tau^2 [b_1 \gamma a_t + b_2 (h - a_t)]^2\} \right). \tag{40}$$

Notînd cu $A = (\gamma^2 b_1 + b_2) / \{2 [b_1 \gamma a_t + b_2 (h - a_t)^2]\}$ avem $M_{tc} = \tau \overline{W}_t - M_\omega^2 A / \tau$.

Rezolvînd în raport cu τ această ecuaţie, găsim:

$$\tau = M_{tc} / (2\overline{W}_t) \pm \sqrt{M_{tc} / (4\overline{W}_t^2) + M_\omega^2 A / \overline{W}_t}. \tag{41}$$

Ţinînd seama de relaţiile (37) şi (41), pe care le vom introduce în condiţia de plasticitate (1) găsim:

$$B^2 / \overline{W}_\omega^2 + 3 \left[M_{tc} / (2\overline{W}_t) \pm \sqrt{M_{tc}^2 / (4\overline{W}_t^2) + M_\omega^2 A / \overline{W}_t} \right]^2 = \sigma_c^2.$$

După unele transformări şi avînd în vedere că $\overline{W}_\omega \sigma_c = B_p$ iar $\overline{W}_t \sigma_c / \sqrt{3} = \overline{W}_t \tau_c = M_{tp}$, se ajunge la relaţia de bază dintre factorii de încărcare şi în cazul torsiunii împiedecate, în stadiul limită:

$$B^2 / B_p^2 + M_{tc}^2 / (2 M_{tp}^2) \pm M_{tc} \sqrt{M_{tc}^2 / (4 M_{tp}^2) + A M_\omega^2 / (M_{tp} \tau_c)} / M_{tp} + A M_\omega^2 / (M_{tp} \tau_c) = 1. \tag{42}$$

Aici B, M_{tc}, M_ω sînt respectiv bimomentul, momentul de torsiune după Saint-Venant şi momentul de încovoiere-torsiune provocate de încărcarea exterioară, în stadiul limită, în cazul acţiunii lor concomitente pe secţiune. Deoarece A. I. Strelbiţkaia a ajuns la o relaţie analoagă pentru profilul U, se poate trage concluzia că relaţia (42) este valabilă pentru orice secţiune cu pereţi subţiri avînd una sau două axe de simetrie. Ceea ce trebuie calculat pentru fiecare secţiune în parte sînt B_p, M_{tp} şi A ce reprezintă caracteristici ale ei şi sînt funcţii de poziţia centrului de torsiune în stadiul limită, care trebuie determinată pentru fiecare caz.

Pentru profilul dublu T cu tălpi egale ($\beta = 1$, $\gamma = 1$), relaţia (42) devine:

$$B^2 / B_p^2 + M_{tc}^2 / (2 M_{tp}^2) + M_{tc} \sqrt{M_{tc}^2 / (4 M_{tp}^2) + M_\omega^2 / (b h^2 \tau_c M_{tp})} / M_{tp} + M_\omega^2 / (b h^2 M_{tp} \tau_c) = 1. \tag{43}$$

Cînd pe secţiune avem acţiunea concomitentă a lui B şi M_{tc}, iar momentul de încovoiere-răsucire poate fi neglijat, relaţia dintre factorii de încărcare în stadiul limită este:

$$B^2 / B_p^2 + M_{tc}^2 / M_{tp}^2 = 1. \tag{44}$$

În cazul cînd momentul de torsiune curată lipsește și pe secțiune acționează numai B și M_ω, funcția de legătură în stadiul limită este de forma:

$$B^2 / B_p^2 + M_\omega^2 / M_{\omega p}^2 = 1 \tag{45}$$

și trebuie dedusă plecînd de la diagramele $\sigma(B)$ și $\tau(M_\omega)$ în stadiul limită. Cînd $B = 0$ și $M_\omega = 0$ dăm peste cazul cunoscut al torsiunii libere a profilelor cu pereți subțiri.

Cunoscîndu-se expresia factorilor de încărcare funcție de sarcina exterioară M_t și deschidere, cu ajutorul relațiilor stabilite se poate determina încărcarea ce duce la epuizarea capacității de rezistență a secțiunilor cu pereții subțiri avînd una sau două axe de simetrie,

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Rezistența Materialelor, Statică și Beton

BIBLIOGRAFIE

1. Bezuhov N. I., *Teoria elasticității și plasticității*, Ed. tehn., Buc., 1957, (trad. din limba rusă).
2. Стрельбицкая И. А., Экспериментальное исследование кручения тонкостенных балок за пределом упругости, Инж. сб., 1952, **XIII**.
3. — Исследование работы тонкостенного швеллерного профиля за пределом упругости, АН УССР, Киев, 1956.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ РАБОТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ С НЕРОВНЫМИ ПОЯСАМИ

(Резюме)

Изучается работа в упруго-пластической стадии двутавровых тонкостенных стержней, подвергающихся стесненному кручению. Указывается возможность определения центра изгиба и кручения, а также даются соотношения между усилиями в сечении, в предельном состоянии.

В упругой стадии центры изгиба и кручения совпадают.

В упруго-пластической стадии положение центра изгиба разнится, вообще, от положения центра кручения.

Что касается пластичности, то она может быть односторонней, или же двусторонней, в зависимости от величин отношений размеров сечения.

В случае, когда профиль подвержен стесненному кручению, можно получить рациональное распределение материи в сечении.

LE COMPORTEMENT DES SECTIONS DOUBLE T AUX AILES INÉGALES ET PAROIS MINCES AU DELA DE LA LIMITE D'ELASTICITÉ

(Résumé)

Les Autcurs étudient le comportement des sections double T aux ailes inegales et parois minces au dela de la limite d'élasticité, soumis à torsion nonuniforme.

On détermine les positions des centres de flexion, de torsion tant que la relation entre les facteurs de chargement à l'état limite.

Dans l'état élastique, les centres de flexion et de torsion coïncident.

Dans l'état élasto-plastique la position du centre de flexion diffère en général de celle du centre de torsion.

Quant à la plastification, elle peut être soit unilatérale, soit bilatérale, selon la valeur du rapport des dimensions de la section.

Lorsque le profil est soumis à une torsion nonuniforme, on peut metre en évidence une distribution rationelle de la matière dans la section.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

624.04

ОБ ЕДИНОЙ ФОРМЕ МЕТОДА СИЛ И МЕТОДА ДЕФОРМАЦИИ

АНТОН ШЕСАН

Выдержка из доклада представленного на научной сессии Ясского Политехнического Института от 19 — 21 мая, 1956 г.

1. Основные методы в строительной механике, метод сил и метод деформаций, объединяющие все известные приемы и способы решения статически неопределимых систем, являются разными методами — и порой даже противоположными—с точки зрения принципов, структуры, условия равновесия, основных систем, неизвестных и т. д.

Сопоставляя канонические уравнения [1], [2], метода сил:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n_s} \delta_{ik} X_k + \Delta_{ip} = 0, \ (i = 1,2,\ldots,n_s)$$

с уравнениями метода деформаций:

$$(2) \qquad \begin{cases} a) \ \sum_{k=1}^{n_e} r_{ek} Z_k + \sum_{i=1}^{n_e} r_{ei} Z_i + R_{ep} = 0, \ (e = 1,2,\ldots,n_e), \\ b) \ \sum_{k=1}^{n_c} r_{ck} Z_k + \sum_{i=1}^{n_c} r_{ci} Z_i + R_{cp} = 0, \ (c = 1,2,\ldots,n_c). \end{cases}$$

где n_s, n_e и n_c представляют собой степени статической и упруго-кинетической неопределимости системы, отмечаем что между ними существуют ряд сходств, противоположностей и взаимностей.

В то время как метод сил решает статическую неопределимость системы, используя условия упругого равновесия, метод деформаций решает упруго-кинематическую неопределимость, используя условия статического равновесия. Неизвестные метода сил, усилия ***MTN***, заменяющие лишние удаленные связи, в то время как неизвестные метода деформаций Z_i, Z_k соответствуют введенным дополнительным связям, обеспечивающим неподвижность узлов системы.

В нижнем пределе основные системы этих двух методов представляют одну и ту же систему, а именно данную реальную систему ($n_x = n_z = 0$). При последовательных удалениях и соответственно, последовательных введениях дополнительных связей, число неизвестных нарастает, основные системы отличаясь развитием в противоположных направлениях, так что в обычном высшем пределе, основные системы становятся статически и, соответственно, упрого-подвижно определимы-

ми ($n_x = n_s$ и $n_z = n_c + n_e$); эти основные системы удобны для составления канонических уравнений, коэффициенты которых обладают взаимностью (даже в системах обоих методов ($\delta'_{ik} = -r_{ki}$)).

Используя в методе деформаций форму активных моментов [6] группы *a*) и *b*) канонических уравнений (2) соответствующие условиям статического равновесия узлов ($\sum M_i = 0$) и кинематической цепи ($\sum F = 0$ или $L\,M\,V = 0$) могут быть подобными каноническим уравнениям (1) метода сил

$$(2') \qquad \sum_{k=1}^{n_e+n_c} \mu_{ik} M_k + \mathfrak{M}_i = 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n_e+n_c),$$

это исходя из самого выражения обобщенных активных моментов (узлов и кинематической цепи).

Смешанный метод (А. А. Гвоздева) связывает оба метода, сил и деформаций; если используем соотношение (2'), тогда канонические уравнения смешанного метода принимают вид:

$$(3) \quad \begin{cases} a) & \sum_{k=1}^{(n_s)A} \delta_{fk} X_k + \sum_{i=1}^{(n_e+n_c)B} \delta'_{fi} M_i + \Delta_{fp} = 0, \quad (f = 1,2,\ldots,(n_s)_A), \\ b) & \sum_{k=1}^{(n_s)A} \mu'_{dk} X_k + \sum_{i=1}^{(n_e+n_c)B} \mu_{di} M_i + \mathfrak{M}_{dp} = 0, \quad (d = 1,2,\ldots,(n_e+n_c)_B), \end{cases}$$

где индексы A и B обозначают статически определимую часть и соответственно кинематически определимую часть основной системы.

Если для каждой из группы *a*) и *b*) соотношения (3) принимаются как нагрузки неизвестные группы *b*) и, соответственно группы *a*) (так например $\Delta^*_{fp} = \Delta_{fp} + \sum \delta'_{fi} M_i$), то получаются группы уравнений:

$$(3') \quad \begin{cases} a) & \sum \delta_{fk} X_k + \Delta^*_{fp} = 0, \quad (f = 1,2,\ldots,(n_s)_A), \\ b) & \sum \mu_{di} M_i + \mathfrak{M}^*_{dp} = 0, \quad (d = 1,2,\ldots,(n_c+n_e)_B). \end{cases}$$

Того же рода (по своей структуре) являются и соотношения (1) и (2') каждая группа распространяясь только по одной части (A или B) данной системы.

2. Если в методе сил число неизвестных больше степени статической неопределимости ($n_x > n_s$) [1], то вместо известных условий упругого равновесия $\Delta_i = \dfrac{\partial L}{\partial X_i} = 0$ пишутся три группы уравнений;

$$(4) \quad \begin{cases} \text{I)} & \Delta_i = \dfrac{\partial L}{\partial X_i} + \sum \beta_c \dfrac{f_c}{\partial X_i} + \sum \alpha_e \dfrac{f_e}{\partial X_i}, \\ \text{II)} & f_c = \begin{cases} \sum F_{(c)} = 0, \\ LMV_c = 0 \end{cases} \quad (c = 1,2,\ldots,n_c), \\ \text{III)} & f_e = \sum M_{ki} = 0, \quad (e = 1,2,\ldots,n_e). \end{cases}$$

Первая группа содержит условия упругого равновесия в новой основной системе—гипостатической, остальные две группы будут функции связи между неизвестными X_i, ставшими зависимыми между собой, представляют условия статического равновесия соответствующих механизмов кинематических цепей и узловых, получаемые при отбрасывании дополнительных связей. Отметим, что уравнения второй группы (II) могут содержать либо полное равновесие $f_c(x_i, P_i) = 0$, либо же равновесие только статически неопределимых величин $f_c^n(X_i) = 0$, в котором случае нужно считать как [1] дополнительную нагрузку обобщенную силу (F^0) для уравновешивания соответствующего механизма (кинематической цепи) под действием внешней нагрузки: $f_c^b(P_i, F^0) = 0$. Это примечание действительно во всех методах, которые используют условия равновесия смещения узлов, несмотря на то, как выражается это условие—способом проекции, началом возможной работы или же выражением активных моментов [1], [2], [6]. Отмечается, что к каждой дополнительной неизвестной X_i $(i > n_s)$ метода сил, присоединяется неизвестная β_c или α_e; это означает, что каждое отбрасывание связей сопровождается блокированием деформаций для того, чтобы обеспечить равновесие основной гипостатической системы. Следовательно, при использовании гипостатических основных систем, появляются Z даже в методе сил; они появляются всегда парами: X_r—Z_r $(r > n_s)$. Например, если в системе изображенной на рис. 1, кроме шарниров, необходимых для получения статически определимой системы (примерно, шарниры: *1*, *2*, *8*, *7*, *9*, *10*, *3*, *4*, *5*, *6*, *11*, *12*), вводим и шарниры *13* и *14* (полные) соответствующие обоим кинематическим цепям, а также и шарниры *15*, *16*, *17*, и *18* (штриховые) соответствующие механизмам узлов, и делая тоже самое и в узлах с двумя стержнями (вводим шарниры *19* и *20*-пунктированные), получаем $(n_s + n_e + n_c)$ уравнения упругого равновесия — I-я група соотношения (4) — и $(n_c + n_e)$ уравнения статического равновесия — II-я и III-я группы соотношения (4); в итоге получается системас $[n_s + 2(n_c + n_e)]$ уравнениями и с $(n_s + n_c + n_e)$ неизвестными силами (X_i) и $(n_e + n_c)$ неизвестными деформациями (X_k).

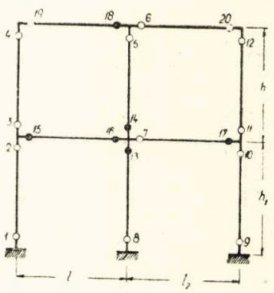


Рис. 1

Полученная система уравнений содержит неизвестные обоих методов сил и деформаций; при исключении неизвестных Z_k или же X находим известные канонические уравнения метода деформаций.

Если неизвестные X_i суть моменты, вышеуказанная система отличается от метода неопределенных коэффициентов, обобщающего применение уравнений моментов к различным рамам (Филипеску) [1], только тем, что отбрасываются связи *19* и *20* (X_{19}, X_{20} и соответствующие им Z).

Отмечая связь. существующую между методом неопределенных коэффициентов и методом Кросса, проф. Кристя Матееску [4] обобщает метод распределения моментов путем использования начала возможной работы, и применяет его к расчету пространственных систем перекрестных систем, плит и др.

Если в основную систему, статически определимую (рис. 2 а) неразрезной балки, вводим дополнительные шарниры *4, 5* и *6* (рис.2 b), то появля-

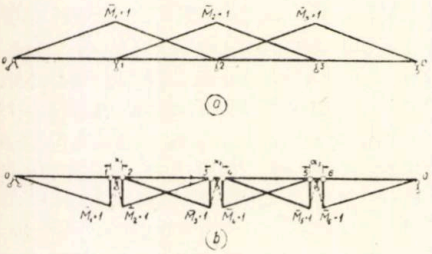


Рис. 2

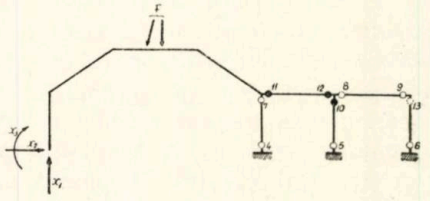


Рис. 3

ются неизвестные α_1, α_2, α_3; в этом случае, вместо исходной системы трех уравнений упругого равновесия, получаются 6 уравнений упругого равновесия и 3 уравнения статического равновесия, в итоге получается система с 9-ю уравнениями и 9-ю неизвестными. Дополнительные неизвестные X_4, X_5, X_6, и присоединенные им α_1 α_2 и α_3 разделяют исходную систему на элементарные независимые системы, таким же родом как и неизвестные Z метода деформаций. Статическому смыслу изменения основной системы соответствует, с математической точки зрения, превращение в нуль многих побочных коэффициентов δ_{ik}, так как единичные эпюры распространяются на протяжении только одного пролета (рис. 2 b). Так например, уравнение упругого равновесия, соответствующее неизвестной X_2, при основной системе (рис. 2а), при $X_2 = \text{const.}$, имеет вид:

$$(\Delta_2) \qquad l_{12}(2X_2+X_1)+l_{23}(2X_2+X_3)=l_{12}(2\mathfrak{M}_{21}+\mathfrak{M}_{12})+l_{23}(2\mathfrak{M}_{23}+\mathfrak{M}_{32})$$

где $\mathfrak{M}_{ik}$ — моменты защемления от внешней нагрузки. Это последнее уравнение, при использовании основной системы (рис. 2б), принимает вид:

$$(\Delta_2') \qquad l_{12}(2X_2+X_4)=l_{12}(2\mathfrak{M}_{21}+\mathfrak{M}_{12})+6EI\alpha_2$$

Неизвестные X_i группированы по два.

Все сказанное выше остается в силе, несмотря на место или усилие $(M\ T\ N)$, к которым относятся неизвестные x_i. Основная система, на рис. 3, получена сечением $(X_1 X_2 X_3)$ и введением 10 шарниров на концах стержней, из которых четыре дополнительные.

При частичных исключениях неизвестных на участках стержней, получаются уравнения смешанного метода и канонический вид соответствует оставшимся неизвестным, например, $X_1 \ldots X_3$ и $Z_1 \ldots Z_3$.

Разные комбинации в решении отмеченных трех групп системы уравнений (4) ведут не только к известным способам и приемам, а

также указывают и на целый ряд новых возможных приемов для упругого расчета статически неопределимых систем. Каждой системе уравнений и каждой стадии алгебраических операций исключения неизвестных, соответствует, с точки зрения статики, определенная основная система. Так например, исключая неизвестные из I-ой и II-ой группы соотношения (4) —X_i выражая концевые моменты стержней— и подставляя их в III-ю группу того же соотношения, получаются уравнения метода деформации для основной системы с блокированными узлами, но имеющие возможность линейно смещаться [5]. Уравнения трех и четырех моментов, написанные для систем со смещающимися узлами, содержат только неизвестные X_i ($n_x = n_s + n_e + n_c$), неизвестные Z_k будут отброшены при самом составлении уравнений упругого равновесия ($\sum y \Delta\alpha = 0$). Вообще, уравнения первой группы сотношений (4) выражают условия упругого равновесия стержня, а вторая и третья группы выражают равновесие кинематических цепей и равновесие узлов системы. В представленной „канонической" форме, упругое равновесие стержня содержит по два неизвестных усилия, а статическое равновесие узла и кинематической цепи—по одной неизвестой деформаций, так что, в итоге, число неизвестных для любой системы станет:

$$n_y = 2n_1 + n_e + n_c, \text{ где } n_1 \text{ — число стержней.}$$

Однако, число неизвестных n_y можно увеличить, учитывая, что для равновесия всякой части стержня добавляются по четыре неизвестных (два X_i и два присоединенные им деформаций Z_k).

В результате появляется новый ряд возможных вариантов, употребляющие основные системы с блокированными деформациями (деформации различные от тех, которые создают упруго-кинематическую неопределимость данной системы); эти основные системы целесообразны в некоторых случаях, так например, в системах с осью симметрии, в пролете и другие.

Система уравнений (4), содержащая в данных трех группах именно условия равновесия соответствующие трем элементам, составляющим данное сооружение: стержень, узел и кинематическую цепь, представляет собой единую форму всех методов и приемов расчета статически неопределимых систем в упругой стадии и, следовательно, подтверждает диалектическое единство метода сил и метода деформаций, несмотря на их противоположность.

Из всех групп обобщенных уравнений равновесия системы (4) —стержня, узла и кинематической цепи, только первая группа связана с областью для которой была установлена (упругая область). Заменяя условия упругого равновесия стержня условиями механического равновесия или же пластического равновесия и сохраняя неизменными уравнения равновесия узлов и кинематических цепей, получаем обобщенные виды соотношения (4), действительные и для других областей статики: механической или пластической. Как непосредственное применение этих трех групп обобщенных соотношений равновесия в расчете пластической стадии, является кинематический способ (способ комбинирования механизмов стержней, узлов и кинематической подвижности).

Вытекает из этого, что уравнения стержня, узла и кинематической цепи, в обобщенной форме системы уравнений (4), выражают условия равновесия при любой стадии расчета (механической, упругой или пластичной) при условии, чтобы уравнения равновесия стержня были соответственны данной стадии.

Ясский Политехнический Институт,
Кафедра Сопротивления материалов

ЛИТЕРАТУРА

1. Filipescu Gh. Em., *Statica Construcţiilor şi Rezistenţa Materialelor*, ed. II, 1940, Impr Naţ, Buc.
2. Рабинович И. М., Курс строительной механики, **II**, М., 1954.
3. Прокофиев И. П., Теория сооружений, **II**, 1948, М., Трансжелдориздат.
4. Mateescu Cr., *La résolution des systèmes hyperstatiques par deux méthodes récentes*, 1938, Imp. Naţ., Buc.
4. Рогицкий С. А., Расчет рам, Машгиз, 1948, М.
6. Şesan A. şi Orlovschi N., Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1957, **III**, (**VII**), *3—4*, pp. 245—250.

THE METHODS OF FORCES AND DEFORMATIONS AND THEIR UNITY

(Summary)

Starting from the method of the indeterminate coefficients [1] it is proved that the use of basic hypostatic systems leads to three groups of equations (4), the first is of elastic equilibrium and the other two are of static equilibrium (for the joint and sway mechanisms respectively).

To each supernumerary unknown X_i of forces (strain energy) method, corresponding to the degree of hypostaticity of the basic system, is associated, for the reestablishment of statical equilibrium requirements one unknown Z_i (α_k, β_i) — belonging to deformations (slope deflexion) method.

If their number corresponds to the degree of elastic-kinematical indetermination of the structure, there results a system of n_s+2 (n_e+n_c) equations (with $n_s+n_e+n_c$ unknowns X_i and n_e+n_c unknowns Z_k) representing a generalized form which contains unitedly both methods, of forces and deformations.

The various forms of the relation (4) resulting from the elimination of some unknowns in the three groups of equations, may lead to the classical methods as well as to an other known (or possible) methods of elastic analysis.

The three equation-groups (4) representing the equilibrium conditions of *beam*, *joint* and *sway mechanisms*, lead to a general form of equilibrium relations, valid in all ranges of the structures theory, provided that, the group of the beam equations corresponds to the specific range (mechanical, elastic or plastic) in which the analysis is carried out.

ASUPRA FORMEI UNITARE A METODEI FORŢELOR ŞI DEFORMAŢIILOR

(Rezumat)

Se arată că folosirea sistemelor de bază hipostatice, conduce la trei grupe de ecuaţii—relaţia (4) —reprezentînd condiţiile de echilibru de *grindă*, *nod* şi *lanţ cinematic*, şi că această formă generalizată a relaţiilor de echilibru este valabilă pentru toate domeniile staticei, cu condiţia ca grupul ecuaţiilor de grindă să fie corespunzător domeniului respectiv de calcul (mecanic, elastic sau plastic).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

691.4

CONSOLIDAREA PRIN SILICATARE A TERENURILOR DE LOESSOIDE DIN IAŞI

DE

AUREL CERNĂTESCU, GH. DIMA, VIOLETA ROTARU, FLORICA VASILESCU, DAN BRĂNICI şi AVRAM SÎMA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

1. Introducere

Terenul de fundaţii din Iaşi este în cea mai mare parte loessoid avînd o rezistenţă admisibilă de cca 2 kg/cm² şi o tasabilitate importantă prin umezire. Supraetajările şi transformările construcţiilor vechi ducînd la un spor al presiunii pe teren fac necesare lucrări de subzidire sau de consolidare a terenurilor. Consolidarea prezintă interes şi pentru construcţiile noi, atunci cînd conduce la o scădere a preţului de cost a fundaţiilor şi la asigurarea lor împotriva unor tasări provenite din umezirea ulterioară a pămîntului.

În studiul de faţă se arată condiţiile în care se poate consolida pămîntul loessoid de fundaţie din oraşul Iaşi.

În laborator s-au făcut studii pe probe netulburate, recoltate din două zone diferite. Pentru zona a doua studiile au fost completate şi cu încercări pe teren la lucrări de supraetajare şi de înlocuire a planşeelor din lemn cu planşee de beton armat la „Hotel Continental", în urma cărora presiunea pe teren a sporit la 4,5 kg/cm².

Analiza chimică a probelor a urmărit în special determinarea acelor componenţi, care iau parte activă în procesul de silicatare şi anume silicaţii de Ca şi de Mg. Caracteristicile fizico-mecanice sînt date în tabelul 1. În fig. 1 sînt date curbele granulometrice, iar în tabelul 2 se arată conţinutul de Ca, Mg şi SO_4 total, determinat prin analiza extrasului clorhidric cît şi conţinutul aceloraşi elemente, determinate prin analiza extrasului apos, adică conţinutul de Ca şi Mg prinşi în soluţie sub forma combinaţiilor solubile în apă. Se poate observa că deşi conţinutul de Ca este relativ mare (3,3 g la 100 g pămînt la proba *1*) totuşi numai o parte destul de mică (0,0297 g la 100 g pămînt) este prinsă

sub forma sărurilor solubile, în general sulfaţi. Restul se găseşte sub formă de carbonaţi care au o influenţă mai mică asupra procesului de silicatare.

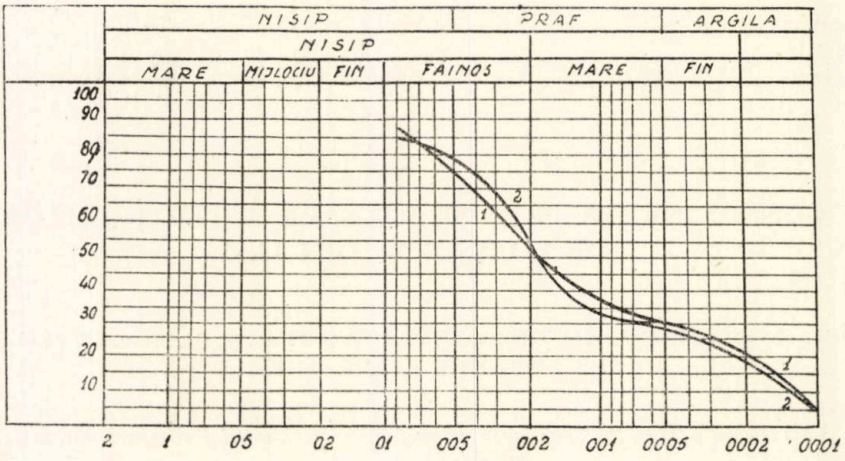


Fig. 1. — Compoziţia granulometrică.
1. Proba Aroneanu,
2. Proba Copou.

Tabelul 1

	Caracteristica	Proba *1* Copou	Proba *2* Centru
1	Porozitate n %	50...54	45..50
2	Permeabilitate K cm/min	83.10^{-4}	18.10^{-4}
3	Umiditate naturală W %	14	15
4	Limită de fărămiţare L_f %	14	16
5	Limită de curgere L_c %	39	39,5
6	Indice de plasticitate I_p	25	23
7	Indice de consistenţă I_c	1	1,06
8	Unghi de frecare interioară	20	17
9	Coeziune C kg/cm^2.	0,10	0,16

Tabelul 2

Proba	Felul analizei	Din extract clorhidric	Din extract apos
1 Copou *2* Centru	SO_4 g/100 g sol	0,25	0,040
	Mg g/100 g sol	0,27	0,016
	Ca g/100 g sol	3,3	0,0297
	SO_4 g/100 g sol	1,90	0,145
	Mg g/100 g sol	10,90	0,415
	Ca g/100 g sol	6,20	0,0408

Compoziția chimică arată posibilitatea de a aplica metoda injectării unei singure soluții de silicat de sodiu, cu un adaus de clorură de sodiu care sporește solubilitatea CaSO în pământ, ceea ce favorizează formarea gelului silicic.

Reacția chimică se exprimă sub forma :

$$Na_2O_nSiO_2 + NaCl + CaSO_4 + mH_2O = nSiO_2\,(m-1)\,H_2O + Na_2SO_4 + \\ + NaCl + Ca(OH)_2.$$

2. Cercetări în laborator și pe teren

Încercările în laborator au avut drept scop să determine dozajele optime de silicat de sodiu, caracteristicile mecanice ale pământului consolidat, stabilitatea la acțiunea apei și totodată să se tragă și unele concluzii generale asupra procedeului de consolidare a loessurilor prin silicatare.

Probele netulburate au fost supuse impregnării cu soluții de silicat de sodiu cu adaus de clorură de sodiu în dozaje variabile. Impregnarea s-a realizat, lăsînd soluția să se filtreze prin aparatul de permeabilitate cu nivel constant, în care au fost așezate probele.

Silicatul de sodiu folosit a fost cel furnizat de uzinele de la Uioara, avînd următoarele caracteristici :

SiO_2 . . . . . 27,23 %
Na_2O . . . . . 8,74 %
NaCl . . . . . 0,21 %
Modulul de silice $n = SiO_2/Na_2O = 3{,}1$
Densitatea $d = 1{,}38$

Literatura indicînd că la un conținut de Ca mai mare de 0,01 g la 100 g pământ, adausul de clorură de sodiu nu este necesar, s-au impregnat un șir de probe numai cu soluție de silicat de sodiu în concentrație de 5%, 10%, 20% și 30%.

O altă serie de probe au fost impregnate cu aceleași dozaje de silicat de sodiu dar cu adause de 1%, 2% și 3% ClNa.

La aceleași probe s-au determinat coeficienții de permeabilitate în momentul începerii filtrării și s-a urmărit apoi variația lor în timp, în vederea stabilirii timpului util pentru injectarea soluției în pământ și a razei de acțiune a injectoarelor.

Dojaze mai mari de 3% de clorură de sodiu nu au dat rezultate din cauza precipitării abundente a gelului de silice chiar din momentul adaugării soluției de clorură de sodiu.

Unele din probele impregnate au fost încercate la compresiune și s-a determinat stabilitatea la acțiunea apei, umflarea și contracția.

Rezultatele încercărilor la compresiune sînt în fig. 2, 3 și 4.

Graficul din fig. 4 reprezintă variația în timp a rezistenței la compresiune a probei *1* (Copou), pământul fiind consolidat cu soluții de silicat de sodiu 15% și diferite dozaje de ClNa. Se vede că rezistența maximă obținută este de circa 17 kg/cm² după 30 zile de la impregnare. La proba fără adaus de ClNa, rezistența crește treptat, ajungînd

după 3 zile la 5,5 kg/cm², după 15 zile la 8,6 kg/cm², după 30 zile la 16 kg/cm² (curba *1*—fig. 4).

Pentru adausul de 1% ClNa rezistenţa nu diferă mult de cea precedentă (curba *2*).

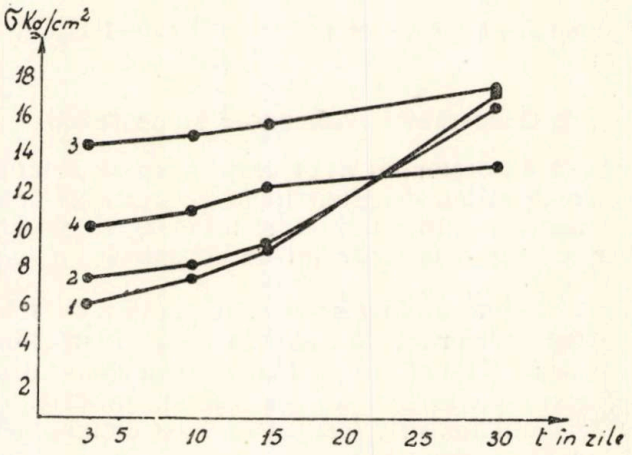


Fig. 2. — Variaţia în timp a rezistenţei la compresiune. Proba *1* Copou.

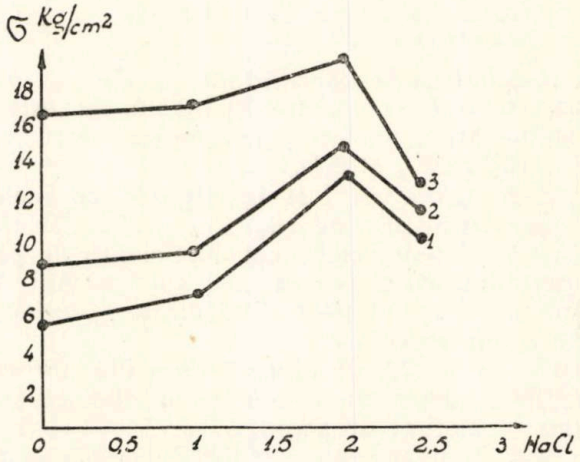


Fig. 3.—Variaţia rezistenţei la compresiune. Proba *1* Copou.
1. Variaţia rezistenţei la compresiune după 3 zile,
2. Variaţia rezistenţei la compresiune după 15 zile,
3. Variaţia rezistenţei la compresiune după 30 zile.

Pentru adausul de 2% ClNa curba *3* se detaşează mult de curbele *1* şi *2* la început, pentru ca după 30 zile rezistenţa să nu depăşească decît cu puţin rezistenţele precedente.

Adausul de 2,5% ClNa produce o scădere a rezistenței la 30 zile, ceea ce arată că pentru pămînturile încercate, dozajul optim este de 2%.

Graficul din fig. 3 confirmă concluzia de mai sus.

Pentru același pămînt, rezistențele obținute cu soluții de silicat sub 15% sînt mai mici decît 5 kg/cm² iar pentru procente mai mari sporul de rezistență este neînsemnat.

În graficul din fig. 4 este arătată rezistența la compresiune în funcție de dozajul de silicat de sodiu, luînd ca parametru procentul de ClNa pentru proba 2 (centru). Și în acest caz se vede că, în general, rezistențele scad pentru procente mai mari de 15% silicat de sodiu. Cele mai mari rezistențe se obțin cu un procent de 15% silicat de sodiu și cu 2% clorură de sodiu.

Rezultatele încercărilor arată necesitatea adăugării de ClNa deși conținutul de calciu este mai mare de 0,01 g la 100 g pământ.

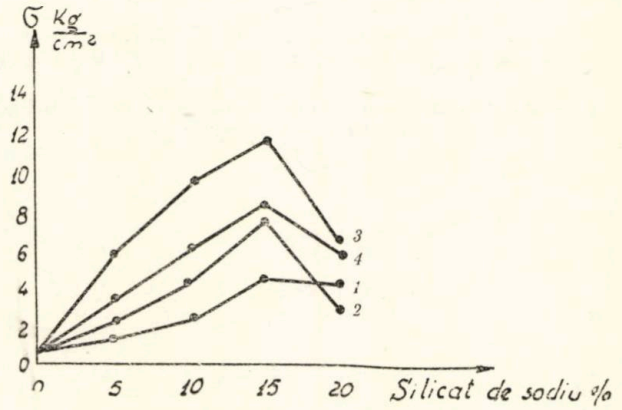


Fig. 4. — Variația rezistenței la compresiune în funcție de concentrația soluției de silicat de sodiu.
Proba 2—Centru.
1. Soluții fără NaCl,
2. Soluții cu 1% NaCl,
3. Soluții cu 2% NaCl,
4. Soluții cu 2,5% NaCl.

Încercarea probelor la compresiune după ținerea lor în apă timp de 4 luni nu a arătat o pierdere esențială a rezistenței, dacă umiditatea lor inițială, înainte de a fi puse în apă, nu era mai mică de 15...18%.

Sub această limită a umidității inițiale scăderea rezistenței este mai pronunțată.

În ce privește stabilitatea la apă a probelor impregnate s-a constatat următoarele:

a) probele păstrate în atmosferă umedă, puse în apă după 3, 15 și 30 zile de la impregnare se comportă foarte bine, neprezentînd exfolieri, crăpături sau prăbușiri;

b) la probele ținute în atmosferă uscată se observă o scădere a stabilității la apă o dată cu scăderea umidității lor; aceasta se explică

prin îmbătrînirea gelului prin pierderea apei. Probele cu umidităţi sub 4% se prăbuşesc imediat după punerea lor în apă.

Încercările la compresibilitate efectuate au arătat tasări foarte mici în raport cu acelea ale pămîntului natural.

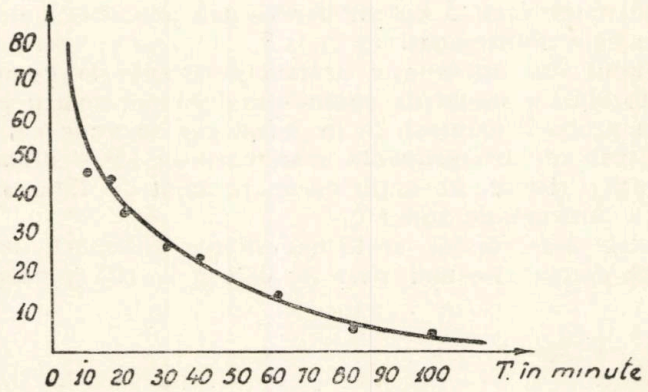


Fig. 5. — Variaţia în timp a coeficientului de permeabilitate. Proba *1* — Copou.

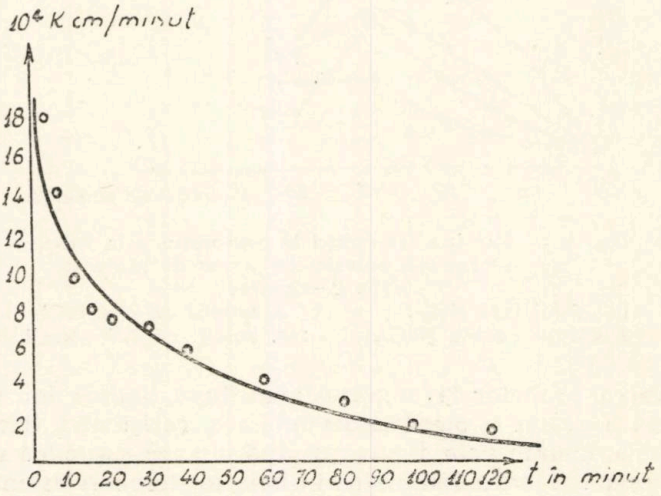


Fig. 6. — Variaţia în timp a coeficientului de permeabilitate. Proba *2* — Centru.

Graficele din fig. 5 şi 6 arată variaţia coeficientului de permeabilitate în funcţie de timp pentru cele două tipuri de pămînt la filtrarea soluţiilor optime corespunzătoare. Coeficientul de permeabilitate scade cu timpul tinzînd către o impermeabilizare completă.

Pentru pămînturile studiate și pentru dozajele optime, injectarea este posibilă în interval de două ore, obținîndu-se o rază de acțiune de 60...70 cm. Pentru pămîntul din zona 2 (centru) raza de acțiune a fost de verificată după injectarea în pămînt a silicatului de sodiu și a soluției de clorură de sodiu prin reacția de fenolftaleină, dezvelind treptat masivul consolidat în jurul injectorului.

S-au luat probe din masivul consolidat pentru determinări de verificare a rezultatelor obținute în laborator. La dozajul stabilit pentru proba 2, densitatea soluției injectate a fost de 1,17. Presiunea de injectare a fost de 1,5...2,5 atmosfere, injectoarele avînd diametrul de 1,5″ și partea inferioară perforată pe un metru lungime. Cantitatea de soluție injectată a fost de 250...300 l/m³ de pămînt consolidat, ceea ce reprezintă un coeficient de umplere a golurilor de 0,7.

3. Considerațiuni asupra formei și dimensiunilor masivului de pămînt consolidat sub fundație

Întrucît există tendința la unii ingineri de a se considera masivul de pămînt consolidat sub fundații existente, ca o nouă fundație, care nu face decît să preia sarcina de la vechea fundație și să o transmită la o adîncime mai mare, am considerat necesar a face cîteva observațiuni asupra acestei probleme.

După cum se arată în lucrarea lui V. V. Askalanov [1], există în general două cazuri de umezire a loessului și anume, primul caz, umezirea loessului de jos care are loc la ridicarea nivelului apelor subterane și în al doilea caz, inundarea cu apă de la suprafață.

Observațiile făcute asupra construcțiilor la ridicarea nivelului apelor subterane arată că tasările loessului în acest caz au un caracter uniform și se produc treptat în timp, ceea ce se explică prin aceea că însăși procesul de ridicare a nivelului apelor subterane se petrece într-un timp relativ îndelungat, mai ales în condițiile unei mici permeabilități a loessului.

Creșterea tasării merge destul de încet, producîndu-se uniform pe toată suprafața clădirii și prin urmare acest tip de umezire este mai puțin periculos pentru construcție. În acest caz deci consolidarea terenului prin silicatizare se va face mai ales în scopul ridicării capacității lui portante.

În al doilea caz, apa pătrunde de la suprafață sub fundație, umezește rapid terenul, îi distruge structura putîndu-se produce tasări brusce și deoarece această umezire este în general neuniformă, tot așa vor fi și tasările, astfel încît acest tip de umezire este periculos. În acest caz, prin silicatizare se va urmări nu numai sporirea capacității portante, ci ea va constitui o măsură eficace împotriva prăbușirii prin înmuiere a loessului.

Dacă există posibilitatea umezirii prin apă de la suprafață, adîncimea de pămînt care urmează să fie consolidată se va stabili în funcție de grosimea stratului de loess sub fundație și anume, dacă această grosime este foarte mare (20...30 m) adîncimea consolidată trebuie să fie

astfel consolidată ca să cuprindă întreaga zonă de umezire intensă care poate fi de 5...10 m. Dacă loessul are o grosime mică iar sub el urmează un strat insensibil la înmuiere, atunci loessul va fi consolidat pe întreaga lui grosime.

Din consideraţiunile de rezistenţă, în cazul cînd se urmăreşte numai o sporire a rezistenţei, forma şi dimensiunile masivului consolidat sub fundaţii trebue stabilite pe baza distribuţiei eforturilor în teren.

Pămîntul consolidat trebuie să fie capabil să reziste sarcinii preluate de la fundaţia existentă şi să transmită această sarcină terenului înconjurător rămas neconsolidat.

Modul de distribuţie a eforturilor în pămînt (problema plană) funcţie de lăţimea fundaţiei precum şi rezistenţa pămîntului rămas neconsolidat determină dezvoltarea necesară, lateral şi în adîncime, a bulbului de pămînt consolidat. Dimensiunile acesteia trebuie astfel alese încît eforturile care apar pe suprafaţa de separaţie dintre bulbul consolidat şi terenul înconjurător neconsolidat să poată fi preluate de acesta din urmă.

Forma bulbului consolidat trebuie deci să urmărească liniile de egal efort şi să se extindă pînă la curbele corespunzătoare eforturilor pe care pămîntul neconsolidat le poate prelua.

Respectînd aceste condiţii vom avea de-a face cu o conlucrare a bulbului consolidat cu terenul înconjurător.

Cu alte cuvinte avem de-a face cu un teren de fundaţie nou, de rezistenţă egală cu aceea a masivului consolidat.

În acest caz masivul consolidat sub fundaţie nu va mai juca deci rolul unei vechi fundaţii sub cea veche.

4. Concluzii

Pe baza celor expuse mai sus se poate trage următoarele concluzii :

a) Există posibilitatea aplicării metodei de silicatare cu o singură soluţie la terenurile de fundaţie ale construcţiilor din Iaşi, ca măsură eficace pentru sporirea capacităţii lor portante şi ca măsură de luptă împotriva prăbuşirilor prin înmuiere.

b) Concentraţia optimă a silicatului de sodiu este de 15% iar cea de NaCl este de 0...2% .

c) Pămîntul consolidat trebuie să se găsească la o adîncime suficientă pentru a nu suferi variaţii mari de umiditate sau să fie protejat împotriva variaţiilor mari de umiditate.

d) Printr-o alegere judicioasă a formelor şi dimensiunilor bulbului ce se consolidează sub fundaţie, se poate realiza conlucrarea acesteia cu pămîntul înconjurător, construcţia putîndu-se considera ca fundată pe un teren avînd rezistenţa admisibilă egală cu aceea a bulbului consolidat.

Institutul Politehnic, Iaşi
Catedra de Construcţii,
Institutul Regional de Proiectări, Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Аскаланов В. В. Силикатизация лессевых грунтов, Масстроиздат, М., 1949.
2. Колтуновская Б. М., Строит, пром., 1958, *5*.
3. Ржаницын Б. А., Силикатизация песчаных грунтов, Масстроиздат, М, 1940.
4. Lehr Hugo, *Fundații*, II, Edit. tehnică, București, 1957.
5. Botea E. şi Stănculescu I., *Curs de fundații*, Buc., 1957.

СИЛИКАТИЗАЦИЯ ЛЕССОВИДНЫХ ГРУНТОВ ДЛЯ ИСКУССТВЕННЫХ ОСНОВАНИЙ В Г. ЯССАХ

(Резюме)

Лабораторные исследования показали, что основания из лессовидных грунтов в г. Яссах могут быть закреплены силикатизацией, нагнетая в грунт 15%-ый раствор $Na_2O_n SiO_2$ и 2%-ый раствор ClNa. Прочность основания увеличивается до 15 кг/см². Этим способом было произведено закрепление грунта основания под зданием у которого, в следствии перестройки, давление на грунт увеличилось до 4,5 кг/см².

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Гранулометрический состав. 1. Сбразец из Копоу; 2. Образец из центра.
Рис. 2. — Вариация напряжений при сжатии в зависимости от времени. Образец *1* из Копоу.
Рис. 3. — Вариация напряжений при сжатии в зависимос и от количества ClNa. 1. Вариация после 3-х дней; 2. Вариация после 15- и дней; 3. Вариация после 30-ти дней.
Рис. 4. — Вариация напряжений при сжатии в зависимости от концентрации раствора $Na_2O_nSiO_2$. Образец из центра. 1. Раствор без NaCl; 2. Раствор с 1% NaCl; 3. Раствор с 2% NaCl; 4. Раствор с 2,5% NaCl.
Рис. 5. — Вариация коэффициента проницаемости. Образец *1* из Копоу.
Рис. 6. — Вариация коэффициента проницаемости. Образец *2* из центра.

LA CONSOLIDATION PAR SILICATISATION DES SOLS DE FONDATION LOËSSOÏDS DE JASSY

(Résumé)

Les expériences effectuées en laboratoire on établi qu'on peut consolider les sols de ondation loëssoïds, en leur augmentant la résistence jusqu'à environ 15 km/cm², en introduisant sous pression une solution de 15% $Na_2O_nSiO_2$ et une solution de 2% ClNa.

La méthode a été appliquée à la consolidation de la fondation d'un imeuble où, à cause de diverses modification, la pression à la base de la fondation a été portée jusqu'à 4,5 kg/cm².

Explication des figures

Fig. 1. — La composition granulométrique 1. Échantillon Copou. 2. Échantillon de Centre.
Fig. 2. — La variation de la résistence à la compression en fonction du temps. Échantillon Copou.

Fig. 3 — La variation de la résistence à la compression en fonction du dosage de ClNa. 1. La variation après 3 jours. 2. La variation après 15 jours. 3. La variation après 30 jours.

Fig. 4 — La variation de la résistence à la compression, en fonction de la concentration du Na_2O_n SiO_2 Échantillon du Centre 1. Solution sans NaCl. 2. Solution avec 1% NaCl. 3. Solution avec 2% Na Cl. 4. Solution avec 2,5% NaCl.

Fig. 5 — La variation en fonction du temps du coefficient de perméabilité. Échantillon *1*, Copou.

Fig. 6 — La variation en fonction du temps du coefficient de perméabilité. Echantillon *2* Centre.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

625.7

ASUPRA NECESITĂŢII STUDIERII PROBLEMELOR RUTIERE ÎN STAŢII – PILOT

DE

N. PREDA, D. ATANASIU, RADU VÎRLAN şi ANTON ŞESAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26 — 29 iunie 1958

1. Necesitatea imperioasă de a se realiza îmbunătăţirea stării de viabilitate a drumurilor, în condiţii economice şi într-un ritm accelerat, impune să se treacă şi în ţara noastră la aplicarea unor sisteme rutiere noi, ieftine şi de mare productivitate, care în ultimii 10...15 ani au luat o extindere deosebită în U. R. S. S. şi în alte ţări. Problema se pune în mod acut în special pentru drumurile locale, care formează majoritatea covîrşitoare a reţelei noastre rutiere.

Introducerea sistemelor rutiere moderne, îmbunătăţirea sistemelor clasice, precum şi găsirea unor soluţii economice bazate pe resurse locale, nu se poate face fără studii şi experimentări prealabile, a căror durată trebuie însă redusă la minimum, din motive determinate de ritmul rapid de dezvoltare al economiei noastre naţionale; cercetările prealabile trebuie să ofere în acelaşi timp siguranţa obţinerii unor soluţii corespunzătoare din punct de vedere tehnic şi ştiinţific.

Cercetarea ştiinţifică începe în laborator cu studiul proprietăţilor fizico-chimice şi mecanice ale materialelor rutiere şi al comportării lor în condiţii variate de umiditate, îngheţ-dezgheţ, etc. Chiar dacă rezultatele de laborator sînt favorabile, nu se poate trece direct la aplicarea pe şantiere a materialelor rutiere studiate; motivele pentru care acest lucru nu este de recomandat, sînt analizate în cele ce urmează.

Caracteristicile traficului (natura şi intensitatea sa), condiţiile locale ale regiunii (natura pămîntului de fundaţie, nivelul pînzei freatice, microclimatul) precum şi procesul tehnologic de execuţie a infra- şi suprastructurii, factori principali în realizarea şi exploatarea drumurilor, trebuie să constituie obiectul unor cercetări detaliate, în complexitatea acţiunii şi interacţiunii lor, luînd în consideraţie şi dinamica aplicării lor, (frecvenţa, durata şi viteza de aplicare).

Diversele moduri de acţionare a factorilor de mai sus (de exemplu umidificarea patului drumului produsă fie dintr-o pînză freatică de mică adîncime, fie prin infiltraţii din şanţuri, acostamente sau printr-o îmbrăcăminte permeabilă), ca şi suprapunerea şi însumarea lor în condiţii variate de regim (de exemplu circulaţie intensă într-o perioadă cu alternări dese ale îngheţului şi dezgheţului), conduc la o gamă extrem de largă de solicitări rezultante, care iau aspecte caracteristice pentru construcţia inginerească pe care o reprezintă drumul.

Simpla suprapunere a rezultatelor obţinute printr-un studiu separat al acţiunii fiecărui factor în parte, nu poate reproduce tabloul comportării reale a drumului la scară naturală. De asemenea, studiul structurilor rutiere pe modele (metodă utilizată în alte domenii de specialitate) este dificil de realizat, întrucît în acest domeniu fenomenele se alterează, diminuîndu-şi sau amplificîndu-şi influenţa lor reală.

Din complexitatea funcţională a numeroşilor factori ce influenţează comportarea unui sistem rutier, din faptul că modelarea la scară de laborator alterează fenomenele, rezultă necesitatea continuării procesului de cercetare rutieră într-o fază intermediară între laborator şi şosea şi anume, în staţii-pilot.

Trecerea directă din laborator pe şosele experimentale nu este indicată şi din cauză că cercetările devin prea costisitoare şi necesită un timp îndelungat de urmărire; în plus, suprapunerea şi dinamica factorilor enumeraţi mai sus este întîmplătoare şi greu de controlat în condiţii naturale, afară de cazul construirii unor „poligoane" experimentale cu trafic şi condiţii impuse. Acestea din urmă solicită însă investiţii importante care depăşesc posibilităţile şi chiar necesităţile ţării noastre. Trebuie subliniat însă că tronsoanele experimentale amplasate pe traseele curente, reprezintă o completare logică a studiilor efectuate în staţii-pilot, ele permiţînd adîncirea şi definitivarea proceselor tehnologice de execuţie şi întreţinere şi deci stabilirea celui mai adecvat mod de lucru pentru o anumită soluţie tehnică (reţetă sau tip de material rutier) a cărui bună comportare sub solicitările de pe şosea a fost demonstrată în prealabil prin încercări în laborator şi în staţii-pilot.

2. O staţie-pilot concepută în mod judicios, care să servească unor scopuri complexe în cercetarea rutieră, trebuie să permită:

a) execuţia, pe o pistă special amenajată, a unor tipuri variate de complexe rutiere (îmbrăcăminţi, fundaţii, straturi suport, pămînturi de fundaţie), în condiţii cît mai apropiate de cele de pe teren şi la scară suficient de mare (eventual naturală) pentru ca rezultatele să nu fie alterate;

b) reproducerea acţiunii circulaţiei auto- sau hipomobile, cu posibilitatea de variaţie în limitele reale a caracteristicilor traficului: sarcina pe roată, presiunea specifică pe aria de contact, mărimea şi forma suprafeţei de contact, valorile acceleraţiilor la demaraj şi ale deceleraţiilor la frînare, valoarea forţelor tangenţiale ale roţii motoare datorită cuplului motor, derapajul, intensitatea traficului, viteza de circulaţie, etc.;

c) reproducerea şi variaţia factorilor meteorologici, hidrogeologici şi locali: precipitaţii şi evaporaţii, temperaturi, alternări de perioade de uscăciune cu perioade de intensă umiditate sau de îngheţ şi dezgheţ, nivel al pînzei de apă freatică, condiţii de scurgere sau infiltraţii ale apelor superficiale, etc.;

d) efectuarea de măsurători diverse: intensitatea traficului şi caracteristicile acestuia, uzura îmbrăcăminţii, deformaţiile şi denivelările sistemului rutier, capacitatea portantă a complexului rutier, umidităţile din corpul drumului şi din stratele suport, caracteristicile fizico-chimice şi mecanice ale materialelor rutiere încercate, etc.

Prin producerea artificială, reglarea şi controlul factorilor şi parametrilor arătaţi mai sus, se crează condiţiile, în general necesare, pentru efectuarea unei complete şi obiective cercetări ştiinţifice: posibilitatea variaţiei fiecărui factor sau parametru în parte, în scopul obţinerii valorii influenţei lor separate; posibilitatea combinării şi suprapunerii lor după relaţii şi raporturi variabile, în vederea studierii comparative a rezultatelor obţinute astfel, faţă de acelea deduse printr-o însumare a comportărilor sub acţiunea separată a factorilor şi parametrilor în cauză; posibilitatea deducerii şi studierii domeniului de interferenţă şi a dinamicii fenomenelor produse de comportarea complexelor rutiere sub solicitările cele mai variate.

Observaţiile sistematice şi măsurătorile de precizie efectuate în staţiile-pilot în cursul experimentărilor, permit stabilirea valorii individuale sau a raportului dintre parametrii şi factorii amintiţi, de la care viabilitatea drumului este ameninţată; de asemenea studiile în staţii-pilot pot scoate la iveală procesele prin care se ajunge la distrugerea sistemului rutier şi contribuie deci la determinarea măsurilor preventive ce trebuie luate atunci cînd se trece la aplicarea pe teren a soluţiei studiate.

Staţia-pilot dă posibilitatea reducerii considerabile a duratei cercetărilor, prin faptul că permite reproducerea solicitărilor reale de pe teren în mod intensiv şi controlat; pe şosele, aceste solicitări se produc necontrolat, întîmplător, şi într-un timp îndelungat.

În staţia-pilot se pot realiza cele mai defavorabile condiţii de lucru şi se pot amenaja simultan mai multe tipuri de complexe sau sisteme rutiere, conducînd atît la concluzii comparative cît şi la obţinerea de rezultate cantitative asupra comportării lor.

Una dintre problemele importante care se poate elucida în cadrul studiilor în staţiile-pilot, este cea referitoare la relaţia economică dintre trafic şi sistemul rutier, putîndu-se stabili traficul limită peste care sistemul studiat nu mai este rentabil sau

valoarea totală (în tone-kilometri) a traficului la care trebuie efectuate fie reparații capitale, fie o întărire a sistemului rutei, pe principiul consolidărilor (sau îmbunătățirilor) succesive.

În consecință, stațiile-pilot permit, cu investiții relativ reduse și în timp scurt, să se obțină date asupra eficacității și rentabilității unor soluții tehnice propuse și studiate în laborator, stabilind dacă ele pot trece în faza aplicării pe șantiere cu sau fără anumite îmbunătățiri, sau trebuie abandonate.

3. În diferite țări, s-au realizat atît stații-pilot (Harkov, Leningrad. Moscova, Paris, Stutigart, Londra, Berlin, etc.) pe lîngă institute de cercetări sau de învățămînt superior, cît și șosele experimentale (Vincennes-Paris, Braunschweig, și mai recent, cele ale asociațiilor WASHO și AASHO).

Este demn de semnalat faptul că în stația-pilot de pe lîngă Școala Politehnică din Berlin, s-a ajuns, într-o perioadă de numai 6 luni [1], la rezultate concludente pentru patru tipuri de îmbrăcăminți așezate pe două tipuri de fundații, realizîndu-se un număr de tone-kilometri egal cu cel determinat pe șoseaua germană cea mai circulată în timp de 5 ani; în schimb, pe șoseaua experimentală de la Vincennes, deși s-a dispus de un trafic controlat (un număr mare de autocamioane au fos desemnate pentru a crea o circulație impusă), studiul a durat 4 ani [2]. Pe șoseaua experimentală de la Braunschweig, după 5 ani de studii, nu s-au putut trage concluzii valabile [3], [4]. De asemenea cercetările întreprinse pe șoseaua experimentală a asociației americane WASHO [5], [6], au necesitat, pe lîngă un timp îndelungat, investiții foarte importante și mobilizarea unui mare număr de cercetători, aparate de măsură și autovehicule.

Experimentările efectuate direct pe șosele-laborator speciale, cu trafic impus și, în general, executate în circuit închis, sînt apanajul țărilor mari, puternic dezvoltate din punct de vedere economic și care posedă o rețea rutieră vastă și complexă, pentru a cărei îmbunătățire se poate justifica sacrificarea unor sume importante din bugetul statului, și a unei armate de cercetători, înarmați cu o aparatură costisitoare, în vederea efectuării unor studii de durată.

Pentru țările în care problema nu se poate pune în acest mod, așa cum este și cazul țării noastre, calea ce trebuie urmată urmează să fie constituită din încercări detailate de laborator, verificări și studii în stații-pilot, definitivări ale cercetărilor pe tronsoane experimentale executate pe drumurile publice (fără trafic impus, însă cu recenzarea acestuia).

4. Pe baza datelor culese din literatura de specialitate, s-au proiectat, executat și dat în funcțiune în țara noastră, două stații-pilot circulare pentru încercări rutiere, una pe lîngă Institutul Politehnic din Iași și cealaltă pe lîngă laboratorul de Cercetări și Încercări Experimentale Rutiere al Ministerului Transporturilor și Telecomunicațiilor din București.

Stația-pilot de la Iași, redată schematic în fig. 1, 2 și 3 are un diametru mediu (al axului pistei) de cca. 10 m.

Echipamentul mecanic de rulare se compune dintr-o grindă metalică *1* suspendată elastic pe două roți motoare de autocamion *2*. Pe brațul format din grinda metalică, sînt montate motoarele electrice *6* care acționează roțile prin intermediul unor reductoare *5*. Greutatea totală a sistemului de rulare este de 3,8 t cu posibilități de mărire pînă la 5...6 t prin încărcarea lăzilor de lestare *7*. Brațul diametral de 10 m lungime, se rotește în plan orizontal în jurul unui pivot central *3* și are posibilitatea de translație în sens vertical, de-a lungul pivotului; de asemenea, se poate roti în plan vertical în jurul unui ax orizontal. În felul acesta, roțile pot urmări denivelările survenite la suprafața pistei, ca urmare a circulației. Simultan cu rotirea în plan orizontal, brațul poate executa și o mișcare de translație în sens orizontal (lateral, cu ajutorul

unui dispozitiv excentric (*4*); roţile pot acoperi astfel, prin circulaţie, o bandă de 1,50 m lăţime. De braţ se pot remorca cărucioare pe pneuri (pentru a mări intensitatea traficului sau a executa compactarea cu pneuri) sau cărucioare pe roţi cu bandaje metalice (pentru a imita circulaţia hipomobilă). Aceste remorci pot permite şi studiul derapajului. Pentru compactarea straturilor se pot monta sau tracta cilindri sau tamburi netezi sau picior-de-oaie. Echipamentul electric se compune dintr-un generator de curent continuu (*2*) şi tablourile (*3*) cu dispozitivele de comandă automată şi aparatele de înregistrare a vitezei, a numărului de ture ale braţului, a tensiunii, aparatele de semnalizare, etc. Curentu. continuu permite realizarea de viteze variabile, opriri şi demarări bruştel

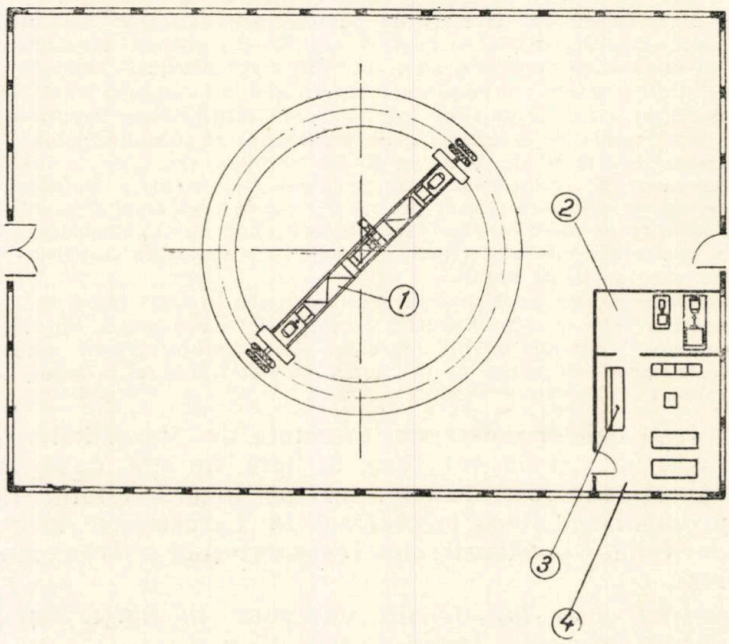


Fig. 1.

Pista de încercare este amplasată într-o cuvă cu pereţi şi radier din beton armat, adîncă de 1,80 m, care se poate umple cu pămîntul ce va constitui corpul şoselei studiate. Raza minimă a pistei este de 3,45 m, cea maximă de 6,10 m, rezultînd o lăţime utilă de 2,65 m, suficientă pentru amenajarea unei părţi carosabile de 1,50 m lăţime, a unor acostamente înguste şi a unui şanţ de scurgere a apelor, pe circumferinţa interioară.

Ansamblul descris mai sus este amplasat într-o hală închisă. De fermele acesteia este suspendată instalaţia de ploaie artificială, compusă din trei ţevi circulare concentrice, prevăzute cu duze speciale; ploaia

se poate realiza pe sectoare separate sau pe întreaga pistă. Sînt prevăzute instalații pentru studiul ascensiunii capilare a apei în corpul drumului, pentru măsurarea și reglarea debitelor, a adîncimii pînzei artificiale de apă subterană, a volumului de apă absorbită prin capilaritate, etc.

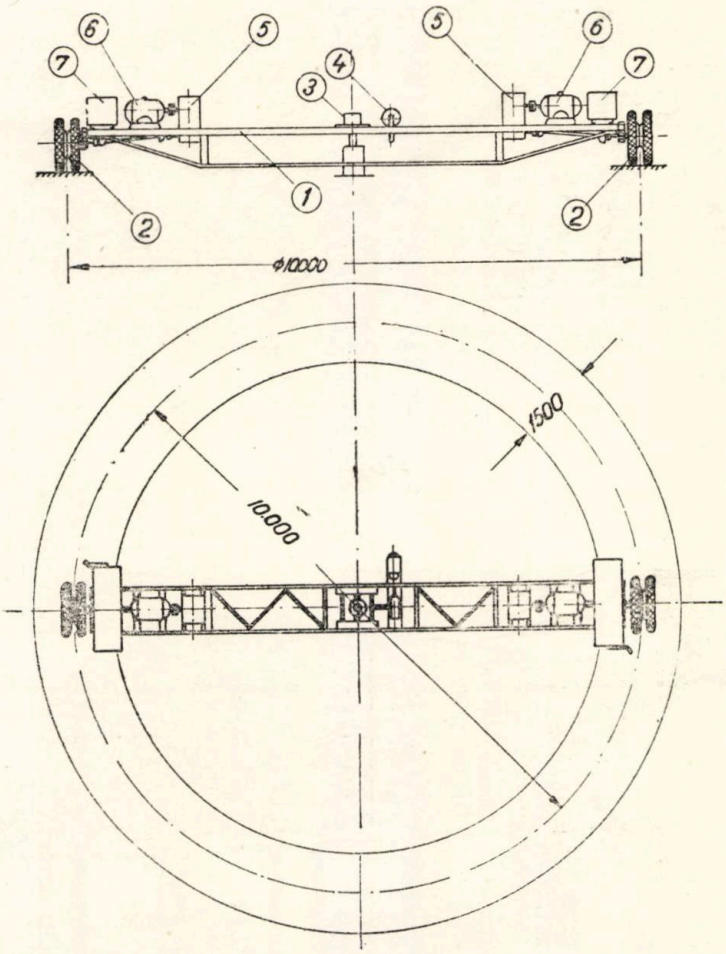


Fig. 2.

O instalație mobilă de îngheț-dezgheț va permite realizarea numărului și duratei ciclurilor dorite pe lungimi limitate de pistă (1,50...2,00 m).

Stația-pilot de la Iași a fost realizată cu sprijinul Sfatului Popular al regiunii Iași.

Stația-pilot de la București, care poate fi văzută în fig. 4, are un diametru mediu de 30 m.

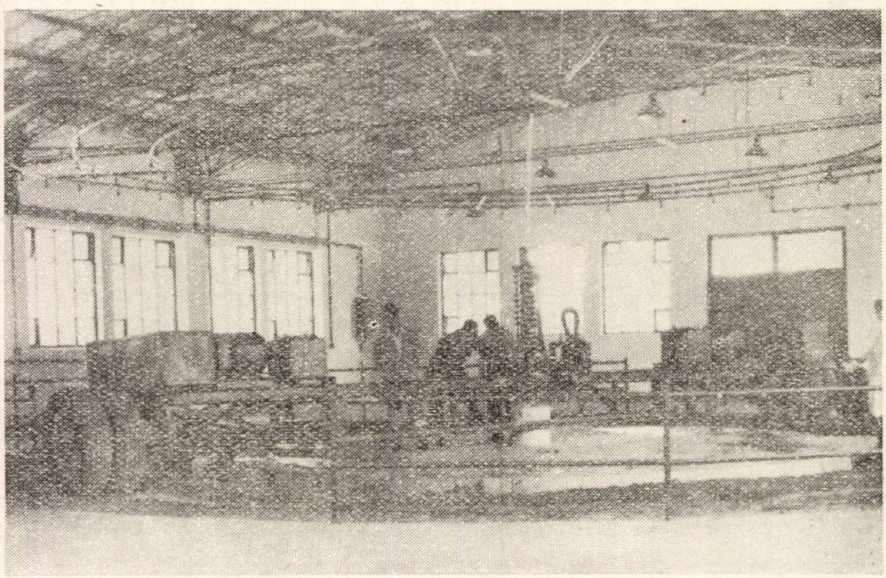


Fig. 3.

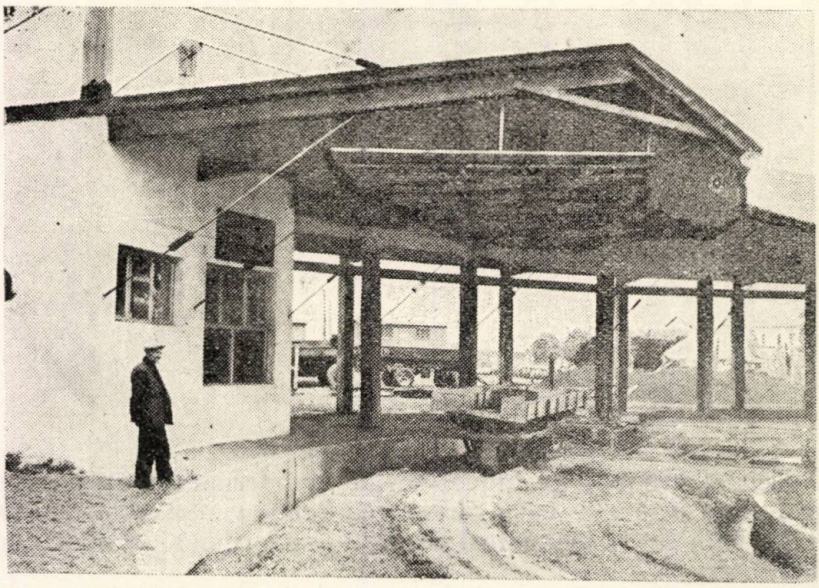


Fig. 4.

Echipamentul mecanic de rulare se compune dintr-o grindă metalică cu zăbrele, radială, de 15 m lungime medie, la capătul căreia se află un cărucior, cu o roată motoare acționată de un motor electric și o roată directoare, ambele de autocamion. Căruciorul poate fi lestat pentru a putea asigura presiuni pe suprafața de contact pînă la valori de 4...6 kg/cm^2. Dispozitive speciale permit deplasarea celor două roți, aflate una în spatele celeilalte, astfel încît ele să calce pe aceeași urmă sau pe făgașe independente pentru a se putea studia acțiunea separată sau simultană a roții motoare și a roții directoare asupra îmbrăcăminților rutiere. Căruciorul poate fi montat în trei poziții diferite în lungul brațului radial, prin scoaterea sau adăugarea unor panouri de cîte 50 cm lungime ale grinzii cu zăbrele; astfel, roțile pot circula de-a lungul pistei de încercare în pozițiile corespunzătoare razelor de 14,50 m 15,00 m, și 15,50 m, acoperind deci 1,50 m din lățimea pistei. Brațul metalic are posibilitatea, ca și în cazul stației-pilot de la Iași, să se rotească în plan orizontal în jurul unui pivot central și de asemenea, el se poate roti în plan vertical, în jurul unei articulații prevăzute la pivotul central, pentru a putea urmări denivelările suprafeței pistei. De braț se pot remorca diverse cărucioare sau utilaje de execuție.

Echipamentul electric este similar cu acel al stației-pilot de la Iași.

Pista de încercare, circulară, se compune dintr-o platformă de 5 m lățime (dimensiune aleasă pe considerentul de a permite manevra și execuția straturilor rutiere cu utilajele curente de pe șantiere). Pe ambele părți, pista posedă șanțuri trapezoidale, cu taluzele dinspre pistă înclinate și din pămînt, dar cu taluzele exterioare, respectiv interioare, verticale și betonate; fundul șanțurilor este de asemenea betonat. În felul acesta apa din șanțuri se infiltrează numai în direcția pistei, producînd o umidificare intensivă a corpului drumului. Șanțurile, atît cele exterioare, cît și cele interioare, sînt întrerupte în patru puncte diametral opuse și posedă instalații separate de alimentare cu apă și canalizare, împărțind astfel pista în patru sectoare distincte; în aceleași patru puncte sînt practicate intrări din afara pistei, pentru accesul utilajelor de execuție.

Pista este acoperită cu o fermă în consolă pe un sfert din lungimea ei (construcția permițînd prelungirea ei și pe restul lungimii); de fermă este suspendată instalația de ploaie artificială, care cuprinde, ca și acoperișul, cîte o jumătate din două sectoare adiacente care pot fi supuse separat sau simultan, ploii artificiale.

Stația posedă diferite dispozitive și instalații pentru efectuarea măsurătorilor necesare.

Stația-pilot de la București a fost realizată de către Sfatul Popular al Regiunii București.

Pentru construcția ambelor stații descrise mai sus, s-a primit un larg sprijin din partea Direcției Generale de Drumuri și Poduri din Ministerul Transporturilor și Telecomunicațiilor.

Institutul Politehnic, Iași,
Catedra de Drumuri și Poduri

BIBLIOGRAFIE

1. Vasiliu M., *Citeva probleme din tehnica drumurilor moderne*, Ed. Furnica, Buc., 1939.
2. Le Gavrian P., *Les chaussées modernes*, Librairie J. B. Ballière et fils, Paris, 1935.
3. Neumann E., *Neuzeitlicher Strassenbau*, Julius Springer, Berlin, 1932.
4. Ariano R., *L'azione dei veicoli sulle pavimentazioni stradali* (din *Ricerchi e studi*, **III**, 1939 şi *Le strade*, iulie, 1947, p. 219 şi următoarele).
5. Carey W. N., Civil Engineering, 1956, **26**, pp. 33—10?.
6. David R., Rev. Gen. des Routes et Aérodromes, 1956, *293*, pp. 37—51.

НЕОБХОДИМОСТЬ ИЗУЧЕНИЯ ДОРОЖНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ЛАБОРАТОРНЫХ ДОРОЖКАХ

(Резюме)

В виду сложности вопросов предъявляемых современной дорожной техникой, авторы указывают на необходимость предварительного изучения дорожных одежд в лабораторных условиях, на специальных дорожках. Таким образом, является возможным уточнить, в лабораторном масштабе, техническую и экономическую эффективность различных дорожных покрытий, до применения их на дорогах.

Даётся описание лабораторной дорожки, первой в Румынии, созданной Ясским Политехническим Институтом, при содействии Областного Совета и Министерства Путей Сообщения. Даются указания в связи с проблемами, которые возможно экспериментировать в этих условиях.

LA NÉCESSITÉ D'ÉTUDIER LES PROBLÈMES ROUTIERS SUR DES PISTES LABORATOIRES

(Résumé)

Compte tenu de la complexité des problèmes posés par la technique routière moderne, les Auteurs justifient la nécessité d'une piste laboratoire pour les essais routiers.

Celle-ci ne représente qu'une phase intermédiaire pour préciser au point de vue technique et économique les solutions trouvées à l'échelle du laboratoire, avant leurs application sur la route.

On présente ensuite la description des premières pistes pour essais routiers, réalisées à l'école Polytechnique de Jassy et à Bucarest avec le concours des Conseils Populaires Régionaux de Jassy et de Bucarest et du Ministère des Transports.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

624

ÜBER DAS THERMISCHE VERHALTEN EINES GEBÄUDES AUS GROSSBLÖCKEN

VON
VIRGIL FOCŞA, VLADIMIR BOGHIAN und GH. ANGHELACHE

Mitteilung an der wissenschaftliche Tagung der technischen Hochschule Jassy, 26–29 Juni 1958

1. Allgemeines über die Konstruktion des Bauwerkes

Im Jahre 1957 entstand in Jassy-Copou ein Studentenheim (Abb. 1) das 300 Studenten beherbergen sollte. Die Räume sind auf 5 Geschosse verteilt und zwar im Sockelgeschoss befindet sich die Wäscherei als auch die Mechanikerwerkstätten. Im Erdgeschoss und in den übrigen 3 Geschossen befinden sich die Wohnräume der Studenten die je drei in einen Zimmer wohnen sollen. Die Übersicht über ein Geschoss enthält Abb. 2.

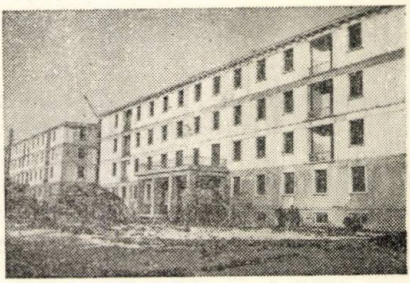


Abb. 1. — Das Studentenheim aus Grossblöcken. Allgemeine Ansicht.

Geplant wurde das Gebäude von I.C.S.O.R. Bukarest und ausgeführt von T.R.C. Jassy. Die Struktur des Bauwerkes besteht aus tragenden Quer- und Längsinnenwänden. Die tragenden Aussenlängswände sind aus ihrem eigenen Gewicht auf ihrer ganzen Höhe belastet. Im Sockelgeschoss wurden die Baufragen in gewöhnlichen Weise gelösst und zwar die Wände wurden aus Ziegelmauerwerk und Beton errichtet, die Decke aus Stahlbeton, wurde in monolither Bauweise hergestellt.

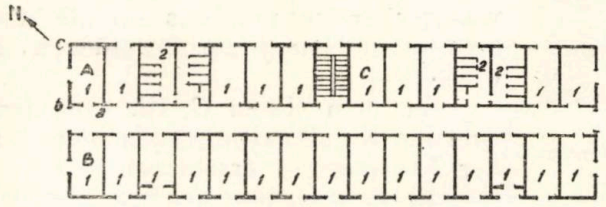


Abb. 2. — Die Übersicht über ein Geschoss (Erdgeschoss, I,II,III, Geschoss). *1.* Studentenwohnraum; *2.* Nebenraum).

Die Wände der oberen Geschosse bestehen aus Grossblöcken in zwei Steinlagen (Abb. 3) die Decken sind Fertigteile. Die Geschosse sind mit Mörtel miteinander verbunden, der in senkrechte Kanäle eingebracht wurde. An der Ecken und an den Verzweigungen der Aussenwände sind Verbundpfeiler vorgesehen, die aus Monolith-Stahlbeton angefertigt wurden.

Das Studium des Betons aus Haldenmaterial, so wie die Anfertigung der Grossblöcke wurde unter der technischen Leitung des wissenschaftlichen Institutes für Bauwesen I.C.S.C. Jassy angefertigt.

2. Das thermo-hygienische Verhalten des Gebäudes

Die Bauarbeiten des Studentenheimes dauerten bis Ende Dezember 1957, im Januar 1958 wurde das Gebäude beendet.

Die Feuchtigkeit der Wände war, als die Gebäude fertiggestellt wurden den Erforderungen entsprechend. Nachdem man es aber zu benützen anfing und sobald die äussere Temperatur zu fallen begann, wurden in einigen Zonen des Baues Kondensationsphänomene sichtbar.

Die Kondensationserscheinungen, die unter dem Einfluss der Temperatur die im Winter des Jahres nicht gross war, trotzdem stattgefunden haben, benötigen ein genaueres Behandeln dieser Frage durch ein genaueres Planen und Bauen, um so mehr, da es sich um neue Baustoffe handelt die angewendet wurden. Das vorliegende Studium betrifft das thermo-hygienische Verhalten des Baues, als auch das Problem wie eben die oben erwähnten neuen Baustoffe in diesem Falle reagieren.

Für das Studium der Kondensationsphänomene wurden drei verschiedene Räume gewählt (*A, B, C,* Abb. 2), in dem man die Lage und Orientierung des Raumes, als auch die Anordnung der Fenster, die Oberfläche und Lage der Aussenwand, in Betracht zog.

Die Kondensationsphänomene sind meist in den Ecken der Räume Typ *A* und *B* bemerkbar, in der Gegend des Monolith-Stahlbetonpfeilers. So wie aus Abb. 4 ersichtlich ist, sind Kondensationsphänomene im Raum *A* im III. Geschoss an der Ecke die nach Norden gerichtet ist, besonders stark erschienen. Dadurch lässt sich erkennen, dass hier die thermischen Veränderungen besonders aktiv sind, so dass die thermische Wiederstandskraft des Bauteiles zu klein ist.

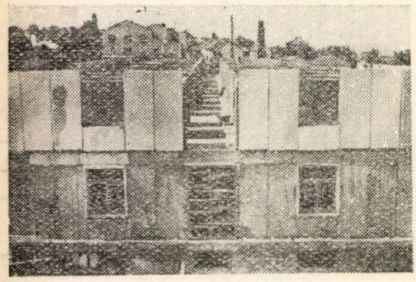


Abb. 3. — Die Gebäude aus Grossblöcken in der Ausführung

In den Raum *B* desselben Geschosses sind die Kondensationsphänomene an der Ecke des Zimmers weniger ersichtlich, was auf die bessere Orientierung zurückzuführen ist (Abb. 5).

In dem Raum *C*, III. Geschoss sind die Kondensationsphänomene an der Aussenwand erschienen und zwar in der oberen Gegend der Ecke (Abb. 6).

Wegen der Hygroskopizität des Baustoffes der Grossblöcke haben sich die Kondensationsphänomene auf die Querwände ausgebreitet (Abb. 7). In einigen Räumen fand auch eine Ausblühung und Abblätterung der oberen Schichten der Wandoberfläche statt (Abb. 8), Zimmer *C*, II. Geschosses und (Abb. 9) Raum *B*, I. Geschoss.

Die Kondensationsphänomene als auch die Feuchtigkeit sind schwä-

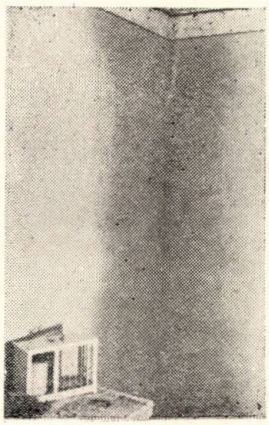


Abb. 5.—Kondensationsphänomene im Raum *B*, Geschoss III.

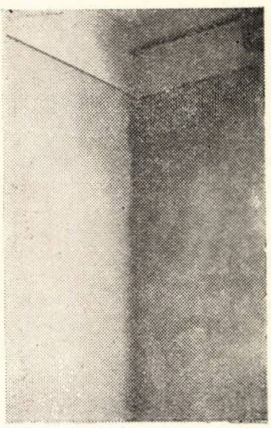


Abb. 6.—Kondensationsphänomene in anderen Zimmern *C*, Geschoss III.

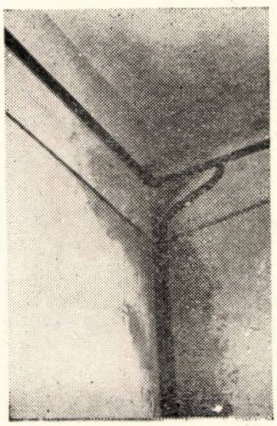


Abb. 7.—Die Verbreitung der Kondensationsphänomene von den Aussen-auf die Querwände.

Abb. 8.— Die Ausblühung in Räumen *C*, Geschoss III

TAFEL I

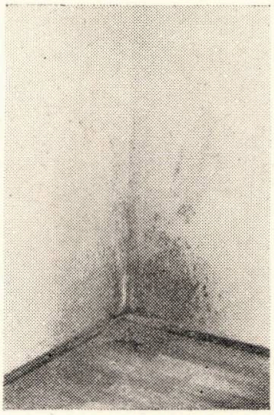


Abb. 9.—Die Ausblühung in Räumen *B*, Geschoss I.

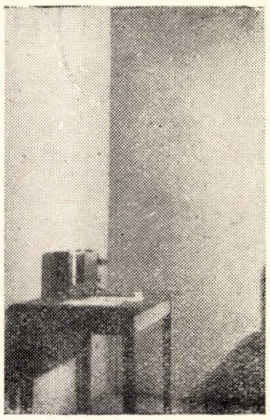


Abb. 10.—Die Kondensationsphänomene, Raum *B*, Geschoss I.

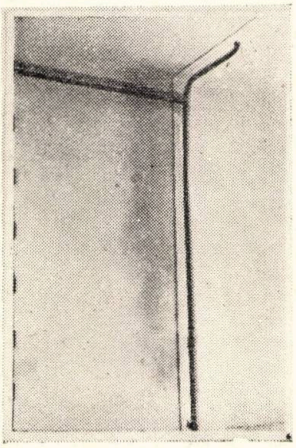


Abb. 11.—Die Kondensationsphänomene in den Eckräumen in der Zone der Gurte aus Monolithbeton.

TAFEL II

cher zum Beispiel im Raum *B*, I. Geschoss (Abb. 10). An den Aussenwänden der Eckräume, als auch in den andern Zimmern, sind Kondensationsphänomene in der Gegend der Monolithstahlbetongurte erschienen (Abb. 11).

Aus den vorliegenden Bildern ist folgendes zu entnehmen:

a) die Kondensationsphänomene, die bei den Gebäuden aus Grossblöcken erschienen sind, sind an den Eckräumen sichtbarer als in den übrigen Räumen;

b) die Kondensation ist längs den Stahlbetonpfeilern und den Stahlbetongurten erzeugt worden. Die Kondensation ist stärker in den nach Norden orientierten Räumen, schwächt in den unteren Geschossen ab;

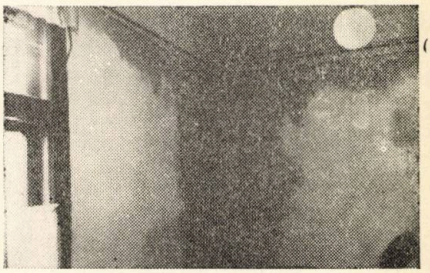


Abb. 4. — Kondensationsphänomene im Zimmer *A*, III. Geschoss

c) die Higroskopizität als auch die grosse Absorption des Betons aus Haldenmaterial hat die Ausbreitung der Kondensations- und Feuchtigkeitsphänomene auch auf die trockenen Zonen der Wände bewirkt.

3. Das thermische Verhalten des Gebäudes nach der Instandsetzung

Um das thermische Verhalten des Gebäudes zu analysiern, wurden die inneren und äusseren klimatischen Faktoren verzeichnet, (die Temperatur als auch die Feuchtigkeit der Luft) in der Zeit der niedrigsten Temperaturen des Jahres 1957/1558.

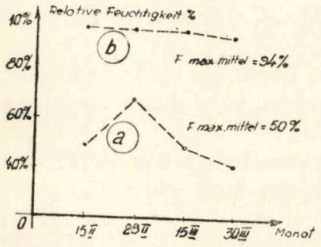


Abb. 12. — Die Schwankung der äusseren relativen Luftfeuchtigkeit.
a) Minimale Feuchtigkeit
b) Maximale Feuchtigkeit

Im Abb. 12 wird die Schwankung der relativen Feuchtigkeit der Luft, für die Zeitabschnitt vom 15 II bis 30 III 1958 gezeigt, die als Mittelwert der niedrigsten und höchsten Feuchtigkeit von 50% un 94% verzeichnet wurde bei äusserer Temperatur von —10°C.

Im Abb. 13 wird das Diagramm der relativen äusseren Luftfeuchtigkeit gezeigt, in einer charakteristischen Periode, die dem verzeichneten Zeitraum entsprechen. Die Minima der relativen Feuchtigkeit, so wie aus Abb. 13 ersichtlich ist, finden täglich in den Stunden von 14...16 Uhr statt, die Maximalwerte nachts zwischen 2...6 Uhr, entsprechend den kleinsten äusseren Temperature.

In Abb. 14 und 15 wird die Schwankung der relativen Feuchtigkeit der Luft im Inneren des Gebäudes gezeigt, in Räumen von typ *A* und *B* (von dem Geschoss abhängend), die als Durchschnitt der Maximal- und Minimalwerte eingeschrieben wurden. In den Räumen *A* ist die Maximal-Feuchtigkeit von 84% und die minimal mittel Feuchtigkeit

von 59,5%. In den Räumen *B* ist der Durchschnit der Minimalfeuchtigkeit von 47,5%.

Die relative Luftfeuchtigkeit ist in den Räumen *A* grösser als in den Räumen *B*, nimmt in den übrigen Geschossen ab. Der Unterschied zwischen den relativen Feuchtigkeitswerten minimal und maximal ist von 24,5% in den Räumen *A* und 27,5% in den Räumen *B*.

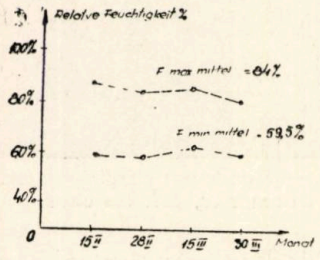


Abb. 14. — Die relative, innere Luftfeuchtigkeit, Raum *A*, Geschoss III.
a) Das diagramm der minimalen Feuchtigkeit.
b) Das Diagramm der maximalen Feucktigkeit.

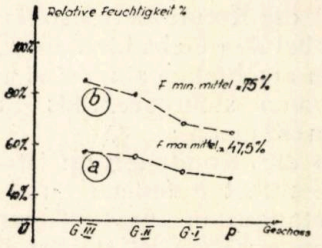


Abb. 15. — Die relative innere Luftfeuchtigkeit des Raumes *B*
a) Das Diagramm der minimalen Feuchtigkeit.
b) Das Diagramm der maximalen Feuchtigkeit.

Es wird in den Fachschriften empfohlen, dass der Zwischenraum der Variation für die Feuchtigkeit der Luft von 15% ist, damit der menschliche Organismus nicht zu sehr in Anspruch genommen ist. In Abb. 16 und 17 werden die Variationsdiagrammen der relativen Feuchtigkeit der Luft, in dem Inneren des Raumes *A*, Geschoss III, und in dem Raume *B*, Erdgeschoss gezeigt.

Aus dem Diagramm (Abb. 16) ist ersichtlich, dass der Maximalwert der relativen Feuchtigkeit der Luft in den Stunden von 4...6 Morgens stattfindet.

Das Diagramm aus Abb. 17 zeigt den Maximalwert der relativen Feuchtigkeit der Luft zwischen 4 und 6 Uhr Früh, und den Minimalwert zwischen 10...14 Uhr.

Die Ergebnisse für die Räume *A* und *B* stimmen nicht überein, da die Räume verschieden geheizt und gelüftet wurden.

Um einen Vergleich zu ermöglichen, werden in Abb. 18 und 19 die Diagrammen der inneren, relativen Luftfeuchtigkeit, von zwei Gebäuden mit derselben Bestimmung, gezeigt. Beide Bauten sind Ziegelwerke, das erste im ersten Jahr seiner Benützung, das zweite, im fünften. Es ist zu bemerken dass der Zwischenraum der Variation für die relative Luftfeuchtigkeit, im ersten Fall von 15% im zweiten 2% ist, dass beweisst dass hier ein Gleichgewicht zwischen der Feuchtigkeit der Wände und der Umgebung stattfindet.

Die relative Luftfeuchtigkeit im Inneren eines Gebäudes mit Ziegelwänden ist viel kleiner im Vergleich zur Luftfeuchtigkeit des Gebäudes aus Grossblöcken das in unserem Stadium erörtert wird (Abb. 20).

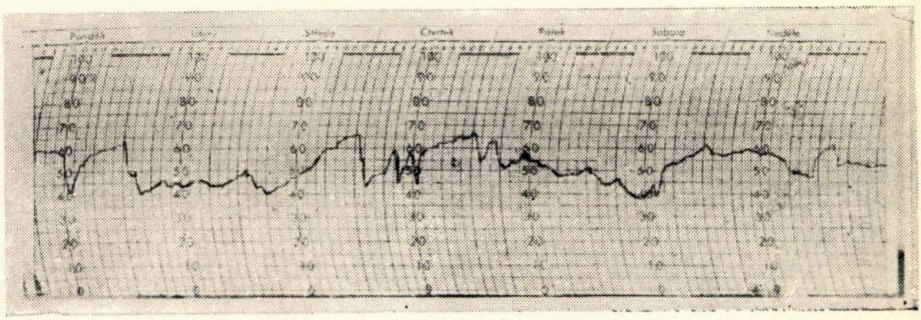


Abb. 13. — Das Diagramm der relativen äusseren Luftfeuchtigkeit.

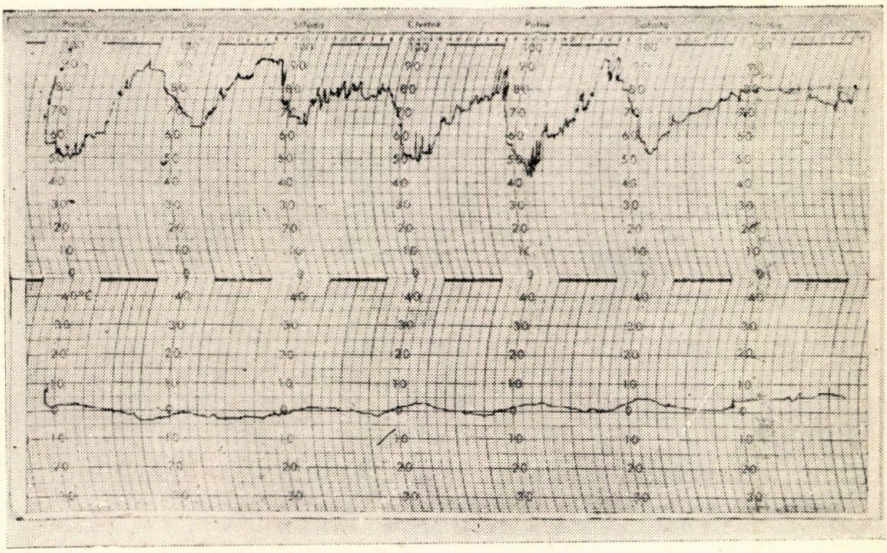


Abb. 16. — Das Diagramm der relativen Luftfeuchtigkeit, im Inneren des Zimmers *A*, Geschoss III.

TAFEL III

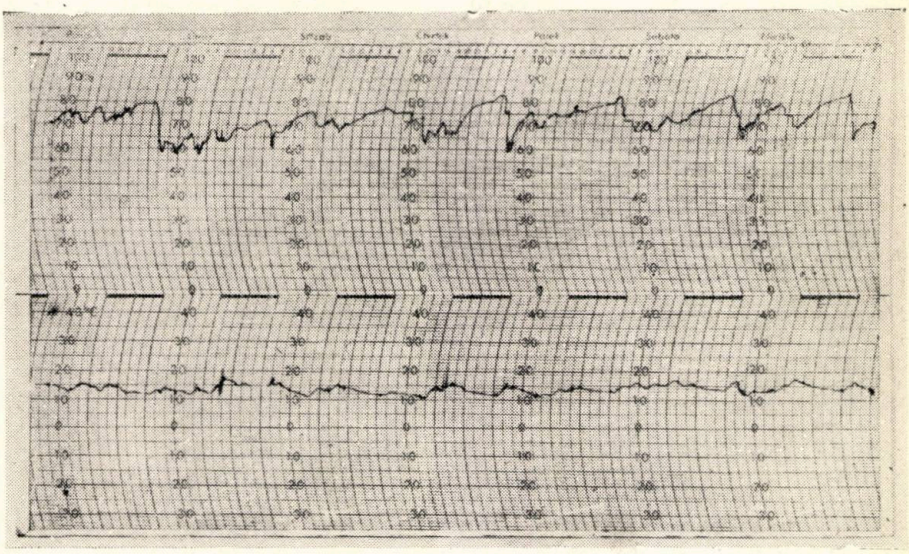


Abb. 17. — Das Diagramm der relativen Luftfeuchtigkeit, Raum *B*, Erdgeschoss.

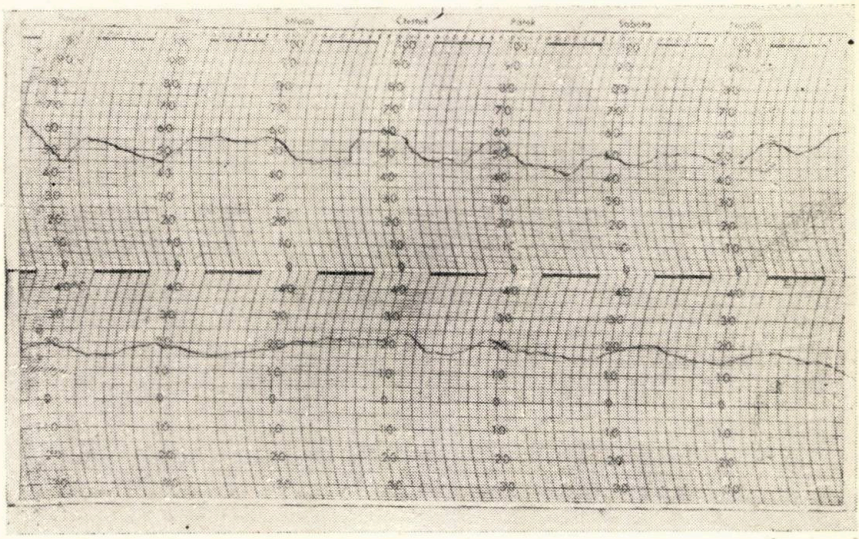


Abb. 18. — Das Diagramm der relativen Luftfeuchtigkeit in einem Gebäude aus Ziegelmauerwerk, im zweiten Jahr seiner Benützung.

TAFEL IV

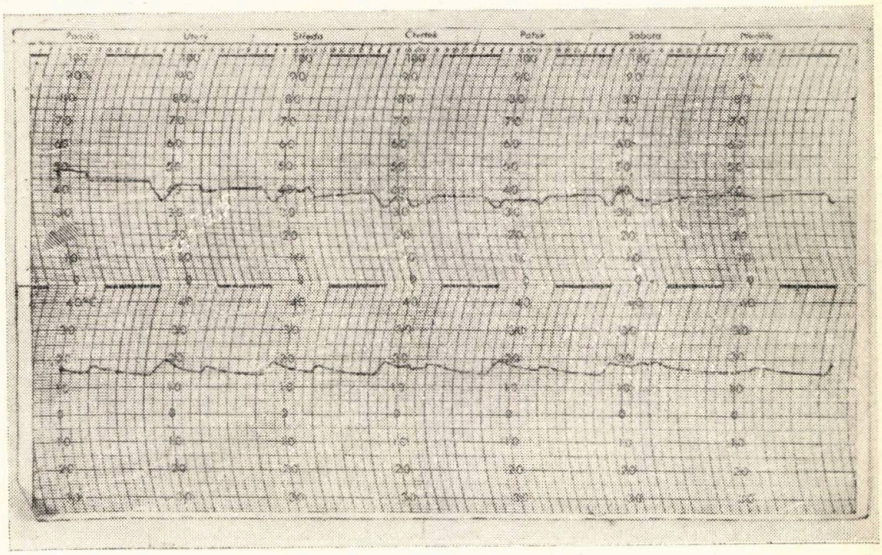


Abb. 19.—Das Diagramm der relativen Luftfeuchtigkeit in einem Gebäude aus Ziegelmauerwerk, im fünften Jahr seiner Benützung.

TAFEL V

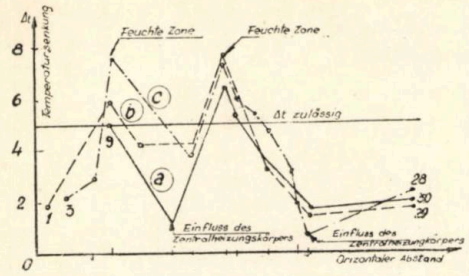


Abb. 22.—Die Temperatursenkung in waage rechter Richtung.
9-10-17-18-21-24-27-30 (Diagramm *a*),
1-7-8-12-14-16-20-23-26-29 (Diagramm *b*),
3-5-6-11-13-15-19-22-25-28 (Diagramm *c*).

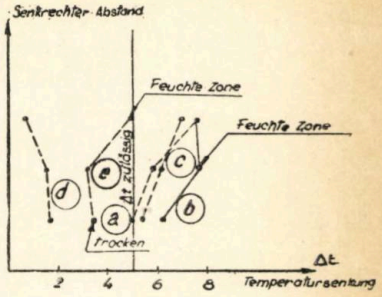


Abb. 23.—Die Temperatursenkung in senkrechter Richtung.
9-7-6 Aussenwand (Diagramm *a*),
17-14-13 Aussenwand (Diagramm *b*),
18-16-15 Aussenwand (Diagramm *c*),
27-23-25 Aussenwand (Diagramm *d*),
21-20-19 Aussenwand (Diagramm *e*).

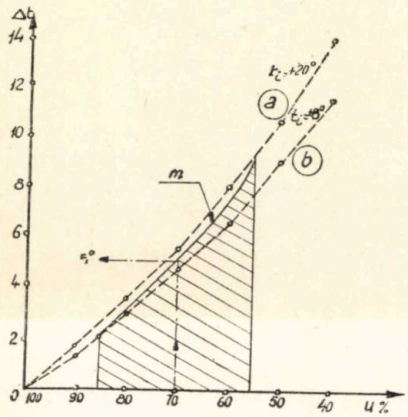


Abb.24.-Die zulässige Temperatursenkung aus der Bedingung dass die Kondensation ausgechlossen wurde.
a) für $t_{i\max}=20^0$; $u_{\min}=50\%$,
b) für $t_{i\min}=8^0$; $u_{\max}=85\%$,
m) für $t_{i\text{mittel}}=14^0$; $u_{\text{m ttel}}=70\%$,

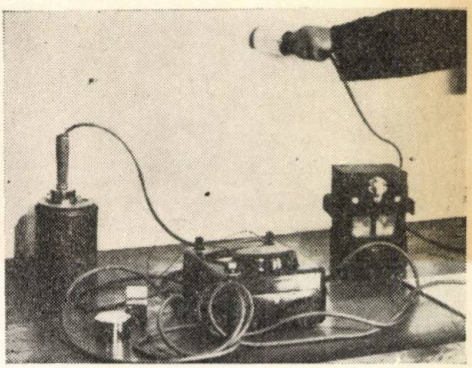


Abb. 25.—Der Apparat bei einer Temperaturmessung der Wandoberfläche.

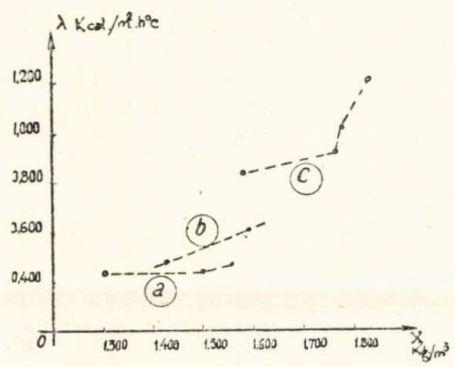


Abb. 26. — Die Wärmedurchlässigkeit des Betons aus Haldenmaterial.
a) Der Baustoff in trockenem Zustand,
b) Der Baustoff (Feuchtigkeit von 4%),
c) Wasser Baustoff ($u=10{,}80\%...22{,}60\%$).

TAFEL VI

Die relative Luftfeuchtigkeit bei einem Ziegelbau ist von 50% und 30%, und nimmt in den unteren Geschossen ab.

Wie oben bereits bemerkt ist, ist die Luftfeuchtigkeit von folgenden Faktoren beeinflusst:

a) die Bestimmung des Raumes;

b) das Geschoss;

c) die Hygroskopizität, Absorption und Wasserdurchlässigkeit der Wände;

d) die Feuchtigkeit der Wände bei ihrer Herstellung;

e) der konstruktive Entwurf der Wände von thermischen Standpunkt aus gesehen;

f) die Benützungszeit des Gebäudes.

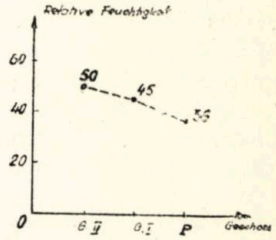


Abb. 20. — Die relative innere Luftfeuchtigkeit bei einem Gebäude aus Ziegelmauerwerk.

Unter dem Einfluss der oben erwähnten Faktoren kann ein Gleichgewicht zwischen der Luftfeuchtigkeit und der Feuchtigkeit der Wände bestimmt werden, die von dem Baustoffe der Wände und seiner Reaktion gegenüber der Feuchtigkeit abhängt.

4. Die Erklärung des thermo-hygienischen Verhaltens des Gebäudes

Um das Aussehen der Wände theoretisch zu erklären, wurde die Temperatur der inneren Seite der äusseren Wände, Raum *A*, Geschoss III, genommen, wo die Kondensationserscheinungen stärker waren. In Abb. 21 werden die Oberfläche des inneren Seite der Wände dieses Raumes gezeigt, wo die Stellen der Temperaturmessungen angemerkt sind.

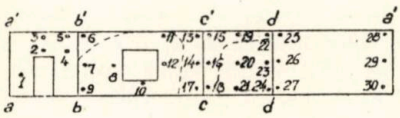


Abb. 21. — Die Übersicht über die Wände im Raume *A*, Geschoss III. Stellen der Temperaturmessungen.

Bei der Berechnung der Temperaturunterschiede (t_i) in waagrechter (Stelle *a*, *b*, *c*, *d*, Abb. 22) und in senkerchter Richtung (*a*, *b*, *c*, *d*, Abb. 23) wurde der innere klimatische Zustand in Betracht gezogen.

Indem man die Werte der wirklichen Temperatursenkung zwischen der Luft im Inneren des Raumes und der inneren Seite der Aussen und Innenwände, mit der zulässigen Temperatursenkung, unter der Bedingung dass die Kondensation verhindert wurde verglich, folgt wie aus Abb. 24 ersichtlich, für Mittelwerte der inneren Temperatur und Feuchtigkeit, $t_{i\ \text{mittel}} = +14°$ und $u_{\text{mittel}} = 70\%$, die Temperatur von 5° nicht überschritten werden soll. Aus den Tafeln (Abb. 22 und 23) ist zu entnehmen dass diese Bedingung nicht erfüllt wurde, besonders in den feuchten Zonen der Innen-und Aussenwände.

Die Temperaturmessungen der Innen- und Aussenwände wurden mit Hilfe des Apparates der von Prof. Dr. T. Cîmpan[1]) erzeugt wurde ausgeführt. Der Apparat besteht aus besonderen Thermoelementen mit verminderter termischer Trägheit. In Abb. 25 wird der Apparat bei einer Messung gezeigt.

1) S. dieses Bulletin, 1957, **III (VII)**, *3—4*, pp. 215-222.

Um die Temperatursenkung in der Dicke des Bauelementes zu erfahren, wurde die Wärmeleitugskraft des Betons aus Haldenmaterial in Betracht gezogen, indem man sie aus den Ziffern die aus Abb. 25 ersichtlich sind, berechnet hat. Für trockenen Baustoff (Diagramm *a*, Abb. 26), für feuchten Baustoff (von 4%) (Diagramm *b*, Abb. 26) und für nassen Baustoff (Diagramm *c*, Abb. 26).

Mit Hilfe dieser Ziffern wurden die Tafeln für die Temperatursenkung in den Aussenwänden berechnet für den trockenen Baustoff mit $\lambda = 0{,}6$ Kcal/mh°C (Abb. 27), als auch für feuchten Baustoff, Feuchtigkeit von 16,7% und $\lambda = 1$ Kcal/mh °C (Abb. 28).

Die Berechnung als auch die graphische Dartellung für die Variation der Temperatursenkung, wurde für die folgenden klimatischen Zustände gemacht:

a) $t_{i\ \text{mittel}} = 14°C$, $t_e = -20°C$; (dem Winter 1957/58, entsprechend),
b) $t_{i\ \text{mittel}} = +14°C$, $t_e = -20°C$;
c) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$ (nach STAS 1547-50 und 1488—54).

Teoretisch, den Berechnungen gemäss, wurde das Verhalten des Gebäudes im Benützungszustand, geprüft. Die Vermeidung der Kondensation kann nur bei trockenen Wänden und bei gemässigter äusserer Temperatur stattfinden (Abb. 27 *a*). Im Falle einer grösseren Kälte erscheinen die Kondensphänomene viel stärker. Wie es aus dem oben erörterten hervorgeht, hat die Feuchtigkeit der Bauelemente eine grosse Bedeutung und einen grossen Einfluss auf das thermische Verhalten des Gebäudes.

Es ist zu bemerken dass für die Berechnung der Kondensation der Bauten die innere Temperatur für die Benützungszeit, die in STAS 1542—50 angegeben ist, nicht massgebend sein kann. Man muss neue Werte feststellen indem man die niedrige Aussen- und Innentemperatur die in der Nacht stattfindet, in Betracht zieht.

Die Berechnung als auch die graphische Darstellung der Temperatursenkung in den Ecken der Aussenwände (*2—2*, Abb. 30), erweist dass die Kondensation auch im Falle eines trockenen Baustoffes, in dem Klimazustand der im Jahre 1957/58 war, erscheinen kann.

Die Variation der Temperatursenkung für den Klimazustand des Jahres 1957/58, als auch für den der in den Normen vorgesehen ist, wird in Abb. 29 veranschaulicht.

In Abb. 30 wird die Art der Verteilung der Grossblöcke in den Wänden und ihre Verbindung in den Ecken gezeigt. Für die Planung der Ecken (Abb. 30 *b*) wurde das thermische Verhalten des Bauelementes nicht in Betracht gezogen, so dass diese Zone den Ansprüchen nicht entsprach.

Um die Dicke der Betonschichte aus Haldenmaterial zu ermitteln, wurde die Wärmedurchgangszahl aus der Bendingung errechnet dass die Kondensation, auf der inneren Fläche des Bauelements verbindert wird

$$K_{\text{nec}} = L_i \cdot \Delta t / \Delta T,$$

wo, L_i — die Wärmedurchgangszahl der Luft eines Raumes, an der inneren Seite des Bauelements — gleich 0,14 Kcal/mh °C ist; Δt — die

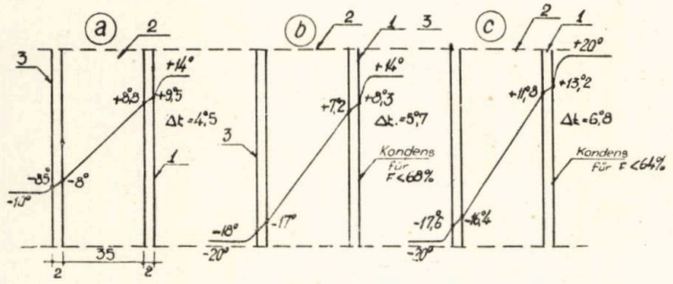


Abb 27. — Die Schwankung der Temperatursenkung in der Aussenwand, in trockenem Zustand für verschiedene klimatische Zustände (*I — I*, Abb 29).
a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$; b) $t_i = 14°$, $t_e = 20°$; c) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$.
1 — Innenputz, 2 cm; *2* — Haldenmaterialbeton, $\gamma_{sa} = 1600$ kg/m³, 35 cm; *3* — Aussenputz, 2 cm.

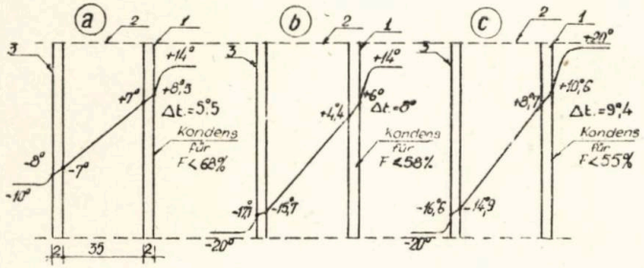


Abb. 28. — Die Variation der Temperatursenkung in der Aussenwand in feuchtem Zustand für verschiedene klimatische Zustände, $u = 16\%$; (*I-I*, Abb. 29).
a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$; $t_i = +14°$, $te = -28°$.
1- Innenputz, 2 cm; 2- Haldenmaterialbeton $\gamma_{sa} = 1600$ kg/m³; *3*- Aussenputz, 2 cm.

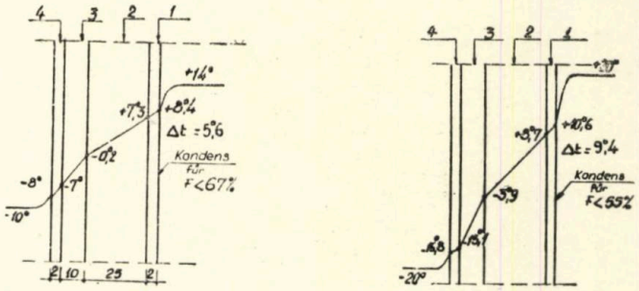


Abb. 29. — Die Variation der Temperatursenkung in den Ecken der Aussenwände (Abb. 29, *2—2*).
a) $t_i = +140°$, $t_e = -10°$; b) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$.
1 — Innenputz, 2 cm; *2* — Stahlbeton, $\gamma_{sa} = 2400$ kg/m³, 10 cm; 25 cm; *3* — Haldenmaterialbeton $\gamma_{sa} = 1600$ kg/m³, 10 cm; *4* — Aussenputz, 2 cm.

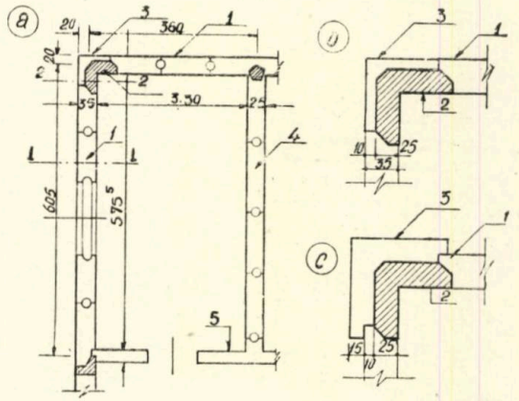


Abb. 30. — Die Verteilung der Wände aus Grossblöcke bei einer Eckbundweite. a) Die angewendete Lösung für die Ecke. b) Die Lösung die aus thermo-hygienischen Gründen vorgeschlagen wurde (*C*).
1 — Gewöhnlicher Aussengrossblock; *2* — Monolithpfeiler aus Stahlbeton; *3* — Eckgrossblock (die vorgeschlagene Lösung); *3'* — die angewendete Lösung.

zulässige Temperatursenkung zwischen der Innenfläche des äusseren Bauelements, gleich 5°C, Δt — die Temperatursenkung zwischen der Luft im inneren des Raumes und der Aussenluft-gleich 40°C.

Die Dicke der Betonschichte aus Haldenmaterial wurde aus der Gleichung berechnet:

$$d_{st}/\lambda_{st} = 1/K - [1/L_i + \sum(d_i/\lambda_i) + 1/L_c].$$

λ_{st} wurde für Baustoff in trockenem Zustand gleich 0,6 Kcal/mh °C berechnet.

5. Schlussfolgerungen

Die termischen Studien die an dem Gebäude im Benützungszustand durchgeführt wurden, beweisen dass die Feuchtigkeit unter jeder Form auf das thermo-hygenische Verhalten des Baues einen grossen Einfluss hat und von grosser Bedeutung ist.

Es ist allgemein bekannt, wie die gewöhnlichen, in traditioneller Bauweise erbauten Gebäude gegen die Feuchtigkeit reagieren, so dass man die in moderner Bauweise, aus neuen Baustoffen konstruierten Bauten, nach ihnen richten muss.

Unter dem Einfluss der Raumluft und der inneren und äusseren Faktoren, findet ein Gleichgewicht zwischen der Feuchtigkeit der Wände und der Umgebung statt, ein Gleichgewicht dass grössten Teils von den spezifischen Eigenschaften der Wandbaustoffe abhängt und zwar bezüglich der Wasserabsorbtion, der Durchlässigkeit des Dampfes der Hygroskopizität als auch der Wärme-und Nässeansamlungsfähigkeit.

Die Konstruktion der neuen Bauten aus Monolithbeton oder Fertigteilen benötgt eine genaue Kentniss der Eigenschaften die das thermische Verhalten bedingen.

Die thermische Prüfung der Bauelemente die aus neuen Baustoffen erbaut wurden, müssen auch nach der Instandsetzung gemacht werden.

Die Schlussfolgerungen die aus dem Studium zu entnehmen sind, wären folgende:

a) die neuen Baustoffe — die als Monolithbeton oder Fertigteile eingeführt wurden, haben ein spezifisches thermisches Verhalten, im Vergleich zu Ziegelemaeuerwerken.

b) Bei der Benutzung, darf die Feuchtigkeit der Wände nicht 3...5% überschreiten.

c) Das Kriterium nach dem die Fertigteile in dem Bau eingebracht werden sollen, müssen die Betonmarke als auch die Feuchtigkeit beim montieren der Fertigteile in Betracht ziehn. Gleichfalls sind schnelle Metoden für die Prüfung der Feuchtigkeit nötig.

d) Ferner sind Laboratoriumstudien nötig die thermischen Eigenschaften der neuen Baustoffe bestimmen. Diese Eigenschaften sind: das Wärmeleitvermögen, die Wasserabsorption, die spezifische Wärme, das volumetrische Gewicht, die Hygroskopizität, die Durchlässigkeit für Luft und Dampf, die Ansamlungsfähigkeit von Wasser, abhängend von der Temperaturhöhe.

e) Für das thermo-hygenische Verhalten eines Gebäudes sind die Prüfungen nach der Instandsetzung massgebend.

f) In den Eckräumen sind die thermischen Variationen grösser als in den übrigen Räumen so dass sie nach besonderen Kriterien bemessen werden müssen.

g) Die Verbindung zwischen den Fertigteilen der Wände und dem Schwerbeton der Decken, müssen aus thermischem Standpunkt ausstudiert werden, um die Feuchtigkeit, die das thermishe Verhalten negativ beeinflusst zu verhindern, besonders falls neue Baustoffe angewendet wurden.

h) Die inneren Temperaturen der Räume, die für die Berechnung der Kondensation nötig sind, werden nicht nur im Laufe des Tages genommen (STAS 1542—50) sondern wenn die Temperatur am kleinsten ist, dass heisst nachts.

Im allgemeinen sind thermische genaue Bemessungen bei allen Konstruktionen, die aus neuen Baustoffen erschafften wurden, nötig, besonders in dem Zonen wo thermische Brücken und Kondensation erscheinen kann.

Technische Hoschule Jassy
Lehrstuhl für Bau u. Banmaterialien

ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗДАНИЯ ИЗ БОЛЬШИХ БЛОКОВ

(Резюме)

Излагаются выводы теплотехнических исследований поведения здания из больших бетонных блоков с шахтными отходами, в первом году эксплуатации. Анализируются климатические показатели и объясняются явления конденса, в особенности в угловых комнатах и в зонах пояса из обыкновенного бетона.

Указывается необходимость исследований и рационального проектирования с теплотехнической точки зрения бетонных стен, поведение которых различно от стен кирпичной кладки.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Студенческое общежитие из больших бетонных блоков. Общий вид.
Рис. 2. — Архитектурный план: 1) студенческая комната, 2) санитарный узел.
Рис. 3. — Здание из больших блоков во время строительства.
Рис. 4. — Явление конденса в комнате *A*, III-го этажа.
Рис. 5. — Явление конденса в комнате *B*, III-го этажа.
Рис. 6. — Явление конденса в текущих комнатах *C*, III-го этажа.
Рис. 7. — Распространение конденсационных явлений от наружных стен текущих комнат к поперечным стенам.
Рис. 8. — Расцветание в комнатах *C*, II-го этажа.
Рис. 9. — Расцветание в комнатах *B*, II-го этажа.
Рис. 10. — Конденсационные явления в комнате *B*, I-го этажа.
Рис. 11. — Конденсационные явления в текущих и угловых комнатах в зоне пояса влажности наружного воздуха.
Рис. 12. — Вариация относительной влажности наружного воздуха: a) диаграмма минимальной влажности, b) диаграмма максимальной влажности.
Рис. 13. — Диаграмма относительной влажности наружного воздуха.
Рис. 14. — Относительная влажность внутреннего воздуха в комнате *A*, III-го этажа. a) диаграмма минимальной влажности, b) диаграмма максимальной влажности.
Рис. 15. — Относительная влажность внутреннего воздуха в комнате *B*: a) диаграмма минимальной влажности, b) диаграмма максимальной влажности.
Рис. 16. — Диаграмма относительной влажности внутреннего воздуха в комнате *A*, III-го этажа.
Рис. 17. — Диаграмма относительной влажности внутреннего воздуха в комнате *B*, первого этажа.
Рис. 18. — Диаграмма относительной влажности воздуха в подобном здании кирпичной кладки, на втором году эксплуатации.

Рис. 19. — Диаграмма относительной влажности воздуха в комнате со стенами кирпичной кладки, после пятилетней эксплуатации.
Рис. 20. — Относительная влажность внешнего подобного здания кирпичной кладки.
Рис. 21. — Развертывание стены в комнате *A*, III-го этажа. Расположение измерительной точки температур.
Рис. 22. — Падение температуры по горизонтальному направлению.
9-10-17-18-21-24-27-30 (диагр. *a*),
1-7-8-12-14-16-20-23-26-29 (диагр. *b*),
3-5-6-11-13-15-19-22-25-28 (диагр. *c*).
Рис. 23. — Падение температуры по вертикальному направлению: *9-7-6* внешняя стена (диагр. *a*); *17-14-13* внутреняя стена (диагр. *b*); *18-16-15* внешняя стена (диагр. *c*); *27-26-25* внутреняя стена (диагр. *d*); *21-20-19* внешняя стена (диагр. *e*).
Рис. 24. — Допустимое, по условию изгибания конденса, падение температуры: a) для t_i макс. $= +20°, u_{мин.} = 55\%$; b) для t_i мин. $= +18°, u_{макс.} = 85\%$; c) для t_i средний $= +14°, u_{средний} = 70\%$.
Рис. 25. — Температурный измерительный прибор для поверхности стен.
Рис. 26. — Теплопроводность бетона из шахтных отходов: a) материал в сухом состоянии; b) материал с влажностью 4%; c) материал насыщенный водой, $u = 10{,}80\% \ldots 22{,}60\%$.
Рис. 27. — Вариация падения теммпературы в наружной стене, в сухом состоянии и в различных климатическик условиях; (*1-1* рис. 29). a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$; b) $t_i = +14°$, $t_e = 20°$; c) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$. *1* — внутренняя штукатурка, 2 см; *2* — бетон из шахтных отходов $\gamma_{sa} = 1600$ кг/м³; *3* — внешняя штукатурка.
Рис. 28. — Вариация падения температуры в наружной стене во влажном состоянии $u = 16{,}7\%$ для различных климатических условий (*1-1*, рис. 29), a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$, b) $t_i = +14°$, $t_e = -20°$, c) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$. 1—внутреняя штукатурка 2, см; *2* — бетон из шахтных отходов $\gamma_{sa} = 1600$ кг/м³; *3* — внешняя щтукатурка 2 см.
Рис. 29. — Вариация температурного падения в условиях наружных стен (*2-2*, рис. 29), a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$, b) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$, *1* — внутреняя штукатурка, 2 см; *2* — железо-бетон $\gamma_{sa} = 2400$ кг/м³, 25 см, *3* — бетон из шахтных отходов, $\gamma_{sa} = 1600$ кг/м³, 10 см; *4* — внешняя штукатурка, 2 см.
Рис. 30. — Расположение блоков в угловом участке (*a*), угловое принятое решение (*b*), угловое решение предложенное по тепловым условиям (*c*). *1* — внешний текущий блок, *2* — монолитный железо-бетонный столб, *3* — угловой блок (принятое решение), *3'* — угловой блок (предложенное решение).

COMPORTAREA TERMOTEHNICĂ A CLĂDIRII DIN BLOCURI MARI

(Rezumat)

În lucrare se prezintă rezultatele studiilor termice privind comportarea, în primul an de exploatare, a unei clădiri din blocuri mari, executată din beton cu agregat din steril ars de mină. Se analizează parametrii climatici interiori şi se explică apariţia condensului, în special în încăperile de colţ şi în zona centurilor din beton obişnuit. Se arată necesitatea studiului şi proiectării raţionale din punct de vedere termic a construcţiilor executate din betoane, a căror comportare este diferită faţă de zidăriile tradiţionale.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Căminul din blocuri mari. Vedere de ansamblu.
Fig. 2. — Soluţia funcţională pentru un etaj curent (parter, etaj I, II, III): *1* — cameră studenţi, *2* — grup sanitar.
Fig. 3. — Construcţia din blocuri mari în execuţie.
Fig. 4. — Fenomene de condens la camera *A*, etaj III.
Fig. 5. — Fenomene de condens la camera *B*, etaj III.

Fig. 6. — Fenomene de condens la încăperi curente *C*, etaj III.
Fig. 7. — Extinderea fenomenelor de condens de la pereții exteriori ai încăperilor curente la pereții transversali.
Fig. 8. — Eflorescențe la încăperi *C*, etaj II,
Fig. 9. — Eflorescențe la încăperi *B*, etaj I.
Fig. 10. — Fenomene de condens la camera *B*, etaj I.
Fig. 11. — Fenomene de condens la încăperi de colț și curente în zona centurilor din beton armat monolit.
Fig. 12. — Variația umidității relative a aerului exterior.
a) diagrama umidității minime; b) diagrama umidității maxime.
Fig. 13. — Diagrama umidității relative a aerului exterior.
Fig. 14. — Umiditatea relativă a aerului interior la camera *A*, etaj III.
a) diagrama umidității minime; b) diagrama umidității maxime.
Fig. 15. — Umiditatea relativă a aerului interior la camera *B*.
a) diagrama umidității minime; b) diagrama umidității maxime.
Fig. 16. — Diagrama umidității relative a aerului interior la camera *A*, etaj III.
Fig. 17. — Diagrama umidității relative a aerului interior la camera *B*, parter.
Fig. 18. — Diagrama umidității relative a aerului într-o încăpere la o construcție similară cu pereți din zidărie de cărămidă, în al doilea an de exploatare.
Fig. 19. — Diagrama umidității relative a aerului la o încăpere cu pereți din zidărie de cărămidă, după 5 ani de exploatare.
Fig. 20. — Umiditatea relativă a aerului interior la o construcție similară cu pereți din zidărie de cărămidă.
Fig. 21. — Desfășurare pereți la camera *A*, etaj III. Poziția punctelor de măsurare a temperaturilor.
Fig. 22. — Condens de temperatură după direcții orizontale.
9–10–17–18–21–24–27–30 (diagrama *a*); *1–7–8–12–14–16–20–23–26–29* (diagrama *b*); *3–5–6–11–13–15–19–22–25–23* (diagrama *c*).
Fig. 23. — Căderea de temperatură după direcții verticale.
9–7–6 perete exterior (diagrama *a*); *17–14–13* perete exterior (diagrama *b*); *18–16–15* perete exterior (diagrama *c*); *17–26–25* perete interior diagrama *d*); *21–21–19* perete exterior (diagrama *e*).
Fig. 24. — Căderea de temperatură admisibilă din condiția evitării condensului.
a) pentru $t_{i\,max} = +20°$, $u_{min} = 55\%$· b) pentru $t_{i\,min} = +8°$, $u_{max} = 85\%$;
c) pentru $t_{i\,mediu} = +14°$, $u_{med} = 70\%$.
Fig 25. — Instalația de măsurare a temperaturilor pe suprafața pereților.
Fig. 26. — Conductivitatea termică a betonului de steril.
a) material în stare uscată: b) material cu umiditate de 4%; c) material saturat cu apă, $u = 10{,}80\% \ldots 22{,}60\%$.
Fig. 27. — Variația căderii de temperatură în peretele exterior, în stare uscată pentru diferite condiții climatice (*1–1* fig. 29).
a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$; b) $t_i = +14°$, $t_e = -20°$; c) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$.
1 — tencuială interioară, 2 cm; *2* — beton steril, $\gamma_{sa} = 1600$ kg/m³, 35 cm; *3* — tencuială exterioară, 2 cm.
Fig 28. — Variația căderii de temperatură în peretele exterior, în stare umedă, $u = 16{,}7\%$, pentru diferite condiții climatice (*1–1*, fig. 29).
a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$; b) $t_i = 14°$, $t_e = -20°$; c) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$.
1 — tencuială interioară, 2 cm; *2* — beton steril, $\gamma_{sa} = 1600$ kg/m³ *3* — tencuială exterioară, 2 cm.
Fig. 29. — Variația căderii de temperatură în zonele de colț ale pereților exteriori (*2–2*, fig. 29).
a) $t_i = +14°$, $t_e = -10°$, b) $t_i = +20°$, $t_e = -20°$.
1 — tencuială interioară, 2 cm; *2* — beton armat $\gamma_{sa} = 2400$ kg/m³, 25 cm; *3* — beton de steril, $\gamma_{sa} = 1600$ kg/m³, 10 cm; *4*—tencuială exterioară, 2 cm.
Fig. 30. — Dispoziția blocurilor la o travee de colț (*a*); soluția de colț adoptată (*b*); soluția propusă din cerințe termice (*c*).
1 — bloc exterior curent; *2* — stîlp monolit de beton armat; *3* - bloc de colț (soluția adoptată); *3'* — bloc de colț (soluția propusă).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

SORTATORUL DE BUMBAC TIP „D"

DE

IOSIF IONESCU-MUSCEL, I. VLAD, EMILIA VLAD, V. HANGANU, SEMERAD RĂDULESCU şi EUFROSINA ŞTEFĂNESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 26–29 iunie 1958

1. Introducere

Pentru reglarea maşinilor în filaturile de bumbac, este necesar să se cunoască cît mai exact lungimea filatorului.

Acest indice tehnic se obţine prin măsurare aproximativă cu rigla, prin măsurare cu aparate care comportă calcule, uneori complicate, sau se stabileşte adăugînd 2...3 mm la lungimea modul, mărime care se măsoară cu aparatul „Fibrometru" sau cu alte aparate similare.

Din cercetările efectuate asupra unui mare număr de loturi de bumbac s-a constatat că, prin metodele de măsurare cunoscute, apar erori pînă la 1 mm, la valoarea lungimii filatorului. În cazul bumbacului, eroarea de 1 mm este foarte mare, deoarece el face parte din categoria fibrelor scurte, la care fiecare mm influenţează considerabil atît procesul de prelucrare cît şi calitatea firelor.

Din punct de vedere teoretic lungimea filatorului este lungimea medie a fibrelor a căror lungime este mai mare decît lungimea modul.

Fie : l_m, l_1, l_2, l_3, ..., l_n lungimele medii ale grupelor de fibre sortate în ordinea crescătoare a lungimii, care sînt mai mari decît lungimea modul, l_m fiind lungimea medie a grupei cu conţinut maxim de fibre; n_m, n_1, n_2, n_3, ..., n_n numărul fibrelor din grupele cu lungimile menţionate mai sus; n_m —numărul fibrelor din grupa cu lungimea l_m.

Lungimea filatorului este dată de relaţia:

$$L_f = (l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 + \cdots + l_n n_n)/(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n) :$$

Această formulă este valabilă în cazul cînd se neglijează fibrele cu lungimea mai mare decît lungimea modul din grupa n_m. Neglijarea acestor fibre se face de obicei cînd intervalul i, dintre grupele sortate este mic ($i < 0{,}5$ mm).

Pe cele două ramuri (urcătoare şi coborîtoare) ale curbei de distribuţie după lungime (curbă construită pe baza numărului de fibre din grupele sortate) se observă cîte un punct de inflexiune M_1 şi M_2 în care se face trecerea de la forma concavă la forma convexă a curbei (fig. 1).

Pentru bumbac, numărul fibrelor cu lungime mai mică decît lungimea modul este întotdeauna mai mare decît numărul fibrelor a căror lungime este mai mare decît lungimea modul.

De la punctele M_1 şi M_2 spre extremităţile curbei, numărul fibrelor descreşte mult.

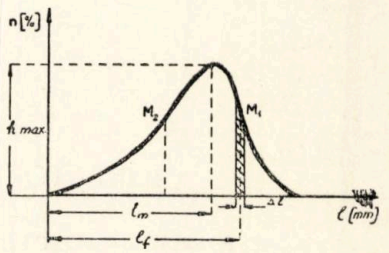


Fig. 1. — Curba de distribuţie după lungime a fibrelor de bumbac.

Din cercetările întreprinse asupra curbei de distribuţie, în special asupra părţii din dreapta, corespunzătoare fibrelor cu lungimea mai mare decît lungimea modul s-a constatat că lungimea filatorului L_f, corespunde la multe loturi de bumbac, punctului M_1 (piciorul perpendicularei pe axa absciselor).

Astfel, printr-o sortare precisă din 0,5 în 0,5 mm, sau din 1 în 1 mm şi prin numărarea fibrelor din grupele sortate se poate obţine diagrama care scoate în evidenţă, clar, atît lungimea modul cît şi punctele M_1 şi M_2. Se ajunge astfel la măsurarea directă a lungimii filatorului L_f, cu o precizie cu atît mai mare, cu cît intervalul Δl dintre grupele sortate este mai mic.

Aceste consideraţiuni sînt dealtfel verificate şi în practica măsurării manuale a lungimii filatorului. Pentru această măsurare se face în prealabil o paralelizare a fibrelor din probă. După aceasta fibrele sînt aduse manual cu unul din capete în acelaşi plan avîndu-se grijă să nu se piardă fibrele lungi. Fibrele prea scurte, neintrînd în considerare la aprecierea lungimii filatorului, se înlătură. Operaţia de aducere a fibrelor în acelaşi plan cu unul din capete. se repetă de cîteva ori. Se aşterne mănunchiul de fibre pe o placă cu pluş de contrast, iar cu ajutorul unei rigle se delimitează partea L_f a mănunchiului (fig. 2), lăsîndu-se în afară capetele fibrelor de la liniile unde ele apar într-un număr mult mai redus decît în zona L_f.

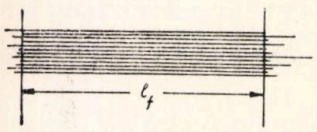


Fig. 2. — Dispoziţia fibrelor în mănunchiul paralelizat.

Liniile de delimitare a zonei L_f, corespund deci locului din vîrful mănchiului, unde apare în mod evident descreşterea bruscă a densităţii fibrelor, adică tocmai locul care corespunde punctului de inflexiune M_1 de pe diagrama din fig. 1.

Mărimea L_f se măsoară cu rigla.

2. Ideia de bază la construcţia noului aparat

Numărarea fibrelor fiind o operaţie foarte greoaie, ne-am imaginat un aparat cu ajutorul căruia să se facă o sortare foarte precisă, pentru a se obţine o diagramă pe care să se observe cu ochiul liber grupa corespunzătoare punctului M_1 (fig. 1). În acest mod, lungimea filatorului ar putea fi citită direct, fără cîntărire şi fără numărarea fibrelor.

Sortatorul de bumbac tip „D" reprezintă o contribuţie la problema determinării cu mare precizie a lungimii filatorului. El a fost proiectat astfel ca să realizeze:

a) transformarea probei reprezentative într-un mănunchi cu fibrele cît mai bine întinse, paralelizate şi dispuse cu unul din capete în acelaşi plan, cu o precizie tot de 0,25 mm;

b) sortarea fibrelor dintr-o asemenea probă în ordinea lungimii lor, cu o precizie tot de 0,25 mm.

Dacă se consideră un mănunchi de bumbac, în care fibrele sînt dispuse paralel şi dacă capetele fibrelor de la vîrful mănunchiului sînt aduse succesiv în zona de prindere dintre fălcile unui cleşte, se obţine, aşa numitul mănunchi cu cap drept (fig. 3).

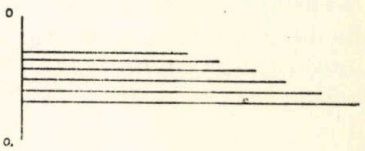


Fig. 3.—Modul de aşezare a fibrelor într-un mănunchi cu cap drept.

Relaţia dintre numărul fibrelor care se întîlnesc într-o secţiune transversală a mănunchiului cu cap drept şi depărtarea acelei secţiuni transversale de capul drept al mănunchiului, este reprezentată prin curba din fig. 4.

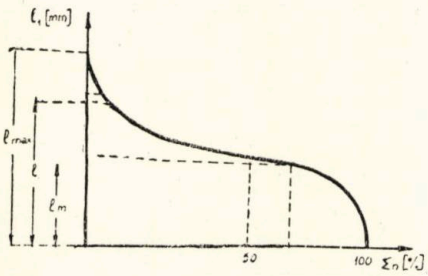


Fig. 4.—Curba cumulativă a fibrelor de bumbac.

Repartiţia numerică a fibrelor în ordinea lungimii este reprezentată prin curba din fig. 1.

Dacă se înseamnă cu n numărul de fibre întîlnite într-o secţiune depărtată cu distanţa l de capul drept al mănunchiului şi cu N—numărul total de fibre cuprinse de la capul drept pînă la secţiunea respectivă (fig. 4), atunci numărul N de fibre este dat prin însumarea tuturor fibrelor corespunzătoare secţiunilor de la 0 pînă la l.

$$N = \int_0^l n \, dl \,. \tag{1}$$

Numărul N_1 al tuturor fibrelor cuprinse în mănunchiul respectiv va fi:

$$N_1 = \int_0^{l_{max}} n \, dl. \tag{2}$$

Lungimea medie a fibrelor din probă va fi dată de relaţia următoare :

$$\bar{L} = \frac{\int_0^{l_{max}} nl \, dl}{N_1} = \int_0^{l_{max}} \frac{n}{N_1} l \, dl. \tag{3}$$

În cazul diagramei de distribuţie realizată pe consideraţii de greutate a grupelor sortate, lungimea medie $\bar{l}_g$ este mai mare decît lungimea medie $\bar{l}$, care corespunde diagramei de distribuţie, construită pe baza numărului de fibre din fiecare grupă sortată. Între $\bar{l}_g$ şi $\bar{l}$ există următoarea relaţie :

$$\bar{l}_g = \bar{l} + \sigma/\bar{l}$$

în care σ — abaterea medie pătratică.

Mărimea $\sigma/\bar{l}$ influenţează negativ asupra stabilirii lungimii modul sau lungimii filatorului, prin metodele care folosesc cîntărirea, constituind astfel o sursă de erori.

Aşadar, precizia de măsurare este condiţionată atît de precizia cu care se formează capul drept, cît şi de evitarea cîntăririlor.

Călăuziţi de aceste consideraţiuni, am conceput un aparat care să cuprindă (fig. 5) un cleşte prinzător *1*, care să aibă o zonă constantă

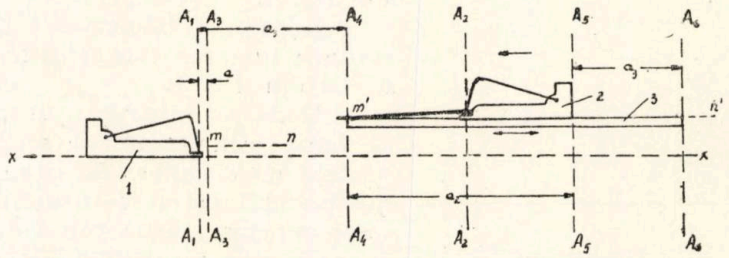


Fig. 5. — Schema de principiu a aparatului.

de prindere $A_1 - A_1$, lăţimea zonei fiind de l mm (egală cu lăţimea gurii cleştelui); un cleşte aducător *2*, care să fixeze elastic capul drept al mănunchiului în zona de fixare $A_2 - A_2$ (lăţimea zonei fiind egală cu ulăţimea gurii cleştelui *2*); un suport *3* al cleştelui aducător, care efectează mişcări de apropiere şi îndepărtare de gura cleştelui prinzător.

La un astfel de aparat, precizia de efectuare a capului drept al mănunchiului este determinată, în primul rînd, de avansul Δl, cu care

cleştele aducător 2, înaintează prin culisare în suportul 2, la fiecare cursă a acestuia.

O dată cu avansul cleştelui 2, capetele fibrelor din mănunchi ies înafara planului $A_4 - A_4$. În cleştele prinzător, care la fiecare apropiere a suportului, se află deschis, vor pătrunde capetele acestor fibre dincolo de planul $A_1 - A_1$ (spre stînga). Lungimea fibrelor care a depăşit planul $A_1 - A_1$ este la început (la prima sortare) mai mică decît avansul cleştelui Δl. La cursa de apropiere spre cleştele 1, s-a prevăzut ca suportul cleştelui aducător să treacă pe deasupra mănunchiului care a fost depus în cleştele 1, iar la întoarcere să se deplaseze în planul $X - X$, peste fibrele din cleştele 1, pe care trebuie să le întindă prin presiune şi mişcare de translaţie.

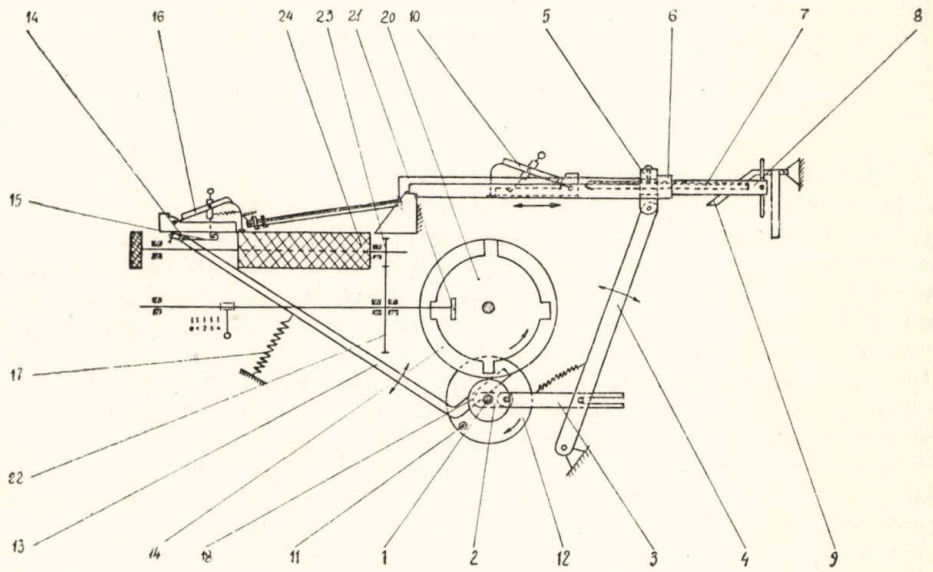


Fig. 6. — Sortatorul de bumbac tip „D“.

Dacă fibrele depuse în cleştele prinzător nu s-ar găsi în stare întinsă, s-ar produce o scădere a preciziei atît la efectuarea capului drept cît mai ales la sortare.

Erorile de neîntindere a fibrelor sînt mai evidente în cazul sortării, deoarece fibrele de o anumită lungime care se încadrează într-o anumită clasă, vor fi sortate totuşi în alte clase de lungimi.

Din cele de mai sus, se constată că precizia aparatului este determinată de următorii factori:

a) păstrarea constantă a mărimii a (fig. 5) la fiecare cursă de apropiere a suportului 3 faţă de cleştele 1;

b) suprapunerea exactă a liniilor m şi m' la fiecare apropiere a suportului de cleştele 1;

c) avansul cleştelui aducător în suportul 3, trebuie să fie constant;

d) fibrele din probă trebuie să fie paralelizate şi întinse într-un grad cît mai înaintat.

În timpul funcţionării aparatului, mărimea a_1 (fig. 5) rămîne constantă la fiecare cursă a suportului *3*, mărimea a_2 se micşorează, iar mărimea a_3 creşte în funcţie de avansul Δl al cleştelui *2* în suportul *3*.

3. Descrierea şi funcţionarea sortatorului de bumbac tip „D"

De la axul principal *1* (fig. 6) mişcarea se transmite în 3 direcţii:

a) prin sistemul bielă-manivelă la suportul cleştelui aducător pentru cursa de apropiere şi de retragere faţă de cleştele prinzător şi pentru efectuarea avansului cleştelui aducător;

b) prin sistemul camă, la pîrghia care comandă deschiderea şi închiderea cleştelului prinzător:

c) prin angrenaj de roţi dinţate, la mecanismul benzii de sortare.

a) Mişcarea suportului cleştelui aducător şi mişcarea de avans a cleştelui aducător

Arborele principal *1* (fig. 6) al aparatului, care primeşte mişcarea de la un electromotor prin intermediul unui reductor (care reduce turaţia la 20 rotaţii/minut), transmite mişcarea la biela *3* cu ajutorul manivelei *2*. Pîrghia *4*, fiind acţionată de biela *3*, efectuează cu capătul ei superior o mişcare de dute-vino, antrenînd suportul *5* al cleştelui aducător. În acest mod se realizează cursa spre cleştele prinzător şi cursa de retragere.

În faza de retragere din fiecare ciclu, piuliţa *6* a şurubului de avans *7*, care este solidară cu tubul rotitor *8*, este rotită cu 90 grade, datorită contactului produs între corniţa tubului *8* şi corniţa camei oscilante *9*. O dată cu rotirea piuliţei cu 90°, şurubul de avans *7*, care este prevăzut cu un canal longitudinal în care pătrunde o pană ce împiedecă rotirea şurubului, înaintează cu 1/4 din pasul său şi împinge cleştele aducător *10*, care înaintează astfel spre cleştele prinzător, cu o mărime egală cu avansul dat (mărimea avansului este reglabilă.)

b) *Mişcarea pentru deschiderea şi închiderea cleştelui prinzător*

Rola *11*, fixată excentric pe roata *12*, acţionată de arborele principal *1*, în o anumită fază a fiecărei rotaţii conduce capul liber al pîrghiei *13*, într-o mişcare oscilatorie. Atunci, capul opus al pîrghiei *13*, roteşte, cu un unghi oarecare, axul *14*, iar acesta ridică capul pîrghiei *15*, care este fixată pe axul *14* iar falca superioară a cleştelui prinzător *16*, se ridică.

În faza următoare de rotaţie a roţii *12*, cînd pîrghia *13* nu mai are contact cu rola *11*, falca superioară a cleştelui prinzător este trasă în jos de arcul *17* şi atunci are loc închiderea cleştelui şi reţinerea fibrelor care au pătruns în zona de prindere, cu o lungime egală cu avansul şurubului *7*.

c) *Mişcarea mecanismului pentru înaintarea benzii de sortare*

Roata dinţată *18*, fixată pe arborele principal *1*, se angrenează cu roata dinţată *19*, solidară cu roata stelată *20*. Proeminenţele roţii stelate transmit, cu intermitenţă, mişcarea lor roţilor dinţate *21*, *22* şi *23* şi cilindrului de antrenare a benzii *24*.

d) *Diagrama de funcţionare a aparatului (ciclograma)*

Pe diagrama de funcţionare a aparatului (fig. 7) punctul *O* corespunde poziţiei bolţului manivelei în faţă (spre cleştele fix) iar punctul *6* poziţiei bolţului manivelei în spate.

Mişcarea de dute-vino a suportului se realizează la o rotaţie completă a arborelui principal (zona I de pe diagramă).

Cleştele fix se deschide pe zona *8—11* şi se închide pe zona *11—12* (zona II).

Avansul cleştelui în suport are loc pe zona *4—6* (zona III).

Mecanismul benzii de sortat funcţionează, în cazul mişcării intermitente, pe zona *8—12* cînd cleştele este deschis, (zona IV).

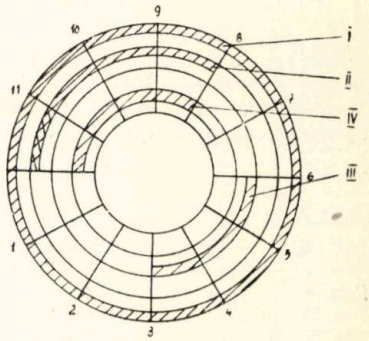


Fig. 7.—Ciclograma de funcţionare a sortatorului tip „D“.

4. Concluzii

Sortatorul de bumbac tip „D“ este un aparat simplu cu ajutorul căruia se poate determina într-un tip scurt (10...15 minute) lungimea modul şi lungimea filatorului a fibrelor de bumbac.

Aparatul poate fi utilizat pentru efectuarea diagramei de fibre în care grupele sortate sînt depuse pe banda de sortat la o anumită distanţă unele faţă de altele, sau pentru obţinerea unei diagrame continue de fibre (fără interval între grupele sortate).

Atît în primul caz, cît şi în cel de al doilea caz, pe baza diagramei obţinute se poate stabili cu precizie lungimea modul şi lungimea filatorului prin observarea cu ochiul liber a diagramei.

Institutul Politehnic, Iaşi
Catedra de Materii prime
şi Tehnologie mecanică textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu-Muscel I. şi colab., Bul. Inst. Politehnic Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1-2*, pp. 453-458.
2. Ionescu-Muscel I. şi colab., Bul. Inst. Politehnic Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3-4*, pp. 439-448.

3. Kuşin G. N., *Studiul teoretic al materialelor fibroase,* Bucureşti, 1949, I. D. T. (traducere din l. rusă).
4. Ionescu-Muscel I., Vlad I., *Fibre şi tehnologie mecanică textilă.* Litogr. Inst. Politehnic, Iaşi, 1958.
5. Ionescu-Muscel I. şi colab., St. şi cerc. Şt. Acad. R.P.R., Filiala Iaşi, 1956, **7**, *1*, Chimie, pp. 201-213.
6. Hanganu V. şi colab., Bul. Inst. Politehnic Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3 – 4* pp. 432-433.

СОРТИРОВЩИК ХЛОПЧАТОБУМАЖНОГО ВОЛОКНА ТИП „Д"

(Резюме)

Предлагается аппарат, простой конструкции, для сортировки хлопчатобумажного волокна с точностью до 0,25 мм, с получением, тах называемой, сплошной или прерывной диаграммы волокна.

Непосредственным чтением, по этой диаграмме можно установить, в течении 15 минут, длину модуля L_m и прядильника L_f.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Кривая распределения по длине хлопчатобумажных волокон.
Рис. 2. — Распределенин волокон в иммобилизованном пучке.
Рис. 3. — Система распределения волокон в пучке с прямой головкой,
Рис. 4. — Кривая совмещения хлопчатобумажных волокон.
Рис. 5. — Схема аппарата.
Рис. 6. — Сортировщик хлопка, тип „Д".
Рис. 7. — Циклограмма работы сортировщика, типа „Д".

THE COTTON SORTATOR TYPE „D"

(Summary)

Here we present en apparatus length that determines the modulus L_m, and the length of the spinner L_f, of the cotton fibres.

The obtained fibres diagram allows the immediate reading of the values of the abowe mentioned indexes.

Explanation of the figures

Fig. 1. — The distribution curve of the cottonfibres according to their length.
Fig. 2. — The position of the fibres în parallelized fibre bundle.
Fig. 3. — The displaying of the fibres in a bundle with a right fibre end.
Fig. 4. — The cumulative curve of the cotton fibres.
Flg. 5. — The principle of construction.
Fig. 6. — The cotton sortator type „D"
Fig. 7. — The functional cyclic diagram of the cotton sortator type „D"

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IV (VIII), Fasc. 3–4, 1958

RECENZII — РЕЦЕНЗИИ
BOOK REVIEWS — COMPTES RENDUS
BUCHBESPRECHUNGEN — RECENSIONI
ANALISIS DE OBRAS*)

1. * * * Издание Известий высших учебных заведений Министерства Высшего Образования СССР.

Redacţia *Buletinului Institutului Politehnic din Iaşi* salută cu deosebită căldură şi profund interes ştiinţific apariţia sub egida Ministerului Învăţământului Superior din URSS a valoroasei serii de noi reviste de specialitate ce se publică regulat în afară de şirurile de reviste periodice sau de volume de lucrări ce reflectă sesiunile ştiinţifice ale institutelor de învăţământ superior. Noile serii de reviste, menite a întări şi mai mult colaborarea rodnică între cadrele de specialitate din diferite institute de învăţământ superior şi a promova la maximum creaţia ştiinţifică în marea Uniune Sovietică care a păşit acum la construirea desfăşurată a comunismului, apar avînd titlul comun de Известия высших учебнис заведений Министерства Высшего Образования СССР sub îngrijirea comitetelor de redacţie competente şi cu subtitluri grupate pe ramuri în următoarele centre : Физика – la Universitatea de Stat din Tomsk; Математика – la Universitatea de Stat din Kazan ; Радиофизика – la Institutul Politehnic din Kiev ; Радиотекника – la Universitatea de Stat din Gorki ; Энергетика – la Institutul Politehnic Bielorus ; Электромеханика – la Institutul Politehnic din Novocerkask ; Машиностроение – la Şcoala Superioară Tehnică „Bauman" din Moscova ; Приборостроение – la Institutul de Mecanică de precizie şi de Optică din Leningrad ; Авиастроение – la Institutul de Aviaţie din Kazan ; Черная Металлургия – la Institutul Metalurgic siberian ; Цветная Металлургйя — la Institutul de Mine şi Metalurgie din Caucazul de Nord şi la Institutul de Metale nefieroase şi Materiale aurifere din Moscova; Горный Журнал – la Institutul de Mine din Sverdlovsk ; Геология и Разведка – la Institutul de Geologie şi Prospecţiuni miniere din Moscova ; Нефтяная Наука и Техника – la Institutul Industrial din Azerbaidjan ; Химия и Химическая Технология – la Institutul Chimico-tehnologic din Ivanovo ; Технология Текстильной Промышленности – la Institutul tehnologic de Industrie Uşoară din Kiev ; Технология Текстильной Промышленности – la Institutul de Ingineri-constructori din Novosibirsk ; Геодезия и Аерофотосьемка – la Institutul de Geodezi-ingineri din Moscova şi

---

*) Listele în continuare a cărţilor primite la redacţia *Buletinului Institutului Politehnic din Iaşi*, precum şi noile serii de recenzii vor fi publicate în fasciculele imediat următoare ale revistei.

Продолжение списков книг поступивших в редакцию **Известий Ясского Политехнического Института**, а так же и ряда новых рецензий на полученные книги будет помещено в следующих выпусках журнала.

A new list of books just received by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy* as well as a new series of bookreviews will be published in the next issues of the Bulletin.

altele. In imposibilitatea de a se opri aici asupra detaliilor, redacţia *Buletinului IPI* subliniază activa participare în paginile acestei noi serii de reviste a cadrelor didactice din cele mai variate centre de învăţământ superior din marea ţară a socialismului, nivelul ridicat al articolelor, judicioasa subdiviziune a fasciculelor în părţi consacrate articolelor originale, scurtelor comunicări şi cronicii ştiinţifice, frumoasele condiţii tehnoredacţionale de apariţie. Menţionînd cu deosebită satisfacţie şirul de invitaţii la colaborare trimis redacţiei *Buletinului IPI* de diferite comitete de redacţie ca, de pildă, Геодезия и Аерофотосиемка, Радиотехника ş.a., redacţia *Buletinului IPI* îşi exprimă nădejdea să poată obţine pe calea schimbului de publicaţii viitoarele serii de reviste din acest nou şir valoros. Redacţia constată totodată prezenţa colaborărilor în paginile *Buletinului IPI* semnate de redactori reprezentativi ai variatelor reviste din această serie, ca de pildă, prof. dr. G. H. Kamai din Kazan, prof. dr. L. N. Reşetov din Moscova ş.a.

Редакция Известий Ясского Политехнического Института горячо приветствует появление новой серии Известий Высших Учебных Заведений Министерства Высшего Образования СССР. Излагая выше, на румынском языке, ряд деталей и подчеркивая высокие качества новых изданий великой страны социализма строющей развернутым фронтом коммунизм, редакция Изв. ЯПИ выражает надежду на получение в порядке книгообмена всех серий Известий, а так же и новых серий Докладов Высшей Школы, будучи уверена в всемерном укреплении научного сотрудничества, выраженного уже за этот короткий период опубликованием на страницах Изв. ЯПИ статей некоторых редакторов новой серии (напр., проф. др. Г. Х. Камай, проф. др. Л. Н. Решетов и др.) и приглашениями к сотрудничеству и опубликованию на страницах Изв. ВУЗ Министерства Высшего Образования СССР полученными со стороны многих редакций (напр., Геодезия и Аерофотосьемка, Радиотехника и др.).

2. * * * **Сохранность книжных фондов.** Изд. второе, переработанное и дополненное. Гос. Библ. СССР им. В. И. Ленина, М., 1956, 78 стр.

Ref. subliniază interesul ce-l prezintă conţinutul acestei broşuri pentru toţi minuitorii şi depozitarii de cărţi prin contribuţia sa la rezolvarea problemei fundamentale de conservare şi de păstrare a fondurilor bibliotecare. Trecîndu-se în revistă problema materialelor din care este confecţionată cartea precum şi aceea a microorganismelor şi insectelor care-i dăunează, se descriu : amenajarea depozitelor de cărţi, regimurile de păstrare a cărţilor, repararea şi restaurarea cărţilor şi, în fine, probleme de higienă a cărţii.

*

Реф. дает выше на румынском языке некоторые характеристики этой важной для решения задачи о сохранении библиотечных фондов монографии.

3. * * * *Index to Theses for higher degrees in the universities of Great Britain and Ireland.* Vol. **VI** 1955–56. Edited by Magda Whitrow, ASLIB, London, 1958, XII+165 pp.

In legătură cu recenzia vol. III din aceeaşi serie (a se vedea acest Buletin, **II (VI)**, 3–4, 1956, p. 154), subliniem caracteristicile acestei colecţii deosebit de utile din punct de vedere bibliografic.

*

Ce volume, le sixième de la série, recouvre l'année académique 1955–56. Le numéro de thèses mentionnées est de 2713. Auprès de chaque titre on trouve des indications utiles concernant l'université ou bien collège où elle a été soutenue. Un index des auteurs et celui des matières complètent cet oeuvre dont l'utilité ne peut pas être sousestimée.

4. ШАМУРИН Е. И., **Очерки по истории библиотечно-библиографической классификации**, I. Изд. Всесоюзной Книжной Палаты, М., 1955, 399 стр.

In vol. I elaborat de prof. dr. E. I. Şamurin, editat de Palatul unional al cărţii, consacrat istoriei ciasificării bibliografice, se trece în revistă, *pentru prima oară*, ţinindu-se seamă şi de starea ştiinţei la epoca considerată precum şi de tradiţiile multiseculare acumulate, ansamblul de date relative la istoria clasificării bibliografice începînd cu timpurile cele mai vechi pînă la începutul secolului al XIX-lea (pentru Franţa pînă la 1809).

Ref., atrăgînd atenţia bibliografilor, bibliotecarilor, filozofilor şi tuturor acelora care se interesează de istoria dezvoltării gîndirii relative la clasificare şi biblioteconomie, asupra acestui studiu deosebit de instructiv, conţinînd numeroase documente privitoare la : 1. Sistematizarea cărţilor în ţările Orientului antic ; 2. Idem, în epoca sec. V–XI şi XII–XIV ; 3. Sistematizarea cărţilor în epoca Renaşterii (sec. XV şi XVI) şi apoi în sec. XVII ; 4. Sistematizarea cărţilor în sec. XVII (pînă la revoluţia burgheză din Franţa din 1789) ; 5. Proiecte de reforme de clasificaţie în Franţa din timpul revoluţiei şi la începutul sec. XIX-lea ; 6. Clasificări reacţionare din perioada restaurării în Franţa şi clasificări din alte ţări pînă la finele sec. XVIII-lea ; 7. Sistematizarea cărţilor în Rusia în sec. XI–XVII şi XVIII-lea, subliniază faptul că volumul referat ca şi acel în pregătire îmbrăţişează analiza clasificărilor generale, nu însă şi a clasificărilor de ramură.

*

Cet ouvrage, publié sous les auspices du Palais unional de la culture de l'URSS, contient un exposé mis au point concernant l'histoire de la classification bibliographique depuis l'antiquité jusqu'au début du XIX-e siècle. Le réf. souligne l'initiative de l'auteur d'avoir mis en évidence le rôle prépondérant dans l'histoire de la pensée humaine des conditions sociales et politiques de l'époque.

5. * * * **Библиография советской библиографии. 1954**, Изд. Всесоюзной Книжной Палаты, М. 1955, 271 стр.

Anuarul referat *Bibliografia bibliografiei sovietice* trece în revistă lucrările de bibliografie precum şi titlurile lucrărilor publicate în 1954 în care s-a folosit o vastă documentare bibliografică, interesînd toate domeniile ştiinţei şi tehnicii.

*

Выше приводятся некоторые указания об этом, важном с библиографической точки зрения, томе.

Serviciul de bibliografie al Bibliotecii IPI

6. * * * **Развиток науки в Украинській РСР за 40 рокив**, Вид. АН УССР, Киев 1957, 261 стр.

In imposibilitate evidentă de a trece aici în revistă uriaşele cuceriri ale ştiinţei şi tehnicii în RSS Ucraina în cei 40 ani scurşi de la Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie, descrise sugestiv de un număr de specialişti de seamă în acest volum jubiliar, referentul se vede obligat, restrîngîndu-se la specialitatea sa, să menţioneze următoarele titluri de articole, cu paragrafele respective şi autorii lor : Acad. I. Z. Ştokalo, *Realizările matematicienilor din RSS Ucraina în 40 de ani de putere sovietică* (Rolul, particularităţile şi însemnătatea matematicii sovietice ; Colaborarea matematicienilor ruşi şi ucraineni ; Centre matematice din RSS Ucraina şi direcţiile fundamentale de cercetări ; Algebra şi teoria numerelor ; Teoria funcţiilor de variabilă reală ; Teoria funcţiilor de variabilă complexă ; Fizica matematică ; Geometria ; Teoria ecuaţiilor diferenţiale ; Analiza funcţională ; Teoria probabilităţilor ; Maşini matematice de calcul) ; Acad. G. N. Savin, *Asupra dezvoltării mecanicii în Ucraina în 40 ani de putere sovietică* (Direcţiile principale de cercetări ale şcolii acad. O. N. Dinnik ; Direcţiile principale de cercetări ale şcolii academicienilor N. M. Krilov şi N. N. Bogoliubov în domeniul mecanicii neliniare ; Direcţiile principale de cercetări în domeniul mecanicii în cadrul Institutului de Mecanica Construcţiilor al Academiei de Ştiinţe

din RSS Ucraina (Director şi conducător, acad. G. N. Savin, N. Ref) ; Mecanică analitică ; Elasticitate şi Plasticitate ; Materiale de construcţie ; Aerohidrodinamică ; Metode experimentale în mecanică ; Maşini de calculat) ; A. O. Iakovkin, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din RSS Ucraina, *Realizări în domeniul Astronomiei în Ucraina în 40 de ani de putere sovietică* (Cercetări de astronomie şi gravimetrie în Ucraina ; Cercetări de Astrofizică în Ucraina).

*

Реф., из за невозможности пореферировать, сколько бы ни было, полноценнейшие достижения науки и техники мирового размаха, достигнутые украйнскими механиками, математиками и астрономами за 40 лет советской власти, ограничивается выше ознакомлением румынских читателей с содержанием глав написанных академиками И. З. Штокало, Г. Н. Савиным и чл. корр. А. О. Яковкиным.

D. Mangeron

7. ЛУКОМСКАЯ А. М., **Александр Михайлович Ляпунов**. Изд. АН СССР, М —Л., 1953, 268 стр.

Acest volum, apărut sub redacţia directorului bibliotecii Academiei de Ştiinţe a URSS, doctor în ştiinţele fizico-matematice G. A. Cebotarev, conţine, pe lîngă un preţios material bibliografic relativ la ansamblul lucrărilor elaborate de diverşi specialişti din lumea întreagă pe baza memoriului celebru dedicat de A. M. Liapunov teoriei stabilităţii mişcării, atît o biografie a lui Liapunov cît şi o trecere în revistă a creaţiei ştiinţifice a acestuia.

*

Questo volume contiene, oltre la bibliografia completa concernente i scritti pubblicati da vari scienziati prendendo come mossa una celebre memoria di A. Liapunov, fondatore della teoria della stabilità di movimento, la biografia di questo sommo matematico ed uno studio sulla sua opera scientifica. *C. Drăgan*

8. ВЕСЕЛОВСКИЙ И. Н., **Архимед. Классики физики**. Учпедгиз, М, 1957. 111 стр.

Autorul, cunoscut cercetătorilor din patria noastră prin cursul său de Mecanică şi Rezistenţă, tradus din limba rusă, a lucrat în anii din urmă cu competenţă la traducerea tuturor lucrărilor ale lui Arhimede, ce s-au salvat de la pieire. Ca un fruct colateral al acestei munci migăloase a apărut şi această expunere pe înţelesul tuturor a vieţii şi operei marelui siracuzan. Referentul salută cu deosebit interes ca precizări noi : Stabilirea faptului că toate operele matematice ale lui Arhimede au fost scrise de el la vîrsta matură (cam la 50 ani) ; 2. Caracterizarea dezvoltării mecanicii antice prearchimediene ; 3. Evoluţia la Archimede a metodei exaustiunii ; 4. Situarea mai precisă în timp a apariţiei cărţilor *Despre echilibrul figurilor plane* ; 5. Analiza cărţilor *Despre natanţie*. La aceasta se adaugă şi alte cîteva fapte noi, în deosebi relative la un mare predecesor al lui Archimede în domeniul Astronomiei, Aristarh din Samos. Recomandînd traducerea şi acestei cărţi, reamintim că cititorii noştri cunosc în aceeaşi ordine de idei cartea prof. Lurie.

*

This is a very nice booklet, which should be read by anyone interested in the studies of ancient mechanics. The printing is pleasant and the diagrams are pretty clear. The Rev. underlines some new author's hypothesis concerning the Archimede's life.

D. Mangeron

9. ШОСТЬИН Н. А., **Михаил Павлович Вронченко, военный геодезист и географ**. Геодезиздат, М., 1957, 87 стр.

Autorul dă o succintă prezentare a bogatei activităţi ştiinţifice şi practice a generalului M. P. Vroncenko, eminent geodez militar, geograf, om de litere şi poet rus, din secolul trecut (1802–1855), care a efectuat importante lucrări în domeniul triangulaţiei primordiale şi

a determinării coordonatelor geografice şi astronomice a Turciei europene, a Asiei Mici şi a sudului Rusiei. Sub directa lui conducere s-a făcut măsurarea arcului paralelei $47^0 1/2$ printr-un lanţ de triunghiuri ce se întindea de la Iaşi la Astrahan.

*

Изложена богатая научная деятельность военного геодезиста, географа и литератора прошлого века (1802—1875) М. П. Вронченко, ознаменовавшего свою многостороннюю деятельность и рядом переводов из классической иностранной художественной литературы. *D. Paghida*

10. * * * Карл Фридрих Гаусс. Сборник статей под общей ред. акад. И. М. Виноградова. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1956, 312 стр.

Prezenta culegere de articole este publicată cu ocazia centenarului morţii lui Gauss, a cărui activitate pe tărîmul matematicii a fost atît de multilaterală. Culegerea este precedată de cuvîntarea acad. I. M. Vinogradov, rostită la şedinţa ce a fost organizată de Societatea unională pentru legături culturale cu străinătatea şi secţiunea ştiinţelor fizico-matematice a Academiei de Ştiinţe din U.R.S.S.

*

В настоящем сборнике, публикуемом по случаю столетия со дня смерти Гаусса, рассматриваются работы великого немецкого математика по теории чисел (Б. Н. Делоне), по геометрии (А. П. Норден), по математическому анализу (А. И. Маркушевич), по теории вероятностей (Б. В. Гнеденко), по астрономии и геодезии (М. Ф. Субботин). Только работы Гаусса по магнетизму не представлены в сборнике, для полного освещения его многогранной деятельности; но эти работы были опубликованы в 1952 году в серии „Классики науки". Авторы статей обстоятельно изучают работы Гаусса и показывают место, занимаемое ими в историческом развитии науки. Книга представляет собой непреложное доказательство того интереса, который проявляется советской общественностью к выдающимся трудам двигателей научной мысли. В качестве введения к сборнику помещена-речь акад. И. М. Виноградова, произнесённая им на заседании, организованном Всесоюзным обществом культурной связи совместно с отделением физико-математических наук АН СССР по случаю столетия со дня смерти Гаусса. *Vl. Şciurevici*

11. COHEN I. BERNARD, *Franklin and Newton.* The American Philosophical Society, Philadelphia, 1956, XXVI+657 pag.

Referentul dă mai jos unele detalii relative la conţinutul acestei cărţi a prof. Cohen, consacrată dezvoltării ştiinţelor experimentale în perioada lui Newton precum şi studiului personalităţii ştiinţifice a lui Franklin şi Newton şi rolului acestora în istoria gîndirii ştiinţifice şi a culturii.

Vasta bibliografie, indicele de nume, un număr de fotografii şi scheme şi un text bogat, destinat unei documentări serioase, recomandă de la sine cercetătorilor în domeniul istoriei, ştiinţei şi a tehnicii această lucrare de seamă a prof. Cohen.

*

This book, volume 43 from the *Memoirs of the American Philosophical Society,* contains a detailed study and interpretation of the rise of experimental science in the Age of Newton. In addition to an analysis of Newton's ideas and their influence, the concluding portion deals with the growth of the new exact science of electricity, especially the work of Franklin and its influence. It is shown to what extent Franklin was immersed in the great Newtonian tradition and how he modified the general current of scientific thought.

This book should prove of interest to anyone interested in the nature and growth of scientific thought. All in all, the book, written by the Editor of Isis and the author of *Roemer and the First Determination of the Velocity of Light : Benjamin Franklin's Experiments ; Science: Servant of Man;* and many other books and studies, represents an original and fundamental contribution to our understanding of the nature of physical science and its development, and is a major addition to the literature concerning Newton and Franklin. *D. Mangeron*

12. WEIL ANDRÉ, *Introduction à l'étude des variétés Kählériennes.* Act. scient. et industrielles 1267, Paris, Hermann, 1958, 175 pp.

Autorul, bine cunoscut publicului de specialitate, are o activitate, foarte complexă, înglobînd în preocupările sale atît algebra, cît şi topologia sau geometria. Firește, principala beneficiară a acestei varietăți de puncte de vedere este geometria ; fie ramurile ei mai vechi şi mai cu seamă geometria algebrică, debarasată de ipoteze inutile, fie ramurile mai noi, cîştigă în profunzime şi în valoare estetică.

Lucrarea recenzată este într-adevăr o introducere în teoria varietăților Kähleriene şi lectura ei nu cere decît puține cunoştințe anterioare, uşor accesibile ; în schimb parcurgerea ei nu este utilă decît cititorilor cu o formație suficient de modernă.

Metrica introdusă de către K ä h l e r şi-a arătat întreaga importanță abia în urma lucrărilor de geometrie algebrică ale lui H o d g e şi lucrarea lui W e i l se înscrează în aceeaşi ordine de idei şi în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, care s-a dezvoltat în special în direcția geometrizării.

Cartea este împărțită în 6 capitole şi se termină cu un apendice. Stilul elegant şi clar al autorului este foarte concentrat şi lectura cărții cere cititorului un efort susținut, de altfel complet justificat de interesul pe care-l prezintă teoria.

*

Le compte rendu souligne l'intérêt des questions traitées, rehaussé par le style élégant et clair de l'auteur. *Al. Climescu*

13. MARSHALL HALL JR., *Projective planes and related topics.* California Institute of Technology, 1954, VI + 77 pp.

Broşura conține reproducerea prelegerilor ținute de către autor la Institutul tehnologic din California în primăvara anului 1954. Chestiunile tratate, destul de diferite în aparență, se centrează în jurul problemei aspectelor algebrice ale teoriei planelor proiective, domeniu în care autorul a adus contribuții din cele mai interesante, fiind în acelaşi timp unul din promotorii redeşteptării interesului pentru această sferă de probleme. In prelegerea I se introduce axiomatic noțiunea de plan proiectiv şi se coordonatizează acest plan ; coordonatele determină un inel, care are proprietăți speciale dacă teorema lui D e s a r g u e s este valabilă. In prelegerea II-a se expun cîteva proprietăți ale structurilor, în particular a celor modulare, foarte interesantă reproducerea demonstrației teoremei de reprezentare a lui J o n s s o n. In prelegerea III-a se studiază inelul ternar asociat unui plan proiectiv şi se studiază în detaliu cazul cînd coordonatizarea planului se poate face cu ajutorul unui inel alternativ cu diviziune. In prelegerea IV-a se studiază grupul liniar proiectiv şi de asemenea se consideră grupuri dublu tranzitive care definesc aproape corpuri ce definesc anumite plane proiective. In ultima prelegere se atacă unele probleme referitoare la planele proiective finite şi legătura lor cu probleme din teoria matricilor şi din teoria numerelor.

In ansamblu lucrarea este în acelaşi timp unitară în fond şi diversă ca aparență şi lectura ei este plăcută şi stimulentă.

*

The reviewer points out the interest of the various topics discussed in the entertaining book of prof. M a r s h a l l H a l l J r. *Al. Climescu*

14. SPRINGER G., *Introduction to Riemann surfaces.* Addison – Wesley, Mass., 1957, VIII+307 pp.

Această carte are drept scop prezentarea unor noțiuni fundamentale legate de teoria suprafețelor riemanniene, într-o formă mai accesibilă. Din această cauză, autorul face adesea apel la intuiție şi la reprezentări geometrice, reuşind în acest mod să facă expunerea utilă unui cerc mai larg de cititori. Unele capitole constituie introduceri reuşite în topologie generală sau topologie combinatorie.

*

Ce livre représente un traitement moderne de la théorie clasique des surfaces de R i e m a n n, dans le but de préparer le lecteur pour des études ultérieures plus approfondies.

Le problème central traité par l'auteur est l'étude des surfaces de Riemann abstraites et leur liaison avec les fonctions algébriques et leurs integrales. Dans ce but, l'auteur commence par nous présenter le problème sous un aspect intuitif, dans l'introduction (faisant appel, comme nous l'avons déjà dit, à la mécanique des fluides et à la géométrie euclidienne), ensuite, il établit que la surface de Riemann d'une fonction analytique est une surface de Riemann abstraite (chap. III). Dans le chapitre suivant, il introduit les notions de surfaces de recouvrement et de groupe fondamental et plus loin (chap. V) les notions topologiques combinatoires de triangulation, orientabilité et formes normales des surfaces compactes orientables. En utilisant la structure localement euclidienne des surfaces de Riemann, l'auteur définit dans le chapitre VI les différentielles et leurs intégrales sur ces surfaces, constatant que leur étude est plus naturelle que celle des fonctions.

Finalement, il approfondit les fonctions méromorphes et multiformes, liant l'étude des surfaces de Riemann compactes et des fonctions algébriques. *P. Caraman*

15. МИТРОПОЛСКИЙ А. К., **Нормальное распределение.** Ленинградская орд Ленина Лесотехническая Академия им. С. М. Кирова, Л., 1956, 121 стр.

Cartea prof. A. K. Mitropolski de la Academia tehnică forestieră „S. M. Kirov" din Leningrad, este consacrată problemei de distribuție normală, ce constituie unul dintre cele mai importante capitole de statistică matematică. Ref. atrage atenția asupra faptului că autorul nu scapă prilejul de a ilustra teoria, folosind exemple luate din domeniul de studiu al diferitelor proprietăți ale materialelor lemnoase.

*

Референт подчёркивает выше на румынском языке, некоторые особенности книги проф. А. К. Митропольского, посвященной нормальному распределению—одной из важных глав математической статистики.

D. Mangeron

16. ШТЕРНТАЛ А. Ф., **Ынтродучере ын студиу аналізей математиче.** Едит. Педаг. де Стат а РСС Молдовенешть, Кишинеу, 1957, 235 паж.

In cadrul editării în fascicule a cursului de Calcul diferențial și integral, regretatul prof. A. F. Sterntal de la Institutul Pedagogic din Chișinău prezintă în această fasciculă, în elaborarea cand. șt. fiz.-mat. K. S. Sibirski, următoarele capitole premergătoare calculului diferențial propriu zis : I. Numărul (Mulțimea numerelor reale ; Mulțimi numerice și unele noțiuni fundamentale referitoare la ele ; Teoria numerelor reale), II. Șiruri numerice (Limitele șirurilor numerice ; Șiruri cu limite infinite ; Șiruri monotone ; Completări), III. Funcții (Cunoștințe generale despre funcții ; Limitele funcțiilor ; Funcții continue ; Funcții elementare).

*

Реф. указывают на содержание глав книги, представляющей собой введение в дифференциальное и интегральное исчисление. *A. Triandaf, M. Bercovici*

17. ЛОБАЧЕВСКИЙ Н. И., **Избранные труды по геометрии.** Редакция акад. П. С. Александрова, В. Н. Делоне и П. И. Рашевского. Комментарии В. Ф. Кагана, А. П. Нордена, Б. Л. Лаптева и В. Г. Болтянского. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1956, 596 стр.

Această ediție a lucrărilor de bază ale lui Lobacevski este înzestrată cu ample comentarii, care ușurează studiul lor, și este însoțită de interesantul articol al lui B. N. Delone *Demonstrația necontradicției planimetriei lui Lobacevski,* cît și de o schiță succintă a lui P. S. Alexandrov asupra vieții și activității lui Lobacevski. In această schiță autorul reușește să ne prezinte în cîteva pagini figura măreață a celui care nu numai că a făcut un mare pas înainte în știința geometriei, dar a și luptat toată viața lui pentru popularizarea ideilor geometriei neeuclidiene.

*

В это издание включены три сочинения Н. И. Лобачевского:„ Геометрические исследования по теории параллельных линий" (1840), „Новые начала геометрии с полной теорией параллельных" (1835—1838) и „Воображаемая геометрия"

(1835). Обращает на себя внимание очень интересная статья Б. Н. Делоне, данная в 3-ем приложении: „Доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского". Обстоятельные примечания к публикуемым сочинениям Лобачевского дают комментаторы издания. Книга заключается кратким очерком П. С. Александрова о жизни и деятельности Лобачевского, в котором автор сумел представить ярко образ великого геометра. *Vl. Sciurevici*

18. HAANTJES J., *Inleiding tot de Differentiaalmeetkunde* P. Noordhoff N. V., 1954, Groningen–Djakarta, VII+173 pp.

Redactată în limba olandeză pentru uz didactic, cartea prof. Haantjes expune, atrăgător şi cu rigoarea necesară pentru un studiu introductiv, elementele de geometrie diferenţială a curbelor şi a suprafeţelor. Menţionăm că noţiunile astăzi clasice, ca de ex. simbolii lui Christoffel, ecuaţiile lui Gauss–Codazzi, teorema lui Gauss–Bonnet ş.a. sînt îmbrăcate – acolo unde este cazul – în haina modernă a calculului tensorial, expus într-un număr redus de pagini (pp. 99–119) în cap. V.

*

Les Réf. donnent ci-dessus quelques détails concernant cet excellent livre, rédijé en néerlandais et constituant une introduction à la géométrie différentielle des courbes et des surfaces.

La forme extérieure du volume est une belle et ancienne tradition de P. Noordhoff-Editeur. *M. Bercovici, A. Triandaf*

19. HILLE E. and PHILLIPS R. S.: *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI, Revised edition, Providence, 1957, XII+808 pp.

Această carte constituie a doua ediţie a cărţii cu acelaşi titlu a lui E. Hille, apărută cu zece ani în urmă şi bine apreciată de lumea matematică. Se expun principalele rezultate ale teoriei spaţiilor şi algebrelor Banach şi se expune pe larg teoria semi-grupurilor, creată de E. Hille, teorie care a găsit numeroase aplicaţii în cele mai variate domenii ale matematicii.

*

Cet ample ouvrage constitue la seconde édition du livre de même titre d'Einar Hille, paru il y a dix ans et bien connu au public mathématique. Pendant les dernières années, la théorie des demi-groupes dont le créateur est E. Hille, a été considérablement développée. Dans cette nouvelle édition, on trouve beaucoup de résultats nouveaux acquis dans ce domaine. Cependant les auteurs ont supprimé les applications des demi-groupes à la théorie des équations aux dérivées partielles ; ces applications sont maintenant si nombreuses qu'elles pourraient constituer le sujet d'un autre livre.

Le livre est divisé en cinq parties. La première partie est consacrée à l'exposé de l'Analyse fonctionnelle. On y trouve les questions fondamentales concernant les espaces et les algèbres de Banach. Dans un chapitre on étudie la transformation de Laplace et les séries binomiales. Dans la seconde partie, après trois chapitres préparatoires concernant les fonctions sous-additives, les demi-groupes abstraits et les algèbres de Banach, on donne la définition des demi-groupes d'opérateurs dans la topologie stuite. Dans cette partie on trouve aussi quelques problèmes d'ordre général se rattachant à la theorie des demi-groupes (générateur d'un demi-groupe, la résolvante). La troisième partie consacrée aussi aux demi-groupes contient la théorie de la perturbation, la théorie spectrale, le calcul opérationnel, la théorie des demi-groupes holomorphes et quelques applications à la théorie ergodique. La quatrième partie est destinée à l'étude de quelques classes spéciales de demi-groupes. Parmi les applications qu'on y donne il faut mentionner l'étude du problème abstrait de Cauchy. Enfin la cinquième partie du livre contient quelques généralisations des théories exposées dans les parties précédentes. Dans un chapitre on donne quelques résultats complémentaires concernant les algébres de Banach, dans un autre chapitre on expose la théorie des demi-groupes de Lie et dans le dernier chapitre on peut trouver quelques résultats sur la différentiabilité des opérateurs et les séries de puissance. Cette nouvelle édition fournit à tout ceux qui s'intéressent à l'Analyse fonctionnelle un instrument très precieux. *C. Corduneanu*

20. BOURBAKI N., *Éléments de Mathématiques*, **I**, Livre 1 *(Théorie des Ensembles)* Ch. 4 : *Structures*. Act. scient. et industrielles 1258, Paris, Hermann, 1958, 124 pp.

Impresionantul efort de sistematizare întreprins de un număr de matematicieni şi prezentat sub pseudonimul colectiv B o u r b a k i se continuă cu perseverenţă de două decenii.

Incontestabil nu toate fasciculele tratatului sînt egal reuşite şi unora din ele li s-a reproşat o anume unilateralitate, cîtuşi de puţin surprinzătoare dacă luăm în consideraţie formidabila producţie matematică din ultima vreme.

Fascicula recenzată încheie teoria mulţimilor şi este consacrată noţiunii generale de structură, care este definită în aşa fel încît orice teorie matematică are la bază un caz concret de structură. De altfel, dacă se trece peste dificultăţile legate de terminologie şi notaţie, definiţiile introduse şi rezultatele obţinute corespund acelora familiare. Exemplele date, care, strict vorbind, devansează teoria, ajută substanţial la înţelegerea ei. Din notaţiile logicei matematice sînt întrebuinţate cu discreţie simbolurile pentru cei doi cuantificatori şi simbolurile pentru implicaţie şi echivalenţă. Poate că întrebuinţarea conjuncţiei şi disjuncţiei ar fi fost de asemenea bine venită.

Lucrarea se termină cu o notă istorică (relativă la capitolele 1–4) dintre cele mai interesante şi a cărui lectură o consider fascinantă. Cu inevitabile lacune se trece în revistă istoria progreselor gîndirii matematice din antichitate şi pînă azi şi impresia generală pe care o lasă lectura notei este aceea de grandoare nu lipsită uneori de tensiune dramatică. Afirmaţiile anonimului autor nu sînt de altfel la adăpost de orice critică, astfel socotesc că subestimarea mulţimilor reticulare este cu totul nejustificată, iar minimalizarea valorii aşa numitului paradox al lui S k o l e m este nedreaptă.

*

Le compte rendu rend hommage à l'impressionnant effort du collectif B o u r b a k i et signale l'intérêt du fascicule revu et le caractère fascinant de la note historique qui le termine.

Al. Climescu

21. BOURBAKI N., *Éléments de mathématiques*, Livre **VI**, Ch. 5, *Intégration des mesures*. Ed. Hermann, Paris, 1956, 131 pp.

Această lucrare este una din fasciculele tratatului elaborat de colectivul **B** o u r b a k i şi face parte din cartea consacrată integrării. Sînt expuse cîteva probleme din teoria integrării şi a măsurii (pe spaţii local compacte). Teoremele au un caracter foarte general şi în ele sînt cuprinse multe propoziţii clasice asupra integralei lui Lebesgue.

*

De la table des matières de ce fascicule nous retenons : fonctions essentiellement intégrables, intégration de mesures positives, intégration de mesures positives ponctuelles, mesures définies par des densités numériques, images d'une mesure, intégration par rapport à une mesure induite, produits de mesures. Il s'agit presque partout dans ce chapitre de mesures positives sur les espaces localement compacts.

Les propositions et les théorèmes sont d'une grande généralité et beaucoup de faits classiques s'en déduisent. C'est le cas, par exemple du théorème classique de Lebesgue-Fubini, des propositions concernant le changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue, des propositions sur la dualité dans les espaces L_p etc.

Un nombre considérable d'exercices apporte des compléments substantiels à la théorie.

À la fin du fascicule, on trouve un apreçu historique sur la notion d'intégrale, à la fois instructif et agréable.

C. Corduneanu

22. CHEVALLEY C. *The construction and study of certain important algebras*. Publ. of the Math. Soc. of Japan, **I**, 1955, VI+64 pp.

Conţinutul broşurii reproduce prelegerile ţinute de către autor la Universitatea din Tokio în lunile aprilie-iunie 1954. La bază stă ideea de algebră gradată, adică o algebră care este dată împreună cu o descompunere ca modul, termenii descompunerii fiind indiciaţi prin elementele unui grup aditiv şi produsul a două componente fiind inclus în componenta

indicată prin suma indicilor factorilor. Intr-o astfel de algebră se introduc operatori de derivare cu proprietăți analoage derivării obișnuite.

După aceste generalități, dezvoltate în cap. I, în capitolul II se construiește algebra tensorială asupra unei algebre date și se studiază produsul tensorial de module. In cap. III se definește și se studiază o algebră de tip Clifford, adică algebra asociată unei forme patratice și în particular algebra exterioară descoperită de către Grassmann, uitată, apoi redescoperită de către E. Cartan și devenită în urmă un bun comun. In capitolul final se schițează cîteva aplicații ale algebrei exterioare (coordonate plückeriene, reprezentarea exponențială, definiția determinanților).

In ansamblu o lucrare interesantă și scrisă cu obișnuită claritate a autorului.

*

The small but beautiful book by prof. C. Chevalley is analysed by the reviewer.

Al. Climescu

23. CHEVALLEY C., *Class field Theory*. Nagoya University, 1953–54, II+104 pp.

Teoria corpurilor de clase, fondată de către Hilbert a fost propriu zis creată ca disciplină autonomă de către Takagi și Artin, căruia i se datorește o lege de reciprocitate care include ca un caz foarte particular legea de reciprocitate patratică.

Ulterior teoria s-a îmbogățit cu diferite alte contribuții, în particular cu noțiunea de ideal, introdusă de către autor, iar în ultimele două decenii un progres substanțial se datorește introducerii unor metode împrumutate teoriei cohomologiei. Teoria corpurilor de clase este astfel încă un exemplu de profundele schimbări determinate în algebră de influența topologiei.

Lucrarea profesorului Chevalley este reproducerea îmbunătățită a notelor după un curs ținut de d-sa la Nagoya în 1953–54 și ca atare nu conține indicații bibliografice și nu vizează a fi o expunere completă a subiectului. Ea constituie însă un ajutor prețios pentru oricine dorește să poată urmări rapida dezvoltare din ultimii ani a teoriei corpurilor de clase, teorie care ca și în trecut rămîne una din cele mai dificile ale algebrei ; în consecință apariția broșurii este indiscutabil bine venită.

*

Le compte rendu met en relief l'utilité du livre pour tous ceux qui désirent se tenir au courant des progrès rapides de la théorie des corps de classes.

Al. Climescu

24. *** *Colloque d'Algèbre Supérieure*. (Bruxelles, 19–22 déc. 1956). Centre Belge de Recherches Mathématiques. Établissements Ceuterick, Louvain, Gauthier-Villars, Paris, 283 pp.

Un fenomen caracteristic perioadei actuale este multiplicarea relațiilor sociale între matematicieni, multiplicare manifestată prin organizarea de forme variate de întîlniri (congrese, conferințe, colocvii), internaționale sau naționale (cu sau fără participarea de invitați din străinătate). Pe lîngă cauzele generale, desigur că principala cauză specifică a acestui fenomen este reacția naturală a matematicienilor, din ce în ce mai numeroși în lumea întreagă, față de pericolul specializării înguste ; contactele personale stabilite în aceste ocazii ajută la înțelegerea și difuzarea diverselor puncte de vedere și prin urmare combat într-o anume măsură pericolul semnalat mai sus. Volumul recenzat, al 12-lea din seria colocviilor organizate de C.B.R.M., conține 12 comunicări prezentate la colocviu. Algebra contemporană este așa de dezvoltată, încît în mod natural sînt atinse numai unele din aspectele acestei discipline ; și așa varietatea chestiunilor prezentate este foarte mare, iar interesul de ansamblu al comunicărilor este considerabil.

După părerea recenzentului, interesul principal nu cade însă asupra uneia sau alteia din comunicări, ci asupra tendințelor generale care se degajă și care sînt :

1. Interrelațiile din ce în ce mai strînse dintre algebră și topologie, respectiv dintre algebră și geometrie ; 2. Algebrizarea unor teorii fizice ; 3. Reluarea problemelor clasice în lumina concepțiilor și metodelor mai noi. In aceste condiții colocviul a adus o contribuție utilă la principala problemă actuală, care este restructurarea și reunificarea matematicii, care apare la prima vedere ca o colecție de discipline așa de diverse, încît unui neinițiat îi vine greu să admită că sînt totuși ramuri ale unei singure științe. Au prezentat comunicări (citate

în ordinea publicării) : Marie-Louise Dubreil-Jacotin, P. Dubreil, W. Krull, L. Lesieur, R. Croisot, G. Higman, M. Krasner, J. H. Green, L. Lombardo-Radice, P. Samuel, E. Witt, L. Waelbroeck, J. Tits.

*

Le compte rendu souligne les points de vue généraux qui se dégagent des communications présentées aux Colloque. *Al. Climescu*

25. GODEMENT ROGER, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Publ. de l'Institut Mathématique de l'Université de Strasbourg, **XIII,** (Act. Scient. et ind. 1252), Hermann, Paris, 1958, VII+238 pp.

Autorul își propune să expună teoria fasciculelor într-o lucrare de referință care să dea toate demonstrațiile, ținînd seama că o astfel de lucrare lipsește. Materialul fiind extrem de dezvoltat, cu toate că teoria s-a născut în 1954, lucrarea este împărțită în două tomuri ; primul tom este la rîndul său împărțit în două capitole.

Capitolul I tratează pe scurt noțiunile de algebră homologică necesare, într-un mod mai puțin amănunțit ca monografia lui H. Cartan – S. Eilenberg.

Capitolul II, conținînd materialul propriu zis de teoria fasciculelor, diferă sensibil de expunerile parțiale de pînă acum. Autorul întrebuințează alte metode și rezultatele la care ajunge merg mai departe decît acelea ale predecesorilor. Într-un anume sens se poate spune chiar că se atinge stadiul final al teoriei prin găsirea domeniului său natural de aplicație.

Utilitatea și originalitatea cărții este incontestabilă pentru orice cititor nespecializat și parcurgerea ei dă impresia că algebra homologică și poate și teoria fasciculelor vor intra curînd cel puțin într-o oarecare măsură, în echipamentul tehnic al oricărui algebrist.

*

Le compte rendu passe rapidement en revue le contenu du livre et souligne son utilité et son originalité. *Al. Climescu*

26. GOMES RUY LUIS, *Integral de Lebesgue-Stieltjes.* **I,** Junta de Investigac ̧a o Matematica : Cadernos de Análise Geral. nr. 21, Porto, 1952, V+93 pp.

In cele patru capitole ale broșurii autorul dezvoltă teoria integralei lui Lebesgue–Stieltjes utilizînd sistematic ideea de prelungire prin continuitate a unei aplicații continue definită pe o mulțime A densă într-un spațiu topologic E și luînd valori într-un spațiu topologic E' (bineînțeles cele două spații satisfac la condiții convenabil alese, care permit demonstrația existenței și unicității prelungirii, condiții totdeauna îndeplinite în cazul spațiilor euclidiene). Problema se reduce astfel la topologizarea spațiului de puncte, ceea ce se obține în moduri diverse și conduce imediat atît la integrala lui Lebesgue cît și la integrala lui Riemann (în ambele cazuri funcționala prelungită fiind aceea a lui Cauchy, adică integrala funcțiilor continue într-un interval). Similar se tratează cazul integralei Lebesgue-Stieltjes. Ultimul capitol este consacrat măsurabilității și lucrarea se termină cu demonstrația faptului că se obține aceeași integrală fie prin utilizarea sumelor lui Lebesgue relative la o medie dată, fie prin prelungirea funcționalei corespunzătoare. O notă complimentară rezumă principalele noțiuni topologice necesare, astfel încît lectura lucrării nu presupune decît prea puține cunoștințe anterioare. Trebuie în fine de remarcat că un cititor de limbă romînă poate înțelege foarte ușor portugheza simplă în care este redactată broșura.

*

Le compte rendu passe en revue le contenu du volume et il est fait l'observation qu'un lecteur roumain peut sans peine comprendre le texte portugais de l'auteur. *Al. Climescu*

27. KAHANE A., *Complimente de matematici.* Editura tehnică, București, 1958, 590 pp.

In cadrul variatelor serii de publicații inițiate și promovate cu succes de către Editura Tehnică, referenta consideră util a se menționa și cartea *Complemente de Matematici* a prof. A. Kahane.

Lucrarea aduce o serie de completări utile la capitolele de trigonometrie, geometrie şi algebră, predate în învăţământul mediu şi tratează unele capitole importante ale matematicii, care nu fac parte din programa analitică a învăţământului mediu, ca trigonometria sferică, cum şi noţiuni introductive în disciplinele matematice studiate în învăţământul superior, ca : algebra superioară, geometria analitică şi teoria probabilităţilor.

Noţiunile sînt prezentate în mod clar, demonstraţiile sînt îndeajuns de simple pentru ca lucrarea să poată fi studiată fără un efort deosebit. Fiecare capitol este însoţit de numeroase exemple şi aplicaţii a căror soluţie este dată în întregime, uneori prin mai multe metode diferite.

Numeroase notiţe istorice şi biografice fac şi mai plăcută parcurgerea cărţii. Ref. socoteşte că tematica cap. III, IV, IX, X ar fi putut fi înlocuită cu teme mai utile, ca, de pildă, metodele geometriei sintetice.

*

On donne ci-de sus quelques détails concernant le récent livre *Compléments de Mathématiques* par le prof. A. C a h a n e, à l'usage des élèves et des professeurs d'écoles moyennes.

Ş. Rimer

28. CIMMINO GIANFRANCO, *Istituzioni di analisi infinitesimale.* Vol. **I**, C. E. Prof. Riccardo Pàtron, Bologna, 1953, 527 pp.

Acest prim volum din cursul de Analiză matematică al cunoscutului matematician italian G. C i m m i n o, profesor la Universitatea din Bologna, este consacrat expunerii noţiunilor fundamentale de număr, mulţime, şir de numere (reale sau complexe), serie, funcţie, limite funcţionale, derivată şi diferenţială. Se consideră simultan funcţii de o variabilă şi de mai multe variabile.

Expunerea se deosebeşte uneori de cele întîlnite în mod frecvent în tratatele de Analiză matematică, atît prin faptul că sînt incluse o serie de chestiuni care ţin de domeniul teoriei numerelor cît şi prin faptul că se insistă asupra unor proprietăţi a funcţiilor de natură globală. Astfel, se tratează despre congruenţe cu numere întregi, despre fracţii continui infinite, iar în ultimul capitol se consacră un paragraf studiului funcţiilor implicite „în mare" şi prelungirii funcţiilor.

Problemele tratate sînt expuse cu multe detalii, ceea ce vădeşte grija autorului de a pune la îndemîna cititorilor un instrument cît mai util şi cît mai comod.

*

La richesse du contenu ne nous permet pas de donner, dans ce compte rendu, une analyse plus complète. C'est pourquoi nous allons indiquer seulement quelques traits originaux de l'exposé.

Dans le premier chapitre on trouve un paragraphe consacré à la théorie des congruences, après avoir étudié la notion du nombre entier. Ce sont les théorèmes d'Euler, de Fermat, de Wilson et l'analyse indéterminée du premier degré qui font l'objet de ce paragraphe. Il y a, dans le même chapitre, un autre paragraphe, contenant une esquisse de la théorie des nombres transfinis. Le second chapitre contient un paragraphe consacré à la théorie des fractions continues infinies. Dans le troisième chapitre on étudie les familles de fonctions équicontinues et les fonctions à variation bornée. Enfin, il faut mentionner l'étude de quelques problèmes globaux, dans le dernier chapitre, concernant les fonctions implicites et les transformations entre les ensemble de points.

L'exposé très vif et clair relève le soin permanent de l'auteur d'offrir aux lecteurs un instrument des plus utiles.

C. Corduneanu

29. DÖLP H., NETTO E., *Grundzüge und Aufgaben der Differential – und Integralrechnung nebst den Resultaten.* 22., verbesserte Auflage. Verlag Alfred Töpelmann, Berlin, 1955, 201 S.

Acest volumaş conţine o introducere în Calculul diferenţial şi integral, deosebit de utilă pentru studiul individual, întrucît conţine numeroase exerciţii simple şi gradate, prevăzute cu răs-

punsuri. Conținutul este subdivizat în următoarele capitole : Funcții de o singură variabilă independentă ; Funcții de două variabile independente ; Integrale nedefinite ; Integrale definite ; Aplicarea Calculului integral și diferențial la geometrie.

*

Il Rif. espone in lingua romena alcune considerazioni sul volumetto del titolo di cui sopra dedicato al Calcolo differenziale ed integrale. *A. Oprea*

30 RIORDAN J., *An Introduction to Combinatorial Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York, X+244 pp.

Ref. reproduce mai jos unele indicații relative la acest volum, deosebit de util cititorului cu o bună pregătire matematică, întrucît conține o expunere la zi a analizei combinatorii, trecînd în revistă progresele ei din ultima jumătate de veac.

*

This book will be of interest to a wide circle of mathematically mature readers. In addition to offering an up-to-date summary of an important and stimulating part of mathematics, the author, a frequent contributor to the valuable *Mathematical Reviews*, begins with an extended treatment of generating functions, treats the principle of inclusion and exclusion and together partitions, compositions, and the enumeration of trees and linear graphs. Some of this interesting problems are an extension of the author's work with R. M. Foster and C. E. Shannon. After its lecture the scolar can much easier study different new problems, for example, coding problems in data transmission.

The general format is in keeping with the valuable exposition of the subject matter.

D. Mangeron

31. БОГОЛЮБОВ Н. Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю. А., **Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.** Изд. 2-е испр. и дополн., Физматгиз, М., 1958, 408 стр.

Referentul, folosind ediția întîia a acestei opere de seamă pentru elaborarea articolului *Din problemele actuale ale Mecanicii neliniare a vibrațiilor. I. Contribuția școlii Sovietice* (Acest Buletin, **III (VII)**, *3-4*, 1957, pp. 347–359), constată următoarele completări :

S-au sistematizat o serie de paragrafe legate de metoda mediatizării. S-a prelucrat paragraful consacrat studiului cazurilor de rezonanță. S-a lărgit conținutul ultimului capitol, dedicat problemelor de fundamentare matematică a metodelor asimptotice.

Se subliniază îndeosebi introducerea unui capitol nou (IV, pp. 247–296), consacrat studiului oscilațiilor cu frecvență unică în sisteme cu mai multe grade de libertate, precum și unei expuneri mai detaliate a metodei parametrilor cu variație înceată, introdus într-o serie de lucrări recente de I. A. Mitropolski, ținîndu-se seamă de folosirea largă în practică a acestei metode.

*

Реф., подчёркивая факт использования первого издания этой замечательной монографии, уже обширно реферированной на страницах этих же **Известий АНН** (т. **II (VI)**, в. *3—4*, 1956 г., стр. 501—503,) для изложения обзорной статьи **О современных задачах нелинейной механики I. Вклад Советской Школы** (те же Известия, т. **III (VII)**, в. *3—4*, 1957 г., стр. 347—359), указывает на отличия этого нового ожидаемого учеными мира издания.

D. Mangeron

32. * * * **Труды Третьего всесоюзного математического съезда.** Москва, июнь — июль 1956, **I, II**, АН СССР, 1956, 229 стр.; 168 стр.

Astăzi, cînd matematica sovietică a ocupat primul loc în lume, atît în ceea ce privește numărul lucrărilor, cît și varietatea domeniilor abordate și profunzimea temelor tratate, un congres unional de matematică este fără îndoială un eveniment de rezonanță mondială.

Lucrările celui de al III-lea Congres unional de Matematici (Moscova, iunie–iulie 1956) au fost referate pînă astăzi, în marea lor majoritate, în revistele de bibliografie matematică cu caracter internațional, fiind menționate cu elogii deosebite și de toți participanții din alte țări, în cele mai variate reviste de specialitate din lume. De aceea, ne vom mărgini să subliniem faptul de seamă, menționat de referent și cu alte prilejuri cauzate de cercetarea tendințelor matematicii actuale, reflectată în paginile fundamentalelor serii de reviste Реферативный Журнал Математика и Реферативный Журнал Механика de sub egida Institutului de informații științifice al Academiei de Științe din U.R.S.S., ce constă în gruparea din ce în ce mai numeroasă a lucrărilor prezentate la acest Congres în jurul problemelor de algebră și analiză matematică, îmbinate cu lucrările de pondere din ce în ce mai crescîndă consacrate Calculului numeric. In aceasta stă veritabilul reflex al caracterului cerințelor ce se pun în fața matematicii moderne de către științele fizice și tehnice ce se află într-o perioadă de dezvoltare deosebit de rapidă. In această ordine de idei trebuie subliniate în deosebi, în afară de extrem de numeroase lucrări prezentate în cadrul secțiunilor de lucru corespunzătoare, conferințele de anvergură, ținute de A. V. Bițadze, I. N. Vekua, O. A. Ladîjenskaia, V. V. Nemîțki, S. L. Sobolev, consacrate respectiv temelor de interes general ca : *Ecuații de tip mixt ; Teoria funcțiilor analitice generalizate și aplicațiile ei în geometrie și mecanică ; Metoda diferențelor finite în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale ; Studiul calitativ al sistemelor autonome de ecuații diferențială ; Unele metode funcționale interesînd teoria ecuațiilor cu derivate parțiale* sau de A. P. Erșov și colectivul său, A. I. Kitov (în colectiv) și S. L. Sobolev, avînd ca subiecte: *Automatizarea programării; Cibernetică; Din problemele actuale ale calculului numeric.*

*

La littérature mathématique soviétique, d'une richesse incomparable, s'est enrichie ces derniers temps par la parution des travaux du Troisième Congrès Unional consacré aux sciences mathématiques. Dans l'impossibilité de reproduire ici des détails concernant les sujets traités, dont des comptes rendus assez nombreux ont été publiés jusqu'aujourd'hui dans toutes les revues consacrées à la bibliographie mathématique d'envergure internationale, le Réf. donne ci-dessus seulement quelques renseignements relatifs aux conférences générales tenues par les représentants illustres de la science mathématique sovietique intéressant le Calcul numérique moderne.

D. Mangeron

33. NAKANO HIDEGORO, *Spectral Theory in the Hilbert Space*. Tokyo Mathematical Book Series, Volume **IV**, Japan Society for the promotion of Science, 1953, IV+300 pp.

Autorul a elaborat un nou tip de teorie spectrală (a se vedea vol. **II** (1950) din aceeași colecție), bazată pe integrala generalizată Riemann în spații topologice și pe considerarea oricărui spectru ca un punct. In acest volum noua teorie spectrală se expune în cadrul spațiului Hilbert.

*

The author considers a special type of spectral theory, which is constructed by means of generated Riemann integral in topological spaces considering every spectrum as a point one. This new spectral theory is explained precisely in Volume **II** of this Series, *Modern Spectral Theory*, Tokyo (1950). The purpose of this book is to make this new spectral theory revive in the Hilbert space.

34. LIGHTHILL M. J., *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*. Cambridge Monographs on Mechanics and applied Mathematics. Cambridge University Press, 1958, VIII+79 pp.

Cartea, dedicată de autor lui P. Dirac întrucît a prevăzut veridicitătea rezultatelor, lui L. Schwartz, pentru demonstrația dată și lui G. Temple pentru expunerea simplă a rezultatelor obținute, folosește teoria funcțiilor generalizate pentru a se deduce apoi o metodă de obținere a expresiilor asimptotice pentru transformatele și coeficienții Fourier. Aplicabilitatea practică a rezultatelor obținute derivă din importanța fundamentală pentru tehnica modernă a analizei armonice.

*

A valuable and original feature of this book is the use of generalised-function theory to derive a simple, widely applicable method of obtaining asymptotic expressions for Fourier transforms and Fourier coefficients. The Rev. gives above some other details concerning this very interesting and exceedingly pretty book. *D. Mangeron*

35. GRENANDER ULF, ROSENBLATT MURRAY, *Statistical Analysis of Stationary Time series.* John Wiley &Sons, New York ; Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1957, 300 pp.

Ref. expune mai jos citeva detalii relative la această monografie, apărută în *Colecția Wiley de Statistică Matematică,* și bazată pe un șir de numeroase lucrări recente legate de teoria proceselor stochastice, dintre care mai multe se datoresc autorilor, fiind publicate în prealabil în diferite reviste de specialitate, ca, de pildă, *Ark. Mat., Ann. Math. Statistics, Skand. Aktuarietidskr., Proc. Third Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability* ș. a.

*

This book has two major aims. The first is to direct the attention of theoretical statisticians to an approach to time series analysis that is essentially different from most techniques used by time series analysis in the past. The second is to present a unified treatment of methods that are being used increasingly in the physical sciences and technology.

The new results contained in this monograph were obtained by the authors in the joint workthey carried out in Chicago, Illinois and Stockholm – Sweden, during the years 1952–1953. They emphasize rigorous proof concerned the time series analysis. Frequent intuitive remarks and comments of practical applications enlarged the possible use of this beautiful volume.

D. Mangeron

36. CRANDALL STEPHEN H., *Engineering Analysis. A Survey of Numerical Procedures.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1956, VIII+417 pp.

Apărută în cunoscuta serie de *Monografii a societăților inginerești,* în care s-au publicat operele marilor specialiști ca Na d a i, T i m o s h e n k o ș.a., traduse în alte limbi de uz internațional curent și cunoscute cititorilor din patria noastră în frumoasele ediții publicate în limba rusă, această carte este consacrată analizei numeroaselor probleme inginerești complexe, ce și-au găsit soluția abia după ce s-a putut folosi pe scară largă revoluționara creație în domeniul științelor moderne-mașinile matematice. Cartea expune totodată metodele de organizare a programărilor pentru rezolvarea numerică a problemelor abordate.

Termenul de *analiză inginerească* care constituie și titlul cărții, reflectă preocuparea sistematică a autorului în a da : 1. Construcția unui model matematic pentru o stare fizică dată și 2. Reducerea problemei matematice la un procedeu de calcul numeric. Ansamblul bogat al problemelor tratate este grupat în următoarele capitole : I. Probleme de echilibru în sisteme cu un număr finit de grade de libertate ; II. Probleme de contur pentru sisteme cu un număr finit de grade de libertate ; III. Probleme de propagare în sisteme cu un număr finit de grade de libertate ; IV. Probleme de echilibru pentru sisteme continue ; V. Probleme de contur pentru sisteme continue ; VI. Probleme de propagare în sisteme continue. O bibliografie restrînsă recomandată, indice de nume, indice de materii, exemple și exerciții bine alese, precum și numeroase trimiteri bibliografice în text măresc valoarea acestei cărți ce acoperă prin conținutul său un șir de subiecte din cadrul capitolelor speciale de mecanică.

*

This is a text devoted to the analysis of various engineering problems of great complexity and the methods for organizing practical programs for their numerical solutions by the use of high-speed automatic computing machines. The Rev. gives above in Roumanian language some details concerning this excellent book published in the very known collection *Engineering Societies Monographs,* a production of the McGraw-Hill Book Company. *D. Mangeron*

37. WILLERS FR. A., *Methoden der praktischen Analysis*. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 93 Figuren. Walter de Gruyter&Co., Berlin, 1957, 429 Seiten.

Autorul, bine cunoscut lumii matematice internaționale și în calitate de redactor șef al fundamentalei reviste de matematică și mecanică aplicată ZAMM, ce se publică în RDG, introduce, în această a treia ediție a cărții, tradusă și în alte limbi de uz internațional curent, pentru a o ține la zi cu cele mai recente cuceriri în domeniul calculului numeric, cîteva metode noi, printre care acelea ale lui Brodetsky–Smeal (cap. V), Banachiewicz (o perfecționare a metodei lui Gauss), de relaxare și altele. Excelentul volum, prevăzut și cu indicații bibliografice numeroase la subsolul variatelor paragrafe, merită o deosebită atenție din partea tuturor cercurilor de specialiști, fiind astăzi prin conținutul său indispensabil tuturor studenților facultăților de științe și institutelor tehnice de învățămînt superior.

*

Реф. приветствует 3-е издание книги проф. д-ра Виллерса, хорошо известного научному миру и как редактор основного журнала выходящаго в свет в ГДР и специализировавшегося в областях прикладной математики и механики *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. Добавляя указания о новейшей литературе в области численных методов математики и пополняя некоторые главы современными методами, как напр., методы Бродецкого–Смиля, Банахевича, релаксационный (глава V, Практическая теория уравнений), книга представляет собой зарекомендованное необходимое пособие всем изучающим математику, физику, химию, естественные и технические науки.

Реф. горячо рекомендует перевод этого издания и на другие языки международной циркуляции.

D. Mangeron

33. WILLERS FR. A., *Elementar–Mathematik. Ein Vorkurs zur Höheren Mathematik*. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig, 1956, VIII+267 Seiten. 7., durchbesserte Auflage. Mit 172 Abbildungen.

Cartea, redactată de prof. dr. dr. h. c. Fr. A. Willers de la Institutul Politehnic din Drezda, binecunoscutul conducător al revistei *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, este consacrată trecerii în revistă la un nivel mai ridicat a unei serii de probleme de matematici predate în învățămîntul mediu, destinată pregătirii absolvenților în vederea admiterii în institutele politehnice. Succesul volumului, solicitat de studenții începători în anul școlar 1946/47, se evidențiază de la sine prin apariția a șapte ediții succesive în decurs de 10 ani.

*

Ref. gibt. oben in rumänischer Sprache einige Einzelheiten über die vorliegende *siebente* Auflage des bekannten und schätzbaren Werkes von Prof. Dr. Dr. h. c. Fr. A. Willers deren *erste* Herausgabe erfolgt auf die Bitten der Studierenden zum Beginn des Wintersemesters 1946/1947. *D. Mangeron*

39. ONICESCU D., MIHOC GH., *Lecții de Statistică matematică*. Editura Tehnică, București, 1958, 730 pp.

In imposibilitate, din motive tehnice, de a se opri mai pe larg asupra acestei cărți care umple un gol în literatura de specialitate în plină înflorire din patria noastră, referentul subliniază deplina reușită în îndeplinirea țelului ce și l-au propus autorii de a da volumului caracterul de introducere sistematică și aprofundată a noțiunilor, a principalelor structuri, pe care le folosește Statistica matematică, și a metodelor sale proprii.

*

Les auteurs, tous deux des spécialistes bien connus dans le domaine de la théorie des probabilités, exposent d'une manière systématique dans ces Lecons adressées aux étudiants des facultés des sciences mathématiques et physiques, les méthodes statistiques adaptées à la recherche scientifique. Un autre volume en préparation est destiné aux applications de la Statistique mathématique dans les différentes branches de la Science. *D. Mangeron*

40. MIHAILESCU C., *Geometria elementelor remarcabile.* Edit. Tehn., Bucureşti, 1957, 523 pp.

Intr-un vast material concentrat, bine sistematizat şi consacrat problemelor geometrice elementare, sînt prezentate o serie de proprietăţi interesante ale cîtorva puncte, drepte şi cercuri remarcabile : cercul celor nouă puncte, dreapta lui Euler, punctele lui Feuerbach, dreapta lui Simson, triunghiurile ortopolare, ortopolul, punctele lui Gergonne şi ale lui Nagel, punctul şi cercul lui Miguel, cercurile Carnot, dreapta Newton-Gauss, punctul şi cercurile lui Lemoine şi altele

*

Das Buch, sorgfältig gedruckt, kann für Übungen fortgeschrittenen Schülern aller mittleren Schulen dienen. *V. Svijevschi*

41. MURDOCH D. C., *Linear algebra for undergraduates.* John Wiley & Sons. Inc. Publishers, New York ; Chapman & Hall, Limited, London. VII+239 pp.

Cartea oferă un curs introductiv în algebră modernă. Folosind drept exemplificări numeroase exerciţii, introduse la finele fiecărui capitol şi prezentînd o expunere elementară, şi concretă, bazată pe un număr redus de idei abstracte, autorul reuşeşte să prezinte atractiv un ansamblu de rezultate de algebră liniară, matrice şi forme pătratice, indispensabil astăzi oricărui tînăr ce se pregăteşte pentru a aborda vreo specialitate din domeniul ştiinţelor exacte sau tehnice.

Conţinut : 1. Vectori şi spaţii vectoriale ; 2. Matrice, rang şi sisteme de ecuaţii liniare ; 3. Algebra matricială ; 4. Geometria spaţiilor vectoriale reale ; 5. Transformări de coordonate într-un spaţiu vectorial ; 6. Transformări liniare într-un spaţiu vectorial ; 7. Matrice asemenea şi teorema diagonalizării ; 8. Reducere de forme pătratice ; 9. Spaţii vectoriale în cîmpuri complexe. In două apendice se reproduce definiţia abstractă a unui spaţiu vectorial şi se tratează ca aplicaţie geometria analitică în spaţiu. Un index util de materii şi indicaţii şi răspunsuri la problemele propuse, dintre care unele conţin rezultate teoretice nemenţionate în text, încheie acest volum.

*

This very usefully book makes the basic facts of linear algebra, matrix theory, and quadratic forms essential to the modern student both on science and technology.

The author keeps his treatment elementary and concrete and introduces as few abstract ideas as possible. Geometric motivations and applications for the abstract algebraic theorems are stressed.

The abstract definitions of field and vector space are given in Appendix I, and a brief account of analytic geometry of space is presented in Appendix II. Index. Answers to problems.

The book is traditionally attractively presented, the type is clear and the numerous illustrations are beautifull. *M. Bercovici, A. Triandaf*

42. * * * *Information Theory.* Edited by Colin Cherry. London, Butterworths Scientific Publications, 1956, IX+401 pp.

Uriaşele progrese, ale teoriei moderne a informaţiilor necesită organizarea regulată a colocviilor, simpozioanelor şi congreselor. Acest volum conţine lucrările prezentate şi unele observaţii rezultate în cadrul discuţiilor purtate la cel de al III-lea simpozion consacrat Teoriei informaţiilor, ţinut sub auspiciile lui Royal Institution, la Londra (17–16 septembrie 1955).

In imposibilitatea de a ne opri aici asupra detaliilor celor 35 de articole prezentate, menţionăm că ele s-au grupat după natura lor într-un număr de 5 secţii impietînd îndeosebi asupra problemelor care cu greu ar fi putut fi puse acum zece ani, ca de pildă, traduceri mecanice, codare, taxonomie, linguistică şi altele.

*

These Proceeedings embody the papers presented and selections from the discussions made at the Third London Symposium on Information Theory, held in the Royal Institution, London, from September 12th to 16 th, 1955. The thirty-five papers, grouped into five sections

of closely related material, illustrate the manner of interpretation and something of the value of information theory to many varied disciplines-optics, telecommunication, taxonomy, linguistics, mechanical translation, semantics, physiology in particular.

43. SAUNDERS L., FLEMING R., *Mathematics and Statistics for use in Pharmacy, Biology and Chemistry*. London, The Pharmaceutical Press, 1957, X+257 pp.

Autorul, pornind de la premiza că cititorul nu posedă decît cunoştinţe de matematici elementare, prezintă în acest volumaş, într-un număr de paragrafe, ordonate pentru a se putea ajunge la expunerea schemelor matematice ale unor fenomene ale naturii reprezentate prin ecuaţii diferenţiale simple, un număr de date teoretice urmate de exerciţii corespunzătoare din domeniul matematicilor superioare, inclusiv şi o introducere în calculul probabilităţilor şi statistică matematică, socotite ca fiind absolut indispensabile farmaciştilor şi studenţilor în farmacie.

*

The aim of this new pretty book is to meet need for information on pharmaceutical mathematics and statistics which is sufficiently comprehensive but which does not require for its study an unduly high proportion of the student's or practitioner's time.

At the end of each chapter a number of problems is set, the answers to which are given in an appendix. *Vl. Sciurevici*

44. PICONE M. *On the mathematical work of the Italian Institute for the application of Calculus during the first quarter century of its existence*. Pubbl. nr. 362 dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Roma, 1953.

Ref. descrie unele din preocupările Institutului pentru Aplicaţiile Calculului, creat acum 30 ani din iniţiativa acad. prof. M. P i c o n e, în vederea cimentării legăturilor între ştiinţă şi practică şi a lărgirii rolului ramurii de matematică – astăzi în plină dezvoltare – numită *Calculul numeric*.

*

Реф. подчёркивает роль Института прикладной математики, основанного 30 лет тому назад проф. М. П и к о н е в целях внедрения в практику теоретических исследований по высшей математике.

Результатом плодотворной деятельности ИПМ, находящагося и теперь под непрестанным руководством проф. Пиконе, служит многочисленный ряд научных исследований (в реферируемом сборнике их список содержит 263 названия) посвященных: I. Применению методов функциональной топологии, функционального анализа в гильбертовых пространствах, минимальных методов и методов трансформаций, в связи с решениями линейных интегральных уравнений (сдесь же зачисляется и ряд задач по вычислению характеристических чисел и по определению границ для решений дифференциальных уравнений); II. Исследованию решений нелинейных дифференциальных уравнений; III. Задачам тауберова типа; IV. Асимптотическому поведению или же вариационному исчислению.

Отмечаем, среди многочисленных работ ИПМ, работы проф. К. М и р а н д а, послужившие основой его книги посвященной уравнениям в частных производных эллиптического типа, переведенной недавно на русский язык или же ценную серию работ многочисленных бывших учеников проф. Пиконе, сведенных в обширный том изданный по случаю 70-ти летия этого, миру хорошо известного, аналиста, директора ИПМ.

D. Mangeron

45. ROBIN LOUIS, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales*. I. Paris, Gauthier–Villars Editeur, 1955, 201 pp. Collection Technique et Scientifique du Centre National d'études des télécommunications.

Este aproape de prisos a se sublinia aici interesul ce se acordă astăzi în Analiza matematică funcţiilor „speciale". Printre funcţiile privilegiate, funcţiile lui Legendre joacă un rol atît de important în teorie şi aplicaţii, încît nici un inginer nu le poate ignora.

Scopul documentar al acestei cărţi, consacrată studiului sistematic al funcţiilor lui Legendre, face ca unele demonstraţii să fie omise.

Imposibilitatea de a ne opri asupra detaliilor acestui volum, care-şi datoreşte în bună parte elaborarea imboldului primit după apariţia teoriei antenelor biconice, preconizată de Schelkunoff, unde intervin funcţiile lui Legendre de grad ce nu este întreg, impune doar atragerea atenţiei asupra materialului extrem de bogat, condensat în cele 47 paragrafe ale cărţii, subdivizată în trei capitole extinse: I. Introducerea ecuaţiilor diferenţiale asociate ale lui Legendre în fizica matematică. Polinoamele lui Legendre şi funcţiile de specia a 2-a de indice întreg, pozitiv sau nul ; II. Funcţiile asociate ale lui Legendre $P_n^m(\mu)$ şi $Q_n^m(\mu)$ pentru m şi n întregi, $n \geqslant 0$ şi III. Armonicele sferice de grad întreg, pozitiv, negativ sau nul. Patru anexe şi un indice alfabetic precum şi o preţioasă introducere cu o privire de ansamblu asupra lucrării, întregesc valoarea cărţii, elaborată, în condiţii tipografice bune, de cunoscutul specialist în funcţiile lui Legendre, autor al recentului volum *Tables des fonction de Legendre associées*, 1952.

Книга Л. Робена, посвященная сферическим функциям Лежандра и сфероидальным функциям, имеющим широчайшее применение в науке и технике, начиная с механики и механики жидкостей и кончая геофизикой и электромагнетизмом, принесёт несомненную пользу широким кругам специалистов.

Выше приводятся, на румынском языке, некоторые детали касающиеся её богатого содержания. Реф. особенно отмечает введение и общий обзор (стр. IX—XXXV), дающие много библиографических указаний, а так же генезис и дальнейшее развитие связанных с этими функциями идей.

Многочисленные формулы набраны тщательно. Это уже издавна сложившаяся традиция издательства Готье-Виллара. *D. Mangeron*

46. BASS J., *Cours de Mathématiques*. Préface du Professeur G. Darmois. Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1956, 916 pages, avec 363 figures (17x24,5).

Cursul de matematici ce-l referăm reprezintă materialul pe care-l expune autorul la Şcoala Naţională Superioară de Aeronautică şi la Şcoala Naţională Superioară de Mine din Paris. Scris pentru elevi ingineri, cursul conţine următoarele capitole : Algebră liniară ; Integrale simple şi multiple ; Serii şi integrale ale lui Fourier ; Funcţii analitice ; Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale ; Elemente de calcul numeric, mecanic şi grafic. Materialul expus este modernizat, introducîndu-se, de pildă, în cadrul algebrei liniare, noţiuni indispensabile unui viitor inginer modern, relative la spaţii vectoriale, calcul matricial, spaţii hermitiene, calcul tensorial ş.a.

Referenţii dau mai jos unele detalii relative la conţinutul acestei cărţi de utilitate incontestabilă pentru viitorii ingineri.

*

Ce livre représente, avec quelques compléments, la matière des cours que l'auteur professe à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Il a été écrit à l'intention des élèves des grandes écoles d'ingénieurs, tout en s'adressant à des lecteurs qui possédent déjà certaines connaissances élémentaires d'analyse et de géométrie analytique. Une fois conquises les acquisitions mathématiques exposées dans ce cours le lecteur ou bien l'étudiant pourra ultérieurement aborder l'étude de la mécanique, de l'hydrodynamique, de la résistance des matériaux, de la physique générale, de l'électricité etc. Le livre est présenté sous une forme mathématique précise. Cependant, pour rédiger en moins de 1 000 pages les éléments qui constituent la culture mathématique de base d'un ingénieur, il a fallu se résoudre à certains compromis. De nombreux exemples sont traités dans le texte. Ils montrent en détail comment on fait un calcul numérique, comment on se sert de la convergence uniforme, du théorème des résidus, du calcul symbolique, comment on intègre des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, comment on construit des solutions d'équations aux dérivées partielles du second ordre etc. On est préparé de cette manière à l'utilisation systématique des livres d'exercices. Nous saluons tout particulièrement le chapitre consacré à la théorie et à la pratique des intégrateurs mécaniques usuels et une annexe à la nomographie et aux abaques. Une bibliographie commentée, un formulaire très utile, une

importante table alphabéthique et des indications du développement historique des mathématiques augmentent la valeur de cet excellent ouvrage, qui assure que le professeur de mathématiques demeure un professeur d'action et contribue intensivement à l'intelligence de la réalité objective. *D. Mangeron, Sp. Deleanu*

47. SANSONE G., CONTI R., *Equazioni differenziali non lineari.* Edizioni Cremonese, Roma, 1956, XIX+647 pp.

Autorii, dintre care primul este bine cunoscutul specialist în teoria ecuațiilor diferențiale (a se vedea, de pildă, cele două volume ale lui G. Sansone, consacrate ecuațiilor diferențiale, traduse în limba rusă, M., I. L., 1953–1954), răspund prin volumul de față la nevoia acută de fundamentare teoretică a numeroaselor fenomene ale naturii ce s-au tradus și se traduc mereu în cadrul științei și tehnicii moderne în scheme matematice reprezentate prin sisteme diferențiale neliniare.

Cunoscători profunzi ai marelui aport al matematicienilor ruși și sovietici (ajunge să menționăm aici că denumirea însăși de *mecanică neliniară*, acceptată în mod universal astăzi, este propusă de N. Krîlov și N. N. Bogoliubov, în urma studiilor proprii, traduse în toate limbile de uz internațional curent), începînd cu celebrul memoriu al lui A. Liapunov și terminînd cu opera cu totul modernă a lui A. A. Andronov, S. E. Haikin, V. V. Nemîțki, V. V. Stepanov și alții, autorii au știut să îmbine în mod fericit profundele cercetări ale acestora cu rezultatele studiilor proprii și acelor produse în alte țări, bazate pe lucrările lui G. D. Birkhoff, R. Caccioppoli, B. van der Pol, J. S. Stoker, Ch. Hayashi, N. Minorsky, S. Lefschetz, J. L. Massera și alții.

In imposibilitatea de a ne opri aici, dată fiind bogăția problemelor tratate, asupra detaliilor (a se vedea seria de articole de sinteză ale Ref., inaugurată cu un studiu consacrat mecanicii neliniare și rolului savanților sovietici în dezvoltarea ei, acest Buletin, **III (VII),** 3-4, 1957, pp. 347–359), ne mărginim a reproduce mai jos titlurile capitolelor principale : Cap. I. Generalități asupra soluțiilor sistemelor diferențiale ; Cap. II. Sisteme autonome plane particulare ; Cap. III. Singularitățile lui Briot-Bouquet ; Cap. IV. Sisteme autonome plane ; Cap. V. Sisteme autonome preturbate ; Cap. VI. Asupra unor sisteme autonome cu un grad de libertate ; Cap. VII. Asupra unor sisteme neautonome cu un grad de libertate ; Cap. VIII. Sisteme liniare ; Cap. IX. Stabilitate.

Succesul deosebit al acestei monografii constă, între altele, în faptul că autorii au reușit să ofere în paginile ei cititorului specializat, paralel cu cele mai recente rezultate în domeniu, prezentarea competentă a etapelor celor mai semnificative de dezvoltare a fiecărui domeniu expus.

Ample indicații bibliografice, elaborate după toate cerințele moderne, caracterul unitar al operei, prezentată impecabil și din punct de vedere tipografic, vor contribui desigur la folosirea ei pe scară largă și vor conduce fără îndoială și la traducere în alte limbi.

*

Le Réf. expose ci-dessus quelques détails concernant l'oeuvre fondamentale des auteurs, dont G. Sansone en est particulièrement connu par le monde scientifique international pour ses travaux concernant la théorie des équations différentielles ordinaires (Voir, par ex., les volumes consacrés à ce sujet, traduit de l'italien en russe, Moscou, I. L., 1953–1954). *D. Mangeron*

48. de LA VALLÉE POUSSIN Ch. – J., *Cours d'analyse infinitésimale.* Louvain, Librairie Universitaire, 1957, VIII+522 pp. T. **II.** Neuvième édition, revue et augmentée avec la collaboration de F. SIMONART.

Ref. dă mai jos cîteva detalii relative la modificările intervenite în acest al II-lea volum din cea de a 9-a ediție a cunoscutei opere a lui Ch. de la Vallée Poussin.

*

Die vorliegende neunte Auflage des bekannten Werkes von de la Vallée Poussin unterscheidet sich von den früheren Auflagen durch zahlreiche Verbesserungen in Text und durch eine Neubearbeitung einzelner Kapitel über die lineare Gleichungen in partiellen Ableitungen und in totalen Differentialen. Neu eingeführt gegen die sechste Auflage ist Kap. XII. Geometrische Anwendungen. Singuläre Punkte. Berührungen.

49. * * * *Treizième Congrès des mathématiciens scandinaves.* Tenu à Helsinki 18–23 Août 1957. Mercators Tryckeri, Helsingfors, 1958, 208 pag.

Referentul reproduce mai jos cîteva date relative la cel de al treisprezecelea Congres al matematicienilor scandinavi, din seria de reuniuni inițiate în 1909 (22–25 septembrie) la Stockholm de celebrii matematicieni G. Mittag-Leffler și Ivar Fredholm.

Se subliniază, ca rezultat al analizei lucrărilor prezentate, o întărire sensibilă a rolului algebrei, reflectă în marea dezvoltare a topologiei combinatorii, a metodelor variaționale și a teoriei algoritmilor, – fapt în deplină concordanță cu imperioasa necesitate de introducere a studiului obligatoriu a metodelor moderne de calcul numeric în toate institutele universitare și politehnice.

*

Le treizième Congrès des mathématiciens scandinaves, dont la série a été inaugurée il y a quarante ans par l'initiative des célèbres mathématiciens G. Mittag-Leffler et Ivar Fredholm, est caractérisé par l'attention accordée par les participants (19 de Danmark, 2 d'Island, 10 de Norge, 36 de Sverige, 39 de Suomi-Finland) aux problèmes de nuance algébrique. La topologie combinatoire et les méthodes variationnelles et extrémales, la théorie des algorithmes etc., recouvrent parfaitement d'ailleurs les besoins croissants du développement moderne des sciences physiques et techniques.

Tout en faisant abstraction d'un nombre de travaux présentés et insérés dans d'autres recueils, nous ne pouvons que reproduire ci-dessous les titres des notes contenues dans ce volume : E. Asplund, Iteration of matrices over a distributive lattice ; K. E. Aubert, Une théorie générale des idéaux et ses applications ; T. Bang, Approximation and quasi-analytic functions ; H. Bergström, Uber gewisse Invarianten von Permutationsgruppen ; V. Brunn, Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres ; Th. Busk, On a simple relationship between some of the classical interpolation formulae ; G. Elfving, Minimax character of balanced experimental designes ; W. Fenchel, Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der diskontinuierlichen Transformationsgruppen ; O. Frostman, Suites convergentes de distributions d'equilibre ; B. Fuglede, The symmetric normal derivative of a subharmonic function ; T. Ganelius, General and special tauberian ramainder theorems ; L. Garding, Cauchy's problems for hyperbolic equations ; S. Helgason, Partial differential equations on Lie groups ; I. Johansson, .A theorem connected with the four colour problem ; G. Järnefelt, On a finite approximation of the energy spectrum on the linear harmonic oscillator ; V. Jorgensen, On a monorat of the hyperbolic measure for a certain class of domains; P. Kustaanheimo, On the relation of order in finite geometries; R. Lethi, On the construction on elementary models for finite plane geometries ; A. J. Lohwater, The cluster sets of meromorphic functions ; F. Nevanlinna, Über absolute Analysis ; J. Peetre, Estimates for the number of nodal domains ; L. Sarion, On univalent functions.

D. Mangeron

50. GRÖBNER W., HOFREITER N., *Integraltafel,* Erster Teil. *Unbestimmte Integrale.* Zweiter Teil. *Bestimmte Integrale.* Zweite, verbesserte Auflage. Wien und Innsbruck, Springer-Verlag, 1957, VIII+166 S. ; VI+204 S., 1958.

Autorii adaugă la seria de culegeri cunoscute de tabele de integrale, o deosebit de îngrijită culegere, menită a economisi timpul în vederea unor preocupări mai substanțiale numeroșilor cercetători ce se întîlnesc cu variate scheme matematice ale fenomenelor naturii reprezentate sub formă de integrale. Tabelele prezentate constituie totodată un bogat și variat izvor de teme și exerciții, cu totalitatea răspunsurilor date, atît de necesare pentru însușirea tehnicii calculului viitorilor matematicieni, fizicieni, chimiști și ingineri.

*

Der Ref., welcher unvergessliche wissenschaftliche Mitarbeit in Rahmen des Istituto per le Applicazioni del Calcolo unter schaffender Führung des Prof. Picone mit einem der Autoren (W. Gröbner) ein Paar Jahrzehnte vorher betrieb, ist besonders glücklich dieses nützliches Werk den Studierenden, Mathematikern, Physikern und Ingenieuren aufs wärmste empfehlen zu können.

D. Mangeron

51. MEDEK V., MIŠIK L., ŠALAT T., *Prehľad stredoškolskej Matematiky.* SVTL, Bratislava, 1957, 295 pp.

Acest manual prescurtat de matematici elementare este util în vederea revederii materiei şi schiţării demonstraţiilor mai complicate. Se remarcă grija Editurii Tehnice Slovace, Bratislava, de a oferi tineretului cărţi şi manuale într-o prezentare deosebit de frumoasă.

*

Ce petit manuel est très utile pour les jeunes gens qui se préparent pour l'admission aux écoles supérieures, pour synthétiser ce qu'ils ont appris au lycée et pour se rappeler plus facilement les notions mathématiques fondamentales à l'aide desquelles ils pourront résoudre des problèmes même plus compliqués et se rappeler les démonstrations oubliées. *Valeria Ungureanu*

52. IACOB CAIUS, *Curs de Matematici superioare.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1957, 988 pag.

Acest curs de matematici superioare, elaborat de tov. prof. dr. Caius Iacob, membru corespondent al Academiei R.P.R., cristalizat în afara domeniului principal al preocupărilor sale ştiinţifice, este bazat pe experienţa desfăşurată de autor pe acest tărîm acum un număr de ani şi reflectă ataşamentul neţărmurit al autorului pentru învăţămînt şi dragostea de care este pătruns pentru tinerele generaţii de studenţi. Materialul expus, prin includerea în cadrul unui curs de matematici pentru ingineri chimişti şi studenţi universitari ai facultăţilor de fizică şi chimie a capitolelor şi paragrafelor noi ca, de pildă, aproximarea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale şi cu derivate parţiale ,noţiuni sumare de calculul probabilităţilor ş.a., exteriorizează efortul încununat de strălucite succese al cadrelor didactice din U.R.S.S. şi din ţările de democraţie populară şi luat acum ca exemplu şi în alte ţări (a se vedea în această ordine de idei diferite date concrete ce s-au publicat şi se publică la capitolul За рубежом în revista Ministerului Învăţămîntului Superior din U.R.S.S. Вестник Высшей Школы de a atrage în limitele cursurilor de matematici pentru ingineri, paralel cu revizuirea materialului tradiţional, cele mai puternice şi moderne aparate de investigaţie matematică menite a pregăti viitorii ingineri, prin desfăşurarea largă a capitolelor de *calcul numeric,* la mînuirea competentă şi multilaterală a mijloacelor de smulgere a secretelor naturii, închise în maşinile matematice de calcul etc

Volumul, excelent şi ca prezentare, experimentat de referent, îşi va găsi loc, prin această ediţie şi prin ediţiile ce vor urma, în rîndurile cărţilor uzuale din cadrul bibliotecilor generaţiilor de studenţi tehnologi. Subliniem şi latura adînc educativă a gestului de delicată simţire reflectat prin dedicaţia premergătoare foii de titlu a cărţii.

*

Le réf. donne ci-dessus quelques détails concernant le Cours de Mathématiques Supérieures rédigé par le prof. C. Iacob, bien connu au public des spécialistes par son oeuvre consacrée à la Mécanique des fluides. *D. Mangeron*

53. РОМАНОВСКИЙ П. И., **Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.** Серия „Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов", Гостехиздат, М., 1957, 291 стр.

Dezvoltarea actuală a tehnicii ridică cerinţe din ce în ce mai mari în faţa pregătirii matematice a inginerilor. Cursurile tradiţionale de matematici din cadrul institutelor politehnice se arată a fi vădit insuficiente pentru a asigura o pregătire temeinică a specialiştilor meniţi să asigure rezolvarea problemelor legate de automatizare sau aplicarea energiei atomice în scopuri paşnice.

Unele facultăţi – şi printre ele se numără şi acelea ale Institutului politehnic din Iaşi – au introdus în programul lor un număr de cursuri de matematici pentru ingineri, ce se expun în anii superiori de studiu. Cartea prof. Romanovski este menită să umple un gol în literatura de consultat pentru serii de atare cursuri, fiind consacrată seriilor Fourier şi integralelor (cap. I, pp. 7–55), bazelor teoriei cîmpului (cap. II, pp. 56–107), noţiunilor asupra funcţiilor ana-

litice (cap. III, pp. 108–205), studiului unor funcţii speciale ca, de pildă, funcţia gamma, funcţiile lui Bessel ş.a. (cap. IV, pp. 206–241) şi transformatei lui Laplace (cap. V, pp. 242–291).

Cartea este scrisă concis şi conţine numeroase teme ce pot fi dezvoltate de profesor în timpul expunerii sau pot servi drept material de elaborare pentru referate etc.

*

Il libro del prof. Romanovski fa parte dalla collezione *Capitoli scelti di matematiche superiori per gl'ingenieri e gli studenti degli istituti tecnici* superiori. Esso contiene i capitoli concernenti le serie Fourier, la teoria del campo, lo studio delle funzioni analitiche e speciali e la trasformata di Laplace ed è appositamente scritto per colmare le lacune dei programmi di matematica per gli istituti politecnici che debbono preparare i specialisti capaci di affrontare gli ardui problemi di tecnica moderna.

D. Mangeron

54. MARTIN W. T., REISSNER E., *Elementary diferential equations.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1956, XII+260 pp.

Cartea se adresează în special studenţilor de la institutele politehnice. Pornind de la premiza sănătoasă a conexării dezvoltării teoriei ecuaţiilor diferenţiale cu probleme din diferite alte domenii, ca fizica (mecanica şi electricitatea), chimia şi geometria, autorii au realizat un manual didactic excelent prin multiplele calităţi pe care le prezintă.

Simplitatea şi totodată rigurozitatea expunerii, aranjarea judicioasă a materialului, multiplele metode clasice şi moderne de integrare a ecuaţiilor, precum şi ilustrarea chestiunilor tratate prin bogate şi variate exemple, dovedesc un deosebit spirit metodic şi o grijă susţinută a autorilor în redactarea acestui manual.

Conţinutul este divizat în opt capitole şi anume : 1. Natura şi originea ecuaţiilor diferenţiale ; 2. Ecuaţii diferenţiale de ordinul I ; 3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul II ; 4. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior ; 5. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul I ; 6. Soluţii aproximative pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul I şi teorema lui Picard ; 7. Ecuaţii cu diferenţe finite ; 8. Ecuaţii cu derivate parţiale. Fiecare subcapitol conţine anexat un bogat sortiment de exerciţii şi probleme nerezolvate, a căror soluţii sînt expuse la sfîrşitul cărţii.

Este de remarcat că autorii insistă în fixarea cu precizie a noţiunilor de soluţie particulară, soluţie singulară şi generală a ecuaţiilor diferenţiale ordinare de primul şi al doilea ordin, precum şi asupra precizării noţiunii de funcţie arbitrară pentru ecuaţii liniare cu derivate parţiale de primul ordin. De asemenea se remarcă tratarea diferitelor tipuri de ecuaţii şi sisteme prin metode variate ca : soluţii date prin serii de puteri şi tratarea problemei dacă seria reprezintă într-adevăr o soluţie a ecuaţiei cu un criteriu adecvat de comparaţie, metoda coeficienţilor nedeterminaţi şi metoda variaţiei constantelor pentru ecuaţii şi sisteme cu coeficienţi constanţi, metoda transformatei lui Laplace pentru probleme cu valori iniţiale şi alte metode cu formule aproximative.

*

Le réf. expose ci-dessus quelques détails concernant cet excellent volume consacré à l'introduction à la théorie des équations différentielles.

V. Murgescu

55. МИРАНДА К., **Уравнения с частными производными эллиптического типа.** Пер. с итал. Ред. В. А. Олейник. И. Л., М., 1957, 256 стр.

Probleme de teoria ecuaţiilor de tip eliptic sînt deosebit de actuale în cadrul atît al adîncirilor teoretice, cît şi al numeroaselor aplicaţii în tehnică. Monografia prof. C. Miranda reprezintă – după cum afirmă în prefaţă redactorul traducerii, prof. O. A. Oleinik – „unica în literatura mondială trecere în revistă sistematică a teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip eliptic, completă şi accesibilă".

Din conţinutul bogat şi redactat cu o claritate cu totul remarcabilă al acestei opere de seamă, ref. subliniază îndeosebi : I. Metoda lui Giraud de reducere a problemelor pe contur la ecuaţii integrale de specia a doua ; II. Studiul problemelor pe contur cu ajutorul diferitelor metode de analiză funcţională liniară ce-şi au la origine unele lucrări ale lui Caccioppoli, Picone

şi Weyl ; III. Studiul teoriilor elaborate de acad. Bernstein, Hopf, Schauder, Leray şi Caccioppoli, bazate pe evaluări *a priori* a soluţiilor ecuaţiilor liniare şi neliniare, precum şi extrem de preţioasa bibliografie ce reflectă publicaţiile apărute în diferite reviste de specialitate în perioada 1924–1953. Pentru adîncirea metodei variaţionale şi a metodei funcţiilor-nuclee, autorul trimite respectiv la cartea clasică a lui Courant – Hilbert şi la recenta monografie a lui Bergmann-Schiffer. Studiul caracterului analitic al soluţiilor eliptice se găseşte în detaliu în articolul acad. S. N. Bernstein şi I. G. Petrovski, înserat în vol. **VIII** din Усп. Мат. Наук.

*

Il Ref. sottolinea l'importanza per i cultori di analisi matematica pura ed applicata del pregiato lavoro, ricco in contenuto e scritto da Maestro, del prof. C. Miranda, concernente le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, riproducendo alcune qualifiche entusiaste dalla prefazione del redattore della traduzione in russo di questa magnifica opera, pubblicata inizialmente nella nuova serie della collezione *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, H. 2, dallo Springer – Verlag, Berlin, 1955. *D. Mangeron*

56. KAMKE E., *Das Lebesgue-Stieltjes Integral*. Leipzig C1, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1956. VI+226 S.

Reluînd subiectul, ce nu mai poate fi ignorat astăzi de nici un student care urmează cursurile de mecanică sau matematici, relativ la integrala lui Lebesgue–Stieltjes, cristalizat de autor într-o carte din 1925 cu titlul *Das Lebesguesche Integral. Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen*, cunoscutul specialist E. Kamke, autor al monumentalei opere consacrate ecuaţiilor diferenţiale, tradusă recent şi în limba rusă, expune în acest volum o excelentă introducere în studiul integralei lui Lebesgue–Stieltjes în spaţii cu n–dimensiuni. Capitolele IV şi V ce succed nemijlocit capitolelor introductive consacrate studiului mulţimilor de puncte şi de intervale, teoriei măsurii mulţimilor şi funcţiilor măsurabile, constituie fondul subiectului : Integrala lui Lebesgue–Stieltjes (pp. 107–199) şi Integrala lui Perron. Bibliografia, indice de nume şi de materii şi indice de simboli folosiţi sau introduşi întregesc valoarea cărţii.

*

M. le prof. E. Kamke, dont l'oeuvre capitale consacrée aux équations différentielles a été traduite ces dernières années en d'autres langues d'usage international courant, nous offre maintenant, tout en reprenant le sujet d'un de ces livres publié en 1925 un excellent volume introductif dans l'étude de l'intégrale de Lebesgue–Stieltjes à n–dimensions.

Une mention spéciale à B. G. Teubner – Editeur, pour la présentation impeccable du livre. *D. Mangeron*

57. РЯБЕНЬКИЙ В. С., ФИЛИППОВ А. Ф., **Об устойчивости разностных уравнений.** Под ред. Л. А. Чудова, Гостехиздат М., 1956, 171 стр.

Salutînd călduros iniţiativa catedrei de calcul numeric a Universităţii „M. V. Lomonosov" din Moscova de a edita seria de monografii „Biblioteca de analiză aplicată şi de calcul numeric", ref. subliniază interesul recentei monografii apărută în această colecţie, din iniţiativa acad. S. L. Sobolev şi L. A. Liusternik, sub redacţia prof. L. A. Ciudov şi în elaborarea prof. V. S. Reabenki şi A. F. Filippov, consacrată studiului stabilităţii ecuaţiilor cu diferenţe.

*

Горячо приветствуя кафедру вычислительной математики МГУ за инициативу выпуслка серии „Библиография прикладного анализа и вычислительной математики", реф. подчеркивает интерес вышедшей недавно в свет в этой коллекции монографии „Об устойчивости разностных уравнений", отражающей в себе и ряд ценных указаний акад. С. Л. Соболева и чл.—корр. АН СССР Л. А. Люстерника.

Поводом к составлению монографии послужила необходимость исследовать чувствительность решений разностных уравнений к остаткам округления, допускаемым в

процессе счёта. В предположении, что решение дифференциального уравнения существует, доказывается в главе I сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального. Следующие две главы посвящены исследованию различных видов устойчивости и некоторым её признакам. Устойчивые уравнения, свободные от недостатка малых ошибок, допущенных на каком либо этапе вычисления решения, обладают ценным качеством, что их решения при измельчении сетки сходятся к соответствующим решениям дифференциальных уравнений. Исследованиям устойчивости разностных уравнений по начальным условиям методом разделения переменных, а также и систем разностных уравнений, устойчивых по начальным условиям, посвящены главы 4 и 5. В приложении (стр. 158—168) приводятся доказательства двух теорем об экстраполяции и интерполяции функций. Изложение монографии ясно и строго обоснованно. Библ. 51 названий. *D. Mangeron*

58. HRONEC JUR, *Diferenciálny a integrálny počet.* I. Tretie, prepracované vydanie, 1957, SVTL, Bratislava.

Acest volum reprezintă ediția a treia prelucrată de *Calcul diferențial și integral* al acad. J. Hronec. In cele XXI capitole ale sale, ce se adresează studenților facultăților de matematici, institutelor politehnice și pedagogice, se abordează, într-o expunere clară, atrăgătoare, riguroasă și cu exemplificări bogate, șirul de probleme clasice de Analiză matematică, prevăzut în programă.

Ref. sugerează traducerea lucrării în limba romînă.

*

Les Réf. donnent ci-dessus quelques détails concernant la 3-ième édition du Cours de Calcul différentiel et Intégral dans l'élaboration du prof. J. Hronec, de l'Académie des Sciences de Tchécoslovaquie. *A. Oprea, I. Enescu*

59. ЭЛЬСГОЛЬЦ Н. Э., **Дифференциальные уравнения,** Гостехиздат, М., 1957

Cartea prof. L. E. Elsgolț constituie o bună introducere în studiul ecuațiilor diferențiale, încadrîndu-se în programul cursului de ecuații diferențiale ce se expune ca o disciplină aparte în facultățile de fizică-matematică din U.R.S.S.

Cartea este împărțită în șase capitole consacrate respectiv ecuațiilor diferențiale de primul ordin, ecuațiilor diferențiale de ordin superior, sistemelor de ecuații diferențiale, teoriei stabilității, ecuațiilor cu argument întîrziat și ecuațiilor cu derivate parțiale de primul ordin.

Ref. subliniază, pe lîngă expunerea clară și metodică a problemelor, prezența unui număr de probleme și exerciții la finele fiecărui capitol, pentru care se găsesc indicații și răspunsuri la finele cărții. Se menționează de asemenea interesul nemijlocit al conținutului paragrafelor care expun un material mai modern ca, de pildă, metoda micului parametru și aplicarea lui în teoria oscilațiile cvasiliniare (par. 8, cap. II) precum și par. 1–5 din cap. V consacrate ecuațiilor diferențiale cu argument întîrziat la care au contribuit unele studii recente ale numeroșilor cercetători sovietici.

*

Les Réf. donnent ci-dessus quelques détails concernant le contenu du livre rédigé par le prof. L. E. Elsgoltz comme résultat de ses cours tenus à la Faculté des sciences physiques de l'Université „M. V. Lomonossoff" de Moscou. *A. Triandaf, M. Bercovici*

60. DEMIDOVICI D.P., *Culegere de probleme și exerciții de Analiză Matematică.* (Traducere din limba rusă). Editura Tehnică, București, 1956, 594 p.

Culegerea de probleme, tradusă după a doua ediție sovietică, cuprinde două părți. Partea I – Funcții de o variabilă, are cinci capitole : Introducere în analiză ; Calcul diferențial funcțiilor de o variabilă ; Integrare nedefinită ; Integrala definită ; Serii. Partea a II-a are trei capitole : Funcții de mai multe variabile ; Calcul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile ; Integrale depinzînd de un parametru ; Integrale multiple și curbilinii. La sfîrșitul

cărţii sînt date răspunsurile cu indicaţii pentru exerciţiile mai dificile. Paginile 591–594 cuprind constantele cele mai importante şi tabelele funcţiilor celor mai uzuale.

Autorul a acordat o atenţie deosebită formulărilor exacte şi precizărilor detaliate ale condiţiilor în care este valabilă formula respectivă. Fiecare capitol este precedat de o scurtă informare teoretică.

Dintre numeroasele culegeri de probleme recomandate şi folosite de referentă în cadrul seminariilor de Analiză Matematică, s-a constatat că această culegere de probleme este una dintre cele mai valoroase, datorită bogatului material ce cuprinde peste patru mii probleme şi exerciţii, bine ales şi gradat expus.

Излагаются выше, на румынском языке, качества экспериментированной ей на педагогической практике книги Сборник задач по математическому анализу Д. П. Демидовича.

L. Constantinescu

61. DOETSCH G., *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart. Mathematische Reihe. Band 24. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenchaften. 1958, 301 S.

Apariţia acestei cărţi a cunoscutului specialist în domeniul transformatei lui Laplace umple un gol simţit ce a existat între seria de numeroase cărţi destinate inginerilor în această ordine de idei, însă lipsite de o bază matematică îndestulătoare, şi opera, devenită repede clasică, a aceluiaşi autor, *Handbuch der Laplace-Transformation,* în trei volume, ce constituie un veritabil tratat. Volumul aici referat conţine materialul ce reprezintă teoria şi aplicaţiile zilnice ale transformatei lui Laplace în cele mai variate probleme de tehnică modernă. Pentru uşurarea cititorului – căci această carte este destinată a fi citită şi nu numai consultată – aplicarea transformatei lui Laplace începe prin folosirea schemelor matematice ale fenomenelor naturii reprezentate prin ecuaţii diferenţiale sau cu diferenţe finite cu coeficienţi constanţi. Se trece apoi la formula de inversiune în domeniul complex şi la metodele corespunzătoare de teoria funcţiilor de variabilă complexă. După indicarea rolului ce-l joacă ecuaţia lui Parceval, se trece la dezvoltări asimptotice care joacă un rol din ce în ce mai de seamă în tehnică de astăzi (de pildă, în teoria stabilităţii şi în calculul numeric al funcţiilor complicate). Metodele asimptotice se valorifică îndeosebi în studiul ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţi polinomiali sau a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Se subliniază prezenţa, pe lîngă numeroase exemple, şi a unor lucruri noi, în afară de elaborări deosebite din *Handbuch* al autorului. Fără îndoială că şi acest excelent volum va fi tradus şi în alte limbi de uz internaţional curent.

*

Das hier angekündigte *Einführung* des Prof. Dr. G. Doetsch, welcher sich durch seine massgebenden Veröffentlichungen über die Grundlagen und die Anwendungen der Laplace-Transformation einen hervorragenden Namen in der internationalen Fachwelt gemacht hat, ist im bestem Sinne ein Lehrbuch für den studierenden und den bereits im Beruf stehenden Mathematiker oder Ingenieur, der sich in diese heute in so viele Gebiete eingreifende mathematische Disziplin einarbeiten will.

Ohne Zweifel wird auch dieses wertvoller Beitrag in der trefflichen Reihe der *Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften* in verschiedene andere Weltsprachen recht bald übersetzt.

D. Mangeron

62. САВИН Г. Н., КИЛЬЧЕВСКИЙ Н. А., ПУТЯТА Т. В., **Курс теоретической механики.** Ред. Г. Н. Савин, ГИТТЛ, УССР, Киев, 1957, 558 стр.

Referentul, avînd fericirea să lucreze activ în cadrul Institutului de Mecanica Construcţiilor al Academiei de Ştiinţe a Republicii Socialiste Sovietice Ukraina din Kiev, de sub conducerea academicianului G. N. Savin, coautorul cursului de mecanică teoretică aici recenzat, recomandă cu căldură traducerea acestei cărţi şi în alte limbi, ţinînd seama de faptul

că autorii ei au reuşit să includă într-însa materiale noi ce corespund cu introducerea diferitelor discipline de specializare tehnică înaltă, fără a face să crească volumul cursului, subdivizat în patru părţi obligatorii : statică, cinematică, dinamică şi mecanică analitică. Numeroase trimiteri, la subsolul paginilor din acest curs, la literatura clasică şi modernă precum şi grija ce au avut-o autorii de a prevedea cu cîte un asterisc sau de a imprima cu caractere de corp 8 paragrafele ce pot fi omise la primă citire sau nu pot fi expuse la unele facultăţi tehnice din cauza numărului astăzi încă prea redus de ore afectate cursului de mecanică, fac ca acest curs să fie deosebit de util unei vaste serii de cercetători ai fenomenelor naturii, pentru care actualmente mecanica teoretică şi matematica sînt cu totul indispensabile.

*

Le Réf., enchanté d'avoir eu la possibilité de travailler quelque peu que se soit dans le cadre de l'Institut de Mécanique de l'Académie des Sciences de la RSS Ukraine, dirigé par l'acad. G. N. S a v i n e, dont les collaborateurs et élèves en peuvent être bien justement si fiers, recommande chaleureusement ce volume aux futurs ingénieurs et donne ci-dessus quelques détails concernant son contenu. *D. Mangeron*

63. FISCHER OTTO F., *Five mathematical Structural Models.* Axion Institute, Stockholm, 1957, VI+412 pp.

Autorul ilustrează, în cadrul „Structurologiei", folosirea cuaternionilor în diferite domenii ale fizicii matematice. Se trec astfel în revistă ecuaţiile lui Maxwell, unele probleme de teoria elasticităţii, de mecanică ondulatorie, de teoria cuantelor şi de optică. Cartea se citeşte anevoios atît din cauza modului de imprimare cît şi datorită mulţimii de semne auxiliare ataşate simbolurilor cuaternionilor. Conţinutul ei se situează însă pe aceeaşi linie de preocupări ca şi o recentă lucrare a lui W. B l a s c h k e consacrată aplicării cuaternionilor la unele probleme de cinematică, precum şi un studiu, elaborat în colectiv la Iaşi, de aplicare a cuaternionilor la Teoria mecanismelor şi maşinilor.

*

Ce livre a pour but d'illustrer, dans le cadre de la „Structurologie", l'emploi des quaternions dans les diverses branches de la physique mathématique. L'auteur montre à quel point ils conviennent à l'étude des équations de Maxwell. En ce qui regarde leur application à la théorie de l'élasticité, les Réf. mentionnent en outre la série de travaux élaborés par G. S o b r e r o et ses collaborateurs. Il y a d'autres applications intéressantes à la mécanique ondulatoire, à la théorie des quanta et à l'optique de Hamilton. Le livre ne se lit pas facilement, d'une part à cause de l'impression rotative et, d'autre part, parce qu'il y a tant de signes diacritiques accolés aux symboles des quaternions. La liste bibliographique est impressionnante mais ne fait mention d'un des pionniers des quaternions, M c A u l e y.

Catedra de Mecanică şi Mecanisme

64. БЫКОВ Я. В., О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Киргизский Государственный Университет, Фрунзе. 1957, 327 стр.

In această carte autorul expune o serie de rezultate din teoria ecuaţiilor integro-diferenţiale, insistînd în mod deosebit asupra proprietăţilor soluţiilor.

Spre deosebire de alte expuneri consacrate acestei teorii, se utilizează pe scară largă aparatul analizei funcţionale. Aceasta permite autorului să cerceteze ecuaţii cu operatori care acţionează în spaţii Banach şi să prezinte într-o schemă unică rezultatele din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, a ecuaţiilor cu derivate parţiale şi din teoria ecuaţiilor integro-diferenţiale.

*

Целью этой книги является изучение некоторых интегро-дифференциальных уравнений с операторами действующими в банаховых пространствах.

Автор пользует систематически аппарат функционального анализа, что иногда позволяет ему излагать в единой схеме результаты, касающиеся теории обыкновен-

ных дифференциальных уравнений, теории уравнений с частными производными и теории интегро-дифференциальных уравнений.

Работа состоит из семи глав. В первой главе изучаются понятие операторного решения, особенной точки, поведение решений в окрестности особенной точки и другие близкие вышеуказанным понятия. Во второй главе рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В третьей главе устанавливаются достаточные условия существования ограниченных, почти-периодических и периодических решений.

Четвёртая глава посвящена изучению асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных, линейных или нелинейных уравнений в пространстве Банаха. В пятой главе рассматриваются операторные интегро-дифференциальные уравнения в комплексной области. Шестая глава посвящена изучению произведений линейных операторов, а также даются некоторые приложения. Последняя глава содержит несколько результатов относящихся к системам интегральных уравнений, к которым приводятся некоторые типы интегро-дифференциальных уравнений.

C. Corduneanu

ЛЕБЕДЕВ А. В., ФЕДОРОВА Р. М., **Справочник по математическим таблицам**, Изд. АН СССР, М., 1956, XI—VI + 549 стр.

Ritmul de dezvoltare a matematicii şi tehnicii din URSS, nemaiîntîlnit în istorie, a condus la editarea prezentului volum de un ajutor nepreţuit pentru colectivele din ce în ce mai mari de matematicieni, care se dedică vastului domeniu consacrat Calculului numeric. Pornind de la ideea necesităţii de planificare a muncii de elaborare a tabelelor matematice în vederea folosirii raţionale a lor, acest volum este consacrat unei sistematizări temeinice – unică în felul ei în literatura mondială – a materialelor existente în acest domeniu. El conţine totodată şi o informare detaliată asupra numeroaselor tabele apărute pînă astăzi, prin grija diferitelor institute naţionale pentru aplicaţiile calculului. Volumul conţine datele relative la tabelele matematice editate în limba rusă şi în limbi străine pînă la 1952 inclusiv, precum şi unele tabele apărute în 1953 şi 1954. In volum sînt excluse caracterizările tabelelor de teoria numerelor, statistică matematică, astronomie şi geodezie. (A se vedea şi Bul. IPI, **II (VII)**, 3–4, 1956, p. 479).

*

Реф. приводит выше некоторые данные об упомянутом замечательном справочнике, систематизирующем уже имеющиеся таблицы используемые в настоящее время, в вычислениях и дающем о них подробную информацию.

L. Constantinescu

66. ЛЯПУНОВ А. М., **Собрание сочинений. II**, Изд. АН СССР, М., 1956, 473 стр.

Este greu de supraevaluat astăzi contribuţia ştiinţifică a lui A. M. Liapunov la teoria stabilităţii mişcării – baza pe care s-a clădit mecanica modernă neliniară de astăzi. Sînt sugestive în această ordine de idei cuvintele din prefaţa cunoscutei monografii, editată de Consiliul Naţional Italian de Cercetări ştiinţifice, elaborată de G. Sansone şi R. Conti, consacrată „Ecuaţiilor diferenţiale neliniare" : „Probleme de teorie, de mecanică şi de circuite electrice au dat imbold matematicienilor să se ocupe intens în ultimii treizeci de ani de vaste clase de ecuaţii diferenţiale neliniare. In perioada 1930–1940 savanţii ruşi A.A. Andronov şi S. E. Haikin, N. Krîlov şi N. Bogoliubov au exercitat, prin volumul lor de teoria oscilaţiilor şi printr-o serie de memorii consacrate mecanicii neliniare, o înrîurire deosebită asupra dezvoltărilor teoretice şi practice în domeniu. . . Inceputurile se datoresc geniului matematic al lui H. Poincaré şi celebrului memoriu al lui A. Liapunov, fondator al teoriei stabilităţii mişcării. *Opera acestor doi matematicieni iluştri este originea unui nou măreţ capitol de matematică, dedicat ecuaţiilor diferenţiale neliniare*". Acest volum, al doilea din seria de volume dedicate operelor academicianului A.M. Liapunov, apărut sub redacţia acad. V. I. Smirnov, conţine teza sa de doctorat *Problema generală a stabili-*

tății mișcării și toate lucrările acestuia, publicate în aceeași ordine de idei după apariția tezei.

Ref. menționează existența unui volum, pregătit în vederea sărbătoririi centenarului de la nașterea marelui mecanician și matematician, intitulat *Alexandr Mihailovici Liapunov*, apărut sub egida Comisiei de Istorie a Științelor fizico-matematice de pe lîngă Academia de Științe a URSS. Acest volum conține o vastă bibliografie legată de lucrările lui A.M. Liapunov, înserate în volumul recenzat.

*

Ref. sottolineano qui sopra la portata del volume secondo di *Opere dell'accademico A. M. Liapunov* contenente tra l'altro una celebre Memoria di questo sommo matematico dedicata alla teoria della stabilità del movimemo. Da questo scritto e dalle mirabili ricerche topologiche ed analitiche sulle equazioni differenziali di H. Poincaré è nato un nuovo grande capitolo della matematica dedicato alle equazioni differenziali non lineari. Si deve mentovare tutt'ora che la bibliografia concernente la messa di articoli collegati ulteriormente con i lavori di Liapunov i trova inserita in un volume speciale *A.M. Liapunov*, edito dall'Accademia di Scienze dell'Unione Sovietica nel 1953. *D. Mangeron, Vl. Sciurevici*

67. ХИЛЬМИ Г. Ф., **Качественные методы в проблеме *n* тел.** Изд. АН СССР, М., 1958, 122 стр.

Cunoscutul autor al unei serii de noi criterii de realizare a mișcării hiperbolice și elipticohiperbolice în problema a trei corpuri (Астрономический Ж., 1953), urmată apoi de un șir de cercetări cu totul recente a lui G. A. Merman, K. A. Sitnikov, V. F. Proskurin, N. G. Kocina și alții, expune în această carte unele metode de analiză calitativă a problemei a *n* corpuri și aplicațiile lor la studiul mișcărilor finale. Ref. subliniind interesul deosebit al acestei probleme în plină elaborare, menționează originea ei ce rezidă în lucrările lui Chazy și în importanta observație făcută de acad. O. I. Schmidt relativă la posibilitatea captării.

*

Der bekannte Verf. der angegebenen Kriterien für das Zustandekommen hyperbolischer bzw. hyperbolisch-elliptischer Geschwindingkeiten im Dreikörperproblem gibt hier einige qualitative Methoden die das *n* – Körper problem betreffen. *D. Mangeron*

68. ФИЛИППОВ А. П., **Колебания упруг х систем.** Изд. АН УССР, Киев, 1956, 322 стр.

Cartea expune un șir de probleme legate de oscilații liniare ale sistemelor elastice. Ref. menționează în mod deosebit prezența numeroaselor metode de calcul, comode în cadrul aplicărilor practice. O atenție deosebită se acordă în lucrare problemei de calcul a amortizărilor oscilațiilor.

Cea mai mare parte a cărții este consacrată studiului oscilațiilor transversale a grinzilor cu mase concentrate (pp. 42–103), a tijelor (pp. 103–158), a fermelor plane (pp. 159–212) și a plăcilor dreptunghiulare, circulare, precum și a învelișurilor cilindrice închise, cu extremitățile simplu rezemate sau încastrate (pp. 212–262). Sînt studiate și unele probleme de șocuri.

Ref. subliniază deosebitul interes al monografiei pentru cercurile largi de ingineri și cercetători, interesați în a pătrunde cît mai adînc fundamentala problemă a vibrațiilor în clădiri și mașini. El sugerează elaborarea în continuare a unei alte monografii, consacrată studiului oscilațiilor neliniare.

*

Le Réf. expose ci-dessus quelques détails concernant le livre assez remarquable du prof. A. P. Filippov de l'Académe des Sciences de la R.S.S. d'Ukraïne consacré à l'étude des oscillations des systèmes elastiques. Bibliographie : 143 titres. *C. Drăgan*

69. KOVÁC JOSEF, *Teoretická Kinematika*. Slovenské Vydavatel'stvo Technickej Literatury, Bratislava, 1955, 243 str .

Autorul a concentrat în acest volum conținutul părții consacrate cinematicii din cursul său de mecanică teoretică pe care-l profesează la Institutul politehnic din Bratislava.

Notaţiile vectoriale moderne, figuri sugestive bine executate, textul concis însă suficient de accesibil studenţilor, asigură cărţii prof. K o v á c un neîndoios succes.

*

Der Ref. unterstreicht als wertvollste Charakteristik des vorliegenden Bandes welche der klassischen Kinematik des Hochschul unterrichtes gewidmet ist, die systematische vektorielle Behandlung der Kinematik im engen Zusammenhang mit die bekannten Ergebnissen der Differentialgeometrie.

Sachregister. Ausgezeichnete äussere Form des Bandes, was für der Verlag eine Tradition ist.

V. Svijevschi

70. DRÎMBA C., *Elemente de Mecanică cerească.* Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., **32**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958, 214 pp.

In cele şapte capitole ale cărţii (Problema celor două corpuri ; Noţiuni de mecanică analitică ; Problema celor trei corpuri ; Perturbaţii ; Stabilitate ; Soluţii particulare ; Teoria lunii ; Forma de echilibru a unei mase lichide în mişcare uniformă de rotaţie) autorul expune problemele esenţiale de Mecanică cerească, care se pot studia cu ajutorul cunoştinţelor obişnuite de analiză matematică. Referentul, subliniind utilitatea deosebită a acestei monografii, apărută în perioada de lansare a primilor sateliţi artificiali ai Pămîntului, îşi permite să atragă atenţia tineretului studios asupra ansamblului de monografii, apărute din iniţiativa Societăţii de Matematică şi Fizică din R.P.R. în colecţia „Biblioteca Societăţii", în condiţiile deosebit de îngrijite, asigurate de către Editura Tehnică.

Menţionăm, în fine, gestul deosebit de delicat al autorului, exteriorizat prin faptul de a fi dedicat această monografie memoriei prof. C o c u l e s c u, fondatorul Observatorului Astronomic din Bucureşti (1908).

*

Ref. gibt oben in rumänischer Sprache einige Einzelheiten über diese *Einführung in die Himmelsmechanik* die als B. **32** in der Sammlung *Bibliothek der math.-phys. Gesellschaft d. RVR* erschienen ist.

D. Mangeron

71. * * * *The American Ephemeris and Nautical Almanac for the Year 1959.* U. S. Government Printing Office, Washington, 1957, XVIII+598 pp.

Acest volum este similar în toate privinţele cu acel pentru anii imediat precedenţi. Modificările esenţiale vor fi introduse, pe baza hotărîrilor celui de al IX-lea Congres Internaţional de Astronomie de la Dublin (a se vedea M. F. S u b b o t i n, *Lucrările celei de a 12-a Conferinţe Unionale de Astronomie din 1955*, Leningrad, Observatorul Astronomic principal din Pulkovo, 1957, pp. 107–109).

*

This volume of the American Ephemeris and Nautical Almanac is similar in all respects to the one for 1958 or to the volumes reviewed in the back volumes of this *Bulletin.* Some modifications will be introduced beginning with the year 1960 due to the resolutions of the Astronomical International Congres (Dublin).

72. * * * *Scientific Uses of Earth Satellites.* 2nd Revised Edition. Edited by James A. V a n A l l e n. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1958, X+316 pp.

Prima ediţie a acestei cărţi consacrată folosirii ştiinţifice a sateliţilor artificiali, apărută acum doi ani, a constituit izvorul de informaţie pentru programul de observaţii ştiinţifice relative la sateliţi elaborat pentru perioada Anului Geofizic Internaţional.

Textul acestei ediţii, complet revăzut, este completat cu multe rezultate comunicate cu prilejul celor mai recente congrese internaţionale de Astronautică îndeosebi la capitolele referi-

toare la : Studiul orbitei unui mic satelit artificial (R. J. Davis, F. L. Whipple, J. B. Zinker) ; Iradierea solară a atmosferei superioare şi a satelitului (P. R. Gast) ; Măsurători meteorologice executate de pe un satelit artificial (W. G. Stroud, W. Nordberg) ; Măsurători ale cîmpului magnetic terestru de pe un satelit artificial (S. F. Singer) ; Structura ionosferică determinată de pe un satelit artificial (W. Berning) ; Măsurătoarea pulvisculului interplanetar (S. F. Singer). Numeroşi alţi colaboratori, autori sau coautori ai celor 33 capitole, sînt bine cunoscuţi specialiştilor noştri din paginile fundamentalei reviste de bibliografie astronomică internaţională Реферативный Журнал Астрономия и Геодезия. al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.

*

This work is a veritable handbook concerning several problems in this new and rapidly expanding field. Rev. gives oven details concerning this second extensively revised and brought up to date edition. *D. Mangeron*

73. *** *Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongress.* Innsbruck, 5 bis 7 August 1954. Im Auftrage der Österreichischen Gesellschaft für Weltraumforschung. Herausgegeben von Hecht, Wien. Mit 165 Abbildungen. 1955, Wien/Innsbruck. VI+307 S.

Ca orice ştiinţă tînără ce corespunde stadiului de dezvoltare economică a societăţii, Astronautica se află astăzi în plină înflorire. In consecinţă jalonarea progreselor sale uriaşe se face, spre deosebire de alte ştiinţe, mai vechi, în cadrul congreselor anuale. Volumul, emanînd prin lucrările sale încrederea nemărginită în cucerirea rapidă de către om a spaţiului cosmic, soldată prin lansarea la 4 octombrie 1957 de pe teritoriul U.R.S.S. a primului satelit artificial al Pămîntului, cuprinde lucrările prezentate la cel de al V-lea congres internaţional de astronautică, ţinut la Innsbruck în 1954. (Pentru darea de seamă asupra celui de al IV-lea congres, a se vedea, BIPI, **II(VI)**, *3–4*, 1956, pp. 549–550). Din cele 32 de lucrări prezentate, dintre care 5 au şi fost înserate în revista *Astronautica Acta*, aproape două treimi sînt dedicate problemelor de combustibili şi de producere a materialelor ignifuge sau problemelor de mecanică a sborului sateliţilor sau rachetelor. Restul este consacrat conducerii automate a rachetelor şi fiziologiei sborului interplanetar (influenţa radiaţiei cosmice asupra corpului omenesc, problema condiţiilor echivalente cu acelea din timpul sborului etc.).

*

Research plays a vital part in Man's conquest of space. This volume, devoted to the V–th International Congress of Astronautics (Innsbruck, August 5th–7th, 1954), has to provide the answers for many still open questions, not only in the realm of engineering or mechanics, but even more in adjacent fields such as aviation medicine, radiology, meteor research, and others. The Reviewer gives in Roumanian some considerations concerning the papers read before the Congress and ist ultimate purpose-voyages to the moon and the nearer planets– a bold and beautiful extrapolation in Man's conquest of space beginning in October 4th, 1957.

The book is well produced by the Springer–Verlag nad remarkably free of misprints. *D. Mangeron*

74. *** *Proceedings of the first Congress on theoretical and applied Mechanics,* November 1–2, 1956. Indian Society of theoretical and applied Mechanics. Indian Institute of Technology, Kharagpur, 284 pag.

Spaţiul tipografic de care se dispune, nu permite evident, trecerea în revistă mai detailată a conţinutului bogat în lucrări al volumului consacrat celui dintîi congres de mecanică teoretică şi aplicată, ţinut, sub egida Institutului Indian de Tehnologie, la Kharagpur. (Director ISTAM, Dr. S. R. Ben Gupta ; Secretar, Dr. B. R. Seth).

Dările de seamă ale Congresului conţin 28 lucrări expuse în faţa congresiştilor, relative la teoria elasticităţii, plasticitate, reologie, mecanica fluidelor, balistică, vibraţii, termodinamică, statistică şi fizică matematică, grupate în cinci secţii. După cum rezultă din prefaţă, alte lucrări prezentate au fost publicate între timp în altă parte. Ref. scoate în evidenţă larga participare in-

ternațională, menționînd, de pildă, lucrările prof. W. Nowacki, J. Nowinski și W. Olszak de la Academia de științe din R. P. Polonia, L. Payne de la Institutul de dinamica fluidelor de la Universitatea din Maryland ș.a.

Reunind laolaltă numeroși cercetători din India, începînd cu colectivele din cadrul Bengal Engineering College, Sibpur, Howrah și terminînd cu Hindustan Aircraft Ltd., Bangalore, congresul, prin varietatea lucrărilor prezentate și prin anvergura bibliografiei utilizate, a contribuit, fără îndoială, la propășirea mecanicii teoretice și aplicate în Republica India.

*

The first Congress on theoretical and applied Mechanics was held on first and second November 1955 at the Indian Institute of Technology, Kharagpur under the Presidentship of Dr. K. S. Krishanan, Director, National Physical Laboratory, New Delhi. It marked the beginning of a new era in research in the domain of Mechanics in the Indian Republic. (President ISTMA Prof. dr. S. R. Ben Gupta ; Secretary, Dr. B. R. Seth).

The Proceedings contains 28 complete papers read before the congress and they deal with Elasticity, Plasticity, Rheology (Section I) ; Fluid Mechanics (Section II) ; Mechanics of solids (Section III) ; Statistical Mechanics Thermodynamics and Heat Transfer (Section IV) ; Mathematics of Physics and Computation (Section V).

The authors of the papers come from the Polish Academy of Sciences ; University of Maryland ; Bengal Engineering College, Sibpur ; Indian Institute of Science, Bangalore ; Indian Institute of Technology, Kharagpur ; Chandernagore College ; Central Water and Power Research Station, Poona ; Central Building Research Institute, Rookee ; Nizam College, Hyderabad ; Birla College of Engineering, Pillani, Rajasthan ; Institute of Armament Studies, Kirkee, Poona ; Central Water and Power Research Station, New Delhi ; University College of Science and Technology, Calcutta ; Hindustan Aircraft Ltd., Bangalore ; Victoria Jubille Technical Institute, Matunga, Bombay ; Lucknow University ; Hindu College, Delhi ; Laxminarayan Institute of Technology, Nagpur ; Technical Institute, Bombay. The comparison between the papers read before the first congress and the second congress to be held during October 15–16, 1956 at the National Physical Laboratory, New Delhi, will be published in one of the next issues of this *Bulletin*.

D. Mangeron

75. SYNGE J. L., *Relativity : The special theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958, XIV+450 pp.

Acest curs este fructul lecțiilor ținute de autor la Universitatea din Toronto, ca urmare a invitației cunoscuților fizicieni L. Infeld (astăzi reîntors în R. P. Polonia), C. Lanczos și E. Schrödinger.

Ideea de bază a prezentării acestei excelente teorii a relativității restrînse constă în punctul de vedere al lui Minkowski, ce-și are fundamentul în geometria spațiului–timp. Părăsind ordinea istorică pentru a putea prezenta cuceririle la zi în această disciplină, al cărui farmec, după spusele autorului, l-a făcut să renunțe la înglobarea în același volum și a teoriei relativității generalizate, volumul tratează în zece capitole bine ponderate și magistral expuse : I. Continuumul spațiu–timp ; II. Introducere în teoria specială : III. Diagrame în spațiu–timp ; IV. Transformarea lui Lorentz ; V. Aplicații ale transformării lui Lorentz ; VI. Mecanica particulei și problema ciocnirilor ; VII. Mecanica unui sistem discret ; VIII. Mecanica continuumului ; IX. Cîmpul electromagnetic în vid ; X. Cîmpuri și sarcini. Un vast și îngrijit indice de materii încheie volumul.

Rev. gives oven some details concerning this excellent volume written by the author, encharmed by the special theory.

D. Mangeron

76. *** *Schiffbautechnisches Handbuch*. B. **I.** Erweiterte und völlig neubearbeitete Auflage. Herausgeber W. Henschke. VEB Verlag Technik Berlin, 1957, 1086 S.

Acest volum, primul din seria consacrată problemelor fundamentale moderne de construcție a navelor, elaborat de un colectiv sub redacția lui W. Henschke în editura VEB

Verlag Technik din Republica Democrată Germană, reflectînd cele mai de seamă contribuții ale oamenilor de știință germani, ruși și sovietici și din alte țări, începînd cu Ayre, Dietze, Froude, Horn, Krilov, Jukovsk, Prandtl, Remmers, Schlichting, Schmidt, Schnitgerr, Schoenherr, v. d. Steinen, Stiebitz, Taylor, Thieme, Timoshenko,...., este împărțit în trei părți aproape egale ca volum, consacrate respectiv bazelor matematice și mecanice (procedee de calcul numeric, probleme de stabilitate, vibrații cu privire specială asupra vibrației navelor, măsuri hidrodinamice), problemelor de rezistență, propulsie și ghidaj (pp. 347–664) și problemelor de rezistență a navelor.

Referenții, în imposibilitate de a se opri aici mai pe larg asupra conținutului acestui monumental volum ce și-a găsit îndată după apariție un loc demn pe mesele de lucru ale cercetătorilor din cabinetele tehnice de specialitate din RPR, se vor mărgini cu un alt prilej să analizeze, pe marginea conținutului paragrafelor corespunzătoare din acest volum, problema de bază a vibrațiilor navelor, încadrată în cercetări cu totul recente de mecanică neliniară a vibrațiilor.

*

Этот том — первый из серии посвященной основным проблемам судостроения — вышедший под редакцией В. Геншке, как результат коллективной работы ряда крупных специалистов ГДР, на основе фундаментальных вкладов советских, русских, немецких учёных и учёных других стран, таких как Горн, Крылов, Жуковский, Прандтль, Шлихтинг, Тиме, Тимошенко и многих других, разделен на три почти равные части. Первая — посвящена изложению основных методов современной вычислительной математики и важнейшим задачам механики, как напр., устойчивость колебания, с непосредственными приложениями к колебаниям и качке кораблей. Вторая — задача сопротивления, продвижения и управления корабля, а третья — серии задач проэктирования и сопротивления материалов и деталей корабля. Референты, горячо рекомендуя специалистам этот фундаментальный труд, служащий наряду с другими книгами выходящими в издательстве **VEB Verlag Technik, Berlin** основой всестороннего углубления современных исследований в области кораблестроения, предполагают остановиться, следуя уже опубликованной в **т. 4 (8)**, вып. *1—2*, **1958** „Известий ЯПИ" статье посвященной вкладу русских и советских математиков и механиков в современную задачу нелинейной механики, в рамках отдельной заметки, беря как остов данные приведенные в этой книге, на новейших исследованиях отпечатанных в специализированных журналах интересующих актуальные задачи качки и колебаний корабля.

D. Mangeron, V. Teodorescu

77. ALFERJEW M. A., *Hydromechanik.* Mit 152 Bildern. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1958, VI+226 Seiten. Autorisierte Übersetzung aus dem Russischen.

Cartea prof. Alferiev, bine cunoscută specialiștilor din patria noastră, este prezentată acum în traducerea în limba germană fiind introdusă ca manual în universitățile și institutele de învățămînt superior din Republica Democrată Germană. Într-o prezentare excelentă, ce a devenit o tradiție a editurii B. G. Teubner, Leipzig, cartea conține toate problemele fundamentale de hidrodinamică tehnică, într-o prezentare matematică exemplară. Autorul se bazează îndeosebi pe metodele analitice clasice, însă nu neglijează să folosească în mod oportun oridecîte ori are ocazie cele mai noi rezultate în acest important domeniu.

*

Das Buch behandelt alle Grundprobleme der technischen Hydromechanik in vorbildlich gründlicher und exakter mathematischer Beweisführung. Es vermittelt systematisch das für jeden Ingenieur und Techniker des Wasserbau – Rohrleitungsbau – und Schiffsbaufaches notwendige hydromechanische Grundwissen und lactet die Voraussetzungen für eine Beschäftigung mit den Spezialdisziplinen der Hydromechanik.

Ref. gibt oben in rumänischer Sprache einige Eizelheiten die dieses ausgezeichnete Band betreffen.

D. Mangeron

78. КАРАФОЛИ Е., **Аэродинамика крыла самолета. Несжимаемая жидкость.** Перев с рум. Изд. АН СССР, М., 1956, 479 стр., илл.

Reputaţia ştiinţifică de anvergură mondială, de care sîntem mîndri, a acad. E. Carafoli, a făcut ca orice carte a D-sale, editată în romineşte, să fie tradusă fără întîrziere, de iniţiativa celor mai de seamă instituţii de înaltă cultură, în frunte cu Academia de Ştiinţe a URSS (cazul volumului ce se recenzează), sau la solicitarea marilor edituri, ca, de pildă, Pergamon Press (cazul volumului *Aerodinamica vitezelor mari (Fluid compresibil)*, recenzat de N. Tipei în Studii şi Cercetări de mecanică aplicată, 1957, **8**, nr. 2, pp. 603–604 ; *High-speed aerodinamics (Comppressible flow)*, Pergamon Press, Ltd., 1956, 710 pp. ill., recenzat, între altele, în cunoscutele reviste de specialitate *Canadian Aeronautical Journal*, 1958, **4**, nr. 1, p. 36 şi *Journal Roy. Aeronaut. Society*, 1958, **62**, nr. 567, p. 225, respectiv de K. Orlic-Ruckemann şi D. W. Holder). Ref. dă mai jos unele detalii asupra acestei cărţi, pe care o consideră ca fiind la momentul actual cea mai completă din totalitatea cărţilor publicate pe glob relative la aerodinamica aripii de avion într-un fluid incompresibil. Fiecare capitol este însoţit de o vastă bibliografie.

*

La traduzione simultanea e quasi immediate dei libri dell'illustre accademico romeno E. Carafoli in altre lingue di uso internazionale corrente è diventata oramai una tradizione. La limitazione dello spazio ci costringe ad un cenno veramente cortissimo per questo suo libre, consacrato all'aerodinamica dell'ala dell'avione immersa nel fluido incompressibile e considerato dai specialisti a giusto titolo come il più completo nel dominio.

Diviso in dieci capitoli corredati ciascuno da una estesa bibliografia ben aggiornata, il libro considera i problemi fondamentali, d'importanza practica, collegati col problema di scaldamento dell'ala da una scia di fluido perfettamente incompressibile. L'esposizione dei fondamenti d'idrodinamica classica (cap. I) è seguita dalla teoria dei profili basata sul metodo di rappresentazione conforme (cap II). La teoria dei bipiani di anvergura infinita o finita costituisce il soggetto dei capitoli III e VIII. La teoria di retta portante o linea è poi la base di numerosissimi studi concercenti lo scaldamento di ali più svariati (cap. IV, V). La teoria di superfice portante e quella del potenziale sono la base di studio di vari altri problemi (cap. VI). Il cap. VII si occupa dei moti di regime transitorio, allorchè ne i cap. IX e X si studiano vari problemei collegati all'interdipendenza tra la frontiera della scia e lo scorrimento nella vicinanza dell'ala. *D. Mangeron*

79. CARAFOLI E. *Aerodinamica vitezelor mari (fluide compresibile)*. Ed. Acad. R.P.R., 1957, 706 p.

Ref., în imposibilitate de a sublinia îndeajuns în acest volum aportul de avergură greu de supraevaluat adus de această operă ştiinţifică consacrată studiului profund al fenomenelor aerodinamice la viteze mari, se mărgineşte a indica mai jos, în limba spaniolă, cîteva detalii relative la această monumentală lucrare ce-şi va găsi fără îndoială loc în traducere şi în alte limbi de uz internaţional curent, analog cu ceea ce s-a întîmplat cu una din lucrările anterioare ale autorului, *Aerodinamica*, tradusă la Berlin, în limba germană, sub titlul de *Tragflügeltheorie* şi în limba rusă, la Moscova, sub titlul Аеродинамика крыла самолёта recenzată la nr. **78** din acest *Buletin I.P.I.* în limbile romînă şi italiană.

*

Por la creciente importancia que se le ha venida dando a los problemas del vuelo a velocidades grandes, el autor, que es miembro de la Academia de Ciencias de la Republica de Rumania, ha consagrado in este segundo volumen (el primer volumen de este celebre obra es traducido en ingles, en aleman y en ruso) un enorme y admirable sfuerzo a examinar estos problemes con el auxilio de los instrumentos matematicos más adecuados, más modernos y de potente investigación. La obra, dedicada a especialistas, exige una profunda y vasta preparación y contien varias indagaciones originales del autor basados en experimentaciones efectuadas por laboratorios de diversos países, que él coordina y examina teóricamente en la forma que ciertamente conduce a la rapida traducción de este nuevo importante volumen en varias otras lenguas del mundo. *D. Mangeron*

80. * * * Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам Теории Машин и Механизмов. Изд. АН СССР, Институт Машиноведения, М., 1958 г., под ред. акад. И. И. Артоболевского.

Acest volum, apărut sub redacția acad. I. I. Artobolevski și A. P. Bessonov, este consacrat lucrărilor plenarei de deschidere a celei de a II-a Consfătuiri Unionale de Teoria Mecanismelor și Mașinilor (Moscova, 24–28 martie 1958), concluziilor prezentate de președinții celor cinci secții : prof. dr. N. I. Levitski (Secția de Analiza și Sinteză Mecanismelor) ; prof. dr. A. E. Kobrinski (Secția de Dinamica Mașinilor) ; prof. G. G. Baranov (Secția de Teoria preciziei în construcția de mașini și aparate) ; prof. dr. S. I. Artobolevski (Teoria mașinilor cu acțiune automată) ; prof. dr. V. A. Gavrilenko (Teoria transmisiei în mașini), precum și hotărîrilor plenarei de închidere a conferinței.

In cadrul deschiderii lucrărilor plenarei inaugurale festive a conferinței se subliniază vasta participare activă (86 de referate și comunicări), precum și o largă prezență a specialiștilor din mai toate atît de numeroase centre de studii și cercetări din URSS și din țările de democrație populară. Se citează apoi conținutul referatelor prezentate de acad. I. P. Bardin, vice-președinte al Academiei de Științe a URSS (Problema de automatizare și de mecanizare a producției), acad. A. A. Blagonravov (Rolul teoriei mașinilor în problema automatizării proceselor de producție), acad. I. I. Artobolevski (Starea actuală a Teoriei mecanismelor și mașinilor), acad. N. G. Bruevici (Tendințele de bază în dezvoltarea construcției de mașini și aparate), prof. dr. W. Lichtenheldt (Starea actuală a Teoriei mecanismelor și mașinilor în RDG), prof. dr. D. Mangeron, în colaborare cu conf. ing. R. Bogdan de la Institutul de Mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei RPR (Studii, cercetări și perspective de dezvoltare a Teoriei mecanismelor și mașinilor în RPR), precum și adresele de salut, oferite conferinței de către delegațiile țărilor participante.

In imposibilitate de a reproduce aici fie chiar și succint conținutul adînc al referatelor menționate, ref. subliniază rolul diriguitor al referatului acad. I. I. Artobolevski, axat pe sarcina celei de a II-a Consfătuiri Unionale de TMM de a discuta rezultatele concrete, obținute de oamenii de știință sovietici și din alte țări în domeniul acestei discipline fundamentale în perioada între cele două conferințe (1954–1958).

*

The volume *Second All-Union Conference on the fundamental Problems in the Theory of Mechanisms and Machines,* Moscow, 1958, edited by the Academy of Sciences of the Soviet Union (Editor in chef I. I. Artobolveski), presents the works of the opening session of the conference, the reports presented by the chairmen of the five sections and the resolution of the closing session.

In the preface I .I. Artobolevski, member of the U.S.S.R. Science Academy and A. P. Bessonov point out that at the first conference which took place in 1954, main directions were established in view of developing the theory of mechanisms and machines, whose importance is decisive in machine construction. The authors emphasize the results obtained since 1954, undelining especially the realizations in the field of constructing automatic machines, automatic lines, automatic factories and so on.

After showing the aims of this conference and the large participation of specialists from various learning and research centers of U.S.S.R. and socialist countries, authors review the reports presented at the conference.

L. P. Bardin, deputy-president of the U.S.S.R. Science Academy, at the opening session referred to problems of automation and mechanization of the production. He pointed out that the importance of automation and mechanization in various production processes depends not only upon the scientists and engineers who construct automatic machines, but also upon those who establish the respective technologic processes.

A. A. Blagonravov, member of Academy and director of the Institute for the study of machines, discussed the theory of machines in conjuction with automation problems in industrial processes. After briefly presenting the history of the theory of mechanisms and machines as a scientific basis for solving complicated problems of machine constructions, A. A. Blagonravov showed that at present the development of automation in industrial processes provides special conditions for the development of the theory of machines and determines the principal directions of this theory. The importance of utilizing certain special chapters of mathematics, electronics and experimental dynamics of machines, in the modern theory of machines is also showed.

N. G. Bruievich, member of Academy presented the report entitled *Basic trends in the development of machine and apparatus construction.* He analysed the main trends of the science of accuracy in machine construction, mentioning meanwhile the more important achievements.

Further the reports of a general character presented by foreign delegates are reviewed.

The first report *Present state of the theory of mechanisms and machines* by I. I. Artobolevski states the task of the 1958 conference, namely a retrospective view of the results obtained by soviet and foreign scientists in the field of the theory of mechanisms and machines throughout the period between the two conferences (1954–1958). After a survey of the great achievements of the soviet science and technique, as well as the achievements in the construction of automatic machines, he outlines the realizations in the field of the theory of mechanisms and machines during the above mentioned period. Thus, author gives an image of the continuous development of this discipline as a sequence of certain problems raised at the first conference, such as : kinematic analysis and synthesis and dynamics of plane and spatial mechanisms with lower and higher pairs, development of the geometry and synthesis of toothed weel gearings, theory of mechanisms with flexible members, pneumatic and hydraulic devices as part of mechanisms, dynamics of machines and mechanisms.

Further, after mentioning a series of studies, published both in U.S.S.R. and abroad, and pertaining to the above fields, author shows the way in which the general methods of the theory of mechanisms and machines were reflected in the formation of a new scientific branch called theory of automatic machines. The works showing the relation between the theory of automatic machines and the general theory of mechanisms and machines are then reviewed and the courses and textbooks published between the two conferences for students and engineers working in the field are presented.

This report, besides bringing a large number of references, by the competent analysis of the interesting works published within the last four years has a special value for us. It represents a guid which opens new ways for promoting and deepening the research work, and realizing as soon as possible the automation process in the factories and plants of our country.

The synthesis reports presented by the chairmen of the five sections, namely : The analysis and synthesis of mechanisms ; Machine dynamics : Theory of accuracy in machine and apparatus construction ; Theory of automatic machines ; Theory of machine drives, gave figures concerning the number of sessions held within each section stresed the contribution brought by the speakers and underlined the directions along which the research work was carried out.

Prof. N. I. Levitski, concluding on the 16 reports an 7 scientific notes presented at the section for the analysis and synthesis of mechanisms, emphasized the resulting new aspects. Thus, in the analysis of mechanisms, new methods were proposed connected to the matiematical apparatus which previously was less frequently used. The helicoidal calculation was applied in the analysis of spatial mechanisms with lower and higher pairs. The matrix method which corresponds to the solving of many analytic problems and partially to synthesis problems, was successfully applied in various papers. The use of other methods in the analysis of mechanisms allowed for new possibilities of their application to be put into evidence. In this respect author quotes prof. D. Mangeron's papers which involved methods of mechanisms analysis with the aid of the theory of reduced accelerations. It is also to be noticed that many papers includent combined problems. Thus prof. L. N. Reshetov showed thar in investigating the theory of mechanism structure, practical conclusions may be obtained which refer both to the analysis and synthesis of mechanisms.

Further, author quotes papers in the field of the synthesis of mechanisms and discusses the paper presented by I. I. Artobolevski who proposed several methods for the formation of mechanisms theoretically accurate for reproducing algebraic and transcendental curves. The importance of these methods lies in the fact that all mechanisms of this kind, previously presented as the result of various investigators research work, are now presented under the form of an unitary theory. Meanwhile, by using these methods, a series of new mechanisms may be obtained for the reproducing of a large class of functions.

Other problems are then briefly analysed, e. g. treatment of the approximate synthesis of mechanisms on the basis of the theory of the approximation of functions. The fact in underlined that analytical and geometrical methods begin to tighten closely. In this respect reference is made to S. A. Cerkudinov who presented the well known geometric theory of Burmester's curves under an analytic form.

Prof. W. Lichtenheldt's paper (German Democratic Republic) on the synthesis of rectilinear sliding mechanisms is then quoted. The paper based on the use of design kinematic schemes, giving the most adequate criteria, solves also certain problems partaining to the synthesis of six and eight bar mechanisms by using geometrical methods.

Another example of combining the geometrical methods and the analytical ones is included in the author's own paper. There, the analytical method completes the geometrical methods for the design of six bar mechanisms. Using this method, a six bar transmission mechanism can be designed with the help of seven parameters, obtaining thereby a linkage with arrests of a given duration and reproducing at the same time a given law of motion on the stroke working portion.

A. E. Kobrinski's report presented within the section for machine dynamics, emphasizes the basic problems around which the ten papers and twelve scientific notes were grouped, namely : Investigation of the vibration processes in machines ; Problems of kinetostatics and dynamics of machine aggregates ; Development of general experimental methods and their results with application to various machines.

The report shows that the works presented at the conference reflect the modern trends in machine dynamics. The papers delivered within the above mentioned groups are then briefly reviewed.

Of the papers presented several were based on the research carried out in the dynamic strength laboratory of the Institute for the study of machines. These dealt with the following topics: problems pertaining to the resonance properties of the centrifugal vibrator, resonance regimes of the unbalanced rotor motion, resonance processes in complex machine systems, particularities of unsteady vibration processes.

Other papers included investigations on the self-sinchronization of vibrations, analysis of free vibrations of machine foundations placed on non-linear springs with parabolic elastic characteristics, free and forced vibrations of systems under impact vibrations and problems connected to their dynamic stability.

The report on the research work carried out in the machine dynamics laboratory presents results which found application to the vibrator system when the counterpoising masses are taken into account, as well as to free and forced vibrations of non-linear systems with unsymmetric elastic characteristics, formed by straight line segments.

Papers dealing wiht experimental methods are then reviewed, namely : Mechanical transducers for the determination of paths in plane mechanisms in cartesian or polar coordinate systems.

Concluding on the works of the section for the theory of accuracy in machine and apparatus constructions, G. G. Baranov analyses briefly each paper underlining the problems approached within this section, namely : Incresing the accuracy of various devices by correctly choosing tolerances in the control methods ; The synthesis and analysis of complex devices which ensure a given accuracy ; Dynamic accuracy of mechanic and electronic circuits and operating accuracy of electronic computers ; Errors in toothed gearing as a source of vibration and noise in the turbine reduction gears ; Manufacturing errors in ball and roll bearings constructed in automatic lines.

S. I. Artobolevski presents a comprehensive analysis of the reports delivered within the section for the theory of automatic machines, showing that modern and important problems were approached, such, as : structure of automatic technologic machines and its part in the development of the general theory of these machines ; theory of productivity of the working machines and aggregates for the automation of industrial processes, dynamics of programmed control systems ,problems concerning the productivity of machines and so on.

The last report is by V. I. Gavrilenko, chairman of the section for the theory of machine drives.

Each synthesis report constitutes a valuable instrument of information and documentation.

The volume also includes the resolution of the closing session of the conference, mentioning that in the period between the two conferences, a series of important research works were carryed out in the main branches of the theory of mechanisms and machines according to the directives arising from the first conference. After analysing the most valuable results obtained in the above problems, the resolution indicates the lines along which future studies and investigation are to be carryed out.

D. Mangeron, R. Bogdan.

81. FILIMON R., BOTEZ M., COSTĂCHEL A., MIHAIL D., RUSSU A., *Topografie generală.* Manual pentru învățămîntul tehnic superior. Editura tehnică, Buc., 1958, 798 pp., 795 fig., 73 tabele.

Lucrarea cuprinde : cunoștințe generale ; ridicarea planimetrică a suprafețelor mari, mijlocii și mici ; nivelmentul geometric, trigonometric, barometric ; tahimetria ; ridicări cu planșeta ; ridicări expeditive ; noțiuni și ridicări fotogrammetrice ; probleme specifice diverselor ramuri de producție. Se prezintă cele mai moderne metode și instrumente folosite în topografie. Se arată contribuția națională la dezvoltarea topografiei și a calculelor de birou.

Expunerea teoretică este însoțită de exemple practice.

Se adresează inginerilor și studenților cu diverse specialități (geologi, minieri, agronomi, silvici, constructori, hidrotehnici, civili, industriali, urbaniști etc.).

*

Die Verfasser beschreiben die, in der Vermessungskunde gebrauchte neueste Verfahren sowie din Gerate. Gleichfalls stellt es die rumänischen Beiträge zur Erweiterung der Vermessungskunde und der Bureauberechnungen vor. Das theoretische Schauwesen wird mit zahlreichen praktischen Beispielen ergänzt.

Dieses Buch ist für verschiedenfachliche Studenten und Ingenieure gebrauchswertlich.

N. Preda

82. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г., Механика жидкости и газа. Изд. второе, переработанное и дополненное. Гостехиздат, М., 1957, 784 стр.

Cărțile de Mecanică teoretică ale prof. L. G. Loițeanski și A. I. Lurîe, precum și cunoscuta serie de volume, editată sub conducerea iluștrilor profesori de la Institutul Politehnic din Leningrad, din colecția *Probleme actuale de Mecanică*, sînt deosebit de apreciate de studenți și de specialiști din Republica noastră Populară.

Această a doua ediție a cărții *Mecanica fluidelor și a gazelor* a prof. L. G. Loițeanski a căpătat îmbunătățiri de seamă față de ediția aceluiași curs, destinat atît universităților cît și institutelor tehnice de învățămînt superior, apărută acum șapte ani. Astfel, s-a completat cu numeroase date prețioase partea introductivă și istorică, au fost prelucrate metodic primele trei capitole ale cursului, consacrate cinematicii și problemelor generale de dinamică. Cele mai mari modificări însă s-au introdus în capitolele care reflectă progresul uriaș al tehnicii și al cercetării din ultimii ani. Ele se referă la dinamica gazelor perfecte, fluidelor și a gazelor vîscoase. In cap. IV s-au introdus noi paragrafe ce expun mișcarea unidimensională a unui gaz în conductă în prezența unei rezistențe ; în cap. VI este lărgită expunerea teoriei scăldării plane sub – și supersonice a unui profil subțire, dezvoltîndu-se metode de calcul cu aproximație a influenței contractivității în curgere subsonică. Cap. VII este completat cu două paragrafe conținînd bazele teoriei spațiale a scăldării spațiale sub – și supersonice. După completările cap. VIII, lărgit simțitor prin adăugirile relative la teoria hidrodinamică a ungerii și la teoria vinelor laminare plane și spațiale, cap. IX expune teoria turbulenței, adîncită atît de mult în anii din urmă. Cap. X este consacrat teoriei moderne a stratului limită laminar și turbulent.

Prezentată excelent din punct de vedere tehnic, dotată cu un indice de nume și de materii, avînd o subdiviziune judicioasă în cele 125 paragrafe a capitolelor I–X, cartea prof. L. G. Loițeanski, prin conținutul său, se recomandă călduros pentru a fi tradusă și în alte limbi.

*

La seconde édition revue et augmentée de cet excellent livre s'ajoute à la nombreuse collection de cours et de traités dont les illustres professeurs L. G. Loitzeanski et A. I. Lourjé de l'Institut Polytechnique de Léningrad en peuvent être bien justement si fiers.

Le Réf. tout en exposant ci-dessus quelques détails concernant ce livre recommande chaleureusement sa traduction en d'autres langues.

D. Mangeron.

83. * * * *Schwingungstechnik.* Vorträge der VDI–Tagung, Darmstadt, 1954. 120 S., 205 Bilder. VDI Berichte, Band **4,** 1955. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf.

Programul colocviului consacrat tehnicii vibrațiilor (Darmstadt, 1–3 iulie 1954), condus de secția de tehnica vibrațiilor a VDI de sub președenția prof. dr. E. Lübcke, a cuprins

șase teme principale și anume : 1. Aparate de măsură pentru oscilații mecanice ; 2. Teoria oscilațiilor ; 3. Aplicații ale oscilațiilor ; 4. Inlăturarea oscilațiilor ; 5. Influența oscilațiilor asupra omului și materialelor ; 6. Oscilații în vehicule. Ref. subliniază în deosebi, în ordinea de idei a preocupărilor sale, referatul general al cunoscutului specialist K. K l o t t e r, consacrat noilor metode și rezultate în domeniul mecanicii neliniare a vibrațiilor.

*

In dem vorliegenden Berichtsheft über die VDI-Schwingungstagung 1954, in Darmstadt, werden die dort erstatteten Berichte und Diskussionsbeiträge veröffentlicht. Das Programm umfasste sechs Grundthemen aus der Schwingungstechnik, von denen die Gebiete: Schwingungs-Messgeräte (6 Vorträge), Theorie der Schwingungen (5 Vorträge), Schwingungsbeseitigung (7 Vorträge) sowie Schwingungsanwendungen, Einwirkung der Schwingungen auf den Menschen und die Materie und Schwingungen auf Fahrzeuge in mehreren anderen Vorträgen vertreten waren. Im ganzen genommen kann dieses Berichtsheft allen an der Schwingungtechnik Interessierten wärmstens empfohlen werden. *D. Mangeron*

84. SCHULER MAX, *Mechanische Schwingungslehre.* Teil **I.** *Einfache Schwinger.* 2., bearbeitete Auflage. Mit 123 Bildern. Leipzig, 1958. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. – G., Gr. 8°, VIII, 158 S.

Schemele matematice ale fenomenelor nu trăiesc decît atunci cînd sînt iluminate profund de faptele fizice. Luînd ca bază acest adevăr elementar, autorul consacră acest volum studiului oscilatorilor liniari. Aici se cuprind oscilații *mecanice* din cadrul mecanicii clasice, adică oscilații ale punctului material, ale rigidului, ale fluidelor și gazelor. Se arată apoi că aceleași ecuații diferențiale și metodele de rezolvare ale lor se pot aplica și în studiul oscilațiilor electrice. Cartea nu cuprinde însă probleme de optică, spectroscopie și teoria cvantelor. Se menționează că indicații bibliografice asupra acestui important subiect sînt reproduse în partea a II-a a acestei opere, prezentată și într-o formă exterioară impecabilă.

*

Since the introduction of high-speed machinery, and latterly the use of the Diesel engine for marine propulsion, the knowledge of the fundamental principles of the theory of vibrations is essential to the modern engineer. Rev. gives above in Roumanian language some details concerning this excellent volume devoted to Simple Mechanical Oscillators. *D. Mangeron*

85. HÜBNER ERHARD, *Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen.* Mit 208 Abbildungen. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957, XI+322 S.

Tendința tehnicii moderne de a realiza construcții ușoare și rezistente, conduce la probleme de elasticitate, și în consecință la studiul forțelor generatoare de vibrații. Rolul crescînd al mecanicii tehnice a vibrațiilor, cristalizat și în patria noastră printr-un număr de cărți traduse sau elaborate în țară în ultimii doi-trei ani, este originea acestui volum datorit prof. dr. H ü b n e r. Propunîndu-și, în limitele conservării rigorii necesare, să folosească la maximum un aparat matematic nu prea ridicat și expunînd numeroase exemple, calculate pînă la capăt, autorul reușește să prezinte cercetătorilor un volum deosebit de util, în care, datorită introducerii noțiunii de „rezistență mecanică la oscilație", s-a putut trata în mod elementar multe probleme importante relative la oscilații în corpuri omogene, în gaze și în fluide. Analogiile electrice, ce și-au cîștigat o bază deosebit de solidă în anii din urmă, sînt tratate pe larg (Cap. V). Un capitol special se ocupă de problema oscilațiilor neliniare (Oscilatori cu un singur grad de libertate) (Cap. VIII), baza mecanicii neliniare, creată de N. M. K r i l o v și N. N. B o g o l i u b o v.

*

Das vorliegende Buch befasst sich mit den Grundlagen der technischen Schwingungslehre. Die Darstellung ist, unter voller Wahrung wissenschaftlicher Strenge, elementar gehalten. Viele,

vollständig durchgearbeitete Berechnungsbeispiele erleichten das Erkennen der grundlegenden Zusammenhänge. Die in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewinnenden elektrischen Analogien werden in ausführlicher Breite und Vollständigkeit behandelt. Ein besonderer Abschnitt befasst sich mit nichlinearen Schwingungen. Der Ref. unterstreicht das besondere Interesse, mit welchem die Abschnitte der Anwendungen des Begriffes des mechanischen Schwingungswiderstandes gewidmet sind, gelesen wird.

Druck und Ausstattung sind – wie das beim Springer-Verlag üblich ist – ausgezeichnet.

D. Mangeron

86. MYKLESTAD N. O., *Fundamentals of vibration analysis*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1956, VIII+260 pp.

Referentul dă mai jos unele caracterizări ale acestei cărți consacrate mecanicii liniare a vibrațiilor.

*

The first half of this book, dealing with systems of one degree of freedom, is developed along much the same line as the author's book *Vibration Analysis ;* but the material has been entirely rewritten and a large number of new examples and problems have been added to help the reader to develop a better understanding of the subject. In addition, the subject of transient vibrations has been treated in considerable detail.

The second part of the book is almost entirely new. It treats systems of more than one degree of freedom. Rev. finds it very useful to wide gap thus exists between the elementary treatment and most modern methods on non-linear mechanics.

D. Mangeron

87. KRAUS R., *Technische Mechanik*. Band **I.** Teil I. *Einführung in die technische Mechanik*. Teil II. *Graphische Statik der Fachwerke und Getriebe*. 1953, 336 Seiten. Band **II.** *Dynamik*. 1954, 207 Seiten. Band **III.** *Beispielsammlung zur graphischen Statik und Dynamik der Fachwerke und Getriebelehre*. 1958, 300 Seiten. VEB Verlag Technik, Berlin.

Autorul, cunoscutul specialist în Teoria mecanismelor și mașinilor (a se vedea și recenzia unei alte cărți ale sale în acest Buletin, t. **II (VI),** 3–4, 1956, pp. 590–591), prezintă prin această vastă lucrare materialul indispensabil folosirii imediate a cunoștințelor căpătate în cadrul mecanicii teoretice cu prilejul aplicării ei la diferite discipline de specialitate din școlile medii tehnice, institute de proiectări ș.a. Cărțile pot fi consultate cu folos și de studenții–ingineri interesați în a avea cît mai multe exemple de statică grafică a grinzilor cu zăbrele și de dinamica mecanismelor și mașinilor. In multe cazuri se folosește geometria sintetică, se evită însă schematizări de probleme la nivelul calculului diferențial și integral ceva mai ridicat, coincizînd astfel întru totul cu intenția autorului.

Se subliniază grija deosebită a editurii, bine cunoscută și pentru prezentări deosebit de bune a numeroaselor traduceri de cărți sovietice de specialitate.

*

Реф. подчёркивает выше некоторые из качеств трехтомного труда по технической механике проф. Р Крауса, известного специалиста по теории машин и механизмов, а также полноценность издания издательства **VEB Technik,** инициатора многочисленных хороших переводов советских авторов на немецкий язык.

D. Mangeron, O. Munteanu

88. COLE E. B., *The Theory of Vibrations for Engineers*. With 130 diagrams, New York. The MacMillan Company, Third revised edition, 1957, XIV+362 pp.

Literatura extrem de bogată, apărută în URSS, în țările de democrație populară și în alte țări, relativă la mecanica tehnică a vibrațiilor, se reflectă și în acest volum consacrat teoriei vibrațiilor pentru ingineri. Volumul, fără a include mecanica neliniară a vibrațiilor, de fundamentală importanță în știința și tehnica modernă, își propune să prezinte o expunere la un nivel intermediar între prezentări elementare, comune cursurilor de fizică, și expuneri

ce se fac la nivelul capitolelor speciale de mecanică teoretică. Referentul, atrăgînd atenţia asupra studiului vibraţiei maşinilor (cap. IX) şi eliminării şi absorbţiei vibraţiilor (cap. X), menţionează că diferenţa între ediţia a doua şi aceasta constă în unele adăugiri în text şi în elaborarea a patru apendice, dintre care cel de al treilea se ocupă de oscilatori cu frecare coulombiană.

*

Valuable researches and contributions to the literature on the subject concerning the Theory of vibrations have been made in recent years. Rev. gives above in Roumanian language some details concerning this beautiful volume that bridges the gap between the elementary treatment of the object and a high degree of mathematical attainment necessary for their application in the non-linear mechanics. *D. Mangeron, Gh. Tudor*

89. HEBER G., WEBER G., *Grundlagen der modernen Quantenphysik.* Teil **I.** *Quantenmechanik.* Mit 24 Abbildungen. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek **1.** B.G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig. 1956, VI + 146 Seiten.

Autorii, adresîndu-se în primul rînd specialiştilor şi apoi şi studenţilor din anii superiori de la facultăţile de matematică şi fizică, îşi propun ca scop să pregătească cititorul pentru înţelegerea fenomenelor deosebit de complexe din fizica cvantică modernă. Aparatul matematic modern, folosit în paralel cu interpretările fizice la zi, îndreptăţesc recomandarea volumului, prezentat deosebit de îngrijit de B. G. Teubner, Leipzig, vastului cerc de cadre de fizicieni în plină dezvoltare din patria noastră.

*

Die Durcharbeitung dieses ausgezeichneten Bändchens, wird den Spezialisten und Studierenden der math. – naturwiss. Fakultäten mit der grundlegenden Disziplin der Gegenwart „moderne Quantenphysik" vertraut machen. *E. Luca*

90. VESCAN TEOFIL T., *Fizica teoretică,* vol. **I,** 477 pag., 94 fig. ; vol. **II,** 446 pag., 55 fig. Tip. Inv., Buc. 1957.

Apariţia unui curs de fizică teoretică în limba romînă, primul care cuprinde toate capitolele de bază ce se studiază în acest domeniu, constituie un eveniment de seamă pentru literatura ştiinţifică din ţara noastră.

După cum menţionează autorul în prefaţă, cursul este destinat să servească drept manual pentru studenţii secţiilor didactice de la facultăţile de matematică-fizică şi studenţilor facultăţilor de chimie. Noi am vrea să subliniem însă că el este în egală măsură folositor şi chiar indispensabil şi pentru studenţii secţiei de fizică, care găsesc în acest manual toate rezultatele principale ale fizicii teoretice. De asemenea, de egală importanţă este manualul şi pentru profesorii de fizică şi tehnicienii care doresc şi trebuie să se ţină în pas cu ritmul dezvoltării fizicii moderne.

Volumul I conţine la început o introducere în care se arată cum a contribuit fizica la evoluţia concepţiei despre lume şi lupta care s-a dus şi se duce între materialism şi idealism în acest domeniu.

Fizica teoretică s-a dezvoltat ca ştiinţă abia în sec. XIX, cînd întîlnim reprezentanţi iluştri ca Laplace, Poisson, Fourier, Ampère, Maxwell, Helmholtz şi Boltzmann. Prin extinderea dată în sec. al XX-lea, prin operele lui M. Planck şi A. Einstein, ea s-a impus ca o ştiinţă unitară, fără de care studiul fizicii este astăzi de neconceput.

Urmărind scopul propus de autor ca cititorul să găsească în acest manual toate elementele necesare înţelegerii problemelor de fizică teoretică, s-a introdus la începutul volumului I şi un capitol de bazele matematice ale fizicii teoretice, întitulat „Introducere matematică" (71 pagini). In acest capitol se studiază în mod succint calculul vectorial, calculul tensorial şi unele probleme de calcul variaţional. Autorul indică totodată şi literatura de cercetat pentru aprofundarea problemelor prezentate.

Mai departe vol. I conţine următoarele părţi de bază : Mecanica teoretică (2 capitole) ; Electricitatea (3 cap.) ; Optica electromagnetică (un capitol) şi Teoria relativităţii restrînse şi

generalizate (3 capitole). Volumul II conţine două părţi de bază şi anume : Elemente de fizică statistică şi teoria cuantelor (5 capitole) şi Elemente de fizică atomică şi mecanică cuantică (9 capitole).

In partea consacrată mecanicii teoretice se tratează toate problemele clasice, începînd cu cinematica punctului şi terminînd cu ecuaţiile dinamicii corpurilor deformabile. Această parte are ca adaus unele consideraţiuni complementare asupra problemelor istorice şi ideologice ale mecanicii şi fizicii clasice. De fapt aceste consideraţiuni constituie o adevărată monografie a dezvoltării mecanicii. In partea de electricitate se studiază la început cîmpul electric, apoi cîmpul magnetic şi ca o îmbinare a lor, cîmpul electromagnetic, cu teoria lui Maxwell. In continuare autorul consacră un capitol deosebit de interesant unor probleme speciale în legătură cu teoria şi aplicaţiile electricităţii. Din acestea amintim : explicaţia electrostatică a legăturii chimice, energia reticulară a cristalelor şi probleme clasice de electrodinamică. Un capitol special este consacrat metodelor moderne de calcul în electrotehnică şi radiotehnică. In încheiere se prezintă probleme şi exerciţii de electricitate teoretică, care constituie o completare a materiei expuse. Capitolul de optică electromagnetică şi teoria radiaţiei conţine propagarea cîmpului electromagnetic, ecuaţiile lui Fresnel, dispersia luminii, optica cristalelor şi problemele clasice de teoria radiaţiei. Partea de teoria relativităţii restrînse şi generalizate este tratată cu competenţă şi în mod clar, autorul avînd mai multe lucrări originale în acest domeniu. De asemenea şi latura ideologică este bine prezentată.

Volumul II începe cu un capitol introductiv conţinînd recapitularea noţiunilor de termodinamică (principiul I şi II) şi elemente de calculul probabilităţilor. Partea de fizică statistică tratează teoria cinetică a gazelor, mecanica statistică clasică a lui Boltzmann şi se termină cu teoria cuantelor.

Partea a doua din acest volum, care priveşte elementele de fizică atomică şi mecanică cuantică, începe cu expunerea teoriei atomului a lui Bohr – Sommerfeld, continuă cu cuantificarea stărilor energetice şi teoria sistemului periodic al elementelor, efectul Stark şi efectul Zeeman normal. Ultima parte a volumului II autorul o consacră mecanicii cuantice. Tratarea începe cu mecanica ondulatorie a lui Schrödinger, unde sînt cuprinse toate problemele clasice. Urmează apoi calculul cu operatorii şi mecanica matricială a lui Heisenberg. După tratarea teoriei relativiste a electronului, volumul se încheie cu cîteva probleme teoretice ale fizicii nucleare şi ale electrodinamicii cuantice.

In ansamblu, cele două volume sînt prezentate într-o elaborare bine gîndită şi după fiecare parte se dă şi o lectură din literatura ştiinţifică existentă. Adesea aceasta reprezintă o schiţă completă istorico-ideologică sau o punere la punct a materialului respectiv.

Acolo unde era cazul s-a ţinut seama şi de cercetările savanţilor romîni. Subliniem utilizarea pe scară mare a literaturii sovietice, atît cea de specialitate cît şi cea ideologică. Cele 150 de figuri din text ajută mult la înţelegerea acestuia.

Considerăm că prof. T. T. Vescan a adus un real serviciu ştiinţei romîneşti prin publicarea acestui manual, care reprezintă în particular pentru studenţi un mijloc puternic pentru ridicarea lor ştiinţifică.

*

Настоящий курс, в двух книгах **Теоретическая Физика**, содержит изложение шести основных разделов теоретической физики : механики, электричества, электромагнитной оптики, теории относительности, начала статистической физики и квантовой механики. Книги построены таким образом, чтобы научить читателя методам теоретической физики. Изложение рассчитано на студентов физико-математических и химических факультетов. Этот курс может быть полезен также преподавателям физики и техникам, соприкасающимися в работе с теоретической физикой.

N. Calinicenco, C. Ruscior

91. CIŞMAN AL., *Fizica generală*, vol. **II**, Ed. Tehnică, Buc., 1957, 8°, 573 pp. şi 370 fig.

După cum spuneam şi în recenzia făcută asupra vol. I din Fizica generală a prof. A. Cişman, apariţia şi a vol. II, aşteptat cu nerăbdare de cititori, vine de asemenea să completeze golul serios ce există în editarea de cărţi de fizică în limba romînă.

Acest nou volum, satisface de asemenea întrutotul scopurilor urmărite de un bun curs de fizică şi anume : prin explicitarea clară a fiecărei noţiuni noi introduse, prin aplicaţiile

practice ce sînt indicate în cazul diverselor legi sau formule, cît şi prin prezentarea judicioasă a întregului material se permite atît formarea unei concepţii materialist dialectice, cît şi crearea unei corecte gîndiri fizice.

Vol. II din Fizica generală a prof. A. Cişman, scos ca şi primul pentru nevoile studenţilor din învăţămîntul tehnic superior, conţine 7 părţi cu 26 capitole, şi anume :

Partea 4 *Unde elastice şi acustice,* cap. XX şi XXI, Unde elastice şi Sunetul ; Partea 5 *Electrostatica,* cap. XXII – XXIX, Fenomene fundamentale ; Cîmpul electric ; Potenţialul electric ; Capacitate electrostatică ; Electrometre ; Maşini electrostatice şi Electricitate atmosferică ; Partea 6 *Electrodinamica,* cap. XXX – XXXIV, Curentul electric ; Circuite electrice ; Electroliza ; Pile electrice şi Ionizarea gazelor ; Partea 7 *Cîmpul magnetic,* cap. XXXV şi XXXVI, Magnetostatica şi Cîmpul magnetic al pămîntului ; Partea 8 *Electromagnetismul,* cap. XXXVII – XL, Cîmpul magnetic al curenţilor ; Proprietăţile magnetice ale substanţelor ; Inducţia electromagnetică ; Aparate electrice şi de măsurat ; Partea 9 *Curentul alternativ,* cap. XLI şi XLII, Curentul sinusoidal şi Maşini electrice ; Partea 10 *Unde electromagnetice,* cap. XLIII – XLV, Producerea oscilaţiilor ; Unde electromagnetice şi Noţiuni de radiocomunicaţii.

Acest mod de prezentare a materialului şi anume : Cîmpul magnetic (partea 7), Electromagnetismul (partea 8), Curentul alternativ (partea 9) şi Unde electromagnetice (partea 10) ca părţi aparte, credem că în vederea realizării unui tot unitar, ar trebui modificat în sensul ca toate aceste părţi să fie incluse drept capitole dintr-o parte generală intitulată Electromagnetism.

Îmbinînd în mod judicios partea descriptiv–experimentală cu cea teoretică, autorul, în volumul indicat, reuşeşte ceea ce este esenţial şi anume de a face ca cititorul să înţeleagă însăşi esenţa fenomenelor fizice. Cartea se citeşte în general uşor, expunerea fiind cît se poate de clară şi fără tendinţe abstractizante.

Deşi întreaga carte excelează datorită competenţei autorului, merită totuşi a fi citate pentru precizia şi claritatea lor capitole ca : Unde elastice, Sunetul, Cîmpul electric, Potenţial electric, Capacitate electrostatică, Electroliza, Pile electrice, Ionizarea gazelor, Proprietăţile magnetice ale substanţelor şi Undele electromagnetice, în unele din ele autorul avînd şi o bogată contribuţie personală.

In scopul de a permite înţelegerea fără dificultăţi a unor noţiuni ca : potenţialul magnetic, cîmpul creat de un magnet permanent etc., autorul introduce noţiunea de sarcină sau măsură magnetică, despre care spune textual : „In fond existenţa unor sarcini magnetice nu este decît o ipoteză de lucru admisă convenţional". Deşi acest mod de prezentare este de discutat, totuşi, ţinînd seama de scopul urmărit de autor, cît şi de faptul că acest curs se adresează studenţilor începători, în sensul de a le uşura urmărirea raţionamentelor, noţiunea de masă magnetică, admisă doar ca o ipoteză de lucru, poate fi menţinută.

Pentru o înţelegere mai uşoară a textului şi acest volum cuprinde un impresionant număr de figuri (370) în mare măsură originale, bine executate şi clar întocmite.

Contribuţia fizicienilor romîni şi sovietici este larg popularizată, iar acele scurte priviri istorice, ce apar la sfîrşitul părţilor IV, V şi X sînt bine venite, ele stimulînd interesul cititorului.

Pentru ca acest curs de Fizică generală să reprezinte un tot, se impune apariţia cît mai grabnică şi a vol. III, care este aşteptat cu mult interes. *N. Calinicenco, E. Luca*

92. EICHENBERGER. W., *Flugwetterkunde.* Handbuch für die Fliegerei. 350 Seiten, 167 Fotos und Zeichnungen, Schweizer Druk-und Verlagshaus AG, Zürich.

Se dau mai jos unele detalii relative la acest volum, elaborat de Dr. Eichenberger, cunoscutul specialist în domeniul organizării ştiinţifice şi tehnice internaţionale a zborului fără motor.

*

Das Buch hat eine bekannte Persönlichkeit auf dem Gebiet der Flugmeteorologie zum Verfasser. Dieses Handbuch will in erster Linie praktische Zwecke verfolgen und ein wertvolles Handbuch für Segel- und Sportflieger sein. Ohne Anwendung von allzu abstrakten

Begriffen der Physik oder komplizierten mathematischen Formeln, wird der Leser mühelos und trotzdem weitgehend und sachlich in die modernsten Gebiete der Flugmeteorologie eingeführt. Die für die Fliegerei gefährlichen Erscheinungen und die zu ergreifenden Schutzmassnahmen werden eingehend beschrieben. Ein Inhalts-und ein Sachverzeihnis helfen den gewünschten Stoff leicht auffinden. *A. Matei*

93. STEVENS G. W. W., *Microphotography (Photography at Extreme Resolution).* Chapman & Hall, London, 1957, 326 pp.

Un foarte documentat volum asupra microfotografiei, adică a tehnicii fotografierii pe microformate şi a obţinerii unor măriri însemnate de pe ele.

*

In this volume the author has collected the most important parts of the available literature (scattered amongst original papers and never collected together), concerning the production and applications of high-resolution photographic images made with great degrees of reduction namely Microphotographs.

This is supplimented by unpublished till now his own experiments and observations in this field.

The richly illustrated and nicely printed book should be of real value to amateurs as well as to professional photographers, and also to several scientific investigators. *D. Paghida*

94. RASE H. F., BARROW M. H., *Project Engineering of Process Plants.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957, 692 pp.

Cartea se ocupă de problemele tehnice şi organizatorice legate de activitatea de proiectare a instalaţiilor chimice. Ea se adresează în special inginerilor chimişti, dar poate servi şi celorlalte ramuri de inginerie care iau parte la elaborarea unui proiect.

Tratînd un material prea vast, cartea nu dă decît indicaţii generale. Ea constituie totuşi un ghid excelent inginerului şef de proiect spre a nu omite una din lucrările care trebuie tratate la proiectare.

*

Das Buch behandelt alle technischen und organisatorischen Probleme, die der Tätigkeit der Planung von Anlagen der chemischen Industrie gehören. Es soll speziell dem Verfahrensingenieur dienen. Das Buch gibt einen Richtschnur für allen Arbeiten die einem Projekt gehören. *T. Săveanu*

95. ABDERHALDEN R., *Vitamine, Hormone, Fermente.* Vierte, vollständig neu bearbeitete und ergänzte Auflage. Benno Schwabe & Co. Verlag. Basel, 1953, 307 S.

Ref. dă mai jos citeva detalii asupra acestui volum, apărut în a patra ediţie, într-un interval de numai zece ani, complet revăzută, prelucrată şi bineînţeles mult adăugită, reflectînd astfel numeroase contribuţii ce se adaugă zilnic în acest important domeniu.

*

Nichts zeigt die gewaltigen Fortschritte auf dem Gebiet der Vitamine, Hormone und Fermente besser als die Tatsache, dass diese neue Auflage fast vollständig neu geschrieben werden musste.

Inhalt : *Die Vitamine* (A,D,E,K,B_1,B_2,B_c, Nikotylamid, Pellagraschutzstoff, Pantothensäure, H, Folsäure, Folinsäure, B_{12}, Inosit, C) ; Der Vitaminbedarf der Menschen ; Die Therapie mit Vitaminen ; Die Antivitamine. *Die Hormone, Die Fermente,* Anhang. Literatur : Mehrere Fach-und Handbücher, 30 Fachzeitschriften. Sachregister. Tadelloser Druck.

96. WALL F. T., *Chemical Thermodynamics.* W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1958.

Cartea este concepută ca un manual de studiu care să asigure înţelegerea problemelor de bază ale termodinamicii chimice. Tratarea este clară şi logică, folosind ambele metode, ter-

modinamică şi statistică. Prezintă o reală valoare pentru cei interesaţi în chimia fizică, inginerie chimică sau chimie organică.

*

This book is a course of study of valuable interest for physical chemists, chemical engineers, organic chemists, and others. The subject is dealt with in a balanced manner from the standpoints both of thermodynamics and statistical mechanics.

The laws of thermodynamics are exposed first, and the concepts developed therefrom are applied to ideal gaseous systems. A basic treatment of statistical mechanics follows wich provides means of calculating thermodynamics quantities, equilibrium constants for chemical reactions, and heat capacities. The nonideal systems including aqueous solutions of electrolytes are treated as a rule from the phenomenological point of view.

Emphasis is laid on the logical development of the subject. The exercises and problems interspersed, as well as many useful discussions provide a better understanding of various difficult topics, and increase the pedagogical value of the book. *M. Şchiopu*

97. BROWN R. D., O'DONNEL T. A., *Manual of Elementary Practical Chemistry*. Melbourne University Press, 1955, 185 pp.

Acest manual prezintă un deosebit interes prin felul în care au înţeles autorii de a lega practica de capitolele teoretice expuse la cursul de chimie predat în anul I studenţilor chimişti. Lucrările de laborator sînt astfel alese ca să obişnuiască studenţii cu practica de laborator bazîndu-se pe studierea capitolelor mai importante din cursul de chimie generală ce vor fi dezvoltate în următorii ani de studiu. Tehnica de laborator de bază este prezentată studenţilor filmată. Se fac şi cîteva lucrări clasice de chimie-fizică. La studierea elementelor se insistă asupra reacţiilor cationilor, anionii fiind trataţi în mică măsură. Studiul lor se prezintă sub formă de tabele generale care prezintă avantajul din punct de vedere practic de a-şi însuşi tehnica şi sistematica analizei, dar mai puţin interpretarea ştiinţifică a fenomenelor şi a reacţiilor chimice. Manualul cuprinde şi unele îndrumări generale de analiză organică. Se prezintă original o clasificare pe tabele de analiză după care studenţii pot urmări mersul unei analize elementare organice.

*

In this manual, the methods of carryins out laboratory experiments are preseted in a most interesting way, so as to open to the students new horizons in view of the special courses they will attend in subsequent years of study. The Rev. gives also in the Roumanian language some details concerning this valuable and very well printed book. *Aurora Bordea*

98. РОМАНКОВ П. Г., **Руководство к практическим занятиям в лаборатории процессов и аппаратов химической технологии.** Госхимиздат, Ленинград, 1957, 204 стр.

In literatura mondială sînt puţine manuale pentru lucrările de laborator la *Procese şi aparate în tehnologia chimică*. Cartea este rezultatul experienţei unui întreg colectiv. Ea poate servi atît pentru organizarea unui laborator, cît şi pentru construcţia instalaţiilor şi conducerea lucrărilor. Cartea conţine 6 capitole şi anume : I – Principii metodice ; II – Procese hidrodinamice ; III – Procese termice şi de difuzie ; IV – Tehnica temperaturilor scăzute ; V – Prelucrarea mecanică a materialelor solide ; VI – Date importante pentru laborator. Sînt descrise 22 lucrări de laborator. Fiecare instalaţie este de tip semiindustrial. Organizarea materiei şi nivelul tratării pun în evidenţă calităţile mari ale acestei lucrări.

*

In der technischen Literatur es gibt wenige modernen Bücher für die Laboratoriumsarbeiten der Verfahrenstechnik. Das Buch kann für das Organisieren eines Laboratoriums, für die Konstruktion der Anlagen und für die Leitung der Laboratoriumsarbeiten dienen. Es enthält 6 Abschnitten und zwar : I – Metodische Prinzipien ; II – Hydrodynamische Verfahren ; III – Termische und Diffusions-Verfahren ; IV – Kältetechnik ; V – Mechanische Verarbeitung der festen Materialien ; VI – Wichtige Daten für das Laboratorium. Im ganzen sind 22 charakteristischen Laboratoriumsarbeiten beschrieben. Die benutzte Apparatur ist halbindustriell. Das Organisieren der Materie und das Niveau des Behandelns sind eine werte Prüfung der Qualität dieses Buches. *T. Săveanu*

99. STEPP W., KUHNAU J., SCHROEDER H., *Die Vitamine und ihre klinische Anwendung*. 7., umgearbeitete und erweiterte Auflage. **I,** XII, 535 Seiten ; 1952, **II,** VIII, 537–975 S. 1957, Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart.

Acest tratat de vitaminologie este cea de a şaptea ediţie a cunoscutei opere, elaborată de unii dintre cei mai proeminenţi specialişti în materie. Expunerea relativă la fiecare vitamină se face după un plan bine gîndit, începînd cu chimia şi determinarea vitaminelor, trecînd la studiul regiunilor corpului omenesc în care se găseşte, apoi la fiziologie şi comportarea vitaminei considerate în organismul uman, pentru a se încheia cu problema fundamentală a relaţiilor cu celelalte vitamine precum şi cu problemele relative la hipo - şi avitaminoză, preparate pe bază de vitamine şi o bogată bibliografie la zi.

Tratatul conţine date noi relative la toate vitaminele, precum şi la substanţele probabil vitamine, ca, de pildă, vit. B_3, B_5, factor S, ergonacetilat, vit. T, chondroitină şi altele.

Tratatul, scris cu o claritate remarcabilă, va aduce satisfacţie în primul rînd specialistului. Chimistul va afla progresele în studiul compoziţiei chimice a structurii vitaminelor, sintezei şi metodelor de detectare prin analize de laborator. Farmacologii şi biologii vor găsi citate numeroase experienţe cu vitaminele şi sugestii pentru cercetări ulterioare.

*

This is the 7th edition of a text-book of vitaminology written by the most remarkable German authors in this subject. The first volume contains the description of vit. A and the most part of the group of vit. B. The second volume is consacred to the description of the other vitamins with a lot of informations concerning the special literature up to now for the whole subject. This extremely useful and fundamental text-book contains new data concerning all the vitamins and also the substances probably vitamins : vit. B_3, B_5, S Factor, ergonacetil, vit. T, chondroitin a.s. on. It is written with a remarkable clearness and the print is very good. The Rev. gives even some details concerning this two-volumes work – large contribution to all who will know the progress in the study of the chemical composition, of the vitamins' structure, of their synthesis, of the method of their detection by laboratory analysis and so on.

100. * * * *Encyclopédie Technologique de l'industrie du caoutchouc*. Publié sous la direction de G. Génin et B. Moisson. Tome **III** et tome **IV.** Paris, Dunod, 1956.

Lucrarea, conform planului general, va apare în 4 volume.

Deocamdată au apărut volumele III şi IV, în care se tratează tehnologia fabricării diferitelor articole de cauciuc.

In volumul IV se insistă asupra tehnologiei fabricării anvelopelor şi camerelor de aer, precum şi asupra utilizărilor directe în diverse scopuri tehnice, atît a latexului de cauciuc natural cît şi a latexurilor sintetice.

Aproape fiecare capitol este însoţit de referinţe bibliografice, deosebit de preţioase pentru specialistul în cauciuc, doritor să studieze mai amplu un anumit aspect al problemelor tratate în lucrare.

Apreciind în mod deosebit conţinutul volumelor III şi IV, nivelul ştiinţific al lucrării şi stilul atrăgător, aşteptăm nerăbdători apariţia şi a primelor două volume.

*

De l'ouvrage *Encyclopédie technologique de l'industrie du caoutchouc* publié sous la direction de G. Génin et B. Moisson, dont le plan général prévoit 4 volumes, il a paru le volume III et le volume IV.

Chaque volume comprend 2 titres, qui sont divisés, à leur tour, en chapitres.

Dans les 9 chapitres, correspondant au premier titre du volume III, on a traité la technologie de la fabrication des différents caoutchoucs techniques (courroies transporteuses, tuyaux de caoutchoucs, etc.)

Le titre II, volume III, comprend quinze chapitres qui se réfèrent à la technologie de la fabrication des matières en caoutchouc pour diverses applications.

Étant donné l'importance toute particulière des envoloppes et des chambres à air, les auteurs consacrent le premier titre du volume IV à leur technologie.

Dans le second titre du volume IV, chapitres I–XX, on a relaté les emplois directs du latex pour la fabrication de différents articles, pour le caoutchouc spongieux et microporeux,

pour le gommage, les colles et le vernis, l'isolement des fils et câbles électriques et enfin les analyses et les essais.

Les deux volumes comprennent un grand nombre de figures, diagrammes, schémas, choisis avec beaucoup de compétence, qui facilitent la compréhension complète du matériel dont il est question dans l'ouvrage.

Presque chaque chapitre se termine par de riches références bibliographiques, particulièrement utiles pour les spécialistes du caoutchouc, qui veulent de plus amples informations sur les problèmes qui les intéressent.

Dans cet ouvrage, les problèmes de la technologie du caoutchouc atteignent un haut niveau scientifique, ils sont riches en informations, traités dans un style concis et élégant, très attrayant pour le lecteur.

Tout en appréciant l'importance et la valeur des deux volumes de l'Encyclopédie, déjà parus, nous attendons avec impatience la publication des deux premiers volumes, dont le contenu, comme le plan général le montre, intéresse beaucoup les ingénieurs et les spécialistes en caoutchouc. *E. Cocea*

101. WAHL HENRI, *Précis des matières colorantes synthéthiques.* Tome **II.** *Matières colorantes.* Presses universitaires de France, Paris, 1957, 398 pp.

Lucrarea profesorului Henry Wahl cuprinde o privire generală asupra coloranților utilizați în vopsitorie. După o scurtă expunere a noțiunilor teoretice care explică relația între constituție și culoare, autorul relevă evoluția și importanța industriei coloranților pe plan mondial.

Cea mai mare parte a lucrării este consacrată studiului tuturor claselor de coloranți, indicîndu-se principalele metode de sinteză, aplicate la cîteva tipuri mai reprezentative și posibilitățile de aplicare în practica vopsirii.

Cartea este utilă specialiștilor din industria coloranților, specialiștilor interesați de studiul și practica vopsirii textilelor, precum și chimiștilor organicieni dornici să cunoască această ramură importantă de sinteze organice cu largi posibilități de aplicații practice.

*

Ce *Précis des matières colorantes synthétiques* comprennd trois tomes : Tome I. *Matières premières et produits intermédiaires ;* Tome II. *Matières colorantes* et Tome III. *Teinture et impression.* Ce II-ème volume est consacré *„aux matières colorantes utilisées pratiquement dans les arts tinctoriaux".*

On donne ci -dessus quelques détails concernant cet important ouvrage qui embrasse dans ses XXII chapitres un ensemble de notions théoriques et pratiques pour tous ceux qui étudient le vaste domaine des matières colorantes et surtout pour ceux qui s'occupent des applications tinctoriales de ces colorants. *Cr. Mărculescu*

102. KLEBER M., *Einführung in die Kristallographie.* Berlin, 1956, VEB Verlag Technik, Berlin, 312 S.

Ref. reproduce mai jos, cu destule detalii, caracteristicile principale ale acestui curs de mineralogie ce constituie o bună introducere în această disciplină.

*

Ce traité comprend les trois parties suivantes : 1. Structure et morphologie des cristaux ; 2. Cristallographie chimique ; 3. Cristallographie physique.

Dans la première partie on étudie les hypothèses concernant la structure interne des cristaux, les notions de goniométrie, la projection des cristaux, la notation au moyen d'indices, la symétrie cristalline avec ses 32 catégories de symétrie réparties en 7 systèmes cristallins portant les dénominations d'après Groth, avec le symbole d'après Schoenflies et avec le symbole international. On donne des exemples de minéraux qui appartiennent à chaque classe de symétrie.

On indique également le symbole d'après Schoenflies, d'après Mauguin et le symbole international de 230 groupes spatiaux.

On y trouve aussi, en résumé, les paragraphes concernant les macles, la croissance et la dissolution des cristaux et un autre, sur les rapports entre l'habitus et la structure interne du cristal.

Au chapitre dédié à la cristallochimie, on décrit les types de liaisons ioniques, atomiques, métalliques, van der Waals, liaisons mixtes et on indique les rayons ioniques et atomiques des réseaux cristallins par rapport au numéro d'ordre des éléments.

On décrit ensuite différents types de réseaux métalliques, atomiques, ioniques, complexes, métalloïdes et moléculaires avec de nombreux exemples de minéraux qui appartiennent à ces réseaux cristallins.

Au chapitre consacré à la cristallographie physique on fait une description détaillée des propriétés optiques des cristaux aussi bien à la lumière parallèle qu'à la lumière convergente et on le termine par l'étude des cristaux au moyen des rayons X selon les méthodes de Bragg, Laue, Debye – Scherrer et Jong–Bouman.

En conclusion, par *l'Introduction à la cristallographie,* prof. dr. W. Kleber répond parfaitement au but qu'il s'est proposé, c'est-à-dire aux exigences didactiques de l'enseignement supérieur. Les phénomènes bien que traités scientifiquement sont clairement exposés et peuvent être facilement comprises par les étudiants.

Comme contribution nouvelle, nous signalons l'introduction des symboles internationaux au chapitre de la symétrie.

Le Réf. propose que ce livre soit traduit en roumain pouvant être d'une réelle utilité aux étudiants qui fréquentent le cours de minéralogie et surtout à ceux des sections dont le programme d'enseignement ne prévoit pas cette discipline. *Oreste Nichita*

103. PETTIJOHN F. J., *Sedimentary rocks.* N. Y., II-e éd., 1957. 718 pp., 170 fig., 40 planches.

Ref. dă mai jos unele detalii relative la acest volum consacrat rocilor sedimentare.

*

Le travail de Pettijohn sur les roches sédimentaires, représente une oeuvre fondamentale dans ce domaine, utile aux étudiants, aussi bien qu'aux spécialistes. Le livre s'occupe premièrement des roches sédimentaires comme produits du processus de sédimentation, mais autant qu'il est nécessaire à la compréhension des traits caractéristiques de ces roches, on y décrit aussi les processus de sédimentation.

Les premiers chapitres s'occupent de l'origine, du volume des roches sédimentaires dans l'écorce terrestre, de la texture, de la structure et de la composition chimique et minéralogique de ces roches.

On y traite ensuite de la classification et de la nomenclature et en cinq chapitres, qui représentent la partie principale du travail, on décrit les roches sédimentaires, à savoir : a) graviers, conglomérats et brèches, b) grès, c) les roches argileuses, d) calcaires et dolomites, e) sédiments nonclastiques.

Suivent quelques chapitres ou l'auteur décrit le mode de formation des roches sédimentaires : la provenence des matériaux qui entrent dans la composition des roches sédimentaires et leur transport, les milieux de sédimentation, les rapports entre sédimentation et tectonique, la cimentation et la diagenèse.

Le dernier chapitre traite de l'histoire géologique des sédiments.

Le livre contient de nombreux tableaux, diagrammes, histogrammes et des photos très réussies, spécialement des microphotos représentant des sections minces dans toutes les catégories de roches sédimentaires.

Le travail comprend une bibliographie riche et représentative de plus de 700 titres. Son style est concis et très clair. *P. Jeanrenaud*

104. *** Сессия Академии Наук СССР по научным проблемам автоматизации производства. 15—20 октября 1956 г. Научные вопросы построения технических средств автоматики, Изд. АН СССР, М., 1957, 187 стр.

Fundamentala problemă de automatizare a producţiei şi-a căpătat recent o jalonare de seamă printr-o gamă de rezultate înregistrate de pe urma susţinerii referatelor purtării discuţiilor în cadrul lucrărilor sesiunii Academiei de Ştiinţe a URSS (15–20 octombrie 1956) consacrată teoriei automatizării.

Lucrările sesiunii menţionate au apărut în editura AH CCCP în următoarele şapte tomuri : Şedinţa plenară ; Probleme fundamentale de reglare automată ; Bazele teoretice de elaborare a mijloacelor tehnice de automatizare ; Probleme ştiinţifice de telemecanizare a proceselor de producţie ; Probleme tehnico-ştiinţifice de aducere automată a energiei electrice ; Teoria şi calculul de proiectare a mecanismelor maşinilor şi liniilor automate şi Automatizarea complexă a proceselor de producţie.

Ref. în imposibilitate de a reproduce aici indicații substanțiale asupra conținutului acestui volum – al treilea din serie – atrage atenția asupra ansamblului celor zece referate conținute în volum, mărginindu-se însă la a menționa aici referatele prof. dr. B. S. Sotskov, redactor responsabil al acestui volum, și a prof. dr. I. I. Gutenmaher, consacrate respectiv problemei direcțiilor principale de dezvoltare a teoriei și principiilor de construcție a elementelor de automatică și telemecanică și perspectivelor ce rezultă din aplicarea blocurilor magnetice și capacitive la sisteme automate.

Ref. subliniază de asemenea hotărîrea de a se organiza un Consiliu științific de automatizare pe lîngă Prezidiul Academiei de Științe a U.R.S.S. Totodată s-a jalonat propagarea consfătuirilor pe teme speciale din același domeniu, ca, de pildă, acelea consacrate problemei semiconductorilor, problemelor de reglare automată și altele.

*

The reviewed collection of papers presentend to a Session directed by the Academy of Science of the Soviet Union and devoted to the Theory of Automation gives the complet account and use of numerous methods and discusses the most actual problems concerning the automation of the industrial processes. *Catedra de Mecanică și Mecanisme*

105. MOELLER–WOLF, *Leitfaden der Elektrotechnik*, 9-te Aufl. 1958. B. G. Teubner, Stuttgart.

Acest prim volum al *Principiilor de electrotehnică* tratează noțiunile de bază referitoare la circuitele simple și cele complexe de curent continuu și de curent alternativ, energia și puterea electrică, electroliza, elementele galvanice, cîmpul electromagnetic, inducția electromagnetică, rezonanța, teoria bobinei cu miez de fier și a transformatorului, curenții nesinusoidali. Tratarea circuitelor de curent alternativ folosește mărimile complexe. Textul este însoțit de numeroase figuri în culori, precum și de aplicații cu caracter practic. Cunoștințele de matematică și fizică necesare cititorului sînt cele de nivel mediu; fenomenele sînt explicate din aproape în aproape, păstrînd rigurozitatea științifică. Pe lîngă cei ce doresc să învețe electrotehnică, cartea interesează și pe cei ce vor să posede o carte ce reflectă și calități didactice deosebite.

*

Ce premier volume des *Principes d'Électrotechnique* contient les notions fondamentales concernant les circuits simples et complexes de courant continu et alternatif, l'énergie et la puissance électrique, l'électrolyse, les éléments galvaniques, le champ magnétique, l'induction électromagnétique, le champ électrique, la théorie de la bobine à noyau de fer, le transformateur, les courants nonsinusoïdaux. Dans la théorie des courants alternatifs on explique et on utilise le calcul à grandeurs complexes. Des nombreuses figures multicolores et des applications pratiques accompagnent le texte. Les connaissances nécessaires pour aborder le livre sont ceux de niveau moyen. Les explications sont données de proche en proche, sans renoncer à la rigueur scientifique.

Le livre intéresse non seulement ceux qui désirent apprendre l'électrotechnique, mais aussi ceux qui désirent posséder un livre – preuve irréfutable des remarquables qualités didactiques des auteurs. *Gh. Șerban*

106. *** *Manualul inginerului electrician.* Vol. **V**, 1957, 605 pp.; vol. **VI**, 1958, 631 pp.; vol. **VII**, 1958, 831 pp.; Editura Tehnică, București.

Materialul documentar din fundamentala serie de cărți de căpătîi destinată inginerilor electricieni, este subdivizat în aceste trei volume după cum urmează. Volumul V este consacrat în întregime problemelor de utilizare a energiei electrice. Începînd cu datele relative la iluminatul electric, cuptoarele electrice, sudarea electrică și încălzirea cu radiații infraroșii și terminînd cu acționările electrice, materialul respectiv este înfățișat atît din punct de vedere teoretic cît și acel al aplicațiilor, conținînd și unele elemente de calcul în vederea proiectării, construcției sau exploatării.

Volumul VI tratează problema folosirii electricității în transporturi, incluzînd tracțiunea electrică feroviară, urbană, precum și studiul sistemelor de transmisie electrică a puterii mecanice și a instalațiilor electrice de bord.

Volumul VII, subdivizat în două părți bine distincte, se referă la studiul materialelor electrotehnice și la acel al instalațiilor electrice la consumator, începînd cu problema de distribuție a energiei și terminînd cu acea a îmbunătățirii factorului de putere.

Toate volumele sînt prevăzute cu un bogat material exteriorizat în numeroase tabele, grafice, diagrame, nomograme ş.a., de o deosebită utilitate pentru inginerii electrotehnicieni, volumul VII fiind totodată şi un nedespărţit prieten al proiectanţilor de instalaţii electrice la consumator.

*

Реф. приводит выше, на румынском языке, некоторые детали касающиеся хорошо изложенных и технически выполненых издательством **Editura Tehnică** 5-го, 6-го и 7-го томов **Руководстева для инженеров электротехников**, излагающих соответственно задачи об использовании электрической энергии, электрической тяге; электротехнических материалах и электрических установках потребителей. *L. Sebastian*

107. MAGALDI MIGUEL, *Noções de Electrotecnica*. Ao Livro Técnico Ltda., Rio de Janeiro, 392 pp.

Cartea cuprinde 2 părţi principale : o parte generală şi una aplicată. In partea generală, cea mai extinsă, chestiunile teoretice mai dificile sînt urmate de aplicaţii numerice. Formulele sînt, în unele cazuri, afectate de coeficienţi, pentru ca mărimea ce se calculează să rezulte direct în unităţi convenabile. Lucrarea, în comparaţie cu cele de acelaşi fel, cuprinde unele lucrări noi: structura atomului de fier, condensatori cu bioxid de titan.

Partea aplicată tratează elemente din domeniul transformatoarelor şi maşinilor electrice şi mult mai restrîns instrumente de măsură şi distribuţia energiei electrice.

Lucrarea este utilă şcolilor de nivel mediu cu specialitate electrotehnică sau şcolilor superioare neelectrotehnice.

*

Le livre contient des notions générales d'électrotechnique et quelques applications : transformateurs, machines électriques, appareils de mesure et distribution de l'énérgie électrique. *N. Babeț*

108. MOELLER-WERR, *Leitfaden der Elektrotechnik*, Bd. **II.** Teil 2 : Wechselstrommaschinen, 4. Aufl., Stuttgart, B. G. Teubner V. G., 1957, 220 S.

Această lucrare este consacrată descrierii, funcţionării, calculului şi construcţiei transformatoarelor şi maşinilor electrice de curent alternativ. Textul este însoţit de exemple de calcul. La conţinutul ediţiei precedente s-au adăugat numeroase paragrafe noi.

Se dau mai jos unele detalii în această privinţă.

*

Cet ouvrage est consacré à la description, à la construction, au fonctionnement et au calcul des transformateurs et des machines asynchrones et synchrones ; on présente aussi les moteurs monophasés et triphasés à collecteur. Le texte est illustré par des exemples de calcul. Dans cette édition on a introduit des paragraphes nouveaux, à savoir : l'échauffement et le refroidissement, le rélé électromagnétique à spire amortissatrice en court-circuit, la déduction du diagramme des machines asynchrones, le calcul du moteur en double cage d'écureuil, et du moteur aux encoches profondes, le moteur asynchrone monophasé à spire en court-circuit, le fonctionnement des générateurs synchrones en charge asymétrique. Nous considérons spécialement utiles les règles sur l'établissement des sens conventionnels positifs du courant, de la f.é.m. et de la tension dans les circuits à courants alternatifs et la corrélation avec les diagrammes vectoriels représentant ces grandeurs. C'est un livre de haute taille et en même temps facile à lire. Pourvu d'un nombre restreint de démonstrations, il contient un matériel intuitif d'une rare valeur. Les schémas et les diagrammes particulièrement suggestifs exécutés soigneusement en couleurs contribuent aussi à l'aspect moderne de cet admirable ouvrage. Le livre est écrit pour les étudiants mais il peut intéresser aussi les ingénieurs. *Gh. Şerban*

109. MOHR OTTO, *Grundlagen der allgemeinen Elektrotechnik*, Sammlung Göschen, Band **196, 197, 198.** Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956.

Cele trei volume au următoarele titluri : I. Cele trei forme ale cîmpului. II. Fenomenele fizice şi electrice de bază. III. Fenomenele de cuplare, forme de rezistenţe, tehnica măsurării

In cele trei volume sînt redate pe scurt, clar şi pe înţelesul tuturora cele mai importante probleme teoretice şi practice ale electrotehnicii generale.

Cărţile conţin multe figuri în text şi tabelele necesare.

*

Die Bände tragen folgende Titel : I. Die drei Feldformen. ; II. Die wichtigsten elektrischen und physikalischen Grunderscheinungen ; III. Schaltvorgänge, Widerstandsformen, Messtechnik.

In den drei Bänden werden kurz, klar und allgemeinverständlich die wichtigste theoretische und praktische Fragen der allgemeinen Elektrotehnik dargestellt. Es werden das elektrostatische und elektromagnetische Feld, das Induktionsgesetz, die elektrischen Grössen in der Weckselstromtechnik, wichtige Schaltungen der Elektrotechnik, die Elektrizitätsleitung in Festkörpern, Flüssigkeiten, Hochvakuum und in Gasen, Messgeräte u.s.w. behandelt.

Die Bücher haben viele Textbilder und die nötigen Tafeln. *Iosif Bergman*

110. JEZIERSKI E., GOGOLEWSKI Z., KOPCZINSKI Z., SZMIT J., *Transformatory – Budowa i projektowanie.* Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa, 1956.

Această carte, împreună cu volumul *Transformatoarele – Expunere teoretică,* apărut în 1949, constituie părţile componente ale unui curs modern şi bine documentat.

Primele două capitole se ocupă cu construcţia miezului şi a înfăşurărilor. Se face apoi un amplu studiu teoretic asupra supratensiunilor şi a comportării la supratensiuni a diferitelor materiale dielectrice folosite la izolarea înfăşurărilor ; sînt tratate şi încercările izolaţiei cu unde de şoc. Se dau caracteristicile materialelor electroizolante, precum şi indicaţii asupra modului în care se dispune izolamentul, acordîndu-se o atenţie specială mijloacelor prin care se obţine o comportare bună a înfăşurării la supratensiuni.

Sînt prezentate apoi diferitele construcţii de borne, printre care menţionăm bornele cu suprafaţa parţial metalizată şi bornele tip condensator. Se tratează apoi dispozitivele de consolidare a jugurilor şi de strîngere a înfăşurărilor, ţinînd seamă de eforturile electrodinamice. In partea referitoare la cuve şi conservatoare de ulei, sînt date şi construcţiile în care uleiul este protejat contra acţiunii umidităţii şi aerului atmosferic, printr-un strat de azot. Descrierea accesoriilor este urmată de indicaţii referitoare la montajul şi uscarea transformatoarelor. Incălzirea şi calculul răcirii transformatoarelor sînt tratate atît pentru regimul permanent, cît şi pentru regim tranzitoriu. Capitolul de proiectare este ilustrat prin exemple de calcul. Este binevenită tratarea în acest volum a încercărilor de recepţie şi a încercărilor profilactice, precum şi a defectelor ce apar în exploatarea transformatoarelor.

Cartea este de un real folos inginerilor şi tehnicienilor proiectanţi de transformatoare, precum şi pentru studenţii care se pregătesc în această specialitate.

*

Le présent volume, à côté du livre *Transformatory – Podstawy teoreticzne* par E. Jezierski, paru en 1949, sont les parties constitutives d'un traité moderne et bien documenté, correspondant au développement actuel de l'industrie électrotechnique polonaise. Le Réf. donne ci-dessus quelques détails concernant ce bel achèvement d'une oeuvre de qualité. *Gh. Şerban*

111. VAŞCENKO K. I., SOFRONI L., *Fonta cu grafit nodular.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1957, 496 pp., 329 fig.

Lucrarea, apărută în limba romînă, constituie rezultatul colaborării dintre Prof. K. I. Vaşcenko, doctor în ştiinţe tehnice – Kiev – şi Ing. L. Sofroni, candidat în ştiinţe tehnice – Bucureşti.

In această lucrare se tratează, pe baza cercetărilor personale şi a datelor din literatură, obţinerea, proprietăţile şi domeniul de aplicare a pieselor turnate din fontă cu grafit nodular, care reprezintă un material nou, în construcţia de maşini. O atenţie deosebită s-a dat tehnologiei de obţinere a acestei fonte, cum şi bazelor teoretice ale grafitizării şi modificării.

In lucrare sînt cuprinse şi recomandări practice pentru alegerea celei mai raţionale tehnologii de formare a pieselor turnate din această fontă, în funcţie de gradul de dezvoltare al producţiei şi de destinaţia pieselor.

Imbinînd rezultatele cercetărilor personale cu consultarea unei ample bibliografii, autorii au reuşit să prezinte în mod unitar şi la un înalt nivel ştiinţific toate aspectele problemei tratate.

Lucrarea este destinată inginerilor şi tehnicienilor din industria constructoare de maşini, celor ce lucrează în institutele de cercetări ştiinţifice, precum şi tuturor specialiştilor interesaţi în acest domeniu.

*

Реф. дает выше некоторые детали о книге посвященной изучению чугуна с узелковым графитом, вышедшей в свет как результат советско-румынского сотрудничества ее авторов.

Gh. Ailincăi

АССУР Л. В., **Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации.** Реф., статья и прим. акад. И. И. Артоболевского. Серия Классики Науки. АН СССР, М., 1952, 592 стр.

Ref., subliniind rolul de fondator al Teoriei mecanismelor şi maşinilor al prof. L. V. Assur, descrie succint cele două părţi ale lucrării fundamentale a acestuia, apărute, din iniţiativă şi sub redacţia acad. I. I. Artobolevski, în cunoscuta colecţie *Clasicii ştiinţei* a Academiei de Ştiinţe din U.R.S.S.

Основополагающие труды по исследованию механизмов гениального русского математика и механика П. Л. Чебышева, счастливо сочетаясь с последующими трудами корифеяв русской механики, так рельефно отраженными в известной книге проф. Л. Я. Геронимуса, а так же и с замечательными работами зарубежных учёных, таких как Рело, Резаль, Мангейм, Кёниг, Дарбу, Бурместер, Понселе, Виллис, Пуанкаре и др., прочно сливаются с глубокими исследованиями по ТММ Ассура и „отца русской авиации" Н. Е. Жуковского.

Реф. горячо приветствует инициативу акад. И. И. Артоболевского выпустить в свет в ценной коллекции АН ССР „Классики науки" работу широкого диапазона по ТММ Л. В. Ассура, посвященную в своей первой части учению о нормальных многоповодковых цепях и роли их в образовании механизмов (стр. 9—226), во второй же части-приложению учения о многоповодковых нормальных цепях к общей теории механизмов.

Библиографические ценные данные об Л. В. Ассуре, представленные акад. И. И. Артоболевским, прймечания и список научных трудов, заканчивают прекрастно представленный и с типографической точки зрения том, чтение которого обязательно для всех исследователей теории механизмов и машин—основы современной автоматизации производственных процессов.

D. Mangeron

113. JAHR W., KNECHTEL P., *Grundzüge der Getriebelehre.* B. **I.** *Allgemeine Grundlagen-Schraubengetriebe-Kurbelgetriebe.* 4., verbesserte und erweiterte Auflage. 333 Seiten mit 265 Bildern. Fachbuchverlag Leipzig, 1955.

Lucrarea autorilor, constituind de decenii o lucrare standart în domeniul Teoriei mecanismelor şi maşinilor, a fost introdusă ca manual în şcolile tehnice speciale în R.D.G. Ref. reproduc mai jos unele detalii relative la acest volum, consacrat Teoriei mecanismelor ce constituie astăzi baza indispensabilă fundamentalelor procese de automatizare.

*

Dieses Werk gilt seit Jahrzehnten als Standardwerk der Getriebelehre. Es ist jetzt als Lehrbuch an den Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt. Im ersten Band wird eine systematische Beschreibung der allgemeinen Grundlagen der Schraubengetriebe und Kurbelgetriebe gegeben. Die Mechanismen werden unter dem Gesichtspunkt ihrer Funktionen in einer Anschaulichkeit dargestellt, die vorbildlich ist. Im Aufbau des Stoffes wird die

Systematik von R e u l e a u x eingehalten. Es sind gut ausgeführte Zeichnungen und Bilder. Im ganzen genommen, ist das Werk ein wertvoller Beitrag in der trefflichen Reihe der Bücher die im Fachbuchverlag Leipzig erschienen. *D. Mangeron, Gh. Tudor*

114. JAHR W., KNECHTEL P., *Grundzüge der Getriebelehre.* Band **II.** *Rädergetriebe – Rollegetriebe – Kurvengetriebe – Sperrgetriebe.* 4., verbesserte und erweiterte Auflage. 230 Seiten mit 316 Bildern. Fachbuchverlag Leipzig, 1956.

Volumul al doilea al acestei opere, ce constituie baza de studiu al teoriei mecanismelor şi maşinilor în şcolile medii tehnice din R.D.G., conţine o descriere sistematică a variatelor mecanisme cu role şi cu clichete, atît de des folosite în fundamentalul proces de automatizare ce se urmăreşte în tehnica modernă. Numeroase figuri şi fotografii bine reproduse, precum şi un bogat indice bibliografic şi pe materii, aranjat alfabetic, măresc valoarea lucrării, utilă şi pentru studiul individual, maiştrilor, tehnicienilor, elevilor şi studenţilor.

*

Der II. Band dieses Standardwerkes gibt eine systematische Beschreibung der allgemeinen Grundlagen der Räder – Rollen – Kurven – und der Sperrgetriebe unter dem Gesichtspunkt ihrer Funktionen. Das Niveau der Darstellung entspricht dem Studienplan an den Fachschulen des Maschinenbaus der Deutschen Demokratischen Republik. Das Werk ist aber auch für das Selbststudium zur Erarbeitung der Grundlagen des Getriebebaus, sowie als Nachschlagewerk geeignet. Das reichhaltige Bildmaterial sowie das Literaturverzeichnis zu Band I und II und alphabetisches Sachregister erhöhen die Anschaulichkeit der Darstellung und das Wert des Werkes. *D. Mangeron, O. Munteanu*

115. * * * *Schwingungabwehr.* Vorträge der VDI – Tagung Essen 1956. 154 Seiten, 272 Bilder und 10 Zahlentafeln. VDI Berichte, Band **24,** 1957. VDI – Verlag, Düsseldorf.

Urmînd ordinea de idei ce constituie sistematica preocupare a secţiei de specialişti în domeniul mecanicii vibraţiilor din VDI, de sub preşedinţia prof. dr. E. L ü b c k e, acest volum, consacrat *măsurilor de protecţie împotriva vibraţiilor,* cuprinde 21 referate şi 5 coreferate ce se referă la variate probleme ce se includ, după clasificarea zecimală internaţională, în deosebi în grupele 534. 1 ; 534. 83 ; 621. 13 ; 621. 313 ; 629. 113 (A se vedea în acest *Buletin* IPI şi referatul asupra volumului *Schwingungstechnik).*

*

Dans ce volume contenant 26 travaux présentés à la Conférence organisée sous la présidence du prof. dr. E. L ü b c k e de la VDI (15–16 Novembre 1956, Essen), consacrée aux *mesures de protection contre les vibrations,* on trouve nombre de détails importants dont l'intérêt ne doit échapper à personne qui s'intéresse à la mécanique moderne des vibrations, tant linéaire que non-linéaire.

C. Drăgan

116. WHITEHEAD T. N., *The design and use of Instruments and accurate mechanism.* New York, Dover publications, Inc. XII+283 pp., 85 photos and diagrams of instrument parts.

Autorul, cunoscut practician în domeniul execuţiei aparatelor şi dispozitivelor de mecanică de precizie, expune unele principii de proiectare şi execuţie a mecanismelor, adresîndu-se atît practicienilor cît şi teoreticienilor, fără a folosi însă abstracţii puternice şi un aparat matematic dezvoltat.

*

A surprising proportion of human energy is devoted to producing accurate instruments and light controlling mechanism of one sort or another. The reader will find in this work a

useful way of thinking about accurate mechanisms. Contents : Instruments and Their Parts Systematic Errors, Probability as Applied to Error, Short Period Errors, Erratic Errors, Precision : Kinematic Design, Precision semikinematic Design, Stiffness, Isolation and Protection of the Elements, Accuracy, The Planning of an Instrument, The Human Factor.

The book is very well produced. It belongs to the very appreciated collection *Dover books on Physics, Engineering.*

Catedra de Mecanică și Mecanisme

117. CRISTESCU N., *Probleme dinamice în Teoria plasticității.* Academia Republicii Populare Romîne, „Știință și Tehnică", **13,** Editura Tehnică, București, 1958, 247 pp.

Autorul, făcînd parte din pleiada de cercetători maturizați în anii regimului nostru democrat popular, prezintă într-o monografie, înserată în colecția „Știință și Tehnică" a Academiei R.P.R., unul din capitolele cele mai noi ale Teoriei plasticității, și anume, studiul proceselor rapide de deformare plastică. In imposibilitate de a intra aici în detalii, ref. subliniază linia de conduită folosită de autor în redactarea lucrării, ce a constituit chezășia succesului unei serii recente de monografii de matematică și mecanică, în deosebi în cadrul publicațiilor sovietice. Este vorba de scopul ce și l-a fixat autorul de a conduce pe cititor la ultimele rezultate elaborate în domeniul abordat, arătîndu-i-se etapele cele mai semnificative parcurse înainte. Probă evidentă contituie vasta bibliografie (261 titluri, dintre care 10 sînt notele anterioare ale autorului).

*

I Ref. nell'impossibilità di far qui conoscere i dettagli concernenti questa *Monografia* dedicata allo studio dei processi rapidi di deformazione plastica, sottolineana un canone al quale ci se è attenuto l'A. nella redazione, e che ha costituito il motivo di successo di tante recenti pubblicazioni matematiche e meccaniche. E stato quello di far arrivare il lettore agli ultimi risultati mostrandogli le tappe più significative che si son dovute percorrere prima di conseguirli. Ne costituisce la prova una vasta bibliografia (261 titoli, tra i quali 10 appartengono all'A. stesso).

Catedra de Mecanică și Mecanisme

118. * * * *Anwendung neuzeitlicher Rechengeräte in der Schwingungstechnik.* VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1957. Vorträge des VDI-Kolloquiums Darmstadt 1958.97 S. B. **30.**

Acest volum editat sub autoritatea competentă a VDI și promovat din inițiativa prof. dr. E. Lübcke, este consacrat expunerii conținutului a 16 conferințe și a unei comunicări rezumative finale, ținute în cadrul unui colocviu desfășurat între 24–25 octombrie 1957 la Darmstadt, avînd ca temă *Studiul problemei de aplicație în tehnica oscilațiilor, a dispozitivelor moderne de calcul.*

Referentii, fără a putea intra aici în detalii, consideră deosebit de util să sublinieze subdivizarea tematicii conferinței, care aduce o contribuție de seamă în problema dezvoltării construcțiilor de mașini, în două părți bine distincte. Prima parte este consacrată temelor relative la dispozitive de calcul electronice și mecanice. Aici se situează conferințele prof. H. Unger, H. Hoffmann, W. Dehn. Cea de a doua, mai vastă, înglobează *formulări de probleme* (de ex., prof. H. Fuhrke), *programări* (de pildă, prof. S. Spierig) și numeroase studii de tehnica oscilațiilor (prof. P. Matthieu, E. Pestel, B. Thüring, ș.a.).

*

Ce volume, tout en faisant parti de la série éditée par la VDI, dont la compétence dans la présentation des problèmes concernant la science de l'ingénieur en est bien justement universellement reconnue, est consacré à l'exposition des conférences tenues pendant un récent colloque de Darmstadt (24–25 X 1957). Le sujet du colloque est consacré à l'application des machines analogiques, électroniques et mécaniques à l'étude des vibrations qu'on rencontre dans les constructions de machines et dans la technique en général.

Les Réf. exposent ci-dessus quelques détails concernant le contenu de cet excellent volume, divisé en deux parties bien distinctes, à savoir, l'une consacrée à une mise-au-point

des dispositifs de calcul et l'autre – à la formulation des problèmes, à l'établissement des programmes et à nombre d'exemples variés d'oscillations qu'on recontre dans la technique moderne. *D. Mangeron, C. Drăgan*

119. ZUMBÜHL H., *Motoren.* Ein Buch über Wärmekraftmaschinen und ihre Brennstoffe. 3., weitgehend neubearbeitete Auflage. Schweizer Druck- und Verlagshaus AG., Zürich. 330 Seiten, 200 Illustrationen.

Ref. dă mai jos unele detalii relative la această a treia ediție, complet prelucrată a volumului consacrat studiului motoarelor termice și combustibililor acestora.

*

Erstmals wurde das Werk 1946 herausgebracht. Diese dritte Auflage ist ein neugeschaffenes Buch. Bei den Viertaktomotoren wird unter anderem näher auf die verschiedenen Ventilsteuerungen eingegangen und bei den Zweitaktmotoren war eine vollständige Neubearbeitung notwendig. Erweitert wurde auch die Beschreibung der elektrischen Teiles der Verbrennungsmotoren und auch die Gasturbinen und Rückstossmotoren (Raketenantriebe) mussten entsprechend ihrer zunehmenden Wichtigkeit eingehender behandelt werden. Neben den Raketenantrieben brachte uns die Technik seit erscheinen der ersten Auflage noch die Nutzbarmachung der Atomenergie, der nun auch ein besonderes Kapitel gewidmet werden musste. Sachregister. *C. Picoș*

120. КОЛЧИН Н. И., **Механика машин.** Машгиз, М.-Л., 1957, 320 стр.

Autorul, binecunoscutul specialist în domeniul teoriei mecanismelor și inițiator al unei clasificări structurale lărgite a mecanismelor, expusă la cea de II-a Consfătuire Unională de Teoria Mecanismelor și Mașinilor (Moscova, 24–28 martie 1958), prezintă, în acest volum, al V-lea din seria consacrată Mecanicii mașinilor, o vastă gamă de probleme speciale de calcul și proiectare a mecanismelor. Referenții menționează în deosebi capitolele privitoare la : proiectarea mecanismelor cu came, ținîndu-se seamă de unghiurile de presiune și de condițiile de rezistență la contact ; studiul frecării și a randamentului mecanismelor cu came și calculul volanților și problema echilibrării maselor (metoda acad. I. I. Artobolevski și o variantă a metodei propusă de autor) și salută o punere la punct a problemei relative la influența dinamică a vitezei asupra capacității de tracțiune a curelelor (pp. 188–229).

*

L'A. expose dans le V-e volume consacré à la Mécanique des machines nombre de recherches propres et celles des proff. I. I. Artobolevski, N. G. Brouévitch, membres de l'Académie des Sciences de l'URSS, et d'autres encore, concernant certains problèmes de la structure et de la classification des mécanismes (Voir son Mémoire présenté à la II-e Conférence Unionale de la Théorie des Mécanismes et des Machines, Moscou, 24–28 Mars 1958), les caractéristiques de traction des transmissions, le calcul des volants et l'équilibrage des masses. *D. Mangeron, C. Drăgan*

121. LIEBSCHER IMFRIED, WILLERT FRANZ, *Tehnologie der Keramik,* VEB Verlag der Kunst, 1955, 410 S.

In editura VEB (Verlag der Kunst) autorii publică în 1955 un tratat de tehnologie ceramică, acesta fiind primul volum din seria *Keramisches Schaffen.* Potrivit celor enunțate urmează să apară pe rînd specialitățile olărie, grezii artificale, porțelan și materiale ceramice de construcție.

Este una din primele lucrări apărute după războiul trecut sub forma unui tratat, prezentînd la nivelul școlilor tehnice întreg domeniul tehnologiei ceramice.

Această lucrare este editată într-un stil clar și plăcut la citit. Autorii expun întregul flux tehnologic, de la materiile prime pînă la cele finite, inclusiv smalțurile și decorațiunile artistice, folosind desenarea celor mai moderne mașini și metode de ameliorare a calității produselor.

Der Verf. gibt oben in rumänischer Sprache eingine Einzelheiten über diese gut geschriebene und gut gedruckte Technologie der Keramik.

Al. Chelărescu

122. STEINHART O. u. MOHLER, *Versuche zur Anwendung vorgespannter Schrauben im Stahlbau*, Berichte des deutschen Ausschusses für Stahlbau-Verlag GmbH, Köln, 1954, Teil I. Heft **18**, 39 S.+32 Abb.

In lucrare se analizează posibilitatea folosirii şuruburilor pretensionate. Se determină solicitările ce apar în bulon prin pretensionare precum şi rezistenţa la frecare a îmbinărilor realizate cu ajutorul lor. Se analizează de asemenea procedee pentru mărirea rezistenţei la frecare precum şi comportarea acestor îmbinări la solicitări variabile. Lucrarea este o contribuţie valoroasă la problemele mijloacelor de asamblare în construcţii metalice.

*

In vorstehender Arbeit wird die Möglichkeit für die Verwendung vorgespannter Schrauben erörtet. Es werden die Beanspruchungen der Schrauben durch Vorspannung bestimmt so wie auch der Gleitwiderstand in den Verbindungen bei denen man die Schrauben benützt. Es werden ebenfalls verschiedene Behandlungen der Flächen analysiert, um den Gleitwiderstand zu vergrössern, so wie auch das Verhalten der Verbindungen bei schwellender Beanspruchung. Die Arbeit ist ein wertvoller Beitrag zum Problem der Verbindungen im Stahlbau.

T. Silion

123. MONDIN CH., *Aide-mémoire. Construction métallique.* Tome **I** et **II**. Dunod, Paris, 1956.

Noua ediţie a îndrumătorului în construcţii metalice de C h. M o n d i n, din care am primit pînă acum numai primele două volume din totalul de patru, este o publicaţie care va fi de un preţios ajutor pentru inginerul constructor, în care el va găsi un vast material de specialitate în legătură cu tehnologia, alcătuirea şi calculul construcţiilor şi podurilor metalice. Lucrarea conţine un mare număr de desene, scheme, tablouri ; pe lîngă dezvoltarea problemelor teoretice ea cuprinde şi o serie de indicaţii cu caracter practic. Intocmit în acest fel, îndrumătorul de construcţii metalice va fi consultat cu mult folos de orice inginer constructor.

Aşteptăm cu mult interes apariţia celorlalte volume .

*

Новое издание справочника по металлическим конструкциям, составленного инж. Ш. М о н д э н (в четырёх томиках карманного формата), содержит обширный материал по этой специальности, теоретический и практический, иллюстрированный большим числом фигур и схем и пополненный многочисленными таблицами и приложениями.

Справочник заслуживает весьма положительной оценки, как вполне современное пособие, содержащее богатый справочный материал, являясь весьма необходимым для широких кругов инженеров строителей.

Ждём с большим интересом появления 3-го и 4-го томов справочника.

Em. Munteanu

124. ГУБКИН С. И., ДОБРОВОЛЬСКИЙ С. И., БОЙКО Б. Б., Фотопластичность, Изд. АН БССР, Минск, 1957, 166 стр., 127 рис.

Lucrarea este o monografie a metodelor experimentale de studiu a stării de tensiune şi deformaţii a mediilor plastice cu ajutorul luminii polarizate şi a modelelor din materiale adecvate.

Un prim capitol tratează metodele fotoplasticităţii, arătîndu-se problemele de bază şi particularităţile principale ale acestui procedeu. In capitolul al doilea se trec în revistă materialele pentru confecţionarea modelelor, indicîndu-se proprietăţile şi compoziţia celor mai adecvate studiului. In capitolul al treilea se descrie aparatura folosită, modul de pregătire şi prelucrare a modelelor şi tehnica experimentării. In capitolul al patrulea se tratează problema curgerii vîscoase ; în baza anizotropiei optice a anumitor medii transparente vîscoase se stabilesc particularităţile modelării problemelor plane în condiţiile curgerii viscoase şi se

rezolvă cîteva probleme plane elementare (mediu vîscos comprimat între două suprafeţe plan-paralele, curgerea vîscoasă în unghiul format de două plane perpendiculare dintre care unul are o mişcare de translaţie, curgerea vîscoasă printr-o fantă de lăţime finită şi infinit mică). In capitolul al cincilea se tratează tot pe cale optică problema generală a prelucrării sub presiune (matriţare, extruziune şi găurire). In ultimul capitol se tratează importanţa practică şi perspectivele metodei.

Lucrarea este foarte interesantă întrucît atacă la un nivel tehnico-ştiinţific înalt un domeniu nedefrişat şi fundamentează o metodă de largi perspective. Importante sînt capitolele IV şi V în care se pun bazele teoretico-experimentale ale fotoplasticităţii curgerii vîscoase cu aplicarea ei la prelucrarea materialelor prin presiune. Domeniul tehnic de aplicare al metodei se întrezăreşte a fi foarte vast şi variat (se vor putea studia procese geologice şi geofizice ; procese de prelucrarea metalelor prin presiune şi tăiere ; procese de deformaţii a maselor plastice utilizate în diferite domenii tehnice precum şi studiul intim al fenomenelor de deformaţie plastică). Prezentarea editorială este ireproşabilă, cu o serie întreagă de fotografii în culori.

*

Die Ref. geben oben in rumänischer Sprache einige Einzelheiten über diese wichtige Monographie die der Photoplastizität gewidmet ist. *V. Bauşic, N. Preda*

125. VERDÉYEN JACQUES, ROISIN VICTOR, *Stabilité des terres. Sols routiers, soutènement – talus.* Editions Desoer – Liège. Editions Eyrolles – Paris, 1955, 420 pp.

Cartea este împărţită în trei părţi. In prima parte autorii studiază stabilitatea pămînturilor în vederea construirii drumurilor. In primele două capitole se expun metodele de ameliorare a pămînturilor prin mijloace mecanice sau prin adausuri de lianţi cu acţiune fizico-chimică. In capitolele III şi IV se arată metodele de punere în lucrare a pămîntului stabilizat, iar în cap. V se expun condiţiile în care s-au construit drumuri de pămînt în Africa.

Partea a doua se referă la stabilitatea susţinerilor (ziduri de sprijin şi pereţi de palplanşe). Se expun teoriile referitoare la împingerea activă şi pasivă a pămînturilor pulverulente şi coherente în ipoteza suprafeţelor de alunecare plane şi curbe.

Partea a treia se referă la stabilitatea taluzelor. Se expun metodele de calcul în cazul liniilor de alunecare circulare sau spirale logaritmice. In ultimele două capitole se studiază filtrarea apei prin taluze şi principiile care stau la baza construirii şi protecţiei lor.

*

Dans ce livre les auteurs s'occupent de la stabilité des terres, considérées comme matériaux de construction. On suppose connus les principes généraux de la mécanique du sol.

La première partie se réfère à la stabilité des sols, en vue de la réalisation de routes, et de pistes. L'étude présente un intérêt particulier pour les régions où il manque un réseau routier peu coûteux, quant aux dépenses d'investition et d'exploitation.

Dans le chapitre I on étudie les facteurs qui influencent la stabilité des terres (la résistance aux tensions tangentielles, la nature des matériaux, la teneur en eau, la compacité et la présence eventuelle des agents stabilisateurs à action physico-chimique). Le chapitre II se réfère aux théories de la stabilisation des sols routiers. On étudie les agents destructifs des sols routiers (trafic, vent, eau, gel, etc.), le mélange optimum pour le revêtement en mortier ou en béton du sol, le traitement par les électrolytes, les sols améliorés par des liants (le ciment, le bitume, le goudron, le palmo-copal) et la fondation.

Dans le chapitre III on expose les méthodes de la mise en oeuvre des sols routiers. On étudie la stabilisation mécanique par le procédé „mix in place" et „mix in plant", la stabilisation au ciment et au bitume, l'entretien des routes en sols améliorés et les contrôles et essaies sur chantier. Dans le chapitre IV les auteurs s'occupent de l'influence de la teneur en eau sur le poids volumétrique sec du sol et sur le nombre de passes, et de l'influence des passes sur le poids volumétrique sec du sol, dans la pratique du compactage. Le chapitre V se réfère à la construction de routes en terre et de chaussées en Afrique.

La deuxième partie se réfère à la stabilité des soutènements (mur de soutenement et rideaux de palplanches).

Dans le premier chapitre les auteurs étudient la poussée et la butée des terres en sol pulvérulent, d'après les théories basées sur les lois de l'élasticité, sur les lois de l'équilibre

limite ou plastique, les théories du coin de glissement et du coin de refoulement, dans l'hypothèse des surfaces de glissement planes ou curvilignes.

Ensuite ils étudient les mêmes problèmes pour les terres en sol cohérent, la stabilité contre le renversement et contre le glissement des murs de soutènement, et enfin la stabilité élastique. Dans le chapitre II les auteurs étudient la stabilité des rideaux de palplanches ondulées libres en tête et appuyées en tête. Pour le calcul des rideaux sur appuis multiples, ils exposent les méthodes de N i e r b u h r, C a q u o t, M a g n e l et une méthode où les auteurs supposent une nouvelle loi des pressions, afin de mettre d'accord les valeurs calculées et les valeurs relevées expérimentalement. Dans le chapitre III on étudie les constructions cellulaires en palplanches plates. La troisième partie se réfère à la stabilité des talus en terre. Le chapitre I contient des généralités sur les lignes de glissement et sur la théorie générale de la stabilité des talus et de leurs fondations. Dans le chapitre II les auteurs exposent les méthodes procédant par la mise en équilibre de l'ensemble (methodes d'O h d e, G i b l o y – T a y l o r, C o q u o t) et par la mise en équilibre de volumes élémentaires, en supposant les lignes de glissement circulaires, et dans le chapitre III ils exposent le cas, ou l'étude du glissement d'ensemble d'une construction en contact avec le sol peut se faire facilement, en supposant que la ligne de glissement est une spirale logarithmique. Le chapitre IV se réfère à la filtration de l'eau à travers le talus (l'interprétation mathématique des phénomènes, l'étude de la figure d'écoulement et la détermination de la ligne de saturation), et le chapitre IV, aux principes de construction et de protection des talus.

A. Cernătescu

126. * * * *Manualul Arhitectului Proiectant.* vol. **III.** Editura Tehnică, 540 pp., 425 fig., 127 tab.

Manualul Arhitectului Proiectant, volumul al III-lea şi ultimul, cuprinde următoarele patru părţi, care completează seria de probleme de arhitectură şi urbanism tratate în volumele I şi II : Partea a XIII-a „Clădiri pentru instituţii de învăţămînt" ; Partea a XIV-a „Clădiri pentru instituţii sanitare" ; Partea a XV-a „Ansambluri şi construcţii agricole" ; Partea a XVI-a „Proiectarea oraşelor".

Cele trei volume ale *Manualului Arhitectului Proiectant* cuprind un material documentar variat, care tratează funcţiunile edificiilor, dimensionarea lor, folosirea justă a principiilor constructive şi a materialelor, şi din care se pot alege acele soluţii care se potrivesc mai bine unei diversităţi de cazuri concrete.

Prezentarea îngrijită şi frumoasă a volumului se încadrează în tradiţia cîştigată de către Editura Tehnică, iar un index alfabetic de materii extrem de bogat permite o consultare utilă şi rapidă a tuturor volumelor manualului.

*

Le réf. donne ci-dessus quelques détails concernant ce III-ième volume du *Manuel de l'Architecte.*

F. Schor

127. GOSSMANN HANS, *Planung und Einrichtung der Baustelle im Hochbau.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1957, 280 S.

Cartea inginerului H a n s G o s s m a n n *Planificarea şi amenajarea şantierului în construcţiile civile şi industriale* ilustrează modul în care se rezolvă această problemă în R.D.G.

Bazată pe o bogată bibliografie sovietică precum şi pe experienţa proprie din R.D.G., cartea rezolvă numeroase probleme legate de organizarea şantierului ca : baracamente, depozite, ateliere, remize pentru mijloace de transport, reţele tehnice provizorii, instalaţii şi căi de transport, instalaţii speciale, probleme legate de alegerea şi folosirea utilajelor şi de organizarea lucrărilor în timp de iarnă. Problemele teoretice sînt ilustrate prin numeroase exemple de calcul.

Lucrarea este foarte frumos prezentată şi foarte utilă pentru persoanele care se ocupă de acest domeniu.

*

Das Buch von Ing. Hans Gossmann *Planung und Einrichtung der Baustelle im Hochbau* veranschaulicht die Weise in der man diese Probleme in der D.D.R. löst.

Auf Grund von sowjetischen Quellen so wie auch aus der eigenen deutschen Praxis werden verschiedene Probleme aus diesem Gebiet erörtert wie zum Beispiel : Baustellenunterkünfte, Lager-und Arbeitsplätze, Fahrzeug-und Maschinenschuppen, Versorgungsanlagen, Transport-und Fördereinrichtungen, besondere Baustelleneinrichtungen, Baumaschinen und Geräteeinsatz, Baustelleneinrichtungsplan, so wie das Bauen im Winter.

Es werden viele praktische Beispiele gegeben die die theoretischen Probleme verständlicher machen.

Der Verfasser so wie der Fachbuchverlag Leipzig haben durch dieses Buch einen sehr wertvollen Beitrag auf diesem Gebiet gebracht. *T. Silion*

128. TSCHEBOTARIOFF G. P., *Soil Mechanics, Fondations, and Earth Structures.* New York–Toronto–London, Mc Graw–Hill Book Company, Inc. 1957, 655 pp.

Cartea *Mecanica pămînturilor, fundații și structura terenurilor* de G. Tschebotarioff poate servi atît ca un manual pentru studenți cît și ca îndrumător pentru inginerii practicieni în domeniul mecanicii solurilor.

Cartea este foarte frumos editată și conține multe figuri precum și exemplificări reale din experiența autorului.

*

Das Buch *Erdbaumechanik, Gründungen und Erdstruktur* von G. Tschebotarioff kann sowohl als Lehrbuch für die Studenten wie auch als Wegweiser für die Ingenieure aus der Praxis dienen die Ihre Kenntnisse auf diesem Gebiete erweitern oder vertiefen wollen.

Das Buch enthält viele Abbildungen so wie auch zahlreiche Beispiele aus der Erfahrung des Verfassers. *T. Silion*

129. PIPPARD A. J. S., BAKER J. F., *The Analysis of Engineering Structures.* Edward Arnold, London, 1957, 564 pp.

Ref. indică mai jos unele detalii relative la această nouă ediție a volumului *Teoria construcțiilor* de A. J. S. Pippard și J. F. Baker.

*

Cette troisième édition, largement revue, présente un arrangement mieux équilibré de la table des matières que celui de l'édition précédente. On remarque surtout beaucoup de généralisations et de simplifications, de même que l'emploi du principe de la superposition au calcul des poutres courbes, des arcs etc.

Cet excellent ouvrage est très précieux pour les ingénieurs, tout en étant très utile pour l'enseignement. *A. Șesan*

130. ARRAMBIDA J., DURIEZ M., *Agrégats, liants et bétons hydrauliques, aciers et métaux usuels.* Editions du Moniteur des Travaux publics, Paris, 600 pp.

Se dau mai jos cîteva detalii relative la acest volum destinat expunerii practice a datelor relative la unele materiale de construcții.

*

Cet ouvrage intéressant et comportant un nombre assez grand de renseignements pratiques utiles est destiné aux ingénieurs et techniciens du Bâtiment et des Travaux publics ainsi qu'aux architectes. Il traite successivement : Les agrégats pour bétons hydrauliques ; Bétons hydrocarbonés et liants routiers ; Les liants hydrauliques (chaux et ciments) ; Les mortiers et bétons hydrauliques (propriétés, comportement dans les ambiances particulières ; les bétons pour construction des chaussées etc.) ; Les aciers et métaux usuels utilisés dans le Bâtiment et les Travaux publics ; soudure ; corrosion. *Al. Chelărescu, E. Păunel*

131. IOSIPESCU N., *Introducere în fotoelasticitate.* Vol. **I.** Ed. Tehnică, Buc., 1957.

Lucrarea tratează despre metode moderne bazate pe fotoelasticitate pentru obținerea de diferite piese și expune următoarele probleme : problema teoretică a elasticității bidimensionale, noțiuni de optică ondulatorie, noțiuni de fotoelasticitate necesare confecționării modelelor ; de asemenea sînt indicate date practice și experimentale asupra modului de executare a cercetărilor.

Referentul, în speranța de a putea menționa în paginile acestui *Buletin,* într-un viitor apropiat, un al doilea volum din cadrul aceleeași opere, consacrat studiului fotoelasticității spațiale, subliniază numeroase lucrări practice, bazate pe fotoelasticitate, introduse, din inițiativa tov. prof. ing. N. Iosipescu, de pe vremea cînd profesa la Institutul Politehnic din Iași, ce se continuă astăzi cu deosebit succes în centrele noastre universitare.

*

L'Auteur a pleinement atteint son but, qui était de mettre à la portée de l'ingénieur et du technicien une bonne introduction à la théorie de la photoélasticité.

132. *** *Hütte. Des Ingenieurs Taschenbuch.* 28 Aufl. Bd. **3.** *Bautechnik.* Berlin, Ernst, 1956, 1616 S.

Volumul al III-lea al cunoscutului îndrumător german pentru ingineri – Hütte – a apărut într-o nouă ediție (a 28-a). Alcătuită de cei mai de seamă savanți germani, specialiști în construcții, hidraulică, poduri, etc. cartea reprezintă volumul al III-a al unei vaste enciclopedii tehnice care apare în șase volume, cuprinzînd toate domeniile de activitate inginerească.

Majoritatea capitolelor sînt alcătuite pe baza unui vast material documentar și a cercetărilor, datorite mai ales savanților germani. Capitolele îndrumătorului sînt însoțite de bibliografie și de un indicator alfabetic de materii.

Fiind întocmit la un înalt nivel științific și conținînd un bogat material informativ de actualitate, volumul de mai sus reprezintă un îndrumător prețios, foarte necesar tuturor inginerilor constructori.

*

Книга представляет собой новое 28-ое издание известного немецкого инженерного справочника. Написанная крупнейшими немецкими учеными-специалистами в области строительства, гидравлики, мостостроения и т. д., книга является третьим томом шеститомной обширной энциклопедии, охватывающей все области инженерной специальности.

Большинство отделов написано на базе обширного литературного материала и по исследованиям главным образом немецких ученых.

Отделы руководства снабжены списками литературы и предметным указателем.

Книга заслуживает высокой оценки, как современный, весьма обширный справочник, написанный на высоком научном уровне, и содержащий богатый справочный материал, являясь весьма необходимой для широких кругов инженеров строителей.

Em. Munteanu

133. ГЕРЖУЛА Б. И., **Геодезия в промышленном строительстве.** Геодезиздат, М., 1957, 259 стр.

Manualul cuprinde o expunere științifică a problemelor teoretice și practice legate de aplicarea topografiei în construcția complexelor industriale ca : ridicarea elementelor necesare proiectării, alcătuirea proiectului de organizare a teritoriului complexului industrial, trasarea ansamblului și a detaliilor, etc. Deosebit de utile sînt considerațiunile asupra toleranțelor și a preciziei adecvate specificului de lucrări, cît și ultimul capitol referitor la determinarea deformațiilor, tasărilor și deplasărilor construcțiilor în timpul și după execuție.

*

Книга, предназначен для практиков и научных работников в области инженерной геодезии, содержит научную разработку вопросов теории и практики применения геодезии в промышленном строительстве.

D. Paghida

134. CHWALLA E. H. ERNST, *Einführung in die Baustatik.* Stahlbau – Verlag, G.m.b.H., Köln (Rhein), Neudruck der zweiten, verbesserten und ergänzten Auflage.

Lucrarea este o culegere de prelegeri de statica construcţiilor şi rezistenţa materialelor. Se adresează studenţilor şi inginerilor şi prin bogata bibliografie indicată la fiecare problemă dă posibilitatea aprofundării şi dezvoltării acesteia. Succesiunea capitolelor este naturală, ideile sînt foarte clar exprimate şi pentru o bună fixare şi înţelegere a teoriei, sînt presărate exemple de calcul caracteristice.

Este interesant faptul că se insistă asupra fenomenului fizic, mai mult ca de obicei, iar acesta odată înţeles, transcrierea lui matematică urmează în mod natural. Se tratează atît problemele devenite clasice cît şi unele moderne, legate de progresul tehnic în domeniul construcţiilor. (De ex. teoria barelor cu pereţi subţiri, solicitări dincolo de limita de elasticitate, etc).

*

Das Lehrbuch ist ein vervielfältigtes Kollegheft, für Baustatik und Festigkeit. Es interessiert die Studenten und Ingenieuren, und um ein tieferes Eindringen in die Problemen und ein selbständiges Weiterarbeiten zu ermöglichen, umfasst ein reiches Schriftumshinweise.

Der Ref. gibt oben in rumänischer Sprache einige Einzelheiten über dieses neue Werk das in traditionelle gute Ausstattung im Stahlbau – Verlag erschienen ist. *N. Preda*

135. * * * *Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau–Verbandes.* **10.** 3. *Arbeitstagung der Betriebs-und Montageingenieure.* Am 7. Oktober 1955 in Iserlohn. Stahlbau – Verlag GmbH, Köln.

In caietul 10 al publicaţiilor Uniunii Germane a Oţelului se tratează despre conferinţa de lucru a inginerilor de montaj şi de exploatare. Se dau mai jos unele detalii asupra conţinutului ei.

*

Das Heft 10 der Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbauverbandes handelt über die Arbeitstagung Betriebs-und Montageingenieure.

Es werden darin Berichte über dem Stand der Stahlbaufertigung in Deutschland und im Ausland gegeben.

Die Berichte handeln über : die U. S. A. – Reise des Deutschen Stahlbau–Verbandes, die Montage mit motorisierten Derrick–Kranen, neue Wege in der Stahlbaufertigung, über die Rolle des mitenden Mitarbeiters, des Unternehmers im betrieblichen Spannungsfeld und über Atomkraft und Stahl.

Alle Berichte sind sehr wertvoll und von wahrem Interesse für den Stahlbau. *T. Silion.*

136. ГОРНОВ В. Н., **Прочность и устойчивость бетонных конструкций.** Институт Строительной Техники, А. С. и А. СССР, Москва, 1957, 117 стр.

In baza unor cercetări teoretice şi experimentale efectuate asupra elementelor de betoane uşoare şi grele, supuse la diferite solicitări de scurtă şi lungă durată, autorul constată inexactitatea formulelor uzuale pentru dimensionarea la compresiune, compresiune-încovoiere şi la flambaj şi propune metode de calcul care ţin seama mai bine de proprietăţile plastice ale betonului.

Volumul este de deosebit interes pentru inginerii proiectanţi şi cercetătorii ştiinţifici.

*

Les résultats des recherches théoriques et expérimentales effectuées sur des éléments en bétons légers et lourds soumis à différents sollicitations permettent à l'auteur de constater que le calcul des éléments comprimés excentriquement a besoin d'être précisé et propose pour le calcul à la compression-flexion et au flambage des formules nouvelles qui tiennent compte d'une manière plus complète des propriétés plastiques du béton. *D. Paghida*

137. CIURILEANU D. I., *Tabele stadimetrice,* Ed. Tehn., Buc., 1957, 55 pag.

Combinînd fericit valorile numerice date de tabele cu interpolări grafice pe abacă, vo-

lumul de numai 55 pagini dă valori pentru $KH \sin \alpha \cos \alpha$ şi $KH \cos^2 \alpha$ pentru intervalul $\alpha = 0 - 50^g$ (0—45°) şi $KH = 0-220$ m cu o precizie centimetrică.

*

Стадиметрические таблицы, разработанные проф. Д. И. Чуриляну, предназначены для исчисления тахеометрических величин $KH \cos^2 \alpha$ (горизонтального проложения) и $KH \sin \alpha \cos \alpha$ (превышения). Совмещая столбцы численных данных с отсчётом по диаграмме таблицы, при сравнительно малом объёме (всего 55 страниц), охватывают расстояния от 0 до 220 м и вертикальные углы от 0^g до 50^g (0 — 45°), причём искомые величины получаются с точностью до 1-го сантиметра путем сложения не более двух чисел.

D. Paghila

138. AVRAM N. CONSTANTIN, *Grinzi continue.* (Tabele de calcul). Editura tehnică, Bucureşti, 311 pp., 3 anexe, 157 tabele, 40 fig.

Lucrarea cuprinde 3 părţi : în prima, se dă un rezumat al teoriei grinzilor continue cu axă dreaptă, cu moment de inerţie variabil şi constant, pe reazeme de nivel netasabile, care lucrează în domeniul elastic, sub sarcini (forţe şi cuple) situate în planul vertical de simetrie al grinzii ; partea doua cuprinde tabele, care permit determinarea reacţiunilor, momentelor încovoietoare şi forţelor tăietoare în astfel de grinzi continui cu moment de inerţie constant şi variabil (cu vute drepte şi parabolice), sub sarcini uniform distribuite şi concentrate, permanente şi utile, fixe şi mobile (linii de influenţă) ; partea treia cuprinde exemple de calcul. Lucrarea se adresează inginerilor proiectanţi şi studenţilor.

*

Dieses Buch enthält 3 Teile : der erste, gibt einen Auszug der elastichen Durchlaufträgertheorie mit gerader Axe, mit veränderlichem und unveränderlichem Trägheitsmoment, auf starren Nivelstützen, mit in senkrechte Axensymetrieebene befindlichen Lasten ; der zweite Teil enthält Tabellen, die die Berechnung der Auflagerkräfte, Biegungsmomente und Querkräfte ermitteln, im Hinblick auf Durchlaufträger mit veränderlichem und unveränderlichem Trägheitsmoment (mit geraden und parabolischen Vouten), mit ständigen und nützlichen, beweglichen und unbeweglichen, Gleich – und Einzellasten belastet ; der dritte Teil enthält Berechnungsbeispiele. Dieses Buch ist den Entwurfsingenieuren und Studenten gewidmet.

N. Preda

139. BUZDUGAN GH., *Rezistenţa Materialelor.* Editura tehnică. Vol. **I.** Buc., 1956, 476 pp., 28 tabele, 410 fig. ; vol. **II.** Buc., 1957, 502 pp., 8 tabele, 386 fig.

Lucrarea este un manual pentru învăţămîntul tehnic superior. Vol. I se adresează studenţilor de orice specialitate, pe cînd vol. II are un accentuat caracter de inginerie mecanică. Lucrarea cuprinde în general, calculul barelor, plăcilor, blocurilor, elemente de plasticitate şi încercări de materiale.

Expunerea teoretică este însoţită de exemple rezolvate.

*

Es ist ein Handbuch für die technische Hochschule.

Erster Band ist von gleichmässigem Interesse für die Studenten von jedem Fache.

Zweiter Band wird bei Baumaschinenfache gebrauchswertlich. Im allgemeinen, es enthält die Berechnung von Tragwerken, Platten und Massiven, die Einführung in die Plastizitätstheorie und das Materialprüfungswesen. Das theoretishe Schauwesen wird mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben ergäntzt.

N. Preda

140. VLAD AUREL, *Indrumătorul constructorului de drumuri.* Editura tehnică, Bucureşti, 395 pp., 98 tabele, 342 figuri şi fotografii.

Lucrarea cuprinde cunoştinţe generale despre drumuri, materiale şi metode pentru executarea infrastructurilor şi suprastructurilor de drumuri, descrierea lucrărilor de artă obişnuite, precum şi metode de întreţinerea drumurilor. Lucrarea se adresează tehnicienilor constructori de drumuri.

Das Buch enthält allgemeine Kenntnisse über den Strassenbau ; Baustoffe und Verfahren für die Ausführung des Unter-und Oberbaues der Strassen ; Beschreibung des gewöhnlichen Kunstbaues und Verfahren für die Instandhaltung.

Das Buch richtet sich an die Strassenbautechniker. *N. Preda*

141. ЕФИМОВ А. Н., Высшая техника-база совершенствования социалистического производства. Госполитиздат, М., 1955, 213 стр.

Lucrarea face o profundă analiză a modului cum superioritatea tehnicii influenţează dezvoltarea şi perfecţionarea producţiei socialiste.

In prima parte se analizează rolul pe care-l prezintă tehnica avansată în dezvoltarea socialistă a producţiei ; modul cum tehnica superioară creză însăşi baza perfecţionării producţiei şi influenţează asupra structurii şi suprastructurii relaţiilor de producţie socialistă. In continuare lucrarea cercetează directivele de bază ale dezvoltării tehnicii ca : electrificarea, automatizarea şi noile direcţii în dezvoltarea tehnicei actuale. O parte deosebit de importantă a lucrării este aceea privitoare la creşterea productivităţii maşinilor ca urmare a îmbunătăţirilor calitative, a reducerii greutăţii lor specifice şi a perfecţionării operaţiilor. In sfirşit, lucrarea acordă o deosebită importanţă influenţei tehnicii avansate asupra caracterului general al producţiei şi asupra schimbărilor care se produc în situaţia muncii.

*

Le Réf. donne quelques détails concernant ce livre consacré à l'étude du rôle joué par la haute technique dans la voie du perfectionnement de la production socialiste. *I. Burduja*

142. MAIEVSCHI M., *Contribuţii la istoria finanţelor publice ale Romîniei* (1914–1944). Ed. Ştiinţ., Buc., 1957, 312 pp.

Inţelegerea complexă a vieţii economice a Romîniei între cele două războaie mondiale este înlesnită de cunoaşterea principalelor aspecte ale finanţelor publice din acea vreme. In acest sens lucrarea *Contribuţii la istoria finanţelor publice ale Romîniei* (1914–1944) este utilă.

Perioada de timp la care se referă lucrarea, 1914–1944, cuprinde una din cele mai frămîntate epoci ale istoriei noastre, timp în care burghezia şi moşierimea romînă au împins la extrem abuzurile şi rapacitatea, iar finanţele publice aveau o existenţă morbidă şi dezastruoasă.

Sursele de date folosite de autor, în cea mai mare parte constau din expunerile de motive cu ocazia prezentării bugetelor de către miniştrii de finanţe, memorandum-uri întocmite de aceştia, discuţiile parlamentare purtate cu prilejul votării bugetelor, şi diversele lucrări economice apărute în decursul perioadei cercetate.

Lucrarea alcătuită din 7 capitole reuşeşte să ne dea o imagine cuprinzătoare asupra finanţelor publice ale Romîniei între cele două războaie mondiale.

In prima parte a lucrării se analizează structura şi caracteristicile principale ale sistemului finanţelor publice ale Romîniei burghezo-moşiereşti între cele două războaie mondiale. Apoi se tratează finanţele publice în perioada crizei economice de după primul război mondial, perioada stabilizării relative a capitalismului în Romînia (1922–1928), perioada crizei economice mondiale din anii 1929–1933, perioada pregătirii războiului împotriva Uniunii Sovietice. In ultima parte a lucrării se face o scurtă privire asupra finanţelor de stat ale Romîniei în anii celui de al doilea război mondial, 1940–1944, şi o prezentare a finanţelor locale ale Romîniei între cele două războaie mondiale.

Autorul a acordat o atenţie deosebită problemelor privind datoria publică, evaziunea fiscală, tendinţa de dezvoltare continuă a impozitelor indirecte. V. I. Lenin a caracterizat impozitele indirecte ca fiind cele mai nedrepte. „Impunerea indirectă căzînd pe obiectele de consum ale maselor, constituie o nedreptate dintre cele mai mari. Tot greul lor cade pe umerii săracilor, creînd un privilegiu pentru cei bogaţi. Cu cît omul este mai sărac, cu atît partea din venitul său pe care o dă statului sub formă de impozite indirecte este mai mare Masa celor neavuţi şi săraci reprezintă 9/10 din întreaga populaţie, consumă 9/10 din totalul produselor impuse şi plăteşte 9/10 din întreaga sumă a impozitelor indirecte", (V. I. Lenin, *Opere*, E.P.L.P., 1953, vol. **5**, p. 323).

Idea de bază care rezultă în urma studierii întregii lucrări, este aceea că, analiza finanțelor Rominiei burghezo-moșierești sub cele mai diferite aspecte permite scoaterea la iveală și confirmarea exixtenței unei serii de particularități ale capitalismului contemporan specifice țării noastre.

Sistemul finanțelor publice se caracterizia în acea perioadă, așa cum reiese din lucrarea de care ne ocupăm, printr-o organizare fiscală complexă și centralist-birocratică bazată pe conrupție, pusă în slujba exploatării maselor largi populare.

Așa cum arată autorul „Economia și finanțele țării au fost subordonate intereselor clasei exploatatoare și intereselor capitalului străin, bugetul și celelalte instituții financiare ale statului constituind simple instrumente de adîncire a exploatării maselor muncitoare, de mărire a profitului capitalului indigen și a celui internațional" (p. 13).

Lucrarea a reușit să releve legăturile fînanțelor publice cu celelalte fenomene economice, pe care le-a condiționat sau care l-au condiționat. S-a subliniat în mod judicios rolul pe care l-au jucat finanțele publice în perioada dintre cele două războaie mondiale. Lucrarea se bazează pe o documentație bogată, ceea ce denotă o cercetare atentă și competentă. Cu toată valoarea ei lucrarea are și unele neajunsuri. Existența și gradul fiscalității credem că trebuiau analizate pe categorii de contribuabili în raport de capacitatea lor contributivă. In felul acesta devenea și mai concludent pentru cititor faptul că impozitele grevau tocmai pe cei cu venituri mai puține. Trebuia să se fi arătat mai pe larg izvoarele și căile principale ale evaziunii fiscale și să se încerce o evaluare a acesteia .Deși aproximative, aceste date ar fi permis să se arate reala apăsare fiscală suportată de anumite categorii de contribuabili. Autorul trebuia să folosească mai din plin documentele de Partid ale vremii.

Totuși lucrarea reprezintă o contribuție însemnată la studierea trecutului economiei și finanțelor țării noastre.

Lucrarea *Contribuții la istoria finanțelor publice ale Romîniei* (1914–1944) se adresează nu numai specialiștilor ci tuturor acelor care se interesează de istoria economiei noastre naționale, este o lucrare utilă și credem că va fi citită cu atenția pe care o merită.

*

Les réf. donnent ci-dessus quelques détails concernant le volume récent consacré par M. Maïevschi à l'étude de l'histoire des finances publiques de la Roumanie pendant la période 1914–1944.

D. Rusu, N. Davideanu